COLECÇÃO STVDIVM
TEMAS FILOSÓFICOS, JURÍDICOS E SOCIAIS

A. N. WHITEHEAD

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA

TRADUZIDO DO INGLÊS PELO

Prof. MÁRIO SILVA

DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ARMÊNIO AMADO — EDITOR — COIMBRA — 1948

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA

COLECÇÃO STVDIVM
TEMAS FILOSÓFICOS, JURÍDICOS E SOCIAIS

A. N. WHITEHEAD

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA

TRADUÇÃO DO INGLÊS POR

Doutor MÁRIO SILVA
PROFESSOR DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ARMÉNIO AMADO — EDITOR — COIMBRA — 1948

Imprensa Portuguesa / Rua Formosa, 108-116 / Porto

CAPÍTULO I

Natureza abstracta da matemática

No seu início, o estudo da matemática presta-se a provocar uma decepção. As suas importantes aplicações, o interesse teorético das suas ideias, bem como o rigor lógico dos seus métodos, dão certamente a impressão de ser possível obter, com o seu auxílio, uma rápida introdução ao conhecimento de matérias do mais alto interesse. Dizem-nos que, com a sua ajuda, se pesam as estrelas e se contam os biliões de moléculas numa gota de água. Contudo, tal como o espírito do pai de HAMLET, esta ciência escapa-se furtivamente ao esforço mental que tenta agarrá-la — «*Está aqui*», «*está acolá*», «*Foi-se*» — e o que nós realmente vemos não sugere a mesma desculpa de falsa aparência que podemos dar no caso do espírito, nobre de mais para ser apreendido pelos nossos métodos grosseiros. Aquela «*atitude de violência*» que o personagem da representação do HAMLET diz não ser razoável tomar, poderá ser desculpável relativamente aos resultados triviais que enchem as páginas de muitos tratados elementares de matemática.

A razão do fracasso da matemática em corresponder à sua reputação, está em que as ideias fundamentais desta ciência não são expostas aos estudiosos desembaraçadas dos processos técnicos inventados para facilitar a sua exacta formulação em casos particulares. Nestas condições, o infortunado aprendiz tem que lutar, na sua aprendizagem, com uma massa enorme de pormenores, sem ter a orientá-lo qualquer conceito de ordem geral. Sem dúvida, a facilidade técnica é uma primeira condição para se exercer uma actividade mental eficiente: como poderíamos apreciar o ritmo de um MILTON, ou a paixão de um SHELLEY, se nos fosse necessário soletrar as palavras ou se tivéssemos hesitação quanto à forma das próprias letras? Neste sentido pode dizer-se que, em ciência, não há estradas reais. Mas é igualmente um erro prestar exclusiva atenção aos processos técnicos, sem consideração pelas ideias gerais. Fazer tal é abrir o caminho ao puro pedantismo.

O nosso objectivo, nos capítulos seguintes deste livro, não é ensinar a Matemática, mas apenas mostrar aos estudiosos, desde o início da sua aprendizagem, o que é e de que trata esta ciência, e porque é que ela é, necessàriamente, utilizada na fundamentação dos juízos exactos quando aplicada no estudo dos fenómenos naturais. Qualquer alusão que venha a fazer-se a deduções pormenorizadas deverá ser tomada como mero exemplo; tentaremos sempre tornar compreensíveis os argumentos de ordem geral, mesmo que, aqui e acolá, tenha que ser usado qualquer processo técnico ou símbolo que o leitor não conheça bem.

O primeiro contacto que muita gente tem com a matemática faz-se através da aritmética. O facto de que dois e dois são quatro, é tomado vulgarmente como um tipo simples de proposição matemática que toda a gente conhece. A aritmética é pois um magnífico assunto para nos auxiliar a descobrir as características mais óbvias desta ciência. Comece-se por notar que a aritmética é aplicada a todas as coisas, a gostos e a sons, a maçãs e a anjos, a ideias do cérebro ou aos ossos do corpo. A natureza das coisas é perfeitamente indiferente; seja ela qual for, é sempre exacto que dois e dois são quatro. Assim, nós afirmamos que a característica dominante da matemática é que ela trata de propriedades e noções que são aplicáveis a coisas, precisamente porque são coisas, independentemente de quaiquer sentimentos particulares, emoções ou sensações com elas relacionadas. É por isto que se diz que a matemática é uma ciência abstracta.

A conclusão a que chegámos merece atenção. É natural pensar que uma ciência abstracta não poderá ser de muita importância nos negócios correntes da vida, uma vez que ela não considera coisas de interesse real. Deve recordar-se que SWIFT, na sua descrição da viagem de GULLIVER a Laputa tem duas opiniões a este respeito. Descreve os matemáticos deste país como sonhadores estúpidos e inúteis cuja atenção tinha de ser despertada por palmadas. Assim o alfaiate matemático mede a sua altura por meio dum quadrante deduzindo as outras dimensões por meio duma régua e dum compasso, o que o leva a fazer fatos desajeitados. Por outro lado, os matemáticos de Laputa, com a sua maravilhosa invenção da ilha magnética flutuante no ar, governam o país e mantêm a sua ascendência sobre os súbditos. SWIFT, na verdade, viveu num tempo pouco próprio para troçar dos matemáticos seus contemporâneos. Os *Principia* de NEWTON acabavam, então, de ser escritos: eles são como se sabe uma das maiores forças que transformaram o mundo moderno. SWIFT poderia igualmente ter feito troça de um verdadeiro terramoto.

Mas uma simples lista das realizações da matemática é um modo pouco satisfatório para chegar a ter uma ideia da sua importância. Vale a pena dispender um pequeno esforço em procurar saber a razão fundamental que justifica o emprego da matemática, justamente porque é abstracta, como um dos tópicos mais importantes do pensamento. Tentemos esclarecer porque é que as explicações da ordem de sucessão dos acontecimentos físicos tendem a ser de natureza matemática.

Vejamos como os diferentes acontecimentos estão relacionados uns com os outros. Quando nós vemos um relâmpago, esperamos ouvir o trovão; quando ouvimos o vento vemos as ondas no mar; no outono vemos as folhas cair. Por toda a parte reina a ordem, de modo que quando alguns factos são observados podemos prever que outros serão produzidos. O progresso da ciência consiste na observação destas interconexões, e em mostrar que os acontecimentos deste mundo, em constante transformação, são apenas exemplos de algumas relações ou conexões gerais chamadas leis. Ver o que é geral naquilo que é particular, e o que é permanente naquilo que é transitório, é o objectivo do pensamento científico. Para a ciência, a queda de uma maçã, o movimento de um planeta em volta do sol, e o arrastamento da atmosfera pela terra, são considerados exemplos de uma mesma lei que é a lei da gravitação universal. Esta possibilidade de separar as mais complexas circunstâncias evanescentes em vários exemplos de leis permanentes, é a ideia directiva do pensamento moderno.

Vejamos agora que espécie de leis são precisas para realizar completamente este ideal científico. O conhecimento que temos dos factos particulares do mundo, que se passam à nossa volta, é obtido através das nossas sensações. Nós vemos, ouvimos, cheiramos, saboreamos, sentimos quente e frio, empurramos, esfregamos, doemo-nos e queixamo-nos. Estas são justamente as nossas próprias sensações pessoais: a minha dor de dentes não pode ser a vossa dor de dentes, e a minha vista não pode ser a vossa vista. Mas nós atribuímos a origem destas sensações a relações entre as coisas que formam o mundo exterior. Assim o dentista não extrai a dor de dentes, mas sim o dente. E não apenas isto mas também nos esforçamos por imaginar o mundo como uma colecção ligada de coisas que servem de base às percepções de toda a gente. Não há um mundo de coisas para as minhas sensações e um outro para as vossas, mas um mundo no qual ambos existimos. Ouvimos e tocamos o mesmo mundo que vemos. É fácil portanto compreender que devemos descrever as conexões entre as coisas exteriores de um modo não dependente de qualquer sensação particular, muito menos das sensações de qualquer pessoa particular. As leis que são verificadas no decurso dos acontecimentos no mundo das coisas exteriores devem ser descritas, sendo possível, de uma maneira neutra e universal, a mesma para os cegos como para os surdos, e a mesma para seres com faculdades para além das normais como para seres humanos normais.

Mas quando pomos de lado as nossas sensações imediatas, a parte mais útil — pela sua clareza, precisão e universalidade — do que é deixado, compõe-se das nossas ideias gerais sobre as propriedades abstractas formais das coisas; são de facto as ideias matemáticas abstractas que mencionámos acima. Daqui resulta que, pouco a pouco sem indicar o completo significado do processo, a espécie humana tem sido conduzida a procurar uma descrição matemática, das propriedades do universo, justamente porque, só desta maneira, pode formar-se uma ideia geral da sucessão dos acontecimentos, livre de qualquer referência a pessoas particulares ou a tipos particulares de sensação. Por exemplo, pode-se perguntar num jantar: «que é aquilo que justifica a minha sensação da vista, a vossa do tacto e a doutro do paladar e do cheiro»? A resposta pode ser «uma maçã». Mas na sua análise final a ciência procura descrever uma maçã em termos de posições e movimentos de moléculas, isto é, uma descrição independente da minha pessoa, da vossa ou da do outro, e igualmente independente do tacto, da vista, do paladar e do cheiro. Assim as ideias matemáticas, em virtude de serem abstractas, dão-nos aquilo que precisamos para uma descrição científica do decurso dos acontecimentos.

Este ponto tem sido vulgarmente mal compreendido ou tem sido apreciado duma maneira bastante limitada. Pitágoras vislumbrou-o quando proclamou que os números eram a origem de todas as coisas. Nos tempos modernos a crença de que a explicação última de todas as coisas devia encontrar-se na mecânica Newtoniana constituiu um esboço desta verdade: a ciência quando se desenvolve e tende a aperfeiçoar-se, torna-se matemática nas suas ideias e conceitos.

CAPITULO II

Variáveis

A matemática, como ciência, nasceu no dia em que alguém, provàvelmente um grego, pela primeira vez demonstrou proposições acerca de «*qualquer*» coisa ou sobre «*alguma*» coisa, sem referência a coisas particulares determinadas. Estas proposições foram primeiramente enunciadas pelos gregos, no domínio da Geometria, e, de acordo com isto, pode dizer-se que a Geometria foi a grande ciência matemática grega. Depois da criação da Geometria, decorreram muitos séculos antes que a Álgebra pudesse desenvolver-se, isto a despeito de algumas tímidas antecipações feitas pelos últimos matemáticos gregos.

As ideias de «*qualquer*» e de «*algum*» são introduzidas na Álgebra pelo uso de letras, em vez dos números da aritmética. Assim, em vez de dizer que $2 + 3 = 3 + 2$, afirma-se na Álgebra que, sendo de um modo geral, x e y dois números «*quaisquer*», se tem sempre $x + y = y + x$. Da mesma maneira, em vez de dizer que $3 > 2$, podemos generalizar, e afirmar que se x for um número «*qualquer*», existirá «*algum*» número (ou números) y tais que $y > x$. De passagem, notemos que esta última suposição — porque em última análise não é senão uma suposição — é de vital importância, tanto em filosofia como na matemática, porque é através dela que se introduz a noção de infinito. Deve, talvez, pensar-se que o que levou os matemáticos a adoptar por conveniência técnica, o uso de letras na representação de «*qualquer*» número ou de «*alguns*» números, foi a introdução, na notação árabe, dos algarismos que, uma vez adoptados, substituíram completamente as letras na escrita dos números. Os romanos escreviam o ano em que redigimos este livro MDCCCCX, enquanto que nós hoje escrevemos 1910, deixando assim as letras para o outro fim. Mas isto é mera especulação. Depois da criação da Álgebra foi inventado o cálculo diferencial por NEWTON e LEIBNIZ, seguindo-se uma longa pausa no progresso da filosofia da matemática pelo que diz respeito a estas noções, devendo afirmar-se que, apenas nos últimos anos, foi novamente reconhecido que as ideias de «*qualquer*» e «*algum*» são de importância fundamental em matemática; daqui resultou terem sido abertos, ùltimamente, novos domínios no campo da investigação matemática.

Vamos dar alguns exemplos simples, com o fim de fazer compreender exactamente como ocorrem estas ideias fundamentais.

(1) Para «*qualquer*» número x, é $x + 2 = 2 + x$;
(2) Para «*algum*» número x é $x + 2 = 3$;
(3) Para «*algum*» número x, é $x + 2 > 3$.

Devemos notar, em primeiro lugar, as possibilidades contidas no significado de «*algum*» aqui expressas. Visto que $x + 2 = 2 + x$ para «*qualquer*» número x, isto mesmo é verdadeiro para «*algum*» número x. Assim, tal como aqui se emprega, «*qualquer*» implica «*algum*» e «*algum*» não exclui «*qualquer*». Por outro lado, no segundo exemplo, há de facto apenas um número x que verifica $x + 2 = 3$, e este é o número 1. Logo, neste caso, «*algum*» pode apenas ser um certo número. Mas, no terceiro exemplo, qualquer número x que seja maior do que 1, verifica $x + 2 > 3$. Há então um número infinito de números que correspondem ao que acima se escreve: para «*algum*» número x, é $x + 2 > 3$. Assim, «*algum*» poderá situar-se entre «*qualquer*» e «*sòmente um*», incluindo qualquer destes casos limites.

É natural substituir as proposições (2) e (3) pelas perguntas:

(2′) para que número x é $x + 2 = 3$?
(3′) para que números x é $x + 2 > 3$?

Consideremos (2′); $x + 2 = 3$ é uma equação, e é fácil ver que a sua solução é $x = 3 — 2 = 1$. Quando se formula a pergunta relativa à equação $x + 2 = 3$, x é chamada a incógnita. O objectivo da resolução da equação é a determinação da incógnita. As equações têm grande importância na matemática; pelo que diz respeito a (2′), talvez haja quem tenha a impressão de que lhe corresponde um significado mais completo e fundamental do que o que está contido na proposição original (2). Isso é, contudo, inteiramente falso. O conceito de «*variável*» não determinada que está contido nas expressões de «*algum*» ou «*alguma*» e de «*qualquer*», é o que é realmente importante em matemática; por outro lado, o conceito de «*incógnita*» de uma equação que deve ser resolvida o mais expeditamente possível, embora importante, deve considerar-se como inferior ao primeiro. Uma das causas da aparente trivialidade de muitos livros de álgebra elementar é a preocupação que os seus autores manifestam pela resolução das equações. Estas mesmas observações devem aplicar-se à resolução da desigualdade (3′) quando comparada com a proposição original (3). Atenda-se agora a que, na grande maioria das mais interessantes fórmulas, especialmente quando está implícita a ideia de «*algum*», intervém mais do que uma variável. Por exemplo, a consideração dos pares de números x e y (inteiros ou fraccionários) que satisfazem a $x + y = 1$, envolve a ideia de duas variáveis x e y correlacionadas. Quando, assim, existem duas variáveis, os mesmos dois referidos tipos de proposições se apresentam. Por exemplo:

(1) para «*qualquer*» par de números x e y, é $x + y = y + x$;

(2) para «*alguns*» pares de números x e y, é $x + y = 1$.

O segundo tipo de proposição sugere a consideração dos conjuntos de pares de números que estão ligados por determinada relação fixa — no caso citado, pela relação $x + y = 1$. Uma aplicação das fórmulas do primeiro tipo, válidas para «*qualquer*» par de números, é a que consiste em fazer substituir qualquer fórmula do segundo tipo por número indefinido de formas equivalentes. Por exemplo, a relação $x + y = 1$ é equivalente às relações:

$$y + x = 1, \ (x - y) + 2y = 1, \ 6x + 6y = 6, \text{ etc..}$$

Por esta forma, um matemático hábil é sempre capaz de utilizar, relativamente a certa expressão que tenha de considerar, a forma equivalente mais conveniente ao fim que tem em vista.

Quando um par de termos satisfaz a uma determinada relação, isto, em geral, não quer dizer que, fixado um dos termos, o outro esteja igualmente fixado. Por exemplo, quando x e y satisfazem à relação $y^2 = x$, atribuindo a x o valor 4, y poderá ser igual a $+ 2$ ou a $- 2$, quer dizer, a um valor positivo de x correspondem dois valores para y. Do mesmo modo, na relação $x + y > 1$, dado um valor a uma das variáveis, a x ou a y, poderão atribuir-se infinitos valores à outra.

Há ainda um outro ponto importante a notar. Se nos limitarmos aos números positivos, inteiros ou fraccionários, verificamos que, na relação $x + y = 1$, atribuindo a x ou a y um valor maior do que 1, não haverá, para a outra variável, valor que convenha à relação. Assim, o campo que a relação oferece aos valores de x é limitado aos números inferiores a 1, e o mesmo se dirá do campo dos valores de y. Por outro lado, considerando apenas números inteiros, positivos ou negativos, vejamos que pares de números satisfazem à relação $y^2 = x$. Verifica-se que qualquer que seja o valor atribuído a y, virá para x um certo número inteiro. Deste modo, o campo dos valores de y não tem qualquer limitação entre os números inteiros, positivos ou negativos. Quanto ao campo de valores de x, esse é limitado de duas maneiras. Em primeiro lugar, x deve ser positivo e, em segundo lugar, visto que supusemos y inteiro, x deve ser um quadrado perfeito. Por este modo, o campo de x reduz-se ao conjunto dos inteiros $1,^2$ 2^2, 3^2, 4^2, etc., isto é, 1, 4, 9, 16, etc..

O estudo das propriedades gerais duma relação entre pares de números é facilitado pelo uso de um diagrama construído da seguinte maneira:

Tracem-se duas rectas OX e OY, perpendiculares; seja um número qualquer x representado por x unidades (em qualquer escala) de comprimento segundo OX e y, por y unidades de comprimento segundo OY. Deste modo, se OM é igual a x unidades, e ON é igual a y unidades, completando o paralelogramo $OMPN$, determinamos um ponto P que corresponde ao par de números x e y. A cada ponto corresponde um par de números, x e y. A cada ponto corresponde um par de números, e cada par de números corresponde um ponto. Estes números são chamadas as coordenadas do ponto. Por este modo os pontos cujas coordenadas satisfazem a uma determinada relação, podem ser indicados, quer traçando uma linha, se todos eles estiverem sobre esta linha, quer sombreando uma área se todos eles são pontos desta área. Se a relação é representada por uma equação como $x + y = 1$, ou $y^2 = x$, então os pontos ficam numa mesma linha, que é uma recta, no primeiro caso, e uma curva, no segundo. Por exemplo, considerando apenas números positivos, os pontos cujas coordenadas satisfazem a $x + y = 1$, estão todos sobre a linha recta AB da fig. 1, sendo $OA = 1$ e $OB = 1$.

Assim, o segmento de recta AB dá uma representação gráfica das propriedades da relação sujeita à restrição que indicámos — números inteiros.

Um outro exemplo de uma relação entre duas variáveis é-nos dado pelas variações da pressão e do volume de uma dada massa de gás, como o ar, a temperatura constante. Seja v o número de pés cúbicos de um certo volume de gás e p a pressão em libras-peso por polegada quadrada. A lei, conhecida como lei de BOYLE,

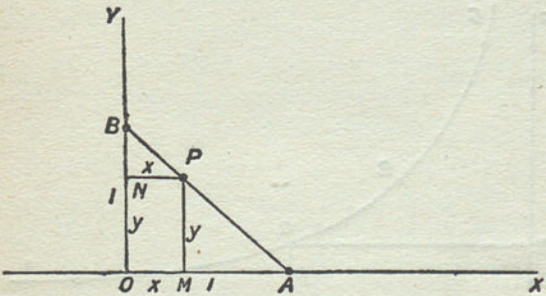

Fig. 1

que exprime a relação entre p e v, quando são variáveis, afirma que o produto pv é constante, a temperatura constante. Suponhamos, por exemplo, que a quantidade de gás e as outras circunstâncias são tais que podemos escrever $pv = 1$ (o número exacto do segundo membro não tem uma importância essencial).

A fig. 2 indica as duas linhas OV e OP, perpendiculares; OM representa v unidades de volume, e ON, p unidades de pressão. Traçando o paralelogramo $OMQN$, obtém-se o ponto Q que representa o estado do gás quando o volume é de v pés cúbicos e a pressão de p libras-peso por polegada quadrada. Se as circunstâncias da massa de gás considerada são tais que $pv = 1$, então todos os pontos Q que correspondem a um estado possível da mesma massa de gás, devem estar sobre uma linha curva ABC que contém todos os pontos para os quais p e v são positivos e que satisfazem a $pv = 1$. Assim esta linha dá uma representação gráfica da relação que existe entre o volume e a pressão. Quando a pressão é muito alta, o ponto correspon-

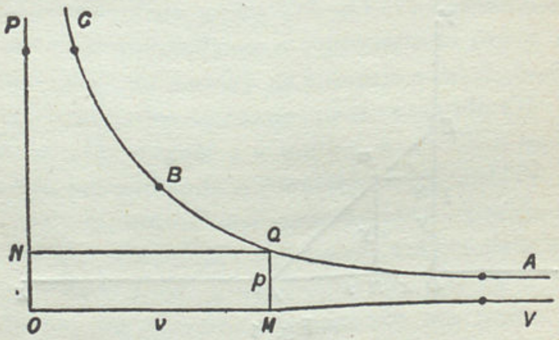

Fig. 2

dente Q deve estar perto de C, ou mesmo para além de C, na parte não traçada da curva; então o volume será pequeno. Quando o volume é, pelo contrário, muito grande, o ponto Q está perto de A, ou para além de A; e então a pressão será pequena. Notar que um engenheiro ou um físico pode desejar saber a pressão particular que corresponde a um determinado volume. Temos então a determinação da incógnita p, sendo v um número conhecido. Mas isto é apenas um caso particular. É na consideração geral das propriedades do gás e na do seu comportamento, que o físico deve ter na sua mente a forma geral da curva ABC e as suas propriedades. Por outras palavras, o conceito realmente fundamental é o de par de *variáveis* que satisfazem à relação $pv = 1$. Este exemplo mostra como a noção de variáveis é fundamental, tanto nas aplicações como na teoria da matemática.

CAPITULO III

Métodos de aplicação

Nas aplicações da matemática é extremamente útil, pelo seu valor, o processo segundo o qual se utiliza a noção de variáveis que satisfazem a determinada relação, e é por isso conveniente dedicarmos alguma atenção a este assunto.

Comecemos por um exemplo simples:

Admitamos que, na edificação de prédios, o custo de construção seja de 1 xelim por pé cúbico; por outro lado, sabe-se que 1 libra esterlina é igual a 20 xelins.

Tomando como lei fixa estas relações, diremos que na construção de uma casa, quaisquer que sejam as complexas circunstâncias que possam verificar-se durante a construção e sejam quais forem as sensações e emoções do proprietário, do arquitecto, do construtor, dos operários ou dos próprios espectadores, é constante a relação entre o volume e o custo da casa; mais precisamente, designando por x o número de pés cúbicos e por y o custo, em libras, podemos escrever:

$$20y = x$$

Tal relação entre x e y é tomada como verdadeira na construção de uma casa, seja qual for o proprietário. É claro que não pode supor-se que, quer o volume da casa, quer o seu custo, são directamente apreendidos ou revelados por uma sensação particular ou faculdade especial de um homem privilegiado. Admitimos que são estabelecidos de uma maneira abstracta, geral, independentemente do estado de espírito do proprietário que paga a conta.

Insistamos um pouco mais sobre o significado do que acabamos de dizer. A construção de uma casa é um conjunto complicado de circunstâncias. Poderá ser possível, na marcha geral dos acontecimentos, reconhecer que um dado conjunto de ocorrências constitui um caso particular na referida construção, sem que isto possa significar uma aplicação ou uma verificação da lei admitida. Em resumo, podemos conhecer uma casa que vimos construir e saber, portanto, que determinados acontecimentos se passaram durante a construção; isso poderá permitir que sejam determináveis os elementos necessários para avaliar o volume e o custo da casa. Quando assim acontece e são efectivamente determinados esses elementos, deverá ser satisfeita a fórmula geral

$$20y = x$$

caso a lei admitida seja verdadeira.

Mas que é uma lei verdadeira? As pessoas que conhecem bem o negócio de construções sabem que admitimos aqui um preço de custo relativamente alto. Aplica-se a casas excessivamente caras. A propósito, devemos esclarecer um ponto. Quando se faz um cálculo baseado na fórmula $20y = x$, é indiferente saber se a lei é verdadeira ou falsa. De facto, o significado atribuído a x ou a y, quer x represente pés cúbicos e y, libras esterlinas, quer não, isso não tem a menor importância. No cálculo matemático interessam apenas as propriedades da correlação estabelecida entre os números variáveis x e y. Os resultados obtidos serão aplicáveis representando, por exemplo, y um certo número de pescadores e x o número de peixes que eles pescam. A lei admitida significa que, em média, cada pescador apanha 20 peixes. A certeza matemática da determinação efectuada apenas diz respeito aos resultados considerados como exprimindo propriedades da relação $20y = x$. Relativamente ao exemplo das casas, nenhuma certeza matemática poderá ser afirmada quanto ao custo de uma nova construção a fazer. Se a lei não for completamente verdadeira, não será inteiramente exacto o resultado que ela fornece. Poderá mesmo ser desgraçadamente falso.

Tudo o que acabamos de dizer poderá parecer por demais evidente. Mas, na verdade, em casos mais complicados, é um erro muito generalizado admitir, que, por virtude de terem executados cálculos matemáticos extensos e de grande exactidão, se pode ter confiança absoluta na aplicação dos resultados desses cálculos aos factos naturais. Qualquer cálculo matemático, feito a propósito de factos naturais, baseia-se sempre numa lei da natureza que é admitida, como nós aqui admitimos a lei do custo da construção de casas. Mas, por mais exactamente que tenha sido determinado que certo acontecimento deverá produzir-se, devemos sempre perguntar — É verdadeira a lei admitida?

É certo que uma lei fornece sempre um resultado preciso, contudo uma lei nunca é completamente verdadeira. Quer dizer, por maior precisão que haja no cálculo de um resultado obtido através de uma certa lei, isso não significa que este resultado possa ser inteiramente confirmado.

As leis, pois, nunca são inteiramente verdadeiras; contudo poderão ser consideradas, quando estabelecidas, como suficientemente boas; e com isto devemos contentar-nos, visto que é forçoso reconhecer que as nossas faculdades de observação são limitadas e estão por isso longe de ter uma precisão ideal.

Vejamos o caso da lei da gravitação universal descoberta por NEWTON. Esta lei afirma que dois corpos se atraem com uma força proporcional ao produto das suas massas, e na razão inversa do quadrado da distância. Se m e M são as massas dos dois corpos, avaliadas, por exemplo, em libras, e d a distância, em milhas, que os separa, a força de atracção é proporcional a $\frac{mM}{d^2}$ esta força pode fazer-se igual a $K\frac{mM}{d^2}$, sendo K um número que depende da grandeza absoluta desta atracção e também das unidades escolhidas para medir a força. É fácil verificar que K é muito pequeno, avaliando, por exemplo, o peso de uma massa igual a 1 libra. Fazendo $m = M = 1$, vem $\frac{KmM}{d^2}$ igual à força com que se atraem duas massas iguais a 1 libra, à distância de 1 milha; esta força é extremamente pequena.

Se designarmos a força de atracção por F, temos:

$$F = K \frac{m\,M}{d^2}$$

isto é, uma determinada relação entre as variáveis F, m, M e d.

É bem conhecida a história da descoberta desta lei. Conta-se que NEWTON a descobriu ao ver cair uma maçã. Pode ser que a formulação da lei lhe tivesse ocorrido, por acaso, num pomar, mas também pode ter sido em qualquer outra parte. O que é certo é que ela não teria sido descoberta se não tivessem sido preparadas as condições para a sua exacta formulação, durante muitos séculos de trabalho feito por muitos outros homens. Em primeiro lugar, foi necessário criar o estado de espírito matemático e os processos matemáticos a que nos referimos nos capítulos anteriores. De outra maneira NEWTON nunca teria podido pensar numa fórmula que representa a força entre duas massas «quaisquer», situadas a uma distância «qualquer», uma da outra. Além disso, qual é o significado dos termos empregados, *força, massa, distância?* Tomemos o mais simples destes termos, a distância. Parece-nos ser extremamente claro considerar todos os corpos materiais como constituindo um todo geométrico finito, concebendo-se fàcilmente que as distâncias entre eles possam ser medidas, tomando uma certa unidade de comprimento, como a milha ou a jarda. Mas isto, em que quase se resume o primeiro aspecto que nos pode ser apresentado de uma estrutura material, é o resultado gradualmente obtido do estudo da

Geometria e da teoria da medida. E nem sempre é assim; por vezes é mais conveniente adoptar outros modos de proceder. Por exemplo, num país montanhoso poderá ser mais claro avaliar as distâncias em horas. Passando do termo distância, aos outros termos, força e massa, reconhecemos que são mais obscuros. A exacta compreensão das ideias que NEWTON quis fazer traduzir por aquelas palavras, desenvolveu-se com muita lentidão, e, na verdade, foi o próprio NEWTON o primeiro a dominar, com mestria, os verdadeiros princípios gerais da Dinâmica.

Durante toda a Idade-Média, sob a influência de ARISTÓTELES, a ciência seguiu caminho errado. NEWTON teve a vantagem de nascer depois de uma série de grandes homens, como GALILEU, na Itália, que durante os dois séculos anteriores ao seu nascimento reconstruíram a ciência, inventando os métodos exactos de raciocínio. NEWTON completou este trabalho. Tendo adquirido ideias claras e precisas sobre as forças, as massas e as distâncias, pôde compreender como elas se ligavam quer na queda de uma maçã, quer no movimento dos planetas, descobrindo a lei da gravitação que rege todos esses movimentos.

O ponto vital na aplicação das fórmulas matemáticas é ter ideias claras e uma correcta compreensão da sua ligação com os fenómenos naturais. Tanto como nós, os nossos remotos antepassados, impressionados com a importância dos fenómenos naturais, tiveram sem dúvida o desejo de empregar medidas enérgicas para regular a sequência dos acontecimentos físicos. Embora sob a influência de ideias erradas, executavam cerimónias religiosas complicadas para ajudar o nascimento da lua nova e praticavam vários sacrifícios para salvar o sol durante um eclipse. Não temos razões para supor que eram mais estúpidos do que nós. Simplesmente, na sua época não tinha ainda havido tempo suficiente para a lenta acumulação de ideias claras e apropriadas que, como vimos, são necessárias para a compreensão dos fenómenos naturais.

A maneira como as ciências físicas se desenvolveram e adquiriram uma forma susceptível da aplicação dos métodos matemáticos, é ilustrada pela história do gradual desenvolvimento da ciência do electromagnetismo.

Atentemos nas trovoadas; são fenómenos naturais que, pela sua grande extensão, em todos os tempos, provocaram imenso terror em homens e animais. Não admira, pois, que tenham sido objecto das mais extravagantes e fantásticas hipóteses e quase se pode dizer que as descobertas modernas sobre a electricidade não são mais espantosas do que certas explicações dos povos selvagens. Começaram os gregos por descobrir que o âmbar (electron, em grego), friccionado, adquire a propriedade de atrair corpos leves e secos. Em 1600, o Dr. GILBERT de COLCHESTER, publicou o primeiro trabalho sobre esta propriedade, mas sem ter seguido qualquer método científico. Limitou-se a indicar outras substâncias que têm a mesma propriedade e quando muito pode dizer-se que foi até ao ponto de referir vagamente uma possível ligação dos fenómenos eléctricos com os magnéticos. Em fins do século XVII e durante todo o século XVIII, os conhecimentos multiplicaram-se e desenvolveram-se. Foram construídas as primeiras máquinas eléctricas, que produzem descargas eléctricas e foi inventada a garrafa de LEYDE que as intensifica. Durante todo este tempo manifestou-se uma certa sistematização dos conhecimentos adquiridos, mas ainda sem qualquer ligação com noções matemáticas aplicáveis. FRANKLIN, no ano de 1752, descobriu, finalmente, por meio de um papagaio que fez subir até às nuvens, que as trovoadas são de origem eléctrica.

Entretanto, e a partir dos mais remotos tempos (2634 a. C.), os chineses empregaram a agulha magnética sem qualquer conhecimento teórico. Três mil anos mais tarde começou a ser usada na Europa. Foi aqui que a ciência do electromagnetismo acabou por se desenvolver, não por qualquer superior tendência, de ordem prática, dos europeus, mas apenas porque no Ocidente os fenómenos eléctricos e magnéticos começaram a ser estudados por homens interessados por questões abstractas, de ordem teórica.

A descoberta da corrente eléctrica é devida a dois italianos GALVANI (em 1780) e VOLTA (em 1792). Esta grande descoberta abriu um novo campo de investigações. O mundo científico ficou então com três grupos de fenómenos diferentes, mas relacionados, à sua disposição: os efeitos da electricidade «*estática*», produzidos pelas máquinas eléctricas, os fenómenos magnéticos e os efeitos produzidos pelas correntes eléctricas. Dos fins do século XVIII até nossos dias, entrelaçaram-se estas três linhas de investigações, constituindo-se, finalmente, a ciência do electromagnetismo que transformou, em nossos dias, a vida do homem. Foi a partir da mesma data que começou a aplicação de ideias e noções matemáticas.

De 1780 a 1789 COULOMB, físico francês, descobre as leis das acções magnéticas e das acções eléctricas, leis curiosamente análogas à da gravitação. Em 1820, o dinamarquês OERSTED descobre que as correntes eléctricas exercem forças sobre as agulhas magnéticas, e quase logo a seguir a lei matemática da força exercida é formulada pelo francês AMPÈRE que, além disso, descobre igualmente que as correntes eléctricas exercem forças umas sobre as outras. «A investigação experimental que conduziu AMPÈRE a estabelecer a lei da acção mecânica entre correntes eléctricas é uma das mais brilhantes na história da ciência. Teoria e experiência, no seu conjunto, parece terem saltado, inteiramente feitas e completas, do cérebro do «NEWTON da Electricidade». São perfeitas na sua forma, inatacáveis na sua exactidão, e exprimem-se numa fórmula a partir da qual é possível deduzir todos os fenómenos e que deve ficar como fórmula fundamental no estudo da electrodinâmica» (1).

As importantes leis da indução entre correntes e entre correntes e magnetes foram descobertas por MICHAEL FARADAY em 1831-32. Perguntaram um dia a FARADAY para que servia a sua descoberta. Respondeu: para que serve uma criança? — para crescer e transformar-se num homem. A criança de FARADAY cresceu e atingiu a sua maioridade; a sua descoberta serve de base às modernas aplicações da electricidade. FARADAY, além disso, foi capaz de reorganizar a concepção teorética desta ciência. As suas

---

(1) Electricidade e Magnetismo, Clerk Maxwell, vol. II, cap. III.

ideias, que não foram logo inteiramente compreendidas, puderam contudo ser desenvolvidas por CLERK MAXWELL, e postas, sob forma matemática, em 1873. Em resultado das suas investigações matemáticas, MAXWELL reconheceu que, sob certas condições, as vibrações eléctricas podem ser propagadas. Logo sugeriu que as vibrações que constituem a luz são de origem eléctrica. Esta sugestão foi depois verificada, de modo que hoje a teoria da luz é um ramo da ciência da electricidade. Foi igualmente seguindo as ideias de MAXWELL que o alemão HERZ, em 1880, produziu vibrações eléctricas directamente por meio de fenómenos eléctricos. As suas experiências, neste domínio, servem de base à telegrafia sem fios.

Nestes últimos anos, têm sido feitas muitas outras descobertas fundamentais, continuando o electromagnetismo a desenvolver-se em importância teórica e em interesse prático. Este rápido resumo do seu progresso mostra como, em virtude de uma introdução gradual de ideias teóricas relevantes, que por um lado são sugeridas pela experiência pelo outro são capazes de sugerir elas próprias novas experiências, se torna possível ligar, numa ciência coerente, um grande número de fenómenos naturais isolados e vulgares, e na qual se verifica que são os resultados das deduções matemáticas abstractas tendo como base algumas leis simples, que fornecem a explicação do complexo emaranhamento dos acontecimentos físicos.

Finalmente, deixando este caso particular das ciências do electromagnetismo e da luz, podemos generalizar o nosso ponto de vista e dirigir a nossa atenção para o desenvolvimento da física matemática considerada como um dos capítulos mais importantes do pensamento científico. Em primeiro lugar, qual é em traços gerais, a história do seu desenvolvimento?

Não começou como uma ciência ou como o resultado da actividade de um determinado grupo de homens. Na Caldeia houve pastores que observaram longamente o céu; na Mesopotâmia e no Egipto, agentes do Governo que mediram a terra; e por toda a parte sacerdotes e filósofos que longamente meditaram sobre a natureza geral das coisas. O vasto conjunto de operações da natureza apareceu nos primeiros tempos como produzido por forças misteriosas, impenetráveis. «O vento sopra onde lhe apraz» [1].

Havia então a maior ignorância e nada se sabia das regras estáveis seguidas na sucessão dos fenómenos. Contudo a regularidade dos acontecimentos era patente, mas nenhuma indicação havia que fizesse suspeitar a sua interconexão; nenhuma ciência podia assim existir. Especulações destacadas, uma ou outra bala certeira no alvo da natureza das coisas, foram, a princípio, o melhor que pôde ser feito.

Entretanto, os continuados trabalhos de agrimensura acabaram por conduzir à geometria e as constantes observações do céu por revelar a exacta regularidade do sistema solar. Alguns dos últimos sábios gregos, como ARQUIMEDES, chegaram a ter noções seguras sobre os fenómenos mais elementares da hidrostática e da óptica. Na verdade, ARQUIMEDES que aliou o seu

---

[1] Citação do Evangelho de S. João — Capítulo 3, versículo 8.º — N. T.

génio de matemático a uma perspicácia notável para a Física, deve enfileirar ao lado de NEWTON que viveu cerca de dois mil anos mais tarde, como um dos fundadores da física matemática. Viveu em Siracusa, grande cidade grega da Sicília. Quando os romanos sitiaram a cidade (em 212 a 210 a. C.), conta-se que ARQUIMEDES conseguiu queimar os navios que faziam o cerco concentrando neles, por meio de espelhos, os raios solares. A história talvez não seja exacta, mas é uma prova da reputação que teve ARQUIMEDES entre os seus contemporâneos pelos seus conhecimentos de óptica. No fim do cerco foi morto. Segundo um relato feito por PLUTARCO, ARQUIMEDES teria sido encontrado por um soldado romano no momento em que estava absorto no estudo de um diagrama geométrico desenhado no chão térreo da sua casa. Não tendo obedecido imediatamente às ordens do seu captor teria sido morto por este. Em abono dos generais romanos conta-se ainda que estes teriam dado ordens aos seus soldados para poupar a vida de ARQUIMEDES. Mas há uma outra história que se conta, e esta muito mais verosímil. Fornece-nos uma prova muito importante do seu génio para a matemática e para a física. Felizmente, é tão simples que a podemos contar aqui com todos os pormenores. Constitui um dos mais fáceis exemplos da aplicação das noções matemáticas à física.

Hierão, rei de Siracusa, enviou uma certa quantidade de ouro a um ourives para lhe fazer uma coroa. Feita a coroa, o rei suspeitou que o ourives tivesse substituído parte do ouro por outro metal mais barato. Enviou por isso a coroa a Arquimedes pedindo-lhe que verificasse se tal tinha sucedido. Hoje em dia uma simples análise química teria resolvido a questão. Mas nesse tempo Arquimedes teve que resolver o assunto por si próprio. Conta-se que a solução lhe surgiu bruscamente quando tomava banho. Correndo pelas ruas, e gritando Eureka! Eureka! (Achei, achei) dirigiu-se imediatamente para o palácio do rei. Se soubéssemos em que dia isto teria acontecido, deveria hoje ser celebrado como o dia em que nasceu a física matemática; esta mesma ciência atingiu a maioridade no dia em que NEWTON viu cair a maçã no seu pomar. Arquimedes fez, na verdade, uma grande descoberta. Descobriu que um corpo mergulhado na água sofre uma impulsão de baixo para cima igual ao peso de água deslocada. Esta lei pode ser provada, teòricamente, a partir dos princípios matemáticos da hidrostática e pode também ser verificada experimentalmente. Se designarmos por W o peso, em libras, da coroa, e w o peso da água deslocada, W-w representa o peso da coroa quando está mergulhada na água; este peso obtém-se fazendo a pesagem com uma balança como mostra a fig. 3. Seja F o peso em libras colocado no prato da balança. Temos:

$$F = W - w$$

ou seja

$$w = W - F$$

Daqui se deduz:

$$\frac{W}{w} = \frac{W}{W - F}.$$

Isto mostra que a relação $\frac{W}{w}$ pode ser calculada a partir das pesagens que dão o peso W e o peso F. Mas $\frac{W}{w}$ é a razão entre o peso da coroa e o peso de um igual volume de água. Esta razão é a mesma para o mesmo metal; é o que se chama o peso específico do metal e depende apenas da natureza intrínseca do metal e não da sua forma ou quantidade.

Logo, para verificar se a coroa era ou não toda

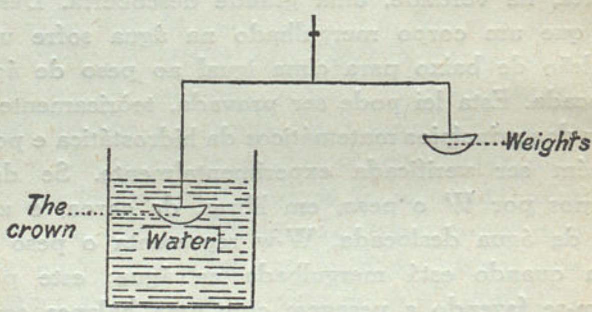

Fig. 3

feita de ouro, Arquimedes não fez mais do que determinar, pelo mesmo processo, o peso específico do ouro utilizando na determinação um bocado de ouro puro.

Contámos isto com desenvolvimento porque, em primeiro lugar, trata-se de um exemplo preciso da aplicação das noções matemáticas à física; em segundo lugar é também um exemplo simples e perfeito do que deve ser o método e o espírito da ciência.

A morte de Arquimedes às mãos de um soldado romano simboliza um processo de transformação do mundo de grande importância: os gregos, homens teóricos, com o seu amor pelas ciências abstractas foram substituídos na chefia do mundo europeu pelos romanos, homens práticos. Lord Beaconsfield, numa das suas novelas, definiu um homem prático como sendo um homem que pratica os erros dos seus antepassados. Os romanos foram uma grande raça mas foram atormentados pela esterilidade que provoca o espírito prático. Não aperfeiçoaram os conhecimentos dos seus antepassados e todos os seus progressos se limitaram a pequenos pormenores técnicos de engenharia. Nunca foram pensadores capazes de obter novos pontos de vista; nunca por isso conseguiram obter novos domínios sobre as forças da natureza. Também nenhum Romano perdeu a vida por ter ficado, algum dia, absorto na contemplação de um diagrama matemático.

CAPITULO IV

Dinâmica

O mundo teve que esperar 1800 anos pelos sucessores dos físicos matemáticos gregos. Nos séculos XVI e XVII da nossa era, homens iminentes italianos, particularmente o artista Leonardo de Vinci (nascido em 1452, morto em 1519) e Galileu (nascido em 1564, morto em 1642) redescobriram o segredo, que Arquimedes conheceu, de relacionar as noções abstractas da matemática com a investigação experimental dos fenómenos naturais. É verdade que os estudiosos da filosofia natural beneficiaram, nesta época, para as suas investigações, do lento progresso da matemática que, entrementes, se havia realizado, bem como da acumulação de conhecimentos astronómicos precisos. Por outro lado, a presunção egoísta da época, a preocupação avara pelas experiências pessoais, levaram os pensadores a verificar directamente os pormenores das suas próprias experiências, por tal forma que lhes foi fácil fazer a descoberta do segredo da relação da teoria matemática com a experiência no raciocínio indutivo. Foi um acto eminentemente característico da época que Galileu, o filósofo, tivesse lançado corpos pesados do alto da torre inclinada de Pisa. Sempre houve homens de pensamento e homens de acção; a física matemática é o produto de uma época que soube combinar, nos mesmos homens, impulsos de pensamento com impulsos de acção.

Este gesto do lançamento de corpos pesados do alto da torre marca pitorescamente um passo essencial dado no caminho do conhecimento, que não é de importância inferior ao que foi dado quando se conseguiram as primeiras ideias correctas na Dinâmica, ciência fundamental nesta matéria. O ponto especial em questão era o de saber se corpos com pesos diferentes caíam da mesma altura no mesmo tempo. Segundo Aristóteles, universalmente respeitado naquela época, os corpos mais pesados caíam mais depressa. Contra isto afirmou Galileu que caíam no mesmo tempo, e provou-o com as suas experiências da torre de Pisa. As aparentes excepções a esta regra verificam-se quando, por qualquer razão, tal como a extrema leveza ou a grande velocidade, se torna importante a resistência do ar. Desprezando, porém, a resistência do ar, a lei é exacta.

O bom êxito das experiências de Galileu não foi o resultado de qualquer feliz suposição. Explica-se pelas suas ideias correctas sobre a inércia e a massa. A primeira lei do movimento — tal como ela foi enunciada por Newton — diz que todos os corpos mantêm o seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha recta, a não ser que sejam obrigados a modificá-lo pela acção de forças aplicadas. O ponto em questão pode ser compreendido tirando da lei a frase: ou de movimento uniforme em linha recta. Obtém-se então o que pode ser designado como a fórmula de oposição de Aristóteles: todos os corpos mantêm o seu estado de repouso a não ser que sejam obrigados a modificá-lo pela acção de forças aplicadas. Nesta expressão incorrecta afirma-se que, não havendo forças, um corpo está em repouso, e portanto se um corpo está em movimento é porque sobre ele actuam forças; cessando a força, cessa o movimento. A lei de Newton aceita um ponto de vista diametralmente oposto. O estado de um corpo sobre o qual não actua uma força é o de movimento uniforme em linha recta, e portanto as forças não são consideradas como a causa, ou, se assim quiserem dizer, não são o acompanhamento invariável deste movimento uniforme rectilíneo. O repouso é apenas um caso particular de tal movimento; neste caso a velocidade é e mantém-se igual a zero. Logo, quando um corpo está em movimento, não deve logo procurar-se a influência externa que o determina; só o fazemos quando há variação de velocidade. Enquanto um corpo se move com a mesma velocidade, na mesma direcção, não há razão para admitir a acção de qualquer força.

A diferença entre os dois pontos de vista aparece nìtidamente na teoria do movimento dos planetas. Copérnico, astrónomo polaco, nascido em 1473 em Thorn na Prússia Ocidental e morto em 1543 mostrou como era extremamente simples considerar os planetas, e portanto também a terra, movendo-se em volta do sol, em órbitas quase circulares; mais tarde, em 1609, Kepler, matemático alemão, mostrou que, na verdade, as órbitas são pràticamente elípticas, isto é, uma espécie de curvas ovais que mais adiante consideraremos com pormenor. Imediatamente foi posta a questão de saber quais as forças que produzem o movimento dos planetas. Segundo o ponto de vista antigo de Aristóteles, que Kepler também adoptou, a simples velocidade exigia a existência de forças. Por isso Kepler admitiu a existência de forças tangenciais como mostra a fig. 4. Pelo contrário, segundo o ponto de vista newtoniano independentemente de qualquer força, os planetas deveriam mover-se com a velocidade que tivessem, em linha

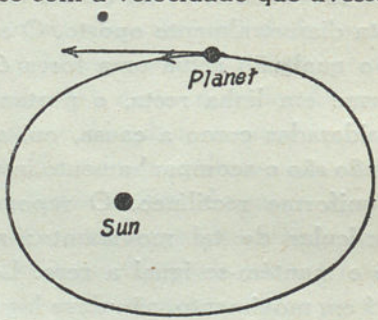

Fig. 4

recta, o que os levaria a afastarem-se do sol. Newton, portanto, teve que determinar a força capaz de curvar a trajectória do movimento, transformando-a numa órbita elíptica em volta do sol. Mostrou que só poderia ser uma força dirigida para o sol como mostra a fig. 5. De facto, a força é a atracção de gravitação do sol que se exerce segundo a lei da razão inversa do quadrado da distância a que nos referimos anteriormente.

A ciência da mecânica nasceu, entre os gregos, por virtude de considerações feitas à volta da vantagem mecânica que oferece o uso da alavanca, e de vários outros problemas relacionados com o peso dos corpos.

Foram assentes as suas bases nos fins do século XVI e durante o século XVII, como anteriormente mostrámos, não só em consequência da explicação teórica da queda dos graves mas sobretudo em virtude do estabelecimento de uma teoria dos movimentos planetários. Posteriormente, a dinâmica manifestou a ambição de se tornar a ciência fundamental de que as outras deveriam depender. Resultou isso do ponto de vista em que se colocou segundo o qual as diversas qualidades

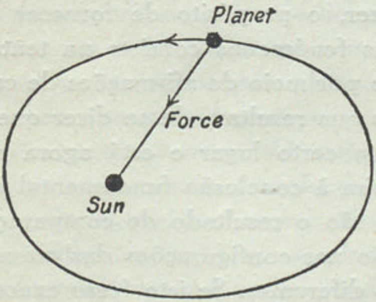

Fig. 5

das coisas que os nossos sentidos revelam correspondem ao modo particular como apreciamos as mudanças de posição de elementos materiais que existem no espaço. Olhemos para a Abadia de Westminster. Vemo-la imóvel com o seu aspecto cinzento escuro e sabemos que está ali há séculos. A teoria dinâmica explica a cor escura que, sob certo aspecto, nos dá uma forte aparência de imobilidade, pelos movimentos rápidos das moléculas que formam a camada exterior, transmitidos a uma substância especial, o éter, e que por este mecanismo chegam até nós, dando-nos a referida sensação.

Se, por outro lado, tocamos com as mãos as pedras e notamos a sua temperatura, sentindo o frio tão característico das coisas inertes, a teoria dinâmica explica que a impressão resulta de uma passagem de calor das nossas mãos para as pedras, e que o calor não é mais do que o estado de agitação das moléculas dos corpos. Finalmente, se dentro da Abadia é o órgão que toca, produzindo sons musicais, a teoria afirma que isso resulta dos movimentos do ar transmitidos ao tímpano dos nossos ouvidos.

Quer dizer, o propósito de fornecer a explicação dinâmica dos fenómenos consiste na tentativa da sua interpretação por meio de afirmações de carácter geral, tais como as que resultam de se dizer que tal substância estava em certo lugar e está agora noutro lugar. Chega-se assim à conclusão fundamental de que todas as sensações são o resultado de comparações relativas à modificação nas configurações das coisas no espaço, em instantes diferentes. Se isto fosse exacto, as leis do movimento, isto é, as leis das mudanças nas configurações das coisas seriam as leis definitivas de toda a Física.

Na aplicação da matemática à investigação experimental, no domínio da filosofia natural a ciência procede sempre por via sistemática enquanto que o raciocínio vulgar procede casualmente. Quando falamos de uma cadeira, significamos determinada coisa que vimos ou sentimos; quase toda a nossa linguagem contém o pressuposto de que as coisas existem independentemente das nossas sensações visuais ou de tacto. Na física matemática procede-se de modo diferente. Uma cadeira é concebida sem qualquer relação com qualquer coisa de particular ou com qualquer modo especial de percepção. Daqui resulta que a cadeira é concebida como um conjunto de moléculas no espaço ou como um grupo de electrões, ou como uma porção de éter em movimento, ou ainda de harmonia com qualquer outra concepção científica corrente. O ponto essencial é que a ciência reduz a cadeira a coisas que se movem no espaço e que influenciam outros movimentos. Deste modo os vários elementos ou factores que entram num conjunto de circunstâncias, assim concebidas, são meramente coisas, como comprimentos de linhas, grandezas de ângulos, áreas e volumes pelas quais as posições dos corpos no espaço podem ser determinadas. Certamente, além destes elementos geométricos, o movimento ou a sua variação exige a introdução da variação temporal destes elementos, isto é, a consideração de velocidades, velocidades angulares, acelerações, ou coisas parecidas. A Física matemática, pois, ocupa-se das correlações entre números variáveis que correspondem às que existem na natureza entre as medidas daqueles elementos geométricos e as das suas variações temporais. Mas o que sempre se verifica é que as leis matemáticas se referem a variáveis, e é sòmente na verificação ocasional destas leis, em operações experimentais, ou no uso das leis quando se pretendem obter previsões especiais, que as referidas variáveis são substituídas por números determinados.

O ponto que interessa nesta concepção do mundo, obtida por via abstracta no estudo da física matemática, e em que sòmente as posições e formas das coisas são consideradas, bem como as suas possíveis variações, é que um tal mundo abstracto seja suficiente para «explicar» as nossas sensações. Quando ouvimos um som, logo dizemos que as moléculas de ar entram em vibração; produzido este movimento ou melhor produzidas as ondas sonoras, como hoje são chamadas, todas as pessoas normais ouvem esse som; e se não há ondas sonoras, não há som. Por igual forma dizemos que uma causa física, ou uma certa origem, ou acontecimento (ou como queiram chamar-lhe) está sempre na base da explicação de outras sensações. Os nossos próprios pensamentos aparecem como correspondendo a conformações e movimentos do cérebro; causar qualquer lesão no cérebro, é atingir por igual forma o raciocínio. Entretanto os acontecimentos do universo físico sucedem-se uns aos outros, obedecendo a leis matemáticas, e são inteiramente indiferentes às nossas sensações especiais, pensamentos ou emoções.

Indubitàvelmente, este é o aspecto geral das relações entre o mundo da física matemática e o das nossas emoções, sensações e pensamentos; sobre isto muito se tem dito e muita tinta se tem gasto. Devemos apenas notar uma coisa. Tudo isto resultou, como vimos, das tentativas feitas para descrever um mundo exterior «explicativo» das diversas sensações e emoções individuais, independentemente de determinada sensação particular ou de determinado indivíduo em especial. É um tal mundo apenas um enorme conto de fadas? Os contos de fadas são fantásticos e arbitrários; se na verdade existe um tal mundo deve-se submeter a uma exacta descrição em que se determinem com rigor as suas diversas partes e as suas mútuas relações. O mundo da ciência submete-se a esta condição e permite que os seus acontecimentos sejam estudados e previstos pelo conjunto das ideias abstractas da matemática. Parece talvez que encontrámos aqui uma verificação indutiva das nossas suposições iniciais. Deve admitir-se que nenhuma prova obtida por indução é concludente; mas se esta ideia de um mundo que tem uma existência independente das nossas percepções particulares que dele podemos ter, é errónea, deveria explicar-se por que é que a tentativa para o caracterizar, em termos daquele remanescente matemático das nossas ideias que lhe é aplicável, tem tido um notável sucesso.

Seríamos levados muito longe se tentássemos dar aqui uma explicação pormenorizada das outras leis do movimento. O final deste capítulo vai ser dedicado à exposição de noções muito importantes que são fundamentais, tanto na física matemática, como na matemática pura: queremos referir-nos às grandezas vectoriais e à regra do paralelogramo relativa à adição vectorial. Vimos que, essencialmente, um movimento consiste em que um corpo que estava em A se encontra depois em C. Este deslocamento de A para C requer dois elementos distintos para a sua completa determinação, a saber a sua grandeza (isto é, o comprimento AC) e a sua direcção. Qualquer quantidade, como este deslocamento, que seja completamente definida pela determinação de uma grandeza e de uma direcção, é chamada um vector. Por exemplo, uma velocidade exige o conhecimento de uma grandeza e de uma direcção. Deve dizer-se que terminada velocidade é de tantas milhas por hora e tem determinada direcção. A existência e independência destes dois elementos na determinação de uma velocidade são bem ilustradas pela acção de um capitão de um navio quando dá as suas ordens aos subordinados: indica ao chefe maquinista o número de nós a que deve ser feita a viagem, e ao timoneiro em que direcção deve manter o leme. Outro exemplo de uma grandeza vectorial é fornecido pela aceleração que corresponde à variação temporal da velocidade. Um outro exemplo é dado pelas forças que, do ponto de vista dinâmico, são também grandezas vectoriais. Na verdade, a natureza vectorial das forças está de harmonia com os princípios da dinâmica, pelas relações estabelecidas entre elas e as velocidades e as acelerações; mas isto é um ponto no qual não entramos agora. É suficiente dizer aqui que uma força actua sobre um corpo com uma certa intensidade e numa certa direcção.

Os vectores podem ser representados gràficamente por segmentos de rectas. Tudo o que se tem a fazer consiste em 1) tomar uma escala segundo a qual uma certa unidade de comprimento corresponda a uma unidade de intensidade do vector — por exemplo uma polegada para representar uma velocidade de 10 milhas por hora, no caso das velocidades, e uma polegada para representar um peso de 10 toneladas, no caso das forças — 2) tomar uma direcção que represente a direcção do vector. Deste modo, um segmento de recta com um certo número de polegadas de comprimento e na direcção devida, representa o vector que se deseja representar. Esta representação gráfica é de grande importância. Com o seu auxílio, podemos enunciar a famosa «*lei do paralelogramo*» da soma de vectores da mesma espécie que têm direcções diferentes.

Suponhamos que o vector $A\ C$ da fig. 6 representa o deslocamento de um corpo de A para C; dizemos que este vector é um vector de deslocamento. Notemos que se todos os fenómenos físicos pudessem ser reduzidos a simples mudanças ou variações de posição, como atrás vimos, os vectores de outros tipos poderiam ser reduzidos a vectores do tipo deste vector de deslocamento.

O referido deslocamento de A para C poderá igualmente efectuar-se imaginando um deslocamento de A para B, seguido de um outro deslocamento de B para C, ou ainda, para completarmos o paralelogramo

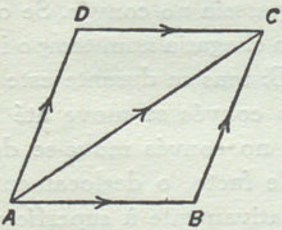

Fig. 7

$A\ B\ C\ D$, podemos também imaginar um deslocamento de A para D, seguido de um outro de D para C. A consideração sucessiva destes deslocamentos, corresponde à sua adição. Nisto consiste a verificação do que chamamos adição de deslocamentos. Considerando as linhas paralelas como linhas com a mesma direcção, os deslocamentos de B para C e de A para D podem ser tomados como o mesmo deslocamento aplicado a corpos nas duas posições iniciais B e A. Desta maneira podemos falar de um deslocamento de A para D aplicado a um corpo em qualquer posição, por exemplo, em B. Podemos então dizer que o deslocamento A para

C é a soma dos dois deslocamentos *A* para *B* e de *A* para *D*, qualquer que seja a ordem em que sejam considerados. Enunciámos assim a lei do paralelogramo relativa à adição de deslocamentos, a saber: dados dois deslocamentos, um de *A* para *B*, outro de *A* para *D*, a sua soma é dada pela diagonal *AC* do paralelogramo *ABCD*.

Tudo isto, à primeira vista, pode parecer muito artificial. Mas podemos observar que a própria natureza nos conduz a esta ideia. Por exemplo, um vapor move-se na direcção *AD* (vid. fig. 6) e suponhamos que um homem passeia no convés. Se o vapor estivesse parado, o homem chegaria num tempo igual a 1 minuto, por exemplo, a *B*; mas se durante este minuto o ponto de partida *A* do convés se move até *D*, então o trajecto do homem no convés move-se de *AB* para *DC*. De modo que, de facto, o deslocamento do homem é de *A* para *C* relativamente à superfície do mar.

Tal deslocamento apresenta-se contudo como a soma dos dois deslocamentos, um de *A* para *B*, relativamente ao vapor, e outro de *A* para *D* que representa o deslocamento do vapor. Se entrarmos em linha de conta com o tempo, no caso referido, um minuto, *AC* representa a velocidade do homem. Logo *AB* e *AD* representam igualmente duas velocidades, que são respectivamente a velocidade do homem relativamente ao vapor e a velocidade do vapor, e é a «soma» destas velocidades que determina a velocidade resultante do homem. Torna-se assim evidente que os diagramas e as definições que dizem respeito a deslocamentos se podem transformar em diagramas e definições relativas a velocidades, imaginando que os deslocamentos se efectuam durante um tempo igual à unidade do tempo. Por igual forma se pode imaginar que diagramas e definições que dizem respeito a velocidades se podem transformar em diagramas e definições relativas a acelerações, supondo que umas e outras dizem respeito a variações efectuadas por unidade de tempo.

Em resumo, a adição de velocidades vectoriais ou de acelerações vectoriais efectua-se utilizando a regra do paralelogramo.

Do mesmo modo, tendo em atenção as leis do movimento, uma força poderá ser representada pelo vector aceleração que ela produz num corpo de dada massa. Logo as forças adicionam-se e o seu efeito resultante pode ser calculado a partir da mesma regra do paralelogramo.

CAPÍTULO V

O simbolismo da matemática

Retomando as nossas considerações sobre a matemática pura, vamos analisar com mais rigor o conjunto de noções que constituem a base desta ciência. Tomemos como primeiro objectivo uma análise do seu simbolismo, começando por considerar os símbolos mais simples e universalmente conhecidos: os da aritmética.

Admitamos por agora que temos ideias suficientemente claras sobre os números inteiros representados, na notação árabe, pelos símbolos 0, 1, 2,... 9, 10, 11... 100, 101,... etc.. Sabe-se que esta notação foi introduzida na Europa pelos Árabes que possìvelmente a obtiveram dos Indios. O primeiro trabalho conhecido em que esta notação se encontra explicada sistemàticamente é um trabalho de um matemático índio, Bhaskara (nascido em 1114). Contudo os actuais algarismos devem ter sido inventados no Tibete, no século VII da nossa era. Seja como for, a história da notação é um pormenor que não nos interessa. O ponto interessante a notar é que este sistema de algarismos representa um magnífico exemplo de uma boa notação. Aliviando o cérebro de todo o trabalho desnecessário, uma boa notação permite-lhe que se concentre em problemas mais complicados, aumentando por isso a potência mental da raça humana. Antes da introdução da notação árabe a simples multiplicação era uma operação difícil e a divisão, mesmo de inteiros, exigia a aplicação das mais altas faculdades matemáticas. Provàvelmente, o que mais poderia causar admiração, no mundo moderno, a um antigo matemático grego era vir a saber que, sob a influência de uma educação obrigatória, a grande maioria da população da Europa efectua hoje com a maior facilidade a divisão de números, por maiores que sejam estes números. Este facto deveria parecer-lhe completamente impossível. A consequente extensão da notação às fracções decimais não pôde ser efectuada antes do século XVII. A maneira como hoje, com toda a facilidade, se calculam fracções decimais, é o resultado mais milagroso da descoberta de uma notação perfeita.

A matemática é muitas vezes considerada uma ciência difícil e misteriosa, em virtude dos numerosos símbolos que emprega. Certamente, nada é mais incompreensível do que um simbolismo que não é conhecido. E um simbolismo que apenas se conhece parcialmente e ao qual não estamos habituados, só com muita dificuldade pode ser seguido. Por igual forma os termos técnicos de uma profissão são incompreensíveis para aqueles que não foram ensinados a usá-los. Isto não quer dizer que, por si próprios, sejam difíceis. Pelo contrário, invariàvelmente a sua utilização serve para facilitar as coisas. Da mesma maneira, na matemática, desde que se dê uma atenção séria às ideias matemáticas, o simbolismo representa invariàvelmente uma enorme simplificação. Não é apenas de uso prático mas é também de grande interesse. Representa uma análise das ideias relativas às matérias em estudo e uma representação quase pictural das suas mútuas relações. Se alguém duvida da utilidade dos símbolos, que escreva por extenso, sem utilizar qualquer símbolo, o significado completo das seguintes equações que representam algumas das leis fundamentais da álgebra:

$$x + y = y + x \qquad (1)$$
$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (2)$$
$$x \times y = y \times x \qquad (3)$$
$$(x \times y) \times x = x \times (y \times z) \qquad (4)$$
$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \qquad (5)$$

(1) e (2) exprimem respectivamente as leis comutativa e associativa da adição; (3) e (4) respectivamente as leis cumutativa e associativa da multiplicação; (5) a lei distribuitiva da multiplicação relativamente à adição. Por exemplo, não utilizando símbolos, (1) corresponde a dizer-se: Se adicionarmos um segundo número a um dado número o resultado que se obtém é o mesmo que se obtém adicionando o referido primeiro número ao mesmo segundo número. Este exemplo mostra que, com o auxílio de símbolos, podemos à simples vista fazer mudanças em raciocínios que de outra maneira poderiam exigir a aplicação das mais altas faculdades do cérebro.

É um truísmo completamente errado, repetido em muitos livros e por muito boa gente em discursatas, que nós devemos cultivar o hábito de pensar o que estamos a fazer. É precisamente o contrário. A civilização desenvolve-se na medida em que se tornam cada vez mais numerosas as operações ou os actos que podemos executar sem pensar. As operações mentais são semelhantes às cargas de cavalaria numa batalha — são estritamente limitadas em número e exigem sempre novos cavalos, devendo por isso apenas ser dadas nos momentos decisivos.

Uma propriedade importante de qualquer simbolismo é a sua concisão; deve ser ràpidamente apreendido pela vista e ser escrito com rapidez. Sobre este aspecto da concisão pode dizer-se que, na escrita e colocação de símbolos, nada pode ser mais conciso do que a sua imediata justaposição. Portanto numa boa notação simbólica a justaposição dos símbolos deve ter um significado importante. É este um dos méritos da notação árabe dos algarismos; por meio de dez símbolos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e por simples justaposição é possível representar qualquer número. Do mesmo modo, na álgebra, dados dois números variáveis x e y, deve escolher-se o significado que convém atribuir à sua justaposição xy. Entre as operações mais importantes que é preciso empregar a cada passo, contam-se a adição e a multiplicação. Os matemáticos atribuíram a xy o significado $x \times y$.

Deste modo as leis (3), (4) e (5) podem escrever-se com as formas

$$\mathrm{xy} = \mathrm{yx} \quad (\mathrm{xy})\mathrm{z} = \mathrm{x}(\mathrm{yz}), \quad \mathrm{x}(\mathrm{y} + \mathrm{z}) = \mathrm{xy} + \mathrm{xz}$$

mais concisas do que as anteriores.

O mesmo significado é atribuído à justaposição de um número e de uma variável: escreve-se $3x$ em vez de $3 \times x$, e $30x$ em vez de $30 \times x$.

É evidente quc deve haver o maior cuidado na substituição das variáveis por números, de maneira a voltar a escrever o sinal x, para não haver confusão com a notação árabe. Assim quando substituímos x por 2 e y por 3 na expressão xy, devemos escrever 2×3 e não 23 que significa $20 + 3$.

É interessante notar como, por vezes, um símbolo de aparência modesta desempenha um papel importante no desenvolvimento da ciência. Pode servir para representar de uma maneira bem expressiva uma certa noção por vezes até um conceito subtil, e o simples facto da sua existência pode evidenciar a relação deste conceito com outros em que ele igualmente intervém. Por exemplo, consideremos o mais modesto de todos os símbolos, o símbolo 0, que representa o número zero. Na antiga notação romana não havia o símbolo zero; esta ideia do número zero talvez embaraçasse muitos matemáticos do velho mundo. Porque, na realidade, trata-se de um conceito subtil e que não é, de forma alguma, óbvio. O significado da quantidade zero tem merecido grande discussão em muitos trabalhos de filosofia. Diga-se porém que o zero não é nem mais difícil, nem de significação mais subtil, do que qualquer outro algarismo. Que significam os símbolos 1, 2 ou 3? Embora todos nós estejamos familiarizados com eles, muita gente talvez não esteja muito à vontade para explicar as noções que lhes servem de base. Sobre o zero pode dizer-se que não é necessário o seu uso nas operações correntes da vida quotidiana. Ninguém vai à praça para comprar zero peixes. O zero é, contudo, sob certo aspecto, o mais civilizado dos algarismos; a sua utilização é-nos imposta por necessidades de processos de pensamento de nível relativamente elevado. Que utilidade tem pois o símbolo 0 que representa o número zero?

O símbolo apareceu por necessidade da notação árabe de que é parte essencial. Na verdade, nesta notação o valor de um dígito depende da posição em que se encontra na escrita de um número. Considere-se, por exemplo, o dígito 5, nos números 25, 51, 3512, 5213.

No primeiro número, 5 representa o número cinco; no segundo, 5 representa cinquenta, no terceiro, o número quinhentos, e no quarto, o número cinco mil. No segundo caso, quando se escreve 51, o dígito 1 coloca o dígito 5 no segundo lugar (a contar da direita para a esquerda) e faz com que ele passe a representar o número cinquenta. Mas que fazer para escrever o número cinquenta? É preciso dispor de um dígito no lugar das unidades de modo a nada acrescentar ao total mas que coloque o cinco no segundo lugar. É este serviço que presta o símbolo 0. É possível que os homens que pela primeira vez utilizaram o símbolo 0 com este fim, não tivessem ideias seguras sobre o número zero. Apenas tiveram necessidade de uma marca para simbolizar o facto que indicámos. O conceito de zero tomou forma gradualmente, no desenvolvimento da ideia da comparação do seu significado com o significado ligado aos outros algarismos 1, 2,... 9. Não é este o único exemplo de um caso em que uma noção é introduzida em matemática tendo tido, na sua origem, apenas uma conveniência de ordem prática.

Portanto, o primeiro uso do símbolo 0, foi tornar possível a notação árabe — serviço nada pequeno. É de supor que quando foi inventado com este fim, os chamados homens práticos, que dizem não gostar de ideias fantasistas, não tenham querido identificá-lo com um número — o número zero. Atitude errada esta, como sempre a daqueles que não querem limitar-se a fazer apenas aquilo de que são capazes. É que, na verdade, os outros serviços que o símbolo 0 veio a prestar, resultam essencialmente da função que lhe foi atribuída de representar o número zero.

Consideremos uma outra aplicação do símbolo 0, e esta tão simples que talvez um principiante se não aperceba da sua importância. Vamos dar um exemplo simples. No capítulo II indicámos a correlação entre dois números variáveis x e y definida pela equação $x + y = 1$. Há outras maneiras de indicar esta mesma relação, por exemplo $x = 1 - y$, $y = 1 - x$, $2x + 3y - 1 = x + 2y$, etc.

Mas uma outra forma muito importante é:

$$x + y - 1 = 0$$

Da mesma maneira, a equação $x = 1$, pode escrever-se com a forma

$$x - 1 = 0$$

e a equação $3x - 2 = 2x^2$, com a forma

$$2x^2 - 3x + 2 = 0.$$

O ponto essencial é que todos os símbolos que representam variáveis, como *x* e *y*, e os símbolos que representam números definidos, como 1, 2, etc. são escritos do lado esquerdo da expressão, de modo que fica esse lado esquerdo igual ao número zero. Diz-se que foi Tomás Harriot, nascido em Oxford em 1560 e falecido em 1621 o primeiro que escreveu uma equação com esta forma. Mas que importância pode isso ter? Foi isso que tornou possível o desenvolvimento do conceito moderno de *forma algébrica*.

Aqui está uma ideia a que constantemente se recorre; não é ir longe de mais dizer-se que a matemática moderna não pode compreender-se sem o seu auxílio. O conceito de forma é tão geral que é difícil caracterizá-lo em termos abstractos. Aqui apenas podemos dar alguns exemplos. Assim, as equações $2x - 3 = 0$, $x - 1 = 0$, $5x - 6 = 0$, são equações da mesma forma, isto é, equações com uma só incógnita x, em que não entram os produtos $x \times x$ ou $x \times x \times x$. Do mesmo modo, as equações $3x^2 - 2x + 1 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$, são equações da mesma forma, equações em que a incógnita *x* aparece multiplicada por ela própria $x \times x = x^2$. Estas equações são chamadas equações quadráticas. Temos também equações cúbicas em que aparece x^3, etc.. Entre as três equações quadráticas escritas acima, há uma pequena diferença entre a última $x^2 - 4 = 0$ e as outras duas, visto que nestas últimas aparece x (quantidade distinta de x^2). Mas esta diferença é pouco importante em comparação com o facto de todas elas serem equações quadráticas.

No caso de duas variáveis *x* e *y*, são chamadas formas lineares, as formas de que podemos dar os dois seguintes exemplos:

$$x + y = 1 = 0$$

e

$$2x + 3y - 8 = 0$$

Dizem-se lineares em virtude da sua representação gráfica; são representadas, conforme vimos no final do capítulo II, por linhas rectas. Também há, para equações com duas variáveis, formas quadráticas, cúbicas, etc.. O ponto essencial a notar é que este estudo da forma é facilitado, torna-se por assim dizer possível, em virtude da maneira como são escritas as equações, colocando o símbolo 0 no segundo membro da equação.

Há ainda um outro papel desempenhado pelo 0 nesta questão do estudo da forma. Qualquer que seja o número x, é $0 \times x = 0$, e $x + 0 = x$. Tendo em atenção estas propriedades podem fazer-se desaparecer diferenças insignificantes de forma. Por exemplo, a diferença a que nos referimos entre as equações $x^2 - 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 4 = 0$, pode atenuar-se escrevendo a última equação com a forma $x^2 + (0 \times x) - 4 = 0$, porque em virtude do que se disse, temos $x^2 + (0 \times x) - 4 = x^2 + 0 - 4 = x^2 - 4$. Logo a equação $x^2 - 4 = 0$ é apenas um caso particular das equações quadráticas, tem portanto a mesma forma para a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$. Por estas três razões o símbolo 0 que representa o número zero é essencial na matemática moderna. Tornou possível tipos de investigação que teriam sido impossíveis sem ele.

O simbolismo da matemática é, na verdade, a expressão feliz das noções gerais que dominam a ciência. Encontrámos até aqui dois conceitos de ordem geral, o de variável e o de forma algébrica. A junção destes conceitos impôs na matemática um outro tipo de simbolismo, embora quase singular no seu aspecto, não deixa de ser menos eficiente. Vimos que uma equação com duas variáveis, x e y, representa uma determinada relação entre um par de variáveis. Assim $x + y - 1 = 0$ representa uma certa relação, e $3x + 2y - 5 = 0$ representa uma outra relação definida entre as variáveis x e y; ambas têm a forma de relações lineares. Mas como poderemos representar «*qualquer*» relação linear entre as variáveis x e y?

Torna-se necessário simbolizar uma relação linear, *qualquer* que ela seja, da mesma maneira que x simboliza um número *qualquer*. Isto faz-se transformando os números que figuram numa determinada relação, como $3x + 2y - 5 = 0$, em letras. Obtemos $ax + by - c = 0$. Nesta expressão, a, b e c representam números variáveis, como x e y; mas há uma diferença entre estes dois grupos de variáveis. Estudam-se as propriedades gerais da relação entre x e y, tendo a, b, c valores fixos; não se indicam que valores são estes; quaisquer que eles sejam, são fixos no estudo da relação entre as variáveis x e y, para todos os valores possíveis de x e y. Obtidas as propriedades desta relação, nota-se que, em virtude de não terem sido indicados os valores de a, b e c, foram demonstradas propriedades que pertencem a esta relação, qualquer que ela seja. Fazendo, em seguida, variar a, b e c, verifica-se que $ax + by - c = 0$ representa uma relação linear variável entre x e y. Relativamente a x e a y, as três variáveis a, b e c são chamadas constantes. Estas variáveis também se designam com o nome de parâmetros.

Os matemáticos geralmente poupam-se ao trabalho de dizer quais das suas variáveis devem ser consideradas como «constantes» e quais devem ser consideradas como «variáveis», usando, para as primeiras, as primeiras letras do alfabeto, e para as segundas, as últimas letras, como x, y, etc. Os dois sistemas encontram-se no meio do alfabeto. Muitas vezes, uma palavra ou duas de explicação são necessárias; mas verifica-se que o uso corrente ou o senso comum são suficientes para evitar qualquer confusão.

O resultado desta constante eliminação de números definidos por camadas sucessivas de parâmetros, leva os matemáticos a ocuparem-se cada vez menos de questões de aritmética. Muitos matemáticos não gostam dos cálculos numéricos e não têm uma grande inclinação para ele. O terreno próprio da aritmética tem como fronteira os pontos em que começam a exercer o seu domínio os conceitos de «*variável*» e de «*forma algébrica*».

CAPÍTULO VI

Generalizações do conceito de número

Um dos aspectos característicos da matemática consiste no desenvolvimento de uma série de conceitos que foram criados a partir dos números inteiros. Estes conceitos podem ser chamados extensões ou generalizações do conceito de número. Em primeiro lugar, aparece o conceito de número fraccionário ou fracção. O mais antigo tratado de aritmética, hoje conhecido, foi escrito por um sacerdote egípcio chamado Ahmes, entre 1700 a. C. e 1100 a. C., devendo ser, provàvelmente, uma cópia de um trabalho muito mais antigo. Ocupa-se já com grande minúcia das propriedades das fracções. Parece, pois, que este conceito é muito antigo na história da matemática. Na verdade, relaciona-se com questões de interesse óbvio. Dividir um campo em três partes iguais e tomar duas dessas partes, é um género de operação que muitas vezes deve ter ocorrido. Não devemos portanto surpreendermo-nos com o facto de os homens das mais antigas civilizações estarem familiarizados com a noção de dois terços e outras semelhantes. O conceito de fracção é, pois, a primeira generalização do conceito de número. Os gregos ocuparam-se das fracções sob a forma de razões; um grego deveria naturalmente dizer que uma linha de dois pés de comprimento está para uma linha de três pés na razão de 2 para 3. Sob a influência da nossa notação algébrica, dizemos que a primeira linha é dois terços do comprimento da outra, atribuindo aos dois terços a propriedade de ser um factor numérico.

Em ligação com a teoria das razões, ou das fracções, os gregos fizeram uma grande descoberta que deu lugar a largas investigações tanto no campo da matemática, como no da filosofia. Descobriram as razões «*incomensuráveis*». Demonstraram, na verdade, no decurso das suas investigações geométricas que, partindo de uma linha de dado comprimento, é possível encontrar outras cujos comprimentos não estão para o comprimento da primeira na razão de dois números inteiros — ou, por outras palavras, existem linhas cujo comprimento não é uma fracção exacta de um outro dado comprimento.

Por exemplo, a diagonal de um quadro não se pode exprimir como sendo uma determinada fracção do lado do mesmo quadrado: segundo a notação moderna, o comprimento da diagonal é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento do lado, e não há nenhuma fracção que seja igual exactamente a $\sqrt{2}$. Podemos determinar valores aproximados, e tão aproximados quanto quisermos, de $\sqrt{2}$. Por exemplo, $\frac{49}{25}$ é um pouco inferior a $\sqrt{2}$, e $\frac{9}{4}$ um pouco superior, de modo que podemos dizer que $\sqrt{2}$ está compreendido entre $\frac{7}{5}$ e $\frac{3}{2}$. Mas o modo mais sistemático de obter valores sucessivamente aproximados de $\sqrt{2}$ é determinar uma sucessão de fracções decimais, sendo qualquer delas maior do que a anterior; nisto consiste o método ordinário de extracção da raiz quadrada. Neste caso, a sucessão é $1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}$, etc..

As razões desta espécie foram chamadas pelos gregos *«incomensuráveis»*. Foram a origem, desde os tempos dos gregos, até nossos dias, de grande discussão filosófica, e só recentemente foram esclarecidas as dificuldades que se tinham levantado à sua volta.

Juntaremos as razões incomensuráveis às fracções, e consideraremos o conjunto dos números inteiros, fraccionários e incomensuráveis como constituindo uma classe de números a que chamaremos *«números reais»*. Imaginaremos sempre os números reais dispostos por ordem de grandeza crescente, a partir do zero. Estes números reais podem ser representados, por uma forma conveniente, pelos pontos de uma linha recta. Seja OX uma linha recta, e O a origem. Tomemos um ponto A de modo que OA represente um comprimento igual à unidade. Marquem-se, depois, comprimentos AB, BC, CD, etc. iguais a OA. Então o ponto O representa o número zero, A o número *1*, B o número *2*, etc.. O número representado por qualquer ponto será a medida da sua distância contada a partir de O, tendo como unidade de comprimento OA. Os pontos entre O e A representam as fracções próprias e os números incomensuráveis inferiores a 1; o meio de OA representa $\frac{1}{2}$, o meio de AB, o número $\frac{3}{2}$, o meio de BC, o número $\frac{5}{2}$ etc.. Deste modo, qualquer ponto de OX representa um determinado número real, e qualquer número real é representado por um determinado ponto de OX.

A sucessão (ou fila) de pontos ao longo de OX, partindo de O, representa os números reais dispostos por ordem de grandeza crescente.

Tudo isto parece muito simples mas há algumas ideias interessantes a notar. Consideremos a sucessão de pontos que representam os números inteiros, isto é, os pontos O, A, B, C, etc. Temos aqui um primeiro ponto O, a seguir um outro ponto A, e todos os pontos, como A ou B, têm um número que os antecede e um outro que lhes sucede, com excepção do ponto O que não tem nenhum que o anteceda; por outro lado, a sucessão é infinita. Esta espécie de ordem é chamada o tipo de ordem dos inteiros. Consideremos agora os inteiros e os números fraccionários, excluindo portanto apenas os números incomensuráveis. A espécie de ordem que agora temos é diferente da anterior. Há ainda um primeiro termo que é O; mas nenhum termo tem um imediato anterior ou um imediato sucessor. É fácil ver que assim é, porque entre duas fracções quaisquer, podemos sempre encontrar uma outra com valor intermediário. Uma maneira simples de fazer isto consiste em somar as fracções e dividir o resultado por 2. Por exemplo, entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, existe a fracção $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$ isto é, $\frac{17}{24}$; entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{17}{24}$ existe a fracção $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{17}{24}\right)$ isto é, $\frac{33}{48}$, etc.. Em virtude desta propriedade, diz-se que a sucessão é compacta. À primeira vista pareceria que a sucessão obtida com os números inteiros e fraccionários seria do mesmo tipo que a obtida com todos os números reais, inteiros, fraccionários, e incomensuráveis, isto é, com todos os números que correspondem a todos os pontos da recta OX. Há uma diferença importante a notar. A ausência dos incomensuráveis na sucessão das fracções traduz-se pela ausência de pontos-limites de certas classes. Assim, consideramos o incomensurável $\sqrt{2}$. Na sucessão dos números reais, este número está entre todos os números cujos quadrados são menores do que 2, e todos aqueles cujos quadrados são maiores do que 2. Se tivéssemos só a sucessão das fracções, sem os incomensuráveis, não teríamos na sucessão $\sqrt{2}$, portanto não haveria nenhum número que tivesse a propriedade de dividir a sucessão da maneira que se indicou, isto é, de maneira que de um lado houvesse números cujos quadrados fossem menores do que 2, e do outro lado números cujos quadrados fossem maiores do que 2. Logo na sucessão dos números fraccionários existe um corte que deve ser preenchido pelo número $\sqrt{2}$. A existência de cortes na sucessão das fracções pode parecer pouco importante; mas qualquer matemático sabe que a possível ausência de limites ou de máximos numa classe de números, que se não estende ao conjunto dos números, não é pequena dificuldade. É para evitar esta dificuldade que a introdução dos incomensuráveis se torna útil, visto que então se obtém uma sucessão completa sem lacunas.

Há ainda um outro ponto a assinalar. É possível dispor os números fraccionários numa sucessão como a dos inteiros, isto é, tendo um primeiro termo e tal que qualquer outro termo (excepto este primeiro) tenha um imediato que seja anterior, e um outro que seja posterior. Podemos mostrar como isto se faz. Suponhamos que cada termo na sucessão dos números fraccionários e dos inteiros seja escrito sob a forma de uma fracção, por exemplo, $\frac{1}{1}$ para 1, $\frac{2}{1}$ para 2, etc., e o mesmo para todos os inteiros, à excepção do zero. Suponhamos igualmente que não reduzimos as fracções à sua expressão mais simples, quer dizer, que as fracções como $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$, são tomadas como distintas Agrupemos as fracções em classes, somando o numerador e o denominador de cada fracção. Por simplicidade, chamaremos a esta soma o *índice* da fracção. Assim, 7 será o índice de $\frac{4}{3}$, e também de $\frac{3}{4}$ e ainda de $\frac{2}{5}$. As fracções de uma mesma classe terão o mesmo índice que será chamado o índice de classe. Disponham-se agora as classes por ordem de grandeza crescente dos seus índices. A primeira classe, é a classe de índice 2; tem apenas um membro que é $\frac{1}{1}$. A segunda classe tem o índice 3, e os seus membros são $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{1}$. A terceira tem o índice 4, e os seus membros são $\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$. A quarta tem o índice 5, e os seus membros são $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$, etc.. É fácil verificar que o número de membros de uma classe qualquer é igual ao índice da classe diminuído de 1. Note-se igualmente que dentro de cada classe os diferentes membros podem ser dispostos de modo que o primeiro seja a fracção com o numerador 1, o segundo a fracção com o numerador 2; desta maneira o último tem o numerador $n - 1$, sendo n o índice da classe. Assim, os membros da classe de índice n, aparecem com a seguinte ordem:

$$\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3} \cdots\cdots \frac{n-1}{1}.$$

Os membros indicados acima das quatro primeiras classes foram dispostos exactamente por esta ordem. Temos, finalmente, o conjunto dos números fraccionários dispostos por uma ordem semelhante à dos inteiros, como:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \left[\frac{2}{2}\right], \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \cdots\cdots, \frac{n-2}{1},$$
$$\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \cdots\cdots, \frac{n-1}{1}, \frac{1}{n}, \cdots\cdots \text{ etc..}$$

Podemos agora desembaraçar-nos das fracções repetidas com o mesmo valor, cortando-as da sucessão, logo a seguir ao seu primeiro aparecimento. Por exemplo, a fracção $\frac{2}{2}$ que acima envolvemos num parêntesis recto. Feito isto, a sucessão fica com as mesmas propriedades características, a saber:

(a) — existe um primeiro termo;
(b) — cada outro termo tem um antecedente e um consequente;
(c) — a sucessão é infinita.

Demonstra-se que o conjunto dos números reais não goza das mesmas propriedades. Este facto curioso foi descoberto por Georg Cantor, matemático alemão, e é da maior importância na filosofia dos conceitos matemáticos. Tocamos aqui o domínio dos grandes problemas relativos ao significado matemático da continuidade e do infinito.

Uma outra extensão do conceito de número resulta da introdução de certa ideia que pode ser designada, conforme o ponto de vista, como uma operação ou como um passo. Exemplifiquemos. Consideremos a proposição $2 + 3 = 5$. Juntámos 3 a 2 e obtemos 5. Pensando na operação «somar 3», podemos designá-la por $+ 3$. Assim em vez de considerar os números reais em si próprios, podemos considerar as operações de os somar ou de os subtrair; deste modo em vez de $\sqrt{2}$, podemos igualmente considerar $+\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, como correspondendo às operações de somar $\sqrt{2}$ ou de subtrair $\sqrt{2}$. A soma de duas operações é uma única operação que tem o mesmo efeito que as duas operações aplicadas sucessivamente. Em que ordem devem ser aplicadas as duas operações? A ordem é indiferente, visto que, por exemplo

$$2 + 3 + 1 = 2 + 1 + 3$$

isto é, a adição dos passos $+ 3$ e $+ 1$ é comutativa.

Os matemáticos têm o hábito que embaraça sobretudo aqueles que só se preocupam com significações precisas, hábito contudo muitas vezes útil na prática, de usar o mesmo símbolo com sentidos diferentes embora ligados. O requisito essencial a que deve satisfazer um símbolo é que, quaisquer que sejam as possíveis modificações do seu significado, sejam as mesmas as leis formais utilizadas para a sua aplicação. De acordo com este costume a adição de operações é designada pelo sinal $+$, utilizado para a adição de números. Assim escreve-se

$$(+3) + (+1) = +4$$

onde o sinal $+$ que figura no meio do primeiro membro representa a adição das operações $+3$ e $+1$. Por outro lado, como não há necessidade de sermos pedantes no nosso simbolismo, podemos suprimir os outros sinais $+$ e os parêntesis, e escrever simplesmente:

$$3 + 1 = 4$$

que podemos interpretar ou como simples adição numérica, ou como a adição de operações que acabamos de indicar, ou ainda como exprimindo o resultado da aplicação da operação $+1$ ao número 3, para se obter o número 4. Qualquer interpretação, que seja possível, é sempre correcta. Mas a única interpretação que é sempre possível, mediante certas condições, é a que se refere às operações. As outras interpretações podem, às vezes, não ter sentido.

Isto conduz-nos imediatamente a uma questão que, com certeza, deve ter sido já posta pelo leitor: a questão de saber para que serve tudo o que acabamos de dizer. Sobre isto o nosso amigo, o homem prático, deve adiantar-se para nos dizer que tudo se reduz a teias de aranha que devemos varrer do cérebro. Responder-lhe-emos que o matemático investiga a generalidade. Trata-se de um conceito que deve ser colocado ao lado dos conceitos de Variável e de Forma sob o ponto de vista da sua importância na orientação do procedimento matemático. Qualquer limitação à generalidade de um teorema, ou de uma prova, ou de uma simples interpretação, é repelida pelo instinto matemático. Estas três noções, a de variável, a de forma, e a de generalidade, constituem uma espécie de trindade sempre presente na matemática. É que, na verdade, elas têm a mesma origem; todas elas são a consequência da natureza abstracta da matemática.

Vejamos, então, como se consegue maior generalidade ao introduzir a noção de operação. Tomemos a equação $x + 1 = 3$; a solução é $x = 2$. Podemos aqui interpretar os nossos símbolos como simples números, e o recurso a «operações» não é necessário. Mas se x é um simples número a equação $x + 3 = 1$ não tem sentido, porque x deve representar o número de coisas que restam quando de 1 coisa se tiram 3 coisas, e isto não tem sentido. Aqui vai intervir a nossa noção de forma algébrica, vista sob certo aspecto geral. Consideremos, a propósito, a equação geral da mesma forma que $x + 1 = 3$. Esta equação é $x + a = b$; a sua solução é $x = b - a$. Com esta forma as nossas dificuldades tornam-se mais agudas porque ela só poderá ser utilizada limitando-nos a uma interpretação simplesmente numérica, se b for maior que a, e não podemos portanto dizer que a e b são constantes quaisquer. Por outras palavras, introduzimos uma limitação à variabilidade das «*constantes*» a e b que devemos arrastar como uma cadeia em todos os raciocínios. Ora sob tais condições seria impossível levar muito longe a investigação matemática. Uma equação deveria ser rodeada de um sem-número de limitações. Contudo, se interpretarmos os nossos símbolos como «operações», todas as limitações desaparecem como por encanto. A equação $x + 1 = 3$ dá $x = + 2$, a equação $x + 3 = 1$, dá $x = - 2$, e a equação $x + a = b$, dá $x = b - a$ que é a operação de adição ou de subtracção conforme os casos. Não é preciso em cada caso dizer se $b - a$ representa a operação de adição ou de subtracção, porque as regras de tratamento dos símbolos são as mesmas nos dois casos.

Não cabe dentro do plano deste trabalho escrever um capítulo pormenorizado de álgebra elementar. O nosso objectivo é simplesmente tornar claras as ideias fundamentais que orientam a formação desta ciência. Por isso não daremos explicações sobre as regras pelas quais se multiplicam ou se combinam os «números positivos e negativos». Explicámos atrás que os números positivos e negativos são operações. Também lhes chamamos «passos». Assim $+ 3$ é o passo pelo qual podemos ir de 2 até 5, e $- 3$ o passo em sentido inverso para ir de 5 até 2. Consideremos a linha OX dividida pela forma atrás indicada. Então $+ 2$ é o passo para ir de O até B, ou de A até C ou (se as divisões forem prolongadas no sentido OX') para ir de C' até A', ou de D' até B', etc.. Semelhantemente, $- 2$ é o passo para ir de O até B', ou de B' até D', ou de B até O, ou de C até A.

Podemos admitir que o ponto que é alcançado por um passo a partir de O representa o mesmo passo. Assim A representa $+ 1$, B representa $+ 2$, A' representa $— 1$, B' representa $— 2$, etc. Pode assinalar-se que, enquanto que, anteriormente, com os números reais sem sinal, os pontos de um lado de O sòmente, isto é, ao longo de OX, representavam números, agora, com os referidos passos, cada ponto da linha que se estende para um e outro lado de O, representa um passo. Isto é uma representação gráfica da generalização introduzida pelos números positivos e negativos, isto é, das operações ou dos referidos passos. Estes números «com sinal» são também casos particulares do que nós chamámos vectores (do latim *veho*, vou). Com isto podemos pensar que uma partícula é transportada de O até A ou de A até B.

Ao sugerir atrás que o homem prático teria reagido contra a subtileza da introdução dos números positivos e negativos, talvez tivéssemos injuriado este excelente indivíduo. Porque, na verdade, nós estamos no domínio de um dos seus maiores triunfos. Para confessar a verdade, diga-se que foi o homem prático quem primeiro empregou os actuais símbolos $+$ e $—$. A sua origem não é muito certa mas parece provável que eles resultaram de traços marcados a giz nas caixas de mercadorias nos armazéns alemães para indicar o excesso ou o defeito de mercadoria relativamente a certo peso padrão. A primeira indicação a seu respeito encontra-se num livro publicado em Leipzig em 1489. Foram pela primeira vez empregados, em matemática, por um matemático alemão, Stifel, num livro publicado em Nuremburg em 1544. Contudo só nos últimos tempos é que os alemães têm sido considerados como homens práticos. Há um velho epigrama que atribui o império dos mares aos ingleses, o da terra aos franceses e o das nuvens aos alemães. Seguramente, deve ter sido das nuvens que os alemães trouxeram o + e o — ; os conceitos que estes símbolos permitiram desenvolver são demasiadamente importantes para o bem-estar da humanidade para que possam ter vindo quer do mar, quer da terra.

As possibilidades de aplicação dos números positivos e negativos são bastantes óbvias. Se as distâncias num dado sentido são representadas por números positivos, as distâncias num sentido oposto são representadas por números negativos. Se uma velocidade num dado sentido, for positiva, num sentido oposto será negativa. Se uma rotação no sentido oposto ao dos ponteiros de um relógio (sentido anti-horário) for positiva, a rotação no sentido horário será negativa. Se o saldo de uma conta num banco for positivo, um levantamento de dinheiro será negativo. Se a electrização vítrea for considerada como positiva, será negativa a electrização resinosa. Uma série interminável de exemplos poderia ser dada. Os conceitos de número positivo e de número negativo constituem, do ponto de vista prático, uma das subtilezas da matemática que maior sucesso tem tido.

CAPÍTULO VII

Números imaginários

Se as ideias matemáticas que expusemos no último capítulo tiveram um grande sucesso, as do presente capítulo não tiveram menos. Contudo, o seu sucesso teve um outro carácter, a que os franceses chamam um *succés de scandale*. Não sòmente o homem prático, mas também homens de letras e filósofos exprimiram o seu espanto pela devoção dos matemáticos por entidades misteriosas que pelo seu próprio nome são designadas como imaginárias. A propósito é útil observar que um certo tipo de mentalidade tem por hábito importunar-se a si próprio e importunar os outros discutindo a aplicabilidade dos termos técnicos. Serão os números incomensuráveis, pròpriamente, números? Serão os números imaginários realmente imaginários, e serão números? — são tipos de perguntas fúteis. Deve claramente compreender-se que, em ciência, os termos técnicos são nomes arbitràriamente postos como são postos os nomes próprios às crianças quando nascem. Não pode pôr-se a questão de saber se o nome está bem posto ou mal posto. Podem ser judiciosos ou não, porque podem às vezes ser arranjados para serem fáceis de fixar ou para sugerirem noções importantes e relevantes. Deste modo não vamos aborrecer-nos em saber se os números imaginários são imaginários ou se eles são números; tomaremos o nome como um nome arbitrário atribuído a certo conceito matemático que vamos passar a explicar.

A origem do conceito é semelhante à dos números positivos e negativos. Provém igualmente dos três grandes conceitos matemáticos, o de variável, o de forma algébrica e o de generalização. Os números positivos e negativos resultam da consideração de equações como $x + 1 = 3$, $x + 3 = 1$ e da forma geral $x + a = b$. Da mesma maneira, a origem dos números imaginários resulta de equações como $x^2 + 1 = 3$, $x^2 + 3 = 1$ e de $x^2 + a = b$. A equação $x^2 + 1 = 3$, dá $x^2 = 2$, e esta tem duas soluções, a saber $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. A afirmação da existência desta alternativa, é usualmente indicada escrevendo $x = \pm\sqrt{2}$.

Até aqui nada de novo aparece que não tivesse já sido indicado. Consideremos, porém, agora a equação $x^2 + 3 = 1$; daqui resulta $x^2 = -2$, e sabe-se que não há nenhum número positivo ou negativo que, multiplicado por si próprio, dê um número negativo. Logo, se os nossos símbolos representarem apenas os números até aqui indicados, positivos e negativos, a equação $x^2 = -2$ não tem solução, e não terá por isso qualquer sentido. Tomando a forma geral $x^2 + a = b$, temos o par de soluções $x = \pm\sqrt{(b-a)}$, sòmente quando b for maior do que a. Portanto não podemos afirmar sem restrições que as «*constantes*» a e b podem ser quaisquer números, isto é, no caso indicado, as «*constantes*» a e b não poderão ser, como deveriam, variáveis independentes, sem qualquer restrição, e assim sucessivamente, diversas limitações e restrições deveriam acumular-se à nossa volta à medida que prosseguisse o nosso trabalho.

Nestas condições, devemos tomar uma atitude idêntica às anteriores: devemos dar uma nova interpretação aos nossos símbolos, de maneira que as soluções $\pm\sqrt{(b-a)}$ da equação $x^2 + a = b$ tenham sempre sentido ou um significado. Por outras palavras, exige-se uma interpretação dos símbolos de maneira que $\sqrt{a}$ tenha sempre um determinado significado, quer a seja positivo, quer seja negativo.

Evidentemente, a interpretação deve ser tal que todas as leis formais ordinárias da adição, da subtracção, da multiplicação e da divisão se mantenham, e que ao mesmo tempo essa mesma interpretação não interfira com a generalização que obtivemos quando introduzimos os números positivos e negativos. Na realidade, até deve ser feita num sentido que inclua esta como um caso particular. Quando a for negativo, podemos escrevê-lo com a forma $-c^2$, porque c^2 é positivo. Então, temos

$$\sqrt{a}=\sqrt{(-c^2)}=\sqrt{\{(-1)\times c^2\}}=\sqrt{(-1)}\sqrt{c^2}=$$
$$=-c\sqrt{(-1)},$$

Deste modo, se pudermos interpretar os nossos símbolos de maneira que $\sqrt{(-1)}$ tenha um certo significado, atingiremos o nosso objectivo. Portanto $\sqrt{(-1)}$ deve considerar-se como a cabeça ou a fachada de todas as quantidades imaginárias. A tarefa de encontrar uma interpretação para $\sqrt{(-1)}$ é mais árdua do que a que foi feita para dar um significado a — 1. De facto, enquanto que esta última, muito mais simples, foi resolvida quase instintivamente logo que surgiu, a primeira foi considerada, no princípio, mesmo pelos maiores matemáticos, como não sendo possível. Equações da forma $x^2 = -3$, quando apareceram, formam simplesmente postas de lado como sem sentido. Contudo, pouco a pouco, durante o século XVIII, e mesmo mais cedo, foi-se tornando evidente que seria conveniente interpretar estes símbolos sem sentido. O raciocínio formal podia ser utilizado com estes símbolos, admitindo simplesmente que eles satisfaziam às leis algébricas ordinárias de transformação; foi visto que um mundo de resultados interessantes poderia ser obtido, apenas com a condição de os utilizar legìtimamente. Muitos matemáticos não eram então muito claros quanto à lógica deste procedimento e daqui resultou ter-se pensado que, por um modo misterioso, era possível utilizar símbolos sem qualquer significado, desde que fossem convenientemente manipulados, para obter provas válidas de certas proposições. Nada poderia ser mais errado. Um símbolo que não é convenientemente definido não é um símbolo. É simplesmente um borrão de tinta no papel, apenas com forma fàcilmente reconhecível. Nada se poderá provar com uma sucessão de borrões, a não ser a existência de uma má caneta ou de um escritor pouco cuidadoso. Foi durante esta época que a designação de imanginário foi aplicada a $\sqrt{(-1)}$. O que então foi realmente obtido, foi uma série de proposições cuja forma confusa é esta: se existem interpretações a dar a $\sqrt{(-1)}$, e à adição, subtracção, multiplicação e divisão de $\sqrt{(-1)}$, que satisfazem às regras algébricas ordinárias (como, por exemplo, $x + y = y + x$, etc.), então tais e tais resultados podem ser obtidos. É natural que os matemáticos que assim falavam não ficassem muito satisfeitos com este «se» que devia preceder o enunciado dos seus resultados.

Deve dizer-se que a interpretação que convirá fixar não é aqui tão fácil de conseguir como o foi para os números negativos. A atenção do leitor deve recair sobre uma cuidadosa explicação prévia. Já tivemos ocasião de falar da representação de um ponto por dois números. Com o auxílio dos números positivos e negativos podemos agora representar a posição de qualquer ponto num plano por um par destes números. Assim, tomemos as duas linhas rectas XOX′ e YOY′, perpendiculares, como eixos para todas as nossas medidas. Os comprimentos medidos ao longo de OX e OY são positivos e os medidos ao longo de OX′ e OY′ são negativos. Suponhamos que um par de números, escritos numa certa ordem, por exemplo $(+3, +1)$, isto é, com um certo número, em primeiro lugar ($+3$, no exemplo escolhido) e um outro em segundo lugar ($+1$, no mesmo exemplo) representa um comprimento marcado a partir de 0, ao longo de XOX′ para o primeiro número, e ao longo de YOY′, para o segundo. Assim, na fig. 9 $(+3, +1)$ significa marcar 3 unidades ao longo de XOX′, no sentido positivo do eixo, e 1 unidade ao longo de YOY′ também no sentido positivo. Da mesma maneira $(-3, +1)$ significa marcar 3 unidades no sentido OX′, e 1 unidade no sentido OY.

Chamemos por agora a um tal par de números um «par ordenado». Assim, a partir dos dois números 1 e 3, podemos formar oito pares ordenados, a saber:

$$(+1, +3), (-1, +3),$$
$$(-1, -3), (+1, -3)$$
$$(+3, +1), (-3, +1),$$
$$(-3, -1), (+3, -1)$$

Cada um destes «pares ordenados» determina um processo de medida ao longo de XOX′ e de YOY′

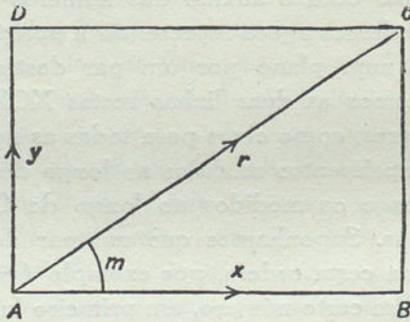

Fig. 7

que é diferente do processo determinado por qualquer dos outros.

Os processos de medida representados pelos últimos quatro pares ordenados, são dados gràficamente na figura. Os comprimentos OM e ON correspondem a (+ 3, + 1), os comprimentos OM′ e ON correspondem a (— 3, + 1), OM′|e ON′ a (— 3, — 1) e OM e ON′ a(+ 3, — 1). Vê-se agora que, completando os rectângulos indicados na mesma figura, o ponto P determina e é determinado pelo par ordenado (+ 3, + 1), o ponto P′ por (— 3, + 1), o ponto P″ por (— 3, — 1) e o ponto P‴ por (+ 3, — 1). De uma maneira geral, na fig. 8, ao ponto P corresponde o par ordenado (x, y), sendo x e y positivos, ao ponto P′, o par (x′, y) sendo x′ negativo, ao ponto P″ o par (x′, y′), sendo x′ e y′ negativos, e ao ponto P‴ o par (x, y′). Portanto, um par ordenado (x, y), sendo x e y números positivos ou negativos, determina um certo ponto, e recìprocamente. Introduzamos agora

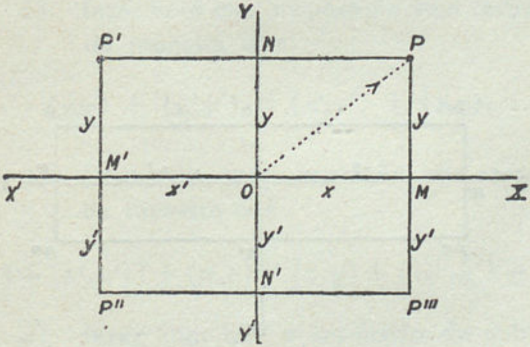

Fig. 8

alguns nomes. No par ordenado (x, y) o primeiro número é chamado a «abcissa» do ponto correspondente, e o segundo número a «ordenada» do mesmo ponto; os dois números, em conjunto, são chamados as coordenadas do ponto. A ideia da determinação da posição de um ponto pelas suas coordenadas não era nova quando foi criada a teoria dos «imaginários». É devida a Descartes, grande matemático e filósofo francês que a publicou no seu livro «Discours» aparecido em Leyden no ano de 1637. A noção de par ordenado como uma coisa que deve ser considerada pelo seu próprio interesse desenvolveu-se mais tarde e é o resultado dos esforços feitos para interpretar os imaginários da maneira mais abstracta possível.

Ainda poderá ser indicado, como ilustração do mesmo conceito de par ordenado, que o ponto M da fig. 9 é o par (+ 3, 0), o ponto N, o par (0, + 1), o ponto M′, o par (— 3, 0), o ponto N′ o par (0, — 1)

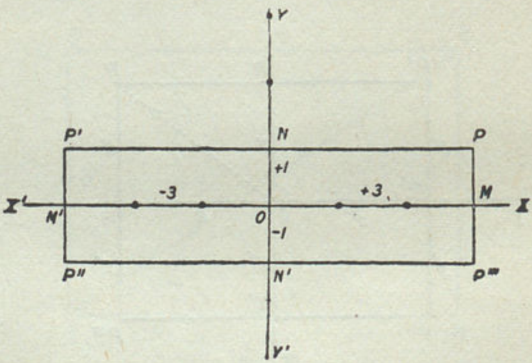

Fig. 9

e o ponto 0, o par (0, 0).

Um outro modo de representação do par ordenado (x, y) é considerá-lo como representando a linha tracejada OP. Assim um par ordenado representará determinada linha traçada a partir da «origem» 0, com um certo comprimento e com uma certa direcção. A linha OP é o vector OP. Vemos, assim, que por enquanto nos limitámos a generalizar a interpretação que primeiramente demos dos números positivos e dos números negativos. Este método de representação por vectores é muito útil quando consideramos o significado que deverá atribuir-se às operações de adição e multiplicação de pares ordenados.

Consideremos, agora, com efeito, esta questão e comecemos por perguntar que significado será conveniente atribuir à adição de dois pares ordenados (x, y) e (x′, y′). A interpretação deve

a) fazer com que o resultado da adição seja um outro par ordenado,

b) fazer com que a operação seja comutativa, de maneira que

$$(x,y) + (x',y') = (x',y') + (x,y),$$

c) fazer com que a operação seja associativa, de maneira que

$$\{(x,y)+(x',y')\}+(u,v)=(x,y)+\{(x',y')+(u,v)\}$$

d) fazer com que o resultado da subtracção seja único, de modo que quando se pretenda determinar o par ordenado desconhecido (x, y), por forma a satisfazer à equação

$$(x,\ y) + (a,\ b) = (c,\ d)$$

haja apenas uma única resposta representada por

$$(x,\ y) = (c,\ d) — (a,\ b).$$

Todos estes requisitos serão satisfeitos se escrevermos:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Notemos que adoptámos o hábito matemático de usar o mesmo símbolo + com sentidos diferentes. O sinal + no primeiro membro da equação tem o significado que acabamos de dar a este sinal, enquanto que os dois sinais + do segundo membro têm o significado da adição de números positivos e negativos que indicámos no último capítulo. Pràticamente nenhuma confusão se poderá produzir com este duplo uso do mesmo sinal.

Como exemplos de adições, temos:

$$(+3, +1) + (+2, +6) = (+5, +7)$$
$$(+3, -1) + (-2, -6) = (+1, -7)$$
$$(+3, +1) + (-3, -1) = (0, 0).$$

Quanto à subtracção, temos:

$$(x, y) - (u, v) = (x - u, y - v).$$

Logo:

$$(+3, +2) - (+1, +1) = (+2, +1)$$
$$(+1, -2) - (+2, -4) = (-1, +2)$$
$$(-1, -2) - (+2, +3) = (-3, -5).$$

É fácil ver que

$$(x, y) - (u, v) = (x, y) + (-u, -v)$$

e que

$$(x, y) - (x, y) = (0, 0).$$

Logo $(0, 0)$ deve ser considerado como o par ordenado zero. Por exemplo:

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

A representação gráfica da adição de pares ordenados é surpreendentemente fácil.

Suponhamos que OP representa (x, y), isto é, $OM = x$ e $PM = y$; suponhamos ainda que OQ representa (x_1, y_1), isto é, $OM_1 = x_1$ e $QM_1 = y_1$.

Complete-se o paralelogramo OPRQ, traçando as linhas PR e QR; então a diagonal OR representa o par ordenado $(x + x_1, y + y_1)$. Com efeito, tracemos PS paralelamente a OX; então os triângulos OQM_1 e PRS são iguais. Logo $MM' = PS = x$, e $RS = QM_1$ e assim temos:

$$OM' = OM + MM' = x + x_1$$
$$RM' = SM' + RS = y + y_1.$$

Portanto OR representa o referido par ordenado. Esta figura poderia igualmente ser considerada com OP e OQ nos outros quadrantes.

É evidente que voltámos à lei do paralelogramo que indicámos no capítulo VI, a propósito de velocidades e de forças. Deverá recordar-se que se OP e OQ representarem duas velocidades, diz-se que uma partícula se move com uma velocidade igual à soma destas velocidades, se se mover com uma velocidade igual a OR. Por outras palavras OR é a resultante das duas velocidades OP e OQ. Do mesmo modo, as forças que actuam num ponto de um corpo podem ser representadas da mesma maneira, sendo ainda válida a mesma lei do paralelogramo para a resultante dessas forças. Daqui

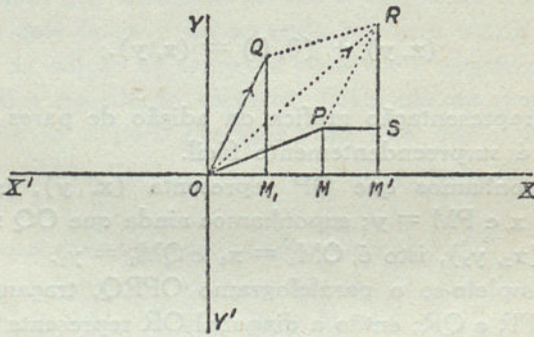

Fig. 10

resulta que podemos considerar um par ordenado como representando uma velocidade ou uma força, e a regra que demos para a adição de pares ordenados é afinal a regra que corresponde às leis fundamentais da mecânica da adição de forças e velocidades. Uma das características mais fascinantes da matemática é o modo surpreendente pelo qual se ligam uns aos outros resultados e conceitos de partes diferentes da ciência. Durante a exposição dos assuntos deste e do último capítulo, fomos simplesmente guiados por considerações matemáticas puramente abstractas; e contudo no final fomos conduzidos a leis fundamentais da natureza, leis que estão sempre presentes no espírito de qualquer engenheiro quando constrói uma máquina ou de qualquer construtor naval quando calcula a estabilidade de um navio. Não constitui paradoxo algum dizer-se que no meio das nossas divagações teóricas, por mais teóricas que sejam, estamos sempre perto das consequentes aplicações práticas.

CAPITULO VIII

Números imaginários (continuação)

Na definição da multiplicação de pares ordenados vamos ser guiados pelas mesmas considerações que fizemos a propósito da adição. A interpretação da multiplicação deve ser tal que;

α) o resultado seja um outro par ordenado;

β) a operação seja comutativa, isto é, seja

$$(x, y) \times (x', y') = (x', y') \times (x, y)$$

γ) a operação seja associativa, de modo que:

$$\{(x,y)\times(x',y')\}\times(u,v)=(x,y)\times\{(x',y')\times(u,v)\}$$

δ) o resultado seja um número único (exceptuando o caso do par zero (0, 0), de modo que quando se pretenda determinar o par desconhecido (x, y) que satisfaça à equação

$$(x, y) \times (a, b) = (c, d)$$

se obtenha um e só um resultado que representamos por

$$(x, y) = (c, d) \div (a, b)$$

ou por

$$(x, y) = \frac{(c, d)}{(a, b)}.$$

ε) Finalmente, a operação seja distributiva, de modo que

$$(x,y) \times \{(a,b) + (c,d)\} = \{(x,y) \times (a,b)\} + \\ + \{(x,y) \times (c,d)\}.$$

Todas estas condições (α), (β), (γ), (δ), (ε) podem ser satisfeitas se admitirmos uma certa interpretação que poderá, a princípio, parecer complicada mas é, por outro lado, susceptível de uma interpretação geométrica simples.

Por definição, pomos:

$$(x,y) \times (x',y') = \{(xx' - yy'), (xy' + x'y)\}. \quad \text{(A)}$$

Assim se define o significado que deve ter o símbolo $\times$ colocado entre os dois pares ordenados (x, y) e (x′, y′). Resulta evidentemente desta definição que o resultado da multiplicação é um outro par ordenado e que o valor do segundo membro da equação (A) não é alterado trocando x com x′ e y com y′. Logo as condições (α) e (β) são evidentemente satisfeitas. Quanto às outras condições (γ), (δ), (ε) vai ser igualmente fácil mostrar que são satisfeitas desde que se dê a referida interpretação geométrica. Mas antes disso será interessante verificar se alcançámos o objectivo que tínhamos em vista.

Dissemos que equações da forma $x^2 = -3$ não tinham soluções considerando apenas os números reais, positivos ou negativos. Provámos então que as nossas dificuldades desapareceriam se pudéssemos interpretar a equação $x^2 = -1$, isto é, se pudéssemos definir $\sqrt{(-1)}$ de modo que fosse:

$$\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = -1 .$$

Consideremos, agora, os três pares ordenados especiais $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Já mostrámos que:

$$(x,y) + (0,0) = (x,y)$$

Além disso, temos agora:

$$(x,y) \times (0,0) = (0,0).$$

Logo, quer relativamente à adição, quer relativamente à multiplicação, o par $(0,0)$ desempenha o papel do zero na aritmética ou na álgebra elementar; comparem-se, com efeito, as anteriores equações como $x + 0 = x$ e $x \times 0 = 0$.

Considere-se, em seguida, o par $(1,0)$; este desempenha o papel do número 1, que na álgebra se traduz por $x \times 1 = x$, para todos os valores de x. Aqui, pela lei admitida da multiplicação, temos:

$$(x,y) \times (1,0) = \{(x - 0), (y + 0)\} = (x,y) .$$

Logo (1,0) é o par unidade.

Considere-se finalmente (0,1); este interpretará, como vamos ver, o símbolo $\sqrt{(-1)}$. Com efeito, deverá ser satisfeita a propriedade característica $\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = -1$. Pela lei da multiplicação temos

$$(0,1) \times (0,1) = \{(0-1), (0+0)\} = (-1,0).$$

Mas o par (1,0) é o par unidade, de modo que (— 1,0) é o par unidade negativo; deste modo (0,1) tem a propriedade enunciada. Há, contudo, duas raízes de — 1, a saber $\sqrt{\pm}\ \sqrt{(-1)}$. Consideremos (0, — 1); recordando que $(-1)^2 = 1$, temos (0, — 1) x (0, — 1) = (— 1,0). Portanto (0, — 1) é a outra raiz procurada. Deste modo, os pares ordenados (0,1) e (0, — 1) representam $\pm\sqrt{(-1)}$. Mas qual é a correspondência? Corresponderá (0,1) a $+\sqrt{(-1)}$ e (0, — 1) a $-\sqrt{(-1)}$? ou será o contrário? A resposta é que podemos adoptar uma qualquer destas correspondências.

Os pares ordenados podem dividir-se em três tipos: (1) «os imaginários complexos» da forma (x,y), em que x e y são diferentes de zero; (2) imaginários do tipo «real» (x,0); (3) «imaginários puros» do tipo (0,y).

Consideremos as relações entre estes diversos tipos. Multipliquemos «um imaginário complexo» (x,y) por um do tipo «real» (a,o); temos:

$$(a,o) \times (x,y) = (ax,\ ay)$$

Assim, o efeito da multiplicação é apenas multiplicar cada termo do par (x,y) pelo número real positivo ou negativo, a. Em segundo lugar, multipliquemos o «imaginário complexo» (x,y) por um «imaginário puro» (0,b); temos:

$$(0,b) \times (x,y) = (-by, bx),$$

Aqui o efeito da multiplicação é mais complicado; será melhor compreendido adiante quando dermos a interpretação geométrica a que já aludimos.

Em terceiro lugar, multipliquemos o par «real» (a,0) pelo imaginário (0,b); obtemos:

$$(a,0) \times (0,b) = (0, ab)$$

Em quarto lugar, multipliquemos os dois pares «reais» (a,0) e (a′,0); obtemos:

$$(a,0) \times (a',0) = (a\,a', 0)$$

Finalmente, multipliquemos os dois imaginários puros (0,b) e (0,b′); obtemos:

$$(0,b) \times (0,b') = (-bb', 0)$$

Posto isto, consideremos a aludida interpretação geométrica, começando por alguns casos especiais.

Tomemos os pares (1,3) e (2,0) e consideremos a equação

$$(2,0) \times (1,3) = (2,6)$$

No diagrama (fig. 11) o vector OP representa (1,3), o vector ON representa (2,0), e o vector OQ o par (2,6). Assim, o produto (2,0) × (1,3) pode ser determinado geomètricamente pelo vector OQ cujo comprimento é o produto dos comprimentos dos vec-

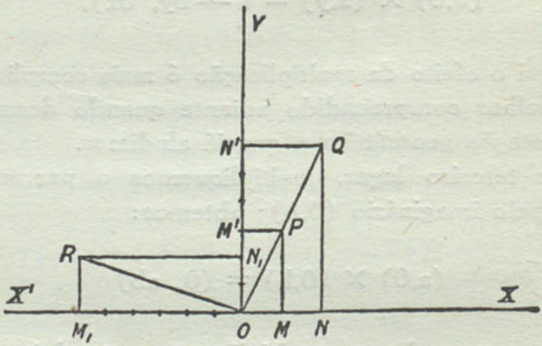

Fig. 11

tores OP e ON, e (no caso presente) prolongando OP até Q.

Por outro lado, considere-se o produto (0,2) × (1,3); temos:

$$(0,2) \times (1,3) = (-6,2)$$

O vector ON_1 representa (0,2) e o vector OR o produto (—6,2). Verifica-se que OR é perpendicular a OQ e tem o mesmo comprimento. Notemos que também neste caso o comprimento de OR é o produto dos comprimentos dos dois vectores ON_1 e OP_1. Contudo agora como temos ON_1 dirigido segundo OY, em vez de ON que era dirigido segundo OX, a direcção de OP sofreu uma rotação de 90º.

Nos dois exemplos que acabamos de dar considerámos o vector OP como modificado pelos vectores ON e ON_1. Podemos igualmente considerar que os vectores ON e ON_1 são modificados pelo vector OP, e isto poderá dar-nos uma sugestão importante para estabelecer uma lei geral sobre a direcção dos vectores. Verifica-se que a direcção do vector ON, depois de transformado (isto é, OQ), se determina dando uma rotação no sentido anti-horário, de OX para OY, igual ao ângulo XOP (no caso particular citado, esta rotação fez com que OQ ficasse com a direcção de OP). No produto de ON_1 por OP, a nova direcção para o vector ON_1, depois de transformado (isto é, OR), determina-se fazendo rodar ON_1 no mesmo sentido anti-horário de um ângulo igual a XOP, isto é, do ângulo N_1OR que é igual a XOP.

A regra geral da representação geométrica da multiplicação pode agora enunciar-se nos seguintes termos:

O produto de dois vectores OP e OQ é um vector OR cujo comprimento é o produto dos comprimentos de OP e OQ e cuja direcção é tal que o ângulo XOR é igual à soma dos ângulos XOP e XOQ. Assim podemos supor que o vector OP faz rodar o vector OQ de um ângulo igual a XOP (o ângulo $QOR =$ ângulo XOP), ou que o vector OQ faz rodar o vector OP de um ângulo igual a XOQ (ângulo $POR =$ ângulo XOQ).

Podemos agora mostrar que a lei associativa (indicada atrás em γ da multiplicação é satisfeita. Considerando primeiro o comprimento do vector resultante, vimos que é obtido pelo processo ordinário da multiplicação de números reais; deve por isso satisfazer à referida lei. Quanto à direcção, vimos que é obtida pela soma de ângulos, para a qual se verifica igualmente a lei associativa.

Acabamos de ver como uma álgebra ou «um cálculo» de vectores, num plano, pode ser obtida de modo a que, dados dois vectores quaisquer, eles podem ser somados, subtraídos, multiplicados ou divididos. Não considerámos pormenores técnicos de todos estes processos porque isso levar-nos-ia muito longe; mostrámos apenas o modo geral de procedimento. Quando interpretamos os nossos símbolos algébricos da maneira indicada, dizemos que empregamos «quantidades imaginárias» ou «quantidades complexas». Estes termos são meros pormenores e por isso não devemos deter-nos para pensar se eles foram ou não bem escolhidos.

O resultado claro que obtivemos é que equações como $x + 3 = 2$ ou $(x + 3)^2 = -2$ podem sempre interpretar-se em função de vectores, e que é sempre possível, nestes termos, encontrar as respectivas soluções. Procurando tais interpretações, note-se que em vez de 3 podemos escrever $(3,0)$ e em vez de -2, $(-2,0)$. Quanto à incógnita x poderá escrever-se com a forma (u, v). Deste modo aquelas equações escrevem-se com a forma:

$$(u,v,)+(3,0)=(-2,0)$$
$$\{(u,v,)+(3,0)\}^2=(-2,0)\ .$$

Resolvidas assim as dificuldades iniciais que nos apareceram, note-se que, de generalização em generalização, obtivemos um conjunto de noções mais rico do que aquele que nos serviu de ponto de partida. Criado na ciência um novo domínio, verifica-se que este serve todos os objectivos que anteriormente eram atingidos, além daqueles, inteiramente novos, para os quais ele foi construído. Mas, antes de nos congratularmos com os resultados até aqui obtidos, devemos desfazer uma suspeita que certamente já nasceu no espírito do leitor. A pergunta que naturalmente deve fazer é a seguinte:

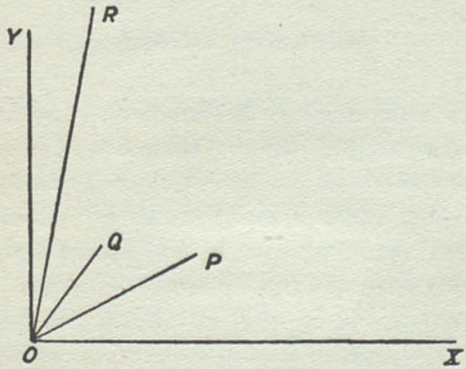

Fig. 12

Onde pára ou até onde vai toda esta invenção de novas e sucessivas generalizações? É exacto que resolvemos a dificuldade de encontrar uma solução para toda e qualquer equação quadrática, como $x^2 - 2x + 4 = 0$. Mas há um número sem-fim de outras equações, por exemplo, $x^3 - 2x + 4 = 0$, $x^4 + x^3 + 2 = 0$, etc.. Deveremos proceder a uma nova generalização sempre que nos aparece uma nova equação? Se assim fosse, o conjunto das nossas anteriores investigações, se bem que, para muitos espíritos, interessante, seria na verdade de importância insignificante. O facto saliente, que tornou possível a análise moderna, é que, com o auxílio do cálculo vectorial, qualquer equação pode ter uma interpretação adequada; e a «incógnita» correspondente representar determinado vector. Neste aspecto a matemática poderá julgar-se completa pelo que diz respeito aos seus conceitos fundamentais.

CAPÍTULO IX

Coordenadas geométricas

Os métodos e os conceitos da Geometria, pelo que diz respeito às coordenadas, foram indicados nos capítulos anteriores. Ocupemo-nos agora deles com mais minúcia, com o fim de melhorar a nossa compreensão sobre outros assuntos que já considerámos. Neste capítulo, e nos seguintes, voltamos aos números reais, positivos e negativos, pondo de lado os imaginários.

Já dissemos que, tomando dois eixos XOX' e YOY' (fig. 13) qualquer ponto P do plano é determinado por um par de números positivos ou negativos x e y, sendo x o comprimento OM, e y o comprimento PM. Esta é a ideia fundamental do emprego das coordenadas geométricas. A sua descoberta é importante na história do pensamento matemático. Deve-se (como já foi dito) ao filósofo Descartes, e conta-se que lhe ocorreu uma manhã quando estava deitado na cama. A ciência deve muitos dos seus melhores conceitos aos filósofos que conheceram a fundo a matemática. Pelo contrário, aqueles outros filósofos com uma preparação matemática defeituosa e adquirida à pressa, quase sem excepção se pode dizer que têm feito sobre a matemática considerações triviais ou mesmo completamente erradas. O facto é bastante curioso, porque afinal as ideias fundamentais da matemática são muito simples e estão dentro dos limites do pensamento filosófico. Pròvàvelmente é a sua própria simplicidade a causa dos erros cometidos; quase sempre não há preparação para pensar em coisas abstractas embora simples, e por isso é preciso um longo treino para conseguir uma imunidade

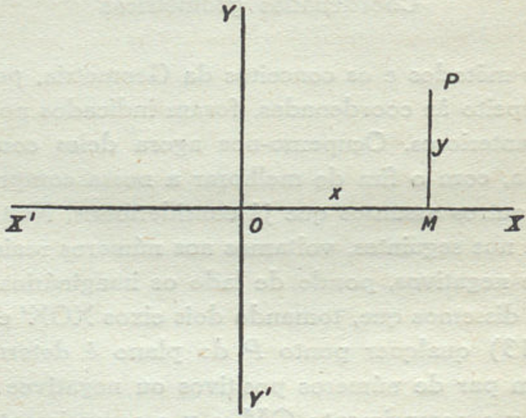

Fig. 13

contra o erro, logo que nos afastamos das coisas mais correntes.

A descoberta das coordenadas geométricas, e da geometria projectiva na mesma época, ilustra um outro facto que tem sido verificado na história do conhecimento, a saber que as maiores descobertas muitas vezes são feitas entre os assuntos melhor conhecidos. Nas alturas do século dezassete, a geometria já andava estudada há dois mil anos, mesmo que datemos o seu aparecimento do tempo dos Gregos. Euclides, nasceu em 330 a. C., e ele próprio não fez mais do que sistematizar e generalizar o trabalho de uma longa série de antecessores, alguns deles homens de génio. Depois dele, gerações e gerações de matemáticos fizeram longas investigações. Não pode dizer-se que as investigações tivessem sido prejudicadas pela fatal limitação ao progresso que consiste em estarem confinadas a um estreito grupo de homens da mesma origem — pelo contrário, até ao século dezassete elas foram feitas por Egípcios e Gregos, Árabes e Alemães. E contudo, apesar do longo trabalho feito por tantos homens, importantes segredos da Geometria não foram descobertos durante todo este tempo.

Ninguém pode estudar os elementos da Geometria sem sentir a falta que faz um método orientador. Quando se torna necessário, para demonstrar cada nova proposição que aparece, recorrer a um novo artifício engenhoso, falta na ciência em que isso se dá um requisito indispensável ao pensamento científico, o método. O interesse especial que representou, para a Geometria, o aparecimento das coordenadas geométricas, foi que com elas se introduziu um método de raciocínio. As últimas deduções de um ramo das ciências matemáticas não são de importância teorética primacial. Qualquer ciência não pode considerar-se perfeita enquanto não consegue um conjunto de métodos ligados pelos quais se possam obter as informações que sejam necessárias sobre qualquer assunto que lhe diga respeito. O desenvolvimento da ciência não é feito, primàriamente, em volume, mas em conceitos. Quanto mais se desenvolvem os conceitos, menos deduções é necessário fazer. Infelizmente, nos livros de texto de matemática repetem-se sem necessidade inúmeras proposições subsidiárias cuja importância há muito se perdeu pelo facto de se terem tornado casos particulares de verdades mais gerais — insistamos em que a generalidade é o verdadeiro espírito da matemática.

As coordenadas geométricas ilustram ainda um outro aspecto da matemática, que já foi apontado, a saber que os diversos ramos da matemática tendem, no seu desenvolvimento, a entrelaçar-se, aproveitando noções comuns. A razão está ainda no aspecto de generalidade da matemática, na circunstância de ela tratar de verdades gerais que se aplicam a todas as coisas, em virtude da sua própria existência como coisas. A este respeito o interesse das coordenadas geométricas está no facto de, através delas, a geometria, tomada a princípio, como ciência do espaço, se ligar à álgebra que tem a sua origem na ciência do número.

Retomemos as ideias fundamentais destas duas ciências e vejamos como se relacionam pelo método de Descartes. Consideremos, em primeiro lugar, a álgebra.

Pondo de parte os números imaginários, apenas consideramos os números reais, positivos e negativos. A ideia fundamental é que qualquer número, número variável, é representado por uma letra e não por algarismos determinados. Passemos à consideração das correlações que se podem estabelecer entre variáveis. Por exemplo, se x e y são duas variáveis, podemos concebê-las como relacionadas pelas equações $x + y = 1$ ou $x — y = 1$, ou de qualquer outro modo. Isto conduz-nos imediatamente ao conceito de forma algébrica.

Podemos assim passar do conceito de números variáveis ao conceito de correlações variáveis de números. Isto é, podemos generalizar a correlação $x + y = 1$, e escrever $ax + by = c$. Aqui, *a*, *b* e *c* representam quaisquer números, e são de facto também variáveis. Contudo são as variáveis que determinam a correlação variável; por sua vez, fixada uma correlação, esta passa a relacionar os números variáveis x e y. Variáveis, como *a*, *b* e *c* que são usadas para fixar uma certa correlação são chamadas «constantes» ou parâmetros. O uso do termo «constante» relativamente a uma variável, pode parecer, à primeira vista, pouco próprio, mas é, na verdade, perfeitamente natural. A investigação matemática incide sobre a relação entre as variáveis x e y, depois de fixadas as «constantes» *a*, *b* e *c*. De modo que, relativamente a x e y, as «constantes» *ab* e *c* são constantes. A expressão $ax + by = c$ representa a forma geral de uma certa forma algébrica, isto é, a correlação variável que pertence a uma certa classe.

Do mesmo modo, se generaliza $x^2 - y^2 = 1$, escrevendo-se $ax^2 + by^2 = c$, ou ainda $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$, ou também $ax^2 + 2\,hxy + by^2 + 2\,gx + 2fy = c$. Temos aqui igualmente correlações variáveis que são indicadas pelas suas diversas formas algébricas.

Consideremos agora a Geometria. O nome desta ciência faz-nos imediatamente pensar em figuras e diagramas sob a forma de triângulos, rectângulos ou quadrados, círculos, etc.. O estudo das propriedades mais simples destas figuras é o objectivo da geometria elementar, tal como é apresentado ao principiante.

Contudo, um momento de reflexão mostra-nos que não é este exactamente o referido objectivo. Poderá ser próprio para uma criança começar o seu raciocínio pensando na forma de figuras como triângulos e quadrados que ela própria poderá talhar com uma tesoura. Que é, contudo, um triângulo? É uma figura traçada e limitada por três bocados de três linhas rectas. Contudo, a limitação de espaços por porções de linhas é

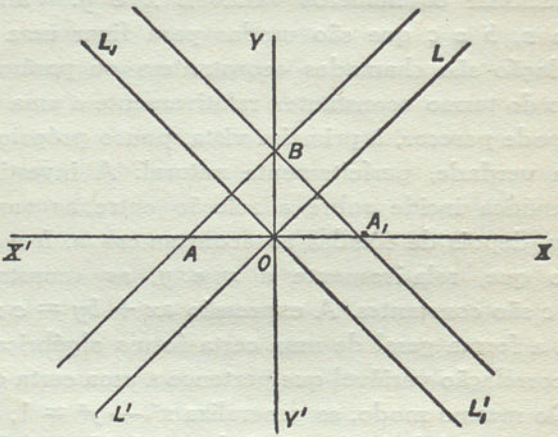

Fig. 14

uma noção um pouco complicada, e não é própria para nos dar ideias simples sobre a essência do citado objectivo. Precisamos de qualquer coisa mais simples e mais geral. Foi a obcessão com as primitivas noções — embora naturais e boas para a criação dos primeiros pensamentos sobre o assunto — que foi a causa da relativa esterilidade do estudo da Geometria durante muitos séculos. A Descartes se deve, com o emprego das coordenadas geométricas, a revelação dos objectivos verdadeiramente simples do pensamento geométrico.

Em vez de uma porção de linha recta, consideremos toda a linha, em toda a sua infinita extensão. Esta deve ser a noção geral de que devemos partir. Parece que os gregos nunca utilizaram esta noção que é hoje fundamental em todo o moderno pensamento geométrico. Euclides sempre considerou uma linha recta como traçada entre dois dados pontos, e é extremamente cauteloso quando ela deve considerar-se prolongada para além destes pontos. Nunca considerou uma linha recta como uma entidade dada em toda a sua extensão. Esta circunstância da exclusão de um infinito não imediatamente aparente aos sentidos, é característica dos Gregos em todas as suas actividades. Está inscrita na diferença que existe entre a arquitectura grega e a arquitectura gótica, e entre a religião grega e a religião moderna. A espiral das catedrais góticas e a importância da linha recta infinita na geometria actual são ambas características da transformação que caracterizou a formação do mundo moderno.

CAPÍTULO X

Secções cónicas

Logo que os geómetras gregos completaram, segundo eles próprios pensavam, o estudo das propriedades mais simples e mais importantes das figuras feitas com linhas rectas e círculos, voltaram-se para o estudo de outras curvas; e com o seu instinto quase infalível que sempre tiveram em descobrir coisas realmente valiosas, consagraram-se principalmente ao estudo das secções cónicas, isto é, das curvas que resultam da intercepção de planos com superfícies cónicas. Foi Menaechmus (nascido em 375 a. C. e morto em 325 a. C.) o primeiro geómetra grego que se ocupou deste estudo; foi discípulo de Platão e um dos tutores de Alexandre, O Grande. Alexandre, a propósito, é um notável exemplo das vantagens de uma boa educação; um outro dos seus tutores foi o filósofo Aristóteles. Tem-se a impressão de que Alexandre deve ter considerado Menaechmus um professor confuso, porque conta-se que o discípulo exigia sempre do mestre demonstrações mais curtas e claras. Foi a propósito disto que Menaechmus um dia respondeu: «no país existem estradas particulares e estradas reais mas em geometria só há uma estrada para todos». Esta resposta é exacta no sentido que Menaechmus quis fazer compreender a Alexandre. Mas se Menaechmus pensava que as suas demonstrações não podiam ser encurtadas e tornadas mais claras, enganava-se por completo; se hoje em dia tivéssemos que estudar as demonstrações feitas pelos antigos geómetras, isso seria uma autêntica maçada. O ganho obtido pela introdução, em ciência, de noções relevantes verifica-se pelo progressivo encurtamento das demonstrações que acompanha o enriquecimento conceptual. Existe um certo tipo de matemático que está sempre impaciente quando se demora a pensar sobre as noções de determinada matéria: está sempre ansioso em chegar ràpidamente à demonstração dos problemas «importantes». A história da ciência não lhe dá razão. Há estradas reais em ciência; mas os primeiros que as percorrem são os homens de génio e não os reis.

A maneira como as secções cónicas, pela primeira vez, foram apresentadas, é a seguinte: consideremos um cone (fig. 15) cujo vértice é V, e STU a base circular devendo imaginar-se que as linhas geométricas são prolongadas nos dois sentidos; tem-se assim um duplo cone, havendo portanto além da secção referida STU, a secção circular PQR. O eixo do cone CVC' passa pelos centros destes círculos e é perpendicular aos seus planos que são paralelos entre si. Na figura, as partes das curvas que são supostas estar atrás do plano do papel estão tracejadas. Suponha-se, agora, que este duplo cone é cortado por um plano que não seja perpendicular ao eixo CVC', ou, pelo menos, não necessàriamente perpendicular. Então três casos se podem apresentar:

1) O plano pode cortar o cone segundo uma curva como $AB\ A'B'$ que está inteiramente de um dos lados do vértice; quer dizer, o plano corta apenas um dos cones. Uma tal curva é uma elipse. Um caso particular é aquele em que o plano é perpendicular ao eixo CVC',

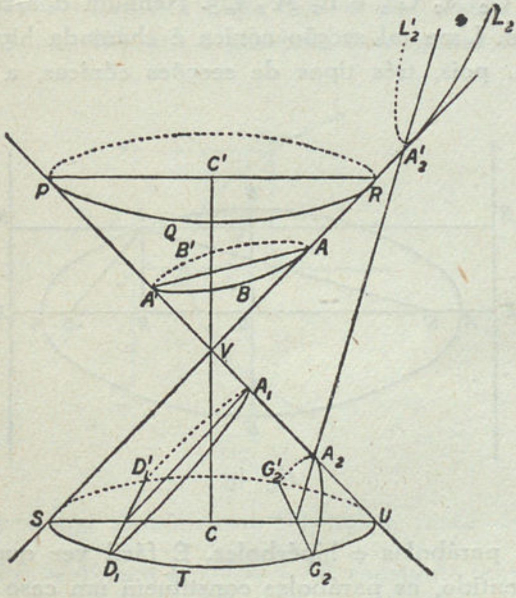

Fig. 15

então a secção, como STU ou PQR, é uma circunferência. Logo, a circunferência é um caso particular da elipse.

2) O plano pode ser paralelo a um plano tangente ao longo de uma das generatrizes; por exemplo, o plano da curva $D_1\ A_1\ D_1'$ na figura é paralelo ao

plano tangente que passa por VS; a curva está ainda limitada a um dos cones, mas não é agora uma curva fechada, uma tal secção cónica é uma parábola.

3) O plano pode cortar os dois cones de modo que a curva que resulta da intercepção consiste em duas porções ou «ramos»; é o caso ilustrado pelos dois ramos $G_2\ A_2\ G'_2$ e $L_2\ A'_2\ L'_2$. Nenhum dos ramos é fechado. Uma tal secção cónica é chamada hipérbole.

Há, pois, três tipos de secções cónicas, a saber:

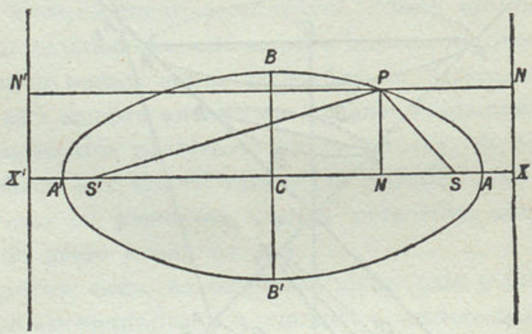

Fig. 16

elipses, parábolas e hipérboles. É fácil ver que, num certo sentido, as parábolas constituem um caso limite, entre as elipses e as hipérboles.

Os três nomes foram dados por Apollonio de Perga (nascido em 260 a. C. e morto em 200 a. C.) que escreveu um tratado sobre as secções cónicas, considerado como uma obra fundamental até ao século XVI.

É de notar que a investigação das propriedades destas curvas deve ter sido difícil para os geómetras gregos. As curvas são curvas planas, mas o seu estudo exige o traçado, em perspectiva, de um sólido. Por exemplo, na figura aqui traçada quase que não traçámos linhas auxiliares, e contudo o desenho é relativamente complicado. As formas das três curvas, quando traçadas no seu plano, estão indicadas nas figs. 16, 17 e 18. Os pontos A e A', nas figuras, são chamados os vértices e a linha AA' o eixo maior. Deve notar-se (fig. 17) que a parábola tem apenas um vér-

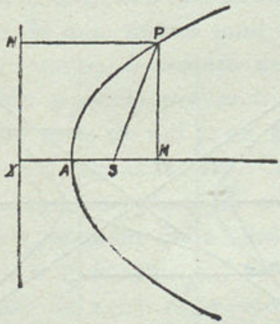

Fig. 17

tice. Apollonio demonstrou [1] que a razão de PM^2 para $AM.\,MA'$, isto é, $\dfrac{PM^2}{AM\,.\,MA'}$ é constante tanto para a elipse como para a hipérbole (figs. 16 e 18) e que a razão de PM^2 para AM é constante para a parábola (fig. 17); toma como base, em quase todos os seus trabalhos, esta propriedade.

---

[1] Vid. BALL, loc. cit., na sua referência a Apollonio e Pappus.

Nas figs. 16 e 18, estão marcados dois pontos S e S', e na fig. 17 um ponto S. São os focos das curvas, pontos muito importantes. APOLLONIO mostrou que, no caso da elipse, a soma de SP e de $S'P$, isto é, $SP + S'P$ é constante, qualquer que seja o ponto P da curva considerado, e é igual a AA'. No caso da hipérbole a diferença $S'P - SP$ é constante e igual a AA' quando P é um ponto de um dos ramos, e a diferença $SP' - S'P'$ é igualmente constante e igual a AA' quando

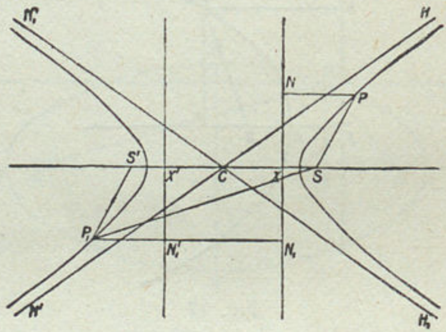

Fig. 18

P' é um ponto do outro ramo. Nada disto existe no caso da parábola.

Quinhentos anos depois do último geómetra grego, Pappus de Alexandria descobriu o segredo final que completou esta linha de pensamento. Nas figs. 16 e 18 estão indicadas duas linhas XN e $X'N'$ e na fig. 17 a linha XN. São as directrizes das curvas, duas para a elipse e a hipérbole e uma para a parábola. Cada directriz corresponde ao foco mais próximo.

A propriedade característica de um foco, S, e da corespondente directriz XN, para uma qualquer das três curvas, é que a razão SP para PN, isto é, $\frac{SP}{PN}$ é constante, sendo PN a perpendicular baixada de P sobre a directriz e P um ponto qualquer. Temos aqui uma propriedade comum às três curvas. Para as elipses a razão (1) $\frac{SP}{PN}$ é menor do que 1, para as parábolas igual a 1, e para as hipérboles maior do que 1.

Quando Pappus terminou este estudo deve ter ficado com a impressão de que, aparte uma ou outra propriedade menos importante, o assunto estava esgotado, e se lhe tivesse sido possível prever o desenvolvimento da ciência durante mais de mil anos, teria acabado por ficar convencido de que assim era. Contudo, as ideias realmente fecundas neste domínio não tinham ainda sido descobertas e ninguém tinha ainda conseguido ver as suas importantes aplicações no estudo da natureza.

Sirva este caso de aviso impressionante para aqueles que limitam o conhecimento e as investigações ao que é aparentemente útil; as secções cónicas foram estudadas durante 1800 anos de uma maneira puramente abstracta, sem o pensamento da sua utilidade imediata, apenas por simples desejo dos matemáticos, e contudo no fim deste longo período descobriu-se que constituíam uma chave necessária para a compreensão das mais importantes leis da natureza.

É que, entretanto, um outro estudo inteiramente distinto daquele, tinha sido efectuado, o da astronomia.

---

(1) Vid. Nota B.

O grande astrónomo grego Ptolomeu (morto em 168) publicou o seu tratado fundamental sobre astronomia na Universidade de Alexandria, explicando os movimentos aparentes, entre as estrelas fixas, do sol e dos planetas, na suposição de que a terra está em repouso e são os planetas e o sol que se movem em torno dela. Durante os 1300 anos seguintes, o número das observações astronómicas aumentou, bem como a sua precisão, tornando-se então cada vez mais complicada, na explicação dos movimentos, a hipótese de Ptolomeu. Copérnico (nascido em 1473 e morto em 1543) observou que os movimentos dos corpos celestes podiam ser explicados de uma maneira mais simples supondo fixo o sol, e móveis à sua volta, a terra e os outros planetas. Contudo, admitiu ainda para estes movimentos a forma circular, apenas modificada por pequenas correcções impostas arbitràriamente aos movimentos primários circulares. Era isto que se admitia quando Kepler nasceu em Stuttgart, na Alemanha, em 1571. Havia então duas ciências, a da geometria das secções cónicas e a da astronomia, estudadas desde longa data, independentemente uma da outra, sem qualquer suspeita de uma ligação entre elas. Kepler foi astrónomo mas foi também um hábil geómetra, e sobre a questão das secções cónicas chegou a noções bastante avançadas para a sua época. Este é um dos muitos exemplos que provam a falsidade do conceito de que o êxito na investigação científica exige uma exclusiva atenção numa única e estreita linha de pensamento. As noções novas aparecem mais fàcilmente quando há uma certa vastidão de conhecimentos, não necessàriamente uma enorme vastidão de conhecimentos, mas tais que seja possível ligar métodos e conceitos de diferentes linhas de pensamento. Deve recordar-se que Carlos Darwin, para chegar à sua concepção da lei da evolução, foi muito auxiliado pela leitura do famoso *Ensaio sobre a População* de Malthus, um trabalho que trata de um assunto diferente, pelo menos, conforme então se pensava.

Kepler enunciou três leis sobre o movimento dos planetas, as primeiras duas em 1609, e a terceira dez anos mais tarde. São as seguintes:

1) As órbitas dos planetas são elipses de que o sol ocupa um dos focos.

2) O raio vector dirigido do sol para um planeta descreve áreas iguais em tempos iguais.

3) Os quadrados dos períodos são proporcionais aos cubos dos eixos maiores das órbitas.

Estas leis foram um primeiro passo dado para um mais amplo desenvolvimento dos conceitos a que estão ligadas. Newton (nascido em 1642 e morto em 1727) concebeu a ideia da gravitação universal segundo a qual dois corpos se atraem proporcionalmente às massas e na razão inversa do quadrado da sua distância. Esta lei geral, combinada com as leis do movimento a que ele deu igualmente a sua forma geral, permitiu explicar satisfatòriamente os fenómenos astronómicos, incluindo as leis de Kepler, constituindo hoje uma lei fundamental da Física.

Entre outras coisas, demonstrou-se que os cometas têm trajectórias elípticas muito alongadas, ou parabólicas ou hiperbólicas. Os cometas que voltam — como o cometa de Halley — movem-se seguramente descrevendo órbitas elípticas. Mas o facto essencial na demonstração da lei da gravitação foi a verificação das leis de

Kepler ligando o movimento dos planetas com a teoria das secções cónicas.

Do século dezassete para cá, a teoria abstracta das curvas resultou do duplo renascimento da geometria provocado pela introdução da geometria analítica e da geometria projectiva. Na geometria projectiva as noções fundamentais andam à volta da consideração de feixes de rectas que passam por um ponto. Como se vê na fig. 19, se A,B,C,D forem quatro pontos fixos de uma

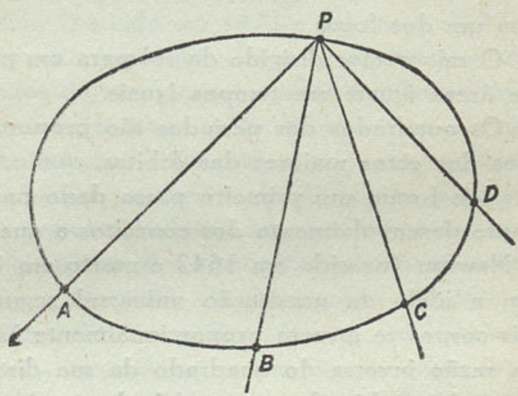

Fig. 19

secção cónica e P um ponto variável da mesma curva, o feixe de rectas PA, PB, PC e PD goza de uma propriedade especial. Basta-nos dizer aqui que isso constitui uma ideia fundamental da geometria projectiva. Hoje em dia a ideia de «secção» tem importância insignificante de modo que podemos hoje dizer simplesmente cónicas, em vez de secções cónicas.

Voltemos um pouco atrás, ao último capítulo. Dissemos que à forma algébrica geral $ax + by = c$ correspondem linhas rectas. Vimos que qualquer linha recta tem uma equação desta forma, e que a cada equação corresponde uma linha recta. Vejamos agora outras formas algébricas. Por exemplo, formas em que intervenham x^2, xy e y^2. A forma geral poderá ser escrita da seguinte maneira:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Que representa esta equação? A resposta é que (quando realmente representa um lugar geométrico) a equação determina uma secção cónica, isto é, a equação de qualquer cónica pode sempre escrever-se com aquela forma.

A discriminação da forma particular da cónica a partir da sua equação é muito fácil. Depende de $ab - h^2$. Se $ab - h^2$ é um número positivo, a curva é uma elipse; se $ab - h^2 = 0$, a curva é uma parábola, e se $ab - h^2$ é um número negativo a curva é uma hipérbole.

Por exemplo, escrevamos $a = b = 1$, $h = g = f = 0$, $c = -4$. Temos então a equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$. É fácil provar que esta é a equação de uma circunferência cujo centro é a origem e cujo raio é igual a 2 unidades de comprimento. Neste caso $ab - h^2$ é igual a $1 \times 1 - 0^2$, isto é, 1, e, portanto, é um número positivo. Assim deve ser porque a circunferência é um caso particular da elipse. Generalizando, a equação de uma circunferência é da forma:

$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$, para a qual $ab - h^2$ é igual a $a^2 - 0$, isto é, a^2, que é essencialmente uma quantidade positiva.

A forma geral da equação de uma parábola é

$$(dx + ey)^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

isto é,

$$d^2 x^2 + 2\ de\ xy + e^2 y^2 + 2gx + 2fy + c = 0;$$

por comparação temos: $a = d^2$, $h = de$, $b = e^2$, e portanto $ab — h^2 = d^2e^2 — (de)^2 = 0$. Deste modo é satisfeita a condição indicada. A equação $2xy — 4 = 0$, para a qual $a = b = g = f = 0$, $h = 1$, $c = —4$ representa uma hipérbole. Neste caso, com efeito, $ab — h^2$ é igual a $0 — 1^2$, isto é, $— 1$.

A limitação que indicámos atrás ao escrever — *quando a equação geral representa um lugar geométrico* — é necessária, porque em alguns casos a equação geral não representa um lugar geométrico real. Por exemplo, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ é uma equação que não pode ser satisfeita por valores reais de x e y. É por vezes costume dizer que o lugar geométrico correspondente é constituído por pontos imaginários. Trata-se de um conceito um pouco complexo que aqui não consideramos.

Alguns casos excepcionais são incluídos na forma geral da equação que podem não ser imediatamente reconhecidos como secções cónicas. Escolhendo convenientemente as constantes, a equação poderá representar duas linhas rectas. Não se pode dizer que este caso não caiba dentro do conceito grego de secção cónica. Com efeito, considerando a figura do duplo cone pode ver-se que existem planos que passando pelo vértice V cortam o cone segundo linhas rectas que se interceptam em V. O caso de duas linhas rectas paralelas pode também ser incluído no caso geral, basta considerar o cilindro como um caso particular do cone. Seja como for, se ou não os antigos gregos consideraram estes casos especiais como secções cónicas, eles estão certamente incluídos entre as curvas representadas pela forma algébrica geral do segundo grau que indicámos. Este facto deve ser posto em relevo, porque é característico da matemática moderna o incluir entre as formas gerais todos os casos particulares que primeiramente foram considerados à parte ou tratados por modo especial. Isso resulta do seu propósito constante de generalização.

CAPITULO XI

Funções

O termo função é usado na matemática como também na linguagem vulgar. Por exemplo, diz-se «o seu temperamento é função da sua digestão» com um significado análogo ao que se emprega em matemática. Com a afirmação quere-se significar que é possível indicar o temperamento de uma pessoa quando se conhece a sua digestão. Assim, o conceito de «função» não é difícil; vejamos porém como ele se deve precisar quando se aplica em matemática a números variáveis. Consideremos primeiro alguns exemplos concretos: se um comboio se desloca com a velocidade de 20 milhas por hora, a distância s (em milhas) percorrida num certo número de horas, digamos, t horas, é dada por $s = 20 \times t$. Assim, s é chamada uma função de t. Também podemos dizer que $20 \times t$ é uma função de t com a qual s se identifica. Se João tem mais um ano do que Tomás, então quando Tomás tiver a idade x, João terá a idade $y = x + 1$; y é função de x, a saber, y é a função $x + 1$.

Nestes exemplos, t e x são chamados os argumentos das funções em que aparecem. Assim, t é o argumento da função $20 \times t$, e x é o argumento da função $x + 1$. Se $s = 20 \times t$, e $y = x + 1$, então s e y são chamados os «valores» das funções $20 \times t$ e $x + 1$ respectivamente.

Considernado agora o caso geral, podemos definir uma função, em matemática, como uma correlação entre dois números variáveis, chamados respectivamente o argumento e o valor da função, tal que, qualquer que seja o valor atribuído ao «argumento da função», seja determinado unìvocamente o «valor da função». O inverso não é necessàriamente verdadeiro, isto é, quando o valor da função é dado, pode não ser unìvocamente determinado o argumento. Outras funções do argumento x são $y = x^2$, $y = 2x^2 + 3x + 1$, $y = x$, $y = \log x$, $y = \operatorname{sen} x$. As duas últimas funções deste grupo exigem o conhecimento da álgebra e da trigonometria. São aqui dadas apenas a título de exemplo.

Até aqui, se bem que tivéssemos dito o que se devia entender em geral por função, apenas mencionámos várias funções especiais. Mas a matemática, fiel aos seus métodos gerais de procedimento, representa por símbolos o conceito de função. Assim, escreve-se $F(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $\Phi(x)$, etc. para qualquer função de x, estando o argumento x dentro de um parêntesis, e uma letra qualquer fora para exprimir a função. Esta notação tem os seus defeitos. Assim, como é óbvio, choca com a convenção feita de que uma simples letra deve representar um número variável, visto que aqui as letras F, f, g, Φ, etc., escritas antes do parêntesis representam funções variáveis. Um modo de evitar qualquer confusão seria usar as letras gregas (como, por exemplo, Φ) para representar as funções; ou então usar só as letras f e F (letras iniciais da palavra função) para as funções, com outras adjacentes quando fosse necessário.

Geralmente escreve-se $y = f\ (x)$, sendo y o valor da função cujo argumento é x; $f\ (x)$ pode representar qualquer função como $x + 1$, $x^2 - 2x + 1$, $sen\ x$, $log\ x$ ou próprio x. O ponto essencial é que quando x seja dado, y seja bem determinado. É importante notar a generalidade deste conceito. Assim, $y = f\ (x)$ pode exprimir, se assim o desejarmos, o valor zero para todos os valores inteiros de x, e o valor 1 para todos os outros valores de x. Portanto, nestas condições, ao escrevermos $y = f\ (x)$ significamos que y é igual ou a zero ou a 1, conforme x é igual a um número inteiro ou não. Isto é, $f\ (1) = 0$, $f\ (2) = 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = 1$, $f\ (\sqrt{2}) = 1$, etc..

Esta escolha do significado de $f\ (x)$ fornece uma função perfeitamente boa do argumento x segundo a definição geral de função.

Uma função, que é afinal apenas uma espécie de correlação entre duas variáveis, é representada como outras correlações, por um gráfico, isto é, pode ser representada pelo método da geometria analítica. Por exemplo, na fig. 2 do capítulo II, representa-se o gráfico da função $\frac{1}{v}$ sendo v o argumento e p o valor da função. Neste caso, o gráfico está apenas traçado para valores positivos de v que são os únicos que têm significado físico. Da mesma maneira, na fig. 14 do capítulo IX, a linha AB é o gráfico da função $x + 1$, sendo x o argumento e y o valor da função; na mesma figura a linha $A_1 B$ é o gráfico da função $1 - x$, a linha LOL' é o gráfico da função x, sendo x o argumento e y o valor da função.

Estas funções, que são expressas por fórmulas algébricas simples, são próprias para serem representadas por gráficos. Mas no caso de algumas funções esta representação poderá conduzir a erros sem uma cuidadosa explicação, ou mesmo ser impossível. Assim, considere-se a função que acima indicámos que tem os valores 0 ou 1 para valores respectivamente inteiros ou não inteiros de x. Poderia parecer que o seu gráfico seria a linha ABA′ (fig. 20) traçada paralelamente ao eixo XOX', e à distância de 1 unidade de comprimento. Mas os pontos B, C_1, C_2, C_3, C_4, etc. correspondentes aos valores 0, 1, 2, 3, 4 do argumento x não representam valores da função; em vez destes devem ser tomados os pontos 0_1, B_1, B_2, B_3, B_4, etc., sobre o eixo OX. É fácil indicar funções para as quais a representação gráfica é não só inconveniente mas mesmo impossível. Essas funções são muito importantes na alta matemática; não temos aqui necessidade de nos ocuparmos de tais funções.

Uma divisão importante que pode ser feita das funções consiste em dividi-las em funções contínuas e funções descontínuas. Uma função é contínua quando o seu valor varia gradualmente para variações graduais do argumento e é descontínua quando o seu valor faz saltos bruscos. Assim as funções $x + 1$ e $1 - x$ cujos gráficos estão representados na fig. 14 do capítulo IX são funções contínuas, e o mesmo se dá com a função $\frac{1}{v}$ figurada no capítulo II, considerando apenas os valores positivos de v. Já a função representada na fig. 20 deste capítulo é descontínua visto que para os valores $x = 1$, $x = 2$, etc., do seu argumento, o seu valor experimenta variações bruscas.

Consideremos alguns exemplos de funções que se nos apresentam no estudo da natureza, com o fim de

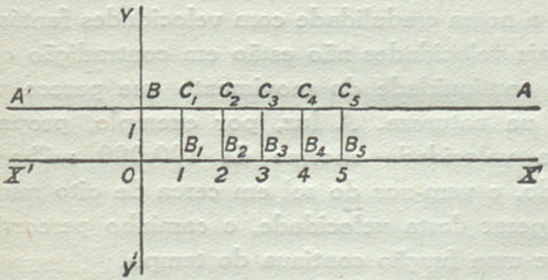

Fig. 20

precisarmos melhor o significado da continuidade e da descontinuidade.

Considere-se um comboio na sua marcha a partir, por exemplo, da estação de Euston, o término, em Londres, da «London and North-Western Railyway». Ao longo da linha estão as estações de Bletchley e Rugby. Designe-se por t o número de horas de percurso do comboio, contado a partir de Euston, e por s o número de milhas percorridas. Deste modo s é função de t, isto é, é o valor variável que corresponde ao argumento variável t. Conhecendo os pormenores da marcha do comboio, determina-se s logo que t seja dado. Pondo de parte milagres, podemos confiadamente admitir que s é uma função contínua de t. É impossível admitir a eventualidade de, tendo seguido de um modo contínuo a marcha do comboio de Euston até Bletchley, vê-lo surgir inesperadamente na estação de Rugby. A ideia é fantástica de mais para entrar nos nossos cálculos: corresponde a possibilidades que se não descortinam fora das «Noites árabes»; e mesmo naquelas histórias a pura descontinuidade do movimento está longe de ser imaginada; tais histórias apenas ousam forçar a nossa credulidade com velocidades fantásticas. Mas tais velocidades não estão em contradição com a lei da continuidade do movimento que parece verificar-se na natureza. A luz, por exemplo, propaga-se com a velocidade enorme de 190.000 milhas por segundo, e vem-nos do sol em cerca de oito minutos; mas apesar desta velocidade, o caminho percorrido é sempre uma função contínua do tempo.

Nem sempre é simples pensar que a velocidade de um corpo é invariàvelmente uma função contínua do tempo. Considere-se o comboio num dado instante t: move-se com uma certa velocidade, seja de v milhas por hora, sendo v igual a zero quando o comboio está parado numa estação, e negativa quando o comboio recua. Fàcilmente admitimos que v não pode variar ràpidamente no caso de um comboio, grande e pesado. Se, por exemplo, um comboio se mover com a velocidade de 40 milhas por hora entre as $11^h\ 45^m$ e o meio-dia, não poderá passar bruscamente para uma velocidade de 50 milhas por hora. Pelo contrário admitimos que qualquer variação da velocidade é sempre um processo gradual. Mas que dizer de certos impulsos rápidos de intensidade adequada? Suponhamos que dois comboios chocam um com o outro; ou melhor, para considerar objectos mais pequenos, suponhamos que damos um pontapé numa bola. Aparentemente, a bola é posta em movimento bruscamente. Aqui os nossos sentidos não repudiam a possibilidade de a velocidade ser uma função descontínua do tempo, contràriamente ao que se verifica no exemplo que atrás demos quando falámos no brusco aparecimento do comboio na estação de Rugby, depois de deixar a estação de Bletchley. Contudo, na natureza, se são verdadeiras as leis do movimento que conhecemos, não há velocidades descontínuas. Quando uma velocidade nos parece descontínua, na realidade é uma velocidade que sofre uma variação gradual, embora rápida. Seria contudo temerário generalizar a ponto de se dizer que não aparecem funções descontínuas no estudo dos fenómenos naturais. Um homem que, confiado na informação que lhe dessem de que a altitude média da terra, acima do nível do mar, entre Londres e Paris, é uma função contínua da distância, contada a partir de Londres, caminhasse de noite junto do rochedo de Sjakespeare, perto de Dôver, contemplando a via láctea, morreria antes que tivesse tempo de reorganizar as suas ideias sobre a necessidade de tomar sempre cuidado com certas conclusões científicas.

É fácil indicar funções descontínuas, mesmo se nos limitarmos às mais simples fórmulas algébricas. Por exemplo, tomemos a função $y = \frac{1}{x}$ que já atrás considerámos com a forma $p = \frac{1}{v}$, com a limitação de v ser positivo. Suponhamos agora que x pode ter qualquer valor, positivo ou negativo. O gráfico da função está traçado na fig. 21. Considere-se a variação de x desde um valor negativo muito grande até zero e depois até valores positivos sucessivamente crescentes. Se, por exemplo, um ponto móvel M representar x sobre XOX', o ponto M partirá da extrema esquerda da figura e passará sucessivamente pelos pontos M_1, M_2, M_3, M_4, etc.. Os pontos correspondentes da função são P_1, P_2, P_3, P_4, etc.. É fácil ver que existe um ponto de descontinuidade para $x = 0$, isto é, na origem. O valor da função à esquerda da origem torna-se infinitamente grande, mas negativo; a função reaparece à direita da origem infinitamente grande mas positiva. Logo tendendo para zero o segmento M_2 M_2, verifica-se que há uma variação brusca dos valores da função em M_2 e em M_3. Isto é, quanto mais pequeno é o segmento M_2 M_3, contendo sempre a origem, maior é a variação da função nesses pontos. A figura mostra bem que para muitas funções as descontinuidades sòmente ocorrem em pontos isolados, como também se verifica na fig. 20, de modo que limitando os valores do argumento pode obter-se uma função contínua para esses valores. Assim é evidente na fig. 21 que a função $y = \dfrac{1}{x}$ é contínua para valores positivos de x, excluindo a origem. É igualmente contínua para valores negativos de x, excluindo a origem. Do mesmo modo a função representada na fig. 20 é contínua entre B e C, e entre C_1 e C_2, e entre C_2 e C_3, etc., excluindo sempre os pontos limites.

Há contudo funções que são descontínuas em todos os pontos. Por exemplo a função $f\ (x)$ que é igual a

1, $f(x) = 1$, para valores fraccionários de x, e igual a 2, $f(x) = 2$, para valores irracionais de x, é descontínua em todos os pontos.

Consideremos mais de perto a definição de continuidade. Dissemos que uma função é contínua quando o seu valor varia gradualmente para variações graduais do argumento, e é descontínua quando varia por saltos bruscos. Esta definição contentava os nossos mate-

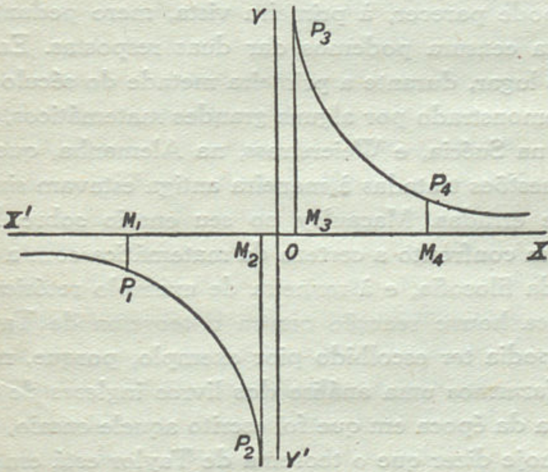

Fig. 21

máticos do passado mas não satisfaz os modernos. Vale a pena gastar algum tempo com isto; porque se chegarmos a compreender as objecções feitas contra aquela definição, compreenderemos bem o espírito da matemática moderna. A diferença entre a antiga e a nova matemática está em que termos semi-metafóricos e vagos como «gradual» ou «gradualmente» são hoje postos completamente de lado nos enunciados exactos da matemática. A matemática moderna sòmente admite enunciados, definições e argumentos que empreguem exclusivamente as noções simples e correctas de número, de grandeza e de variável que constituem a sua base. Dados dois números, um pode ser maior ou menor do que o outro, ou pode ser determinado múltiplo, mas nenhuma relação de «gradual» se pode estabelecer entre eles, e portanto o termo é inadmissível. Isto pode parecer, à primeira vista, mero pedantismo. A esta censura podemos dar duas respostas. Em primeiro lugar, durante a primeira metade do século XIX, foi demonstrado por alguns grandes matemáticos, como Abel na Suécia, e Weierstrass, na Alemanha, que muitas questões tratadas à maneira antiga estavam simplesmente erradas. Macauley no seu ensaio sobre Bacon põe em confronto a certeza da matemática com a incerteza da filosofia, e à maneira de exemplo retórico diz: «Nunca houve reacção contra o teorema de Taylor». Não podia ter escolhido pior exemplo, porque, mesmo sem fazermos uma análise dos livros ingleses de matemática da época em que foi escrito aquele ensaio, podemos hoje dizer que o teorema de Taylor está em todos eles enunciado e demonstrado de uma maneira errada. Justifica-se pois a ansiosa precisão da matemática moderna que é necessária à cuidadosa exactidão dos enunciados. Em segundo lugar, é necessária à própria investigação. Conduz à clareza do pensamento dando-lhe uma maior segurança e maior fecundidade no exercício da combinação de novas noções. Quando os enunciados iniciais são vagos e pouco cuidados, a cada passo, no desenvolvimento de um raciocínio, o senso comum tem que intervir para limitar as aplicações ou explicar o seu significado. Mas no raciocínio criador o senso comum é um mau mestre. O seu único critério num juízo é que as novas noções se pareçam com as antigas. Por outras palavras, a sua actuação desfaz toda a originalidade.

Abrindo o nosso caminho no sentido de uma definição precisa de continuidade (aplicada às funções) consideremos mais de perto a afirmação que fizemos de que nenhuma relação de «graduação» existe entre números. Pode perguntar-se, não pode um número ser apenas um pouco maior do que um outro número, ou por outras palavras, não poderá a diferença entre dois números tornar-se pequena? O ponto essencial é que, abstractamente, pondo de lado qualquer aplicação arbitràriamente dada, não existe o que possa chamar-se um número grande ou um número pequeno. Um milhão de milhas é um número pequeno de milhas para um astrónomo que estuda as estrelas, mas um milhão de libras é já um grande rendimento anual. Muitos exemplos se poderiam dar para mostrar que grande ou pequeno, em sentido absoluto, não tem aplicação abstracta a números. Dados dois números podemos dizer que um é maior ou menor do que o outro mas não pode dizer-se, sem especificação de circunstâncias particulares, que um dos números é grande e o outro pequeno. Devemos, pois, definir a continuidade sem qualquer referência a variação gradual ou pequena no valor de uma função.

Com este fim vamos dar nomes a algumas noções que nos serão úteis igualmente quando considerarmos os limites e o cálculo diferencial.

Um «intervalo» de valores do argumento x de uma função $f(x)$ é constituído por todos os valores compreendidos entre dois dados valores do argumento. Por exemplo, o intervalo entre $x = 1$ e $x = 2$ é constituído por todos os valores de x entre *1* e *2*, isto é, por todos os números reais entre 1 e 2. Os números limites de um intervalo podem não ser inteiros. Um intervalo de valores do argumento *contém* um número *a*, quando *a* é um membro do intervalo. Por exemplo, o intervalo entre 1 e 2 contém $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}$, etc..

Um conjunto de números aproxima-se de um número *a*, com uma certa *aproximação k*, quando a diferença entre *a* e um número qualquer do conjunto é inferior a *k*. Diz-se que k é o módulo da aproximação.

Assim o conjunto 3, 4, 6, 8 aproxima-se do número 5, com uma aproximação inferior a 4. Neste caso a aproximação a menos de 4 não é a mais pequena que poderia ser indicada, assim o mesmo conjunto aproxima-se de 5 com aproximações inferiores a 3,1 ou 3,01 ou 3,001. Do mesmo modo, os números 3,10, 3,141, 3,1415, 3,14159 aproximam-se de 3,13102 com aproximações inferiores a 0,032 ou ainda inferiores a 0,03103.

Estas duas noções de intervalo e de aproximação de um certo número com uma determinada aproximação, são muito simples; a sua única dificuldade é que parecem triviais. Mas quando combinadas com a noção seguinte — a de vizinhança de um número — formam o fundamento do moderno raciocínio matemático. Que é que queremos significar dizendo que determinada coisa é verdadeira para a função $f(x)$ na vizinhança do valor a do argumento x? É esta noção fundamental que vamos agora precisar.

Diz-se que os valores de uma função $f(x)$ têm determinada característica na «vizinhança de a» quando é possível encontrar um intervalo que 1.º) contenha o número a sem ser como ponto limite, e 2.º) seja tal que os valores da função, correspondentes a valores diferentes de a, e pertencentes ao intervalo, possuam a referida característica. O valor $f(a)$ da função para o valor a do argumento pode ou não ter essa característica. Nada fica decidido sobre este ponto quando se diz *vizinhança de a*.

Por exemplo, consideremos a função x^2. Na *vizinhança* de 2, os valores de x^2 são inferiores a 5. Na verdade, podemos determinar um intervalo, como de 1 a 2,1, que 1.º) contém 2 sem ser como ponto limite e 2.º) é tal que, para valores de x, dentro dele, x^2 é inferior a 5.

Sabemos agora, combinando as noções precedentes, o que deve entender-se quando se diz que na vizinhança de a, a função $f(x)$ se aproxima de c com uma certa *aproximação* k. Com isso significa-se que pode determinar-se um intervalo que 1.º) inclui a não como ponto limite e 2.º) é tal que todos os valores de $f(x)$ para valores de x dentro do intervalo sem ser para o valor a, diferem de c de uma quantidade inferior a k. Por exemplo, na vizinhança de 2, a função $\sqrt{x}$ aproxima-se de 1,41425 com uma aproximação inferior a 0,0001. Isto é assim porque a raiz quadrada de 1,9999 6164 é 1,4142, e a raiz quadrada de 2,00024449 é 1,4143; logo para valores de x no intervalo 1,99996164 a

2,00024449, que contém 2, sem ser como ponto limite, os valores da função $\sqrt{x}$ estão todos entre 1,4142 e 1,4143, e diferem de 1,41425, com uma aproximação inferior 0,0001. Neste caso, se desejarmos, podemos fixar um módulo de aproximação mais pequeno, a saber 0,000051 ou 0,0000501. Consideremos um outro exemplo: na vizinhança de 2 a função x^2 aproxima-se de 4 com uma aproximação inferior a 0,5. Na verdade, $(1,9)^2 = 3,61$ e $(2,1)^2 = 4,41$; o intervalo exigido, 1,9 a 2,1, contém 2 sem ser como ponto de limite. Este exemplo mostra bem que determinada proposição sobre uma função $f(x)$ na vizinhança de um número a, é distinta doutras relativas ao valor de $f(x)$ quando $x = a$. A indicação de um intervalo para o qual uma proposição seja verdadeira, é sempre precisa. Assim, o simples facto de ser $2^2 = 4$ nada nos diz se ou não, na vizinhança de 2, a função x^2 é igual a 4.

A compreensão das noções anteriores auxilia-nos a compreender os fundamentos da matemática moderna. Empregaremos noções análogas no capítulo sobre as séries e também no capítulo sobre o Cálculo diferencial.

Estamos agora preparados para definir «funções contínuas». Uma função $f(x)$ é «contínua» para um valor a do seu argumento quando na vizinhança de a o seu valor se aproxima de $f(a)$, qualquer que seja a aproximação fixada. Por exemplo, x^2 é uma função contínua para o valor 2 do seu argumento, porque qualquer que seja a aproximação k escolhida, pode-se sempre determinar um intervalo que 1.º) contenha 2 sem ser como ponto limite, e 2.º) é tal que os valores de x^2 para valores do argumento compreendidos no intervalo, aproximam-se de 4 (isto é, de 2^2) com a aproximação desejada k. Assim, suponhamos que escolhemos a aproximação 0,1; temos $(1{,}999)^2 = 3{,}996001$ e $(2{,}01)^2 = 4{,}0401$, diferindo estes números de 4 de um número inferior a 0,1. Logo, dentro do intervalo 1,999 a 2,01, os valores de x^2 aproximam-se de 4 com uma aproximação inferior a 0,1. Da mesma maneira um outro intervalo poderá ser indicado para outra aproximação que se desejar.

CAPITULO XII

A periodicidade na natureza

Toda a vida da Natureza é dominada pela existência de acontecimentos periódicos, isto é, pela existência de acontecimentos sucessivos tão análogos uns aos outros que, sem qualquer esforço de linguagem, podem ser considerados como repetições de um mesmo acontecimento.

A rotação da terra produz os dias que se sucedem uns aos outros. É certo que cada dia é diferente dos dias anteriores, por mais abstractamente que seja definido, excluindo os fenómenos casuais. Mas com uma definição suficientemente abstracta de dia, a distinção de propriedades entre dois dias torna-se pequena e destituída de interesse prático; assim, cada dia pode ser considerado como a repetição do fenómeno da rotação da terra. Da mesma maneira o movimento da terra em volta do Sol produz a repetição anual das estações, e impõe uma outra periodicidade em todas as operações da natureza. Uma outra periodicidade, embora menos fundamental, é fornecida pelas fases da lua. Na vida civilizada moderna, com a sua luz artificial, estas fases são de pequena importância, mas nos tempos antigos, e em climas em que os dias são quentes e o céu claro, a vida humana foi largamente influenciada pela existência do luar. A divisão estabelecida das semanas e dos meses, com as suas ligações religiosas, estendeu-se por toda a Europa, vinda da Síria e da Mesopotâmia, se bem que observações independentes sobre as fases da lua tivessem sido feitas em quase todas as nações. É contudo através do fenómeno das marés, e não pelas suas fases, que a periodicidade da lua mais tem exercido a sua influência sobre a história da terra.

A nossa vida corpórea é essencialmente periódica. É dominada pelo bater do coração e pela repetição da respiração. A pressuposição da periodicidade é de facto fundamental na nossa concepção da vida. Não podemos imaginar uma evolução da natureza sobre a qual, à medida que os acontecimentos se produzem, não pudéssemos dizer: «Isto aconteceu antes». O homem encontrar-se-ia a cada passo em novas situações sem qualquer fundo de semelhança com o passado. Os próprios processos de medida do tempo, como uma quantidade, não seriam possíveis. Os acontecimentos poderiam ainda ser reconhecidos como produzidos em série, uns produzindo-se primeiro e outros depois. O facto é que nós podemos ir mais longe do que esta simples verificação. Podemos não só dizer que três acontecimentos A, B, C se produzem nesta ordem, isto é, que A é anterior a B e B a C, mas também que o intervalo de tempo entre os acontecimentos A e B é, por exemplo, duplo do que existe entre os acontecimentos B e C. É que a quantidade de tempo é essencialmente dependente da observação do número de repetições de fenómenos naturais que possam produzir-se no mesmo intervalo de tempo. Podemos dizer que um espaço de tempo entre A e B foi de tantos dias ou de tantos meses ou de tantos anos, conforme o tipo de repetição que seja útil usar. Na verdade, no começo da civilização, estes três modos de medida de tempo foram realmente distintos. Foi uma das primeiras tarefas da ciência entre as nações civilizadas e semicivilizadas, fundi-los numa medida corrente. A completa extensão desta tarefa pode ser compreendida. É necessário determinar, não sòmente o número de dias (por ex., 365,25...), que tem um ano, mas também que o mesmo número de dias existe em anos sucessivos. Poder-se-ia imaginar um mundo no qual existissem periodicidades mas tal que não fossem iguais os números de dias em cada ano. Nalguns anos poderia haver 200 dias e noutros 350. A determinação da consistência geral e larga das mais importantes periodicidades foi um dos primeiros passos da ciência. Esta consistência provém não de uma lei intuitiva abstracta do pensamento, é apenas um facto observado da natureza garantido pela experiência. Na realidade, tão longe está de ser uma lei necessária, que não é mesmo exactamente verdadeiro. Há divergências que sempre se manifestam. Nalguns casos estas divergências são fàcilmente observadas e são por isso imediatamente aparentes. Noutros casos requerem observações cuidadas. De uma maneira geral, todas as repetições que dependem dos seres vivos, tais como o bater do coração, estão sujeitas quando comparadas com outras repetições, a rápidas variações. As repetições mais estáveis — estáveis no sentido de estarem conformes umas com as outras com grande precisão — são as que dependem do movimento da terra como um todo, ou dos movimentos dos corpos celestes.

Admitiremos portanto que estas repetições astronómicas marcam intervalos iguais de tempo. Mas observações astronómicas precisas revelam pequenas discrepâncias. Como fazer? Parece que somos obrigados a admitir como hipótese arbitrária que um ou outro de certos fenómenos marca intervalos de tempo iguais, por exemplo, podemos admitir que todos os dias são iguais, ou que todos os anos têm igual duração. Isto não é inteiramente assim: têm que ser feitas algumas hipóteses; a hipótese sobre a qual se baseiam as determinações astronómicas na medida do tempo é a de que as leis do movimento devem verificar-se exactamente. Antes de explicar como isto é feito, é interessante observar que esta atribuição aos astrónomos da determinação da medida do tempo provém (como foi dito) da consistência estável das repetições de que eles se ocupam. Se uma igual consistência tivesse sido notada entre as repetições características na vida do corpo humano, naturalmente entregaríamos aos médicos o cuidado de regularem os nossos relógios.

Ao considerar como as leis do movimento intervêm neste assunto, notemos que dois processos inconsistentes de medida do tempo, dariam diferentes variações da velocidade de um mesmo corpo. Por exemplo, suponhamos que definimos a hora como a fracção $\frac{1}{24}$ do dia, e tomemos o caso de um comboio com movimento uniforme, durante um percurso de duas horas, com a velocidade de vinte milhas por hora. Adoptando uma outra medida do tempo não consistente com a primeira, o movimento não seria uniforme o caminho andado na primeira hora seria diferente do caminho andado na segunda. A questão pois de saber se um móvel se desloca com movimento uniforme ou não, depende do padrão do tempo adoptado.

Atenda-se, porém, a que, em todos os processos que ocorrem à superfície da terra, os vários fenómenos astronómicos que são tomados para medida do tempo constituem repetições que podem ser consideradas como absolutamente consistentes; admitindo a sua consistência, as referidas leis do movimento são verificadas com suficiente exactidão. Mas apenas com suficiente exactidão e não com inteira exactidão. Só admitindo ligeiras diferenças nas rotações e movimentos dos planetas e das estrelas, é que as leis do movimento são exactamente verificadas. De tudo isto resulta o facto geral de que o decurso uniforme do tempo depende da observação de acontecimentos periódicos.

Mesmo certos fenómenos que parecem casuais ou excepcionais, mantêm-se, por outro lado, com uma persistência uniforme, e são devidos a remotas influências de acontecimentos periódicos. Seja, por exemplo, o caso da ressonância. A ressonância produz-se sempre que dois conjuntos de circunstâncias ligadas têm os mesmos períodos. Segundo uma lei dinâmica as pequenas vibrações dos corpos que são livres efectuam-se em intervalos de tempo que são característicos desses corpos. Assim, um pêndulo oscila com um certo período, que depende apenas da sua forma e distribuição do peso, e do seu comprimento. Um corpo mais complicado pode ter vários modos particulares de vibração, mas cada um deles tem um período próprio. Estes períodos de vibração de um corpo são chamados períodos próprios ou livres do corpo. Um pêndulo tem apenas um período próprio de vibração, mas uma ponte pode ter vários. Uma corda de violino tem vários períodos de vibração; se t é o mais longo os outros são $\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{3}t$, etc.. Suponhamos então que excitamos as vibrações de um corpo com uma causa que pode também ser periódica; se o período da causa é aproximadamente um dos períodos do corpo, o modo de vibração correspondente é violentamente excitado, mesmo que a grandeza da excitação seja pequena.

Nisto consiste o fenómeno da ressonância. A razão disto é fácil de compreender. Se queremos deslocar uma pedra, empurramo-la de harmonia com as suas oscilações. Se não fazemos assim, o nosso esforço não é aproveitado. A palavra «ressonância» foi primeiramente usada nos fenómenos acústicos; o fenómeno estende-se a outros domínios. Encontra-se na óptica, nos fenómenos de absorção e de emissão da luz; utiliza-se na sintonia dos aparelhos receptores de rádio, e tem efeitos nocivos em certos casos, como no da passagem ou marcha cadenciada de tropas militares sobre uma ponte, ou em certos navios em que o bater rítmico das máquinas, para certas velocidades, pode produzir vibrações excessivas. A coincidência de certas periodicidades pode pois produzir fenómenos permanentes quando existe uma associação constante de dois acontecimentos periódicos, ou pode produzir violentas e rápidas destruições quando a associação é fortuita e temporária.

Dada a generalidade dos fenómenos periódicos na Natureza, deve a matemática dispor de elementos que possam servir para os interpretar. Neste sentido deve compreender-se o interesse que representa o estudo que vamos fazer das funções periódicas.

CAPÍTULO XIII

A trigonometria

O aparecimento da trigonometria não se deve à consideração geral da periodicidade dos fenómenos naturais. A sua história é análoga à das secções cónicas que tem a sua origem em conceitos muito particulares. Um estudo comparativo entre ambas revela analogias e também contrastes instrutivos. A trigonometria, como as secções cónicas, teve a sua origem entre os Gregos. O seu inventor foi Hiparco (nascido cerca de 160 a. C.), astrónomo grego, que fez as suas observações em Rodes. Prestou grandes serviços à astronomia; pode dizer-se que a trigonometria não foi a este respeito a menor das suas invenções. Ptolomeu, o grande astrónomo de Alexandria, foi o continuador de Hiparco.

Pode indicar-se desde já um contraste entre a trigonometria e as secções cónicas. A origem da trigonometria deve-se a necessidades de ordem prática; foi necessária ao desenvolvimento da astronomia. A origem do estudo das secções cónicas foi antes de ordem teórica. Note-se que estas foram estudadas cerca de 150 anos antes do aparecimento da trigonometria, numa época que pode considerar-se a melhor do pensamento grego. A importância da trigonometria, tanto para a teoria como para as aplicações da matemática, é apenas um dos numerosos exemplos das ideias úteis que em geral a ciência obtém a partir das suas aplicações práticas.

Vejamos como é que a trigonometria pode ter sido desenvolvida pelo estudo da astronomia. Em primeiro lugar: que medidas podem ser feitas por um astrónomo? São principalmente medidas de tempo e medidas de ângulos. O astrónomo pode ajustar o seu telescópio numa determinada direcção, móvel em volta de determinado eixo fixo orientado de oriente para ocidente; o telescópio pode assim ajustar-se para o sul, com uma maior ou menor elevação da direcção, ou voltado, passando pelo zénite, apontar para o norte. Tem-se assim o instrumento de passagens para a determinação exacta dos tempos de passagens das estrelas. Indirectamente, este instrumento mede ângulos. Porque depois de ter sido notado o tempo decorrido entre as passagens de duas estrelas, admitindo a rotação uniforme da terra, pode obter-se o ângulo de que a terra girou durante aquele tempo. Por outro lado, com outros instrumentos, pode medir-se directamente o ângulo entre duas estrelas. Sendo E a posição do astrónomo, e EA e EB as direcções em que são vistas duas estrelas, é fácil empregar instrumentos para medir o ângulo AEB. Quando um astrónomo observa o céu, mede de facto ângulos para fixar as posições relativas das estrelas e dos planetas em cada instante.

Da mesma maneira, no problema análogo da medida da terra, são os ângulos o objectivo principal das medidas. As medições directas de comprimentos são raras vezes possíveis com suficiente exactidão; rios, casas, florestas, montanhas e outras irregularidades da superfície da terra impedem ou dificultam as medidas directas. A agrimensura de uma região depende apenas de uma ou duas medidas directas de comprimento, feitas com a maior exactidão em lugares escolhidos, como a planície de Salisbury. A parte principal do trabalho é a medida de ângulos. Por exemplo, A, B e C são

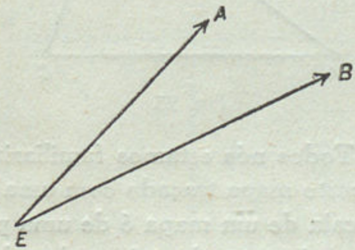

Fig. 22

pontos escolhidos na região a medir, sejam os cimos de torres de igrejas, bem visíveis uns dos outros. É fácil medir em A o ângulo BAC, em B o ângulo ABC, e em C o ângulo BCA. Teòricamente, é apenas necessário medir dois destes ângulos, porque, em virtude de um teorema de geometria muito conhecido, a soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos, e nestas condições, conhecidos dois ângulos, o terceiro pode ser calculado. É melhor, contudo, na prática medir os três ângulos, de modo a controlar pequenos erros de observação. Na agrimensura de uma região, todo o terreno é completamente coberto por triângulos. Este processo é chamado triangulação.

Note-se agora que quando são conhecidos os ângulos de um triângulo, é conhecida a sua forma, forma esta que é distinta da sua grandeza. Consideremos, posto isto, o princípio importante da semelhança geométrica. Esta ideia é bastante familiar nas suas aplica-

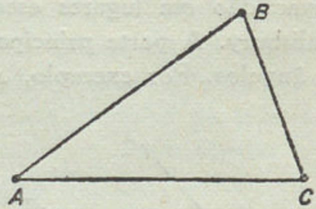

Fig. 23

ções práticas. Todos nós estamos familiarizados com a noção de um certo mapa traçado com uma certa escala. Assim, se a escala de um mapa é de uma polegada por jarda, um comprimento de três polegadas no mapa

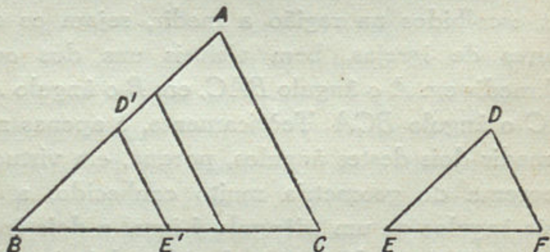

Fig. 24

representa um comprimento de três jardas na região representada. Além disso as formas representadas no mapa são as formas do original; por exemplo, um ângulo recto no original é representado por um ângulo recto no mapa. Se no mapa um lugar está a N — NW de outro, é porque assim é sobre a superfície da Terra. Em resumo, os ângulos do mapa são iguais aos ângulos da região representada.

A semelhança geométrica pode definir-se da seguinte maneira: Duas figuras são semelhantes 1.º) se a qual-
à de *EF* para *BC* ou ainda à de *FD* para *CA*. Com
quer ponto de uma figura corresponde um ponto de outra figura, de modo que a uma linha corresponda

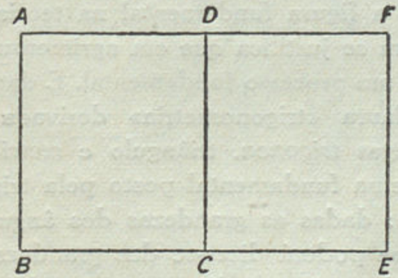

Fig. 25

uma linha e a qualquer ângulo corresponda um ângulo, e 2.º) se os comprimentos das linhas correspondentes estão numa relação fixa, e as grandezas dos ângulos correspondentes são as mesmas. A proporção fixa entre os comprimentos das linhas correspondentes no mapa e na superfície da terra representada, é chamada a escala do mapa. Já foi indicado que dois triângulos cujos ângulos são iguais são semelhantes. Assim, se os dois triângulos *ABC* e *DEF* têm os ângulos em *A* e *D* iguais, os ângulos em *B* e *E* e também os ângulos em *C* e *F* iguais, a proporção entre *DE* e *AB* é igual
outras figuras nem sempre a semelhança é garantida pela simples igualdade dos ângulos. Tomemos como

exemplo, os casos conhecidos de um rectângulo e de um quadrado. Seja *ABCD* um quadrado, e *ABEF* um rectângulo. Os ângulos correspondentes são iguais, mas enquanto que o lado *AB* do quadrado é igual ao lado *AB* do rectângulo, o lado *BC* do quadrado é metade do lado *BE* do rectângulo. Logo não é exacto que o quadrado *ABCD* seja semelhante ao rectângulo *ABEF*. A propriedade particular exibida pelo triângulo que não pertence a outras figuras rectilíneas, faz com que ele seja a figura fundamental na teoria da semelhança. Assim se justifica que em agrimensura a triangulação seja um processo fundamental. E daqui provém ainda a palavra «trigonometria» derivada das duas palavras gregas *trigonon*, triângulo e *metria*, medida.

O problema fundamental posto pela trigonometria é o seguinte: dadas as grandezas dos ângulos de um triângulo, que poderá dizer-se das grandezas relativas dos lados? Notemos que dissemos «grandezas relativas dos lados», visto que, pela teoria da semelhança, só são conhecidas as proporções que têm entre si os lados. Com o fim de responder à pergunta, são consideradas certas funções da grandeza dos ângulos, tomada como argumento. Inicialmente estas funções foram obtidas pela consideração apenas dos triângulos rectângulos, sendo a grandeza do ângulo definida pelo comprimento do arco de um círculo. Nos livros elementares modernos, a posição fundamental do arco de círculo para definir a grandeza de um ângulo foi posta em plano secundário, sem vantagem para a teoria ou para a clareza da exposição. Deve-se notar que, relativamente à questão da semelhança, o círculo tem a mesma posição fundamental entre as figuras curvilíneas que tem o triângulo entre as figuras rectilíneas. Dois círculos são figuras semelhantes; diferem apenas na sua grandeza. Os comprimentos das circunferências de dois círculos, tais como APA' e $A_1P_1A_1'$, da fig. 26, são proporcionais aos comprimentos dos seus raios. Além disso, se os dois círculos têm o mesmo centro O, como os dois

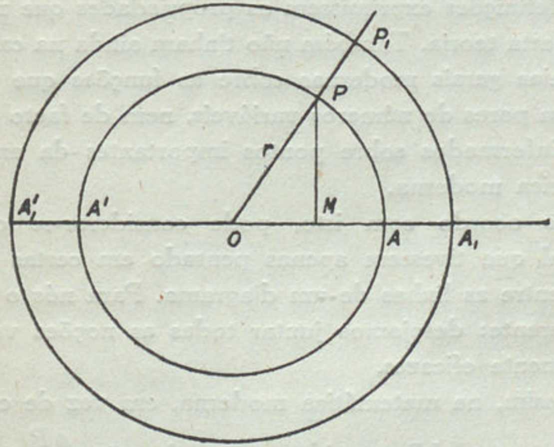

Fig. 26

círculos da fig. 26, então os arcos AP e A_1P_1 interceptados pelos lados do mesmo ângulo AOP são também proporcionais aos raios. Logo a razão do comprimento do arco AP para o comprimento do raio OP, isto é $\frac{\text{arco } AP}{\text{raio } OP}$ é um número que é independente do comprimento OP e é ainda igual à fracção $\frac{\text{arco } A_1P_1}{\text{raio } OP_1}$.

Esta fracção do «arco dividido pelo raio» representa o modo teórico próprio para medir a grandeza de um ângulo. Assim a fracção $\frac{AP}{OA}$ representa a grandeza do ângulo AOP. Trace-se agora PM perpendicularmente a OA. Os matemáticos gregos chamavam à linha PM o seno do arco AP, e à linha OM o co-seno do arco AP. Eles sabiam bem que a importância das relações destas várias linhas, entre si, depende da teoria da semelhança em que falámos. Mas não fizeram com que as suas definições exprimissem as propriedades que resultam desta teoria. Também não tinham ainda na cabeça as ideias gerais modernas sobre as funções que relacionam pares de números variáveis, nem de facto estavam informados sobre pontos importantes da análise algébrica moderna.

De acordo com isto, pode considerar-se como natural que tivessem apenas pensado em certas relações entre as linhas de um diagrama. Para nós o caso é diferente: desejamos juntar todas as noções verdadeiramente eficazes.

Assim, na matemática moderna, em vez de considerar o arco AP, consideramos a fracção $\frac{AP}{OP}$ que é um número sempre o mesmo qualquer que seja o comprimento OP; e, em vez de considerar as linhas PM e OM, tomamos antes as fracções $\frac{PM}{OP}$ e $\frac{OM}{OP}$ que também não dependem do comprimento de OP. Então definimos o número $\frac{PM}{OP}$ como sendo o *seno* do número $\frac{PA}{OP}$, e o número $\frac{OM}{OP}$ como sendo o *co-seno* do número $\frac{PA}{OP}$. Representemos por u a fracção $\frac{AP}{OP}$ que é a medida do ângulo *AOP* e por *v* a fracção $\frac{PM}{OP}$, e por *w* a fracção $\frac{OM}{OP}$. Então *u, v* e *w* são números, e, visto que devemos considerar *qualquer* ângulo *AOP*, são números variáveis. Existe uma correlação entre eles, de maneira que quando u (isto é, o ângulo *AOP)* é dado, as grandezas de *v* e *w* são determinadas. Logo *v* e *w* são funções do argumento u. Chamámos a v o seno de u, e a w o co-seno de u. Escrevemos:

$$v = \text{sen } u \text{ e } w = \cos u.$$

O significado destas funções *sen* e *cos* que relacionam os pares de números, *u* e *v* e *u* e *w* é o seguinte: as referidas relações funcionais podem determinar-se construindo (fig. 26) um ângulo *AOP*, cuja medida «AP dividido por OP» é igual a *u*, sendo então *v* o número dado por «*PM* dividido por *OP*,» e *w* o número dado por «*OM* dividido por *OP*».

É evidente que, não dizendo mais nada, cairíamos em dificuldades quando *u* é muito grande. Porque então o arco *AP* pode ser maior do que um quarto de circunferência, e o ponto *M* (figs. 26 e 27) pode estar entre *O* e *A'* e não entre *O* e *A*. Do mesmo modo *P* pode estar abaixo da linha *AOA'*, e não acima como na fig. 26. Para eliminar estas dificuldades, recorremos a noções e convenções da geometria analítica, dando definições completas do seno e do co-seno.

Tomemos um dos lados *OA* do ângulo *AOP*, como eixo *OX*, e prolonguemo-lo no sentido negativo *OX'*. Tracemos o outro eixo *YOY'* perpendicular a *X'OX*.

Seja P um ponto à distância r de O, com as coordenadas x e y. Estas coordenadas são ambas positivas no primeiro «quadrante» do plano, por exemplo, as coordenadas x e y de P na fig. 27. Nos outros quadrantes, uma ou a outra, ou ambas as coordenadas podem ser negativas. É o que se dá com as coordenadas x' e y de

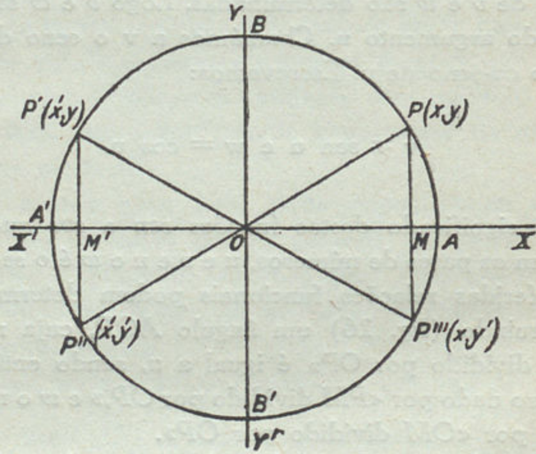

Fig. 27

P', x' e y' de P'', e x e y' de P''', na fig. 27, em que x' e y' são números negativos. O ângulo positivo POA é o arco AP dividido por r; o seu seno é $\frac{y}{r}$ e o seu co-seno é $\frac{x}{y}$; o ângulo positivo AOP' é o arco ABP' dividido por r; o seu seno é $\frac{y}{r}$ e o co-seno $\frac{x'}{r}$; o ângulo positivo AOP'' é o arco $ABA'B'P''$ dividido por r; o seu seno é $\frac{y'}{r}$ e o seu co-seno é $\frac{x'}{r}$; o ângulo positivo

AOP'' é o arco *ABA'B'P''* dividido por *r*; o seu seno é $\dfrac{y'}{r}$ e o co-seno $\dfrac{x}{r}$.

Não fomos ainda contudo suficientemente longe. Porque suponhamos que escolhemos *u* como sendo um número maior do que a razão de toda a circunferência para o raio. Em virtude da semelhança que existe entre todos os círculos, esta razão é a mesma para todos. É indicada pelos matemáticos pelo símbolo 2π em que π é a forma grega da letra p; o seu nome em grego é «pi». Demonstrou-se que π é um número incomensurável, e portanto o seu valor não pode exprimir-se por nenhuma fracção ou número decimal. O seu valor expresso com algumas decimais é 3, 14159; para muitos fins poderá indicar-se o valor aproximado $\dfrac{22}{7}$. Já foi calculado o valor de π com 707 casas decimais. Um tal cálculo é uma simples curiosidade e não tem qualquer interesse prático ou teórico. A exacta determinação é um dos aspectos do famoso problema da quadratura do círculo. O outro aspecto do problema é, por meio de métodos teóricos de geometria pura, descrever uma linha recta igual em comprimento a uma circunferência. Tanto um como outro são impossíveis, e o problema insolúvel perdeu agora interesse prático ou teórico por ter sido envolvido em problemas mais gerais.

Depois desta digressão sobre o valor de π, voltemos à questão da definição geral da grandeza de um ângulo, de modo a poder-se construir um ângulo que corresponda a qualquer valor de *u*. Suponhamos que um ponto móvel *Q* parte de *A* sobre *OX* (fig. 27) no sentido anti-horário, dando várias voltas, parando, finalmente, num ponto, por exemplo, em P, ou P', P'' ou P'''.

Então o comprimento total da trajectória circular percorrida, dividido pelo raio do círculo r, é a definição geral de um ângulo positivo de qualquer grandeza. Sejam x e y as coordenadas do ponto em que pára o ponto móvel Q, isto é, uma das quatro posições indicadas na fig. 27; estas coordenadas serão ou x e y, ou x' e y, ou x' e y', ou x e y'. O seno deste ângulo é $\frac{y}{r}$, e o seu co-seno é $\frac{x}{r}$. Com estas definições, as relações funcionais v = sen u e w = cos u estão, finalmente, definidas para todos os valores reais positivos de u. Para valores negativos de u, faremos simplesmente girar Q no sentido horário.

Estas funções do seno e do co-seno, tal como as definimos, permitem-nos tratar os problemas relativos aos triângulos dos quais resulta o interesse pela trigonometria. Estamos por outro lado em posição de relacionar a trigonometria com a ideia mais geral de periodicidade cuja importância foi explicada no último capítulo. É fácil mostrar que as funções *sen u* e *cos u* são funções periódicas de u. Consideremos a posição P (fig. 27) do ponto móvel Q que, partindo de A, gira sobre a circunferência. Esta posição P marca os ângulos $\frac{\text{arco } AP}{r}$, $2\pi + \frac{\text{arco } AP}{r}$, $4\pi + \frac{\text{arco } AP}{r}$, $6\pi + \frac{\text{arco } AP}{r}$, etc.. Todos estes ângulos têm o mesmo seno e o mesmo co-seno, a saber, respectivamente, $\frac{y}{r}$ e $\frac{x}{r}$.

Podemos pois escrever:

$$sen\ u = sen\ (2\pi + u) = sen\ (4\pi + u) =$$
$$= sen\ (6\pi + u),\ \text{etc.}$$
$$cos\ u = cos\ (2\pi + u) = cos\ (4\pi + u) =$$
$$= cos\ (6\pi + u),\ \text{etc..}$$

Exprime-se este facto dizendo que o seno de u e co-seno de u são funções periódicas com um período igual a 2π.

O gráfico da função $y = sen\ x$ (note-se que agora empregámos y e x, em vez de v e u) está indicado na

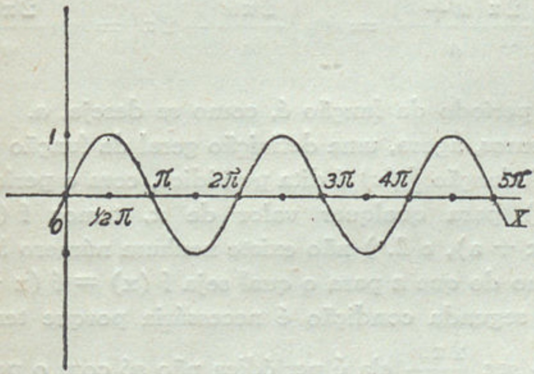

Fig. 28

fig. 28. Toma-se sobre o eixo dos xx um comprimento arbitrário para representar o número π e sobre o eixo dos yy um outro comprimento arbitrário para representar o número 1. Os valores numéricos do seno e do co-seno nunca são superiores a 1. Nota-se a repetição do gráfico, depois de períodos iguais a 2π. Quanto

à função co-seno note-se que $cos \quad x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; logo o gráfico da função $cos\ x$ seria o da fig. 28 traçando simplesmente o eixo OY de maneira a passar pelo ponto marcado $\frac{\pi}{2}$ sobre OX.

É fácil construir uma função sinusoidal cujo período tenha um valor determinado a.

Escreve-se:

$$y = sen\,\frac{2\pi x}{a}.$$

Tem-se, com efeito:

$$sen\,\frac{2\pi(x+a)}{a} = sen\left\{\frac{2\pi x}{a} + 2\pi\right\} = sen\,\frac{2\pi x}{a}.$$

O período da função é, como se deseja, a.

Demos, agora, uma definição geral da função periódica. A função $f\ (x)$ é dita periódica, com o período a, se 1.º) para qualquer valor de x, temos $f(x) = f(x + a)$, e 2.º) não existe nenhum número b mais pequeno do que a para o qual seja $f(x) = f(x + b)$.

A segunda condição é necessária porque tendo a função $sen\,\frac{2\pi x}{a}$ ela é periódica não só com o período a, mas também admite os períodos 2^a, 3^a, etc., visto que:

$$sen\,\frac{2\pi(x+3a)}{a} = sen\left(\frac{2\pi x}{a} + 6\pi\right) = sen\,\frac{2\pi x}{a}.$$

A maior parte da teoria das funções periódicas, bem como as aplicações da teoria às ciências físicas, são dominadas por um importante teorema, chamado teorema de Fourier. Segundo este teorema, se $f(x)$ é uma função periódica, com o período a, e se $f(x)$ satisfaz a certas condições que são sempre pràticamente verificadas pelas funções que se encontram no estudo dos fenómenos naturais, a função $f(x)$ pode escrever-se com a forma de uma soma de termos:

$$C_0 + C_1 \, sen \left(\frac{2\pi x}{a} + e_1\right) + C_2 \, sen \left(\frac{4\pi x}{a} + e_2\right) + \\ + C_3 \, sen \left(\frac{6\pi x}{a} + e_2\right) + \text{etc.}.$$

Nesta expressão C^o, C_1, C_2, C_3, etc., e também e_1, e_2, e_3, etc., são constantes. Pode perguntar-se: quantos termos se devem escrever? Se bem que, nalguns casos particulares, um número limitado de termos seja suficiente, noutros contudo será preciso um número infinito de termos: isto conduzir-nos-á à teoria das séries de que trataremos no próximo capítulo.

O método anterior de exprimir uma função periódica, como a soma de termos sinusoidais, chama-se «análise harmónica da função». Pode aplicar-se esta análise aos fenómenos periódicos naturais. Por exemplo, o fenómeno das marés, as vibrações da corda de um violino, as vibrações de uma coluna de ar podem ser analisadas, determinando-se os termos do desenvolvimento que atrás indicámos. Trata-se de um processo fundamental da Física matemática que diz respeito ao importante facto natural da Periodicidade.

CAPITULO XIV

Séries

Parte alguma da Matemática é mais atingida pela trivialidade da sua apresentação inicial aos principiantes do que o importante assunto das séries.

Dois simples exemplos de séries — a série aritmética e a série geométrica — são apresentados; estes exemplos são importantes porque são os exemplos mais simples de uma importante teoria geral. Mas as ideias gerais nunca são expostas, e nestas condições os exemplos, que nada exemplificam, reduzem-se a banais trivialidades.

O conceito matemático geral de série [1] é o de um conjunto de coisas dispostas numa certa ordem. Este significado corresponde exactamente ao emprego usual do termo. Considere-se, por exemplo, a série dos Primeiros Ministros ingleses durante o século XIX, dispostos por ordem da sua posse do lugar. A série começa com William Fitt e termina com Lord Rosebery. Poderíamos considerar outras ordens, por exemplo, dispô-los segundo a sua estatura ou o seu peso. Estas outras ordens possíveis poderão chocar-nos tra-

---

(1) O autor não distingue o conceito de sucessão do de série (N. T.).

tando-se de Primeiros Ministros, e não é natural que sejam consideradas, mas abstractamente, são tão boas como a primeira. Quando uma certa ordem para dispor vários termos é muito mais importante do que qualquer outra diz-se que é *a* ordem desses termos. Assim *a* ordem dos inteiros é aquela que os dispõe por ordem de grandeza crescente. Mas evidentemente existem outros modos de os dispor. Quando o número de termos considerado é finito, o número de maneiras diferentes de os dispor é chamado o número das suas permutações. O número de permutações de um conjunto de n objectos, sendo n um inteiro, é:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \\ \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

isto é, o produto dos n primeiros inteiros; este produto é tão importante na matemática que é costume usar um símbolo especial para o representar — escreve-se $n!$. Assim, $2! = 2 \times 1 =$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Quando n aumenta, o valor de $n!$ aumenta ràpidamente; assim $100!$ é cem vezes maior do que $99!$.

É fácil verificar no caso de pequenos valores de n que $n!$ é o número de modos de dispor n objectos por ordem. Assim consideremos dois objectos *a* e *b;* temos ou *ab* ou *ba,* isto é, um número igual a $2! = 2$. Do mesmo modo, tendo três objectos, podemos dispô-los das seguintes maneiras, abc, acb, bac, bca, cab, cba; temos assim um número igual a $3! = 6$.

A coisa importante a fazer com uma série de números — usaremos daqui em diante o termo «série» no sentido restrito que agora fixamos — é somar os termos sucessivos.

Assim, se u_1, u_2, u_3... u_n... são respectivamente o primeiro, o segundo, o terceiro, etc., termos de uma série de números, formamos sucessivamente as séries u_1, $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2 + u_3$, $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, etc.; a soma dos n primeiros termos é

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

Se a série tem apenas um número finito de termos, obtemos deste modo a soma de todos os números da série. Mas se a série tem um número infinito de termos, este processo de formar sucessivamente as somas dos diferentes termos, não tem fim, e neste sentido não existe o que possa chamar-se a soma de uma série infinita. Mas porque é que é importante somar sucessivamente os termos de uma série da maneira que se indicou? A resposta que devemos dar é a de com isso simbolizamos o processo mental fundamental da aproximação.

É um processo que é útil mesmo fora da matemática. A nossa limitada inteligência não pode por vezes considerar ao mesmo tempo coisas complicadas, e o recurso é utilizar o método das aproximações. Um político ao pensar num discurso põe os assuntos principais em primeiro lugar e deixa em segundo lugar os outros. Existe, é verdade, o método artístico inverso de preparar a imaginação com a apresentação, em primeiro lugar, de pormenores secundários e especiais, para dar em seguida o conjunto. De qualquer modo o processo consiste numa adição gradual de efeitos; e é isto o que é feito exactamente pela adição sucessiva dos termos de uma série. O nosso processo habitual de indicar números, é um tal processo de soma gradual, pelo menos no caso de números grandes. Assim, 568213 apresenta-se-nos ao espírito como sendo:

$$500000 + 60000 + 8000 + 200 + 10 + 3$$

No caso de fracções decimais sucede o mesmo. Por exemplo 3, 14159 é

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000}.$$

Notar que $3, 3 + \frac{1}{10}, 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}, 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000}, 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{100000}$

são aproximações sucessivas do resultado completo 3,14159. Se lermos 568213 da direita para a esquerda, começando nas 3 unidades, usamos o processo artístico, preparando gradualmente o espírito até atingir 500000.

O processo habitual da multiplicação numérica emprega o método da soma de séries. Considere-se a operação

$$\begin{array}{r} 342 \\ 658 \\ \hline 2736 \\ 1710 \\ 2052 \\ \hline 225036 \end{array}.$$

As três linhas que se somam constituem uma série, sendo o primeiro termo a primeira linha. Esta série segue o referido método artístico de apresentação do termo mais importante em último lugar, não por qualquer sentimento artístico, mas apenas em virtude da conveniência que se obtém, sem modificar a casa das unidades, em omitir alguns zeros, formalmente necessários.

Mas quando tentamos fazer uma aproximação por adições sucessivas dos termos de uma série infinita, de que é que nos aproximamos? A dificuldade está em que a série não tem «soma» no sentido próprio da palavra, visto que a operação de somar sempre os seus termos não pode ter fim.

A resposta que devemos dar é a de que nos aproximamos do *limite* da soma da série, e devemos por isso agora explicar o que é o «limite» de uma série.

A soma de uma série aproxima-se de um limite quando a soma de um número qualquer dos seus termos, contanto que este número seja suficientemente grande, é tão próxima deste limite quanto quisermos. Mas este modo de definir a aproximação de um limite é vago e não está de harmonia com a índole da matemática moderna. Que significa «suficientemente grande», ou «tão próxima... quanto»? Estas frases vagas devem ser explicadas em função das noções simples e fundamentais da matemática.

Sejam $u_1, u_2, u_3, u_4 \dots u_n$ os termos sucessivos de uma série, de modo que u_n é o termo de ordem n. Representemos por s_n a soma dos primeiros n termos, de modo que seja

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3 \text{ e}$$
$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n .$$

Então os termos s_1, s_2, s_3 ... s_n formam uma nova série, e a formação desta série é o processo de soma da série original. A «aproximação» da *soma* da série original de um «limite» significa a «aproximação» dos termos da nova série de um limite. Temos agora que explicar o que significa a aproximação de um limite dos termos de uma série.

Lembrando a definição (dada no capítulo XII) de «módulo de aproximação», a noção de limite exprime que: l é o limite dos termos da série s_1, s_2, s_3... s_n... se, em correspondência com um número real k, tomado como módulo da aproximação desejada, se pode determinar um termo s_n da série tal que os termos sucessivos (isto é, s_{n+1} s_{n+2} etc.) se aproximem de l com a referida aproximação k.

Considerando a série original u_1, u_2, u_3... u_n... o limite dos termos da série s_1, s_2... s_n... é chamada a «soma» da série original. Mas é evidente que este emprego da palavra «soma» é artificial e não podemos por isso admitir que se verifiquem relativamente a esta «soma» as propriedades que se encontram com somas de um número finito de termos. Consideremos um exemplo. Seja a dízima 0,111... Isto representa, no fundo, a «soma» de 0,1, 0,01, 0,001, etc.. A série correspondente é $s_1 = 0{,}1$, $s_2 = 0{,}11$, $s_3 = 0{,}111$, $s_4 = 0{,}111$, etc.. O limite dos termos desta série é $\frac{1}{9}$, o que é fácil de verificar por simples divisão:

$$\frac{1}{9} = 0{,}1 + \frac{1}{90} = 0{,}11 + \frac{1}{900} = 0{,}111 + \frac{1}{9000} = \text{etc..}$$

Se tomarmos como aproximação k, o número $\frac{3}{17}$, 0,1 e todos os termos seguintes diferem de $\frac{1}{9}$ menos do que $\frac{3}{17}$; se se toma $k = \frac{1}{1000}$, 0,111 e todos os outros termos seguintes diferem de $\frac{1}{9}$ menos do que $\frac{1}{1000}$, etc., e assim por diante qualquer que seja a escolha que possamos fazer de k.

Nem sempre uma série tem um limite. Quando existe este limite a série é *convergente;* quando não existe, é *divergente.*

Um exemplo simples de série divergente é dado pela série dos números inteiros 1, 2, 3 ... n.... Um outro exemplo, é a série 1, — 1, 1, — 1 etc., isto é, a série cujos termos são alternadamente 1 e — 1. A soma de um número ímpar de termos é 1, e a de um número par é zero. Parece que se poderia admitir que a condição para que a série u_1, u_2... u_n tivesse um limite fosse a de que u_n deveria diminuir quando n aumenta. Se assim fosse, a matemática seria uma ciência fácil. Infelizmente uma tal suposição não é verdadeira.

Por exemplo, a série

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n} \dots$$

é divergente.

É fácil ver que assim é; considere-se soma de n termos começando no termo de ordem $n + 1$. Estes termos são:

$$\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3} \dots\dots \frac{1}{2n}.$$

São ao todo n termos e o menor deles é $\frac{1}{2n}$. Logo, a sua soma é maior do que n vezes $\frac{1}{2n}$ isto é, $\frac{1}{2}$. Mas sem modificar a «soma» no caso de ela existir, podemos juntar termos vizinhos, e obter a série

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}, \text{ etc.},$$

isto é, em virtude do que dissemos, uma série cujos termos, depois do 2.º são maiores do que os termos da série

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \text{ etc.},$$

em que todos os termos, à excepção do primeiro, são iguais. Mas esta série é divergente. Logo a série original é divergente ([1]).

Esta questão da divergência mostra que devemos ser cuidadosos ao estender propriedades da soma de um número finito de termos à soma de séries. Porque a propriedade mais elementar de um número finito de termos é a de que, num tal caso, existe sempre uma soma, e o mesmo se não dá com as séries. É frequente indicar a soma de uma série

$$u_1, u_2, u_3 \dots u_n \dots \text{ por}$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots .$$

([1]) Vid. Nota C, pág. 210.

Generalizemos agora este conceito de série, tomando como termos qualquer função de x. Podemos considerar as séries

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3 \ldots\ x^n \ldots$$

$$x,\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{3},\ \ldots\ \frac{x^n}{n}.$$

De uma maneira geral, temos:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x) \ldots\ f_n(x) \ldots$$

Uma tal série pode ser convergente para certos valores de x, e divergente para outros. É raro encontrar séries de funções de x que sejam convergentes para todos os valores de x. Examinemos a série «geométrica»

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3\ \ldots\ x^n \ldots\ldots$$

A soma dos n primeiros termos, é:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

Multiplicando por x, temos:

$$x s_n = x + x^2 + x^3 \ldots + x^n + x^{n+1}.$$

Subtraindo, membro a membro, vem:

$$s_n(1-x) = s_n - x s_n = 1 - x^{n+1}$$

e portanto (se x não é igual a 1)

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Se x é menor do que 1, para valores suficientemente grandes de n, $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ é sempre inferior a k, qualquer que seja k. Logo para valores de x inferiores a 1, a série

$$1, x, x^2 \dots x^n \dots .$$

é emergente, sendo $\frac{1}{1-x}$ o seu limite.

Escreve-se:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots (-1 < x < 1).$$

Mas para valores de x maiores do que 1 ou para $x = 1$, a série é divergente.

Por outras palavras, se x está dentro do intervalo -1, $+1$, a série é convergente; mas se x é igual a -1 ou a $+1$, ou se x está fora do intervalo -1, $+1$, a série é divergente. Assim, a série é convergente em todos os «pontos» do intervalo -1, $+1$, excluindo estes pontos.

A este propósito surge um problema importante que deve ser esclarecido. Suponhamos que a série:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

é convergente para todos os valores de x num intervalo a, b, isto é, a série é convergente para qualquer valor de x maior do que a e menor do que b. Admitamos agora que para representar o limite com uma certa aproximação k, escolhemos um certo número de termos. Poderá sempre dizer-se que tomando n ou mais termos, se terá sempre a aproximação que se fixou, *qualquer* que seja o valor de x tomado no intervalo? Deverá dizer-se que muitas vezes assim sucede, outras não, para cada valor de k que se escolhe. No primeiro caso, a série é uniformemente convergente, no intervalo considerado, e no segundo caso não é uniformemente convergente no mesmo intervalo. Consideremos um exemplo; seja a série geométrica:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^n + \dots$$

A série é convergente no intervalo -1 a $+1$, excluindo os pontos limites $x = \pm 1$. Mas não é uniformemente convergente em todo o intervalo. Porque se representarmos por $s_n(x)$ a soma dos n primeiros termos, demonstrámos atrás que a diferença entre $s_n(x)$ e o limite $\frac{1}{1-x}$, é $\frac{x^{n+1}}{1-x}$. Nestas condições, e sendo n um certo número de termos, digamos 20, fixemos $k = 0{,}001$. Tomando x suficientemente próximo de $+1$ ou de -1, podemos fazer com que o valor numérico de $\frac{x^{21}}{1-x}$ seja maior do que 0,001. Nestas condições, os referidos 20 termos não chegam para representar, com a aproximação fixada, o valor limite, em todo o intervalo de convergência da série.

O mesmo raciocínio pode aplicar-se qualquer que seja o número de termos tomados, em vez de 20, e qualquer que seja a aproximação desejada, em vez da que se indicou 0.001. Logo, a série geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ não é uniformemente convergente em todo o intervalo de convergência de -1 a $+1$. Mas se tomarmos um intervalo mais pequeno, por exemplo, entre *0* e $\frac{1}{10}$, a série é já uniformemente convergente dentro deste intervalo. Se $k = 0{,}001$, e sendo $x = \frac{1}{10}$, temos:

$$\text{para } n=1, \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{90} = 0{,}0111\ldots$$

$$\text{para } n=2, \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{900} = 0{,}00111\ldots$$

$$\text{para } n=3, \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9000} = 0{,}000111\ldots$$

Deste modo, três termos são suficientes para todo o intervalo.

Notemos que, em virtude da série $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ ser convergente (se bem que não uniformemente) no intervalo de -1 a $+1$, para cada valor de x no intervalo, é possível determinar um número suficiente n de termos a que corresponda uma aproximação desejada k; mas para valores de x próximos de $+1$ ou de -1, deverá ser necessário tomar um número n de termos tanto maior quanto mais próximo x estiver dos pontos limites.

É curioso que esta importante distinção entre convergência uniforme e não uniforme só foi indicada em 1847 por Stokes — mais tarde Sir George Stokes — e depois dele, em 1850, por Seidel, matemático alemão.

Os pontos críticos em que se verifica a não convergência uniforme não são necessàriamente os pontos limites do intervalo de convergência. O caso indicado da série geométrica é um caso especial.

Foi possível indicar, para a série geométrica $1+x+x^2+\ldots x^n+\ldots$, o limite $\dfrac{1}{1-x}$, com o respectivo intervalo de convergência. Mas nem sempre assim acontece. Um processo muito importante de definir uma função é indicá-la como o limite de uma série convergente. Na análise elementar há uma série muito importante, a série:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

em que $n!$ tem o significado que atrás se indicou. Esta série é absolutamente convergente para todos os valores de x, e uniformemente convergente em qualquer intervalo que se tome. Tem todas as boas propriedades que uma série pode ter. É chamada a série exponencial. Designa-se o seu limite por *exp. x*. Tem-se, por definição:

$$\text{exp. } x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{3!}+\ldots$$

A função *exp. x* é chamada a função exponencial. É fácil demonstrar que

$$(\text{exp. } x)\times(\text{exp. } y)=\text{exp }(x+y)\ldots\ldots\ldots\ \text{A}$$

ou de outra maneira que:

$$(\text{exp. } x) \times (\text{exp. } y) = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \\ + \frac{(x+y)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \ldots$$

Relativamente às funções sen x e cos x, também se demonstra que:

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

O gráfico da função exponencial é dado pela fig. 29. Corta o eixo *OY* no ponto y = 1, como deve ser, visto que quando x = 0, todos os termos da série são nulos, excepto o primeiro.

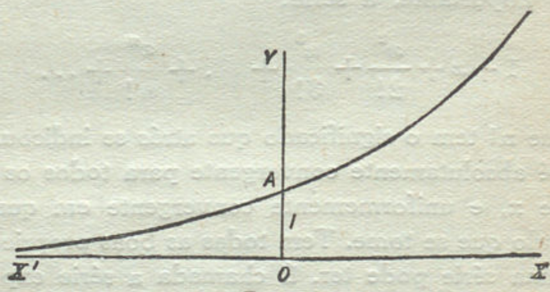

Fig. 29

A importância da função exponencial está no facto de ela servir para representar quantidades físicas cuja variação temporal, em cada instante, é igual a uma percentagem uniforme do seu valor no mesmo instante.

Uma outra função importante é a função *exp* $(-x^2)$. O gráfico da função y = exp $(-x^2)$ é dado pela fig. 30; representa a curva dos erros. É por isso muito importante na teoria da estatística.

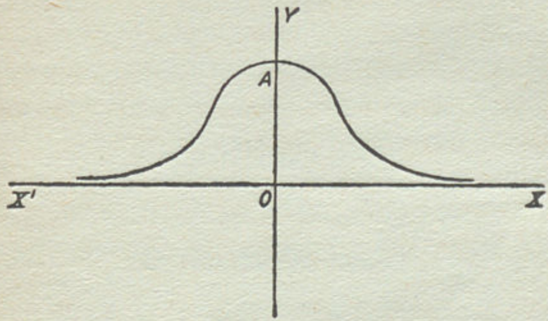

Fig. 30

A função

$$y = \text{exp.}\ (-cx) \times sen\, \frac{2\pi x}{p}$$

está representada na fig. 31. Os pontos A, B, O, C,

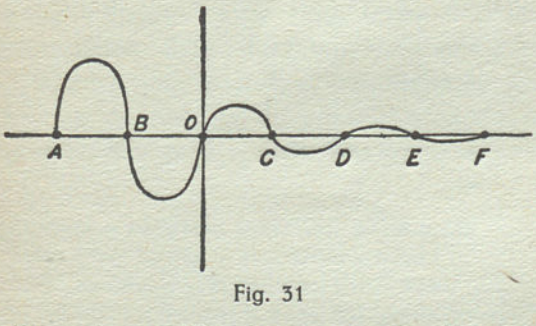

Fig. 31

D, E, F, estão a distâncias iguais uns dos outros — a distância é $\frac{1}{2}$ p. Esta função representa as oscilações amortecidas de um corpo que oscila submetido a forças de amortecimento.

CAPÍTULO XV

O cálculo diferencial

A invenção do cálculo diferencial marca um momento de crise na história da matemática. O progresso da ciência divide-se entre períodos caracterizados por uma lenta acumulação de ideias, e períodos em que um homem de génio, inventando novos métodos ou tomando pontos de vista, transforma os materiais acumulados, dando-lhes um mais alto nível. Os contrastes entre estes períodos, que assim se verificam no progresso da história do pensamento, são comparados por Shelley com a formação de uma avalancha

> «The sun — awakened avalanche! whose mass,
> Thrice sifted by the storm, hadgathersthere
> Flake after flake, — in heaven-defying minds
> As thought by thought is piled, till some great truth
> Is loosened, *and the nations echo round.*»

Na ciência, o homem de génio que, finalmente, tem a sorte de emitir o conceito que transforma um domínio inteiro do pensamento, não é necessàriamente superior aos seus antecessores que trabalharam para a formação das ideias preliminares. É ingratidão limitar a nossa admiração ao primeiro.

No exemplo particular que agora vamos considerar, o assunto tinha já uma longa história quando adquiriu a sua forma final dada pelos seus dois inventores. Encontram-se vestígios nos trabalhos dos matemáticos gregos; igualmente Fermat (nascido em 1601 e morto em 1665), notável matemático francês, formulou conceitos e ideias que não estavam longe das que mais tarde foram utilizadas.

Não devemos limitar a nossa admiração quer a Newton, quer a Leibniz. Newton foi matemático e físico; Leibniz foi matemático e filósofo. Ambos foram notáveis homens de génio. A invenção do cálculo diferencial feita ao mesmo tempo, por um e pelo outro, deu origem a uma lamentável disputa. Newton usou o método das fluxões na redacção dos seus *Principia,* mas só publicou exposição do seu método em 1693. Leibniz publicou o seu primeiro trabalho em 1684. Este foi acusado pelos amigos de Newton de ter copiado o método de Newton. Por sua vez Leibniz acusou Newton de plágio. A verdade é que ambos descobriram independentemente um do outro, o cálculo diferencial. O assunto estava naquela época, por isso dizer, maduro.

Estas descobertas simultâneas são vulgares na ciência. Limitando-nos apenas às descobertas em que houve interferência de homens ingleses, podemos citar a formulação simultânea da lei da selecção natural por Darwin e por Wallace, a descoberta simultânea de Neptuno por Adams e pelo astrónomo francês Leverrier.

As questões de prioridade levantam-se às vezes por um simples motivo de nacionalismo.

A importância do cálculo diferencial provém da própria natureza do assunto que é a consideração sistemática da variação das funções. Esta ideia apresenta-se-nos imediatamente no estudo da natureza; a velocidade é o aumento por unidade de tempo do caminho percorrido, a aceleração é a variação por unidade de tempo da velocidade. Assim, a noção fundamental de variação, que está na base da nossa percepção dos fenómenos, sugere imediatamente a investigação de como se efectua a variação. Os termos familiares de «ràpidamente» ou «vagarosamente» ganham em clareza quando se associam com a noção de variação por unidade de tempo.

Este conceito de variação estava com certeza no espírito de Newton; transparece na linguagem com a qual ele se exprimiu. Pode duvidar-se, porém, se este ponto de vista, derivado do estudo dos fenómenos naturais, estaria no espírito dos matemáticos seus antecessores. Estes preocuparam-se com os problemas mais abstractos do traçado de tangentes a curvas, da determinação do comprimento de curvas ou das áreas limitadas por essas curvas. Estes dois últimos problemas, o da rectificação das curvas e o da sua quadratura, pertencem ao Cálculo Integral que, contudo, está interessado nas mesmas questões gerais do Cálculo Diferencial.

A introdução da Geometria analítica fez ligar os dois pontos de vista. Seja (fig. 32) $A\,Q\,P$ uma curva, e $P\,T$ a tangente no ponto P. Sejam $O\,X$ e $O\,Y$ os eixos de coordenadas, e $y = f\ (x)$ a equação da curva, de modo que $O\,M = x$ e $P\,M = y$. Seja agora

Q um ponto móvel sobre a curva de coordenadas x_1 e y_1; então $y_1 = f(x_1)$. Seja ainda Q' o ponto da tangente com a mesma abcissa x_1; suponhamos que as coordenadas de Q' são x_1 e y'. Admitamos que N se move ao longo de $O\,X$, da esquerda para a direita, com o movimento uniforme; então é fácil mostrar que a ordenada y' do ponto Q' da tangente $T\,P$ cresce uniformemente durante o movimento correspondente de Q' sobre a tangente. Na verdade, é fácil mostrar que

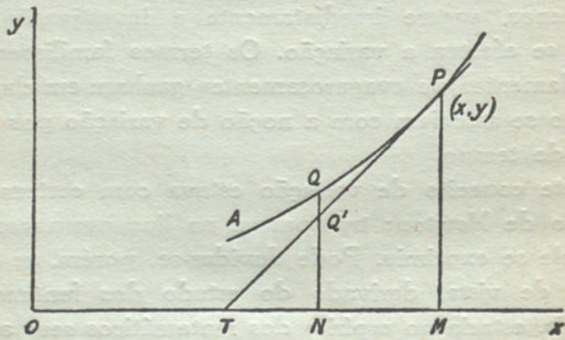

Fig. 32

a razão do aumento de $Q'\,N$, por unidade de tempo, para o aumento de $O\,N$, no mesmo tempo é igual à razão de $Q'\,N$ para $T\,N$, que é constante. Mas o aumento de $Q\,N$, por unidade de tempo, que é o aumento de $f(x_1)$, varia de ponto para ponto ao longo da curva. Quando Q passa por P, o aumento de $f(x_1)$ (x_1 é então igual a x) é o mesmo que o aumento de y' sobre a tangente em P. Logo, se tivermos um método geral para a determinação do acréscimo de uma função $f(x)$ de uma variável x, podemos calcular a inclinação da tangente num ponto (x,y) da curva, e portanto traçá-la. Assim, o problema do traçado de tangentes, a uma curva, e o da determinação do acréscimo de uma função são idênticos.

Consideremos alguns casos especiais com o fim de nos familiarizarmos com as noções que necessitamos tornar bem precisas. Um comboio está em movimento — como será possível determinar a sua velocidade num dado instante, por exemplo, ao meio-dia? Podemos tomar um intervalo de tempo igual a cinco minutos dentro do qual esteja o instante considerado, e medir o espaço andado durante este tempo. Suponhamos que este espaço é de cinco milhas. Daqui poderá concluir-se que o comboio anda à razão de 60 milhas por hora. Mas cinco milhas é uma distância relativamente grande, e por isso não podemos garantir que o comboio se mova exactamente com esta velocidade ao meio-dia que foi o instante considerado. Poderá, por exemplo, mover-se com a velocidade, nesse instante, de 70 milhas por hora e passar depois a mover-se mais lentamente, em virtude de o maquinista ter apertado os travões. Nestas condições, será melhor utilizar um intervalo de tempo mais pequeno que contenha ainda o instante considerado, por exemplo, um intervalo igual a um minuto. Contudo poderá ainda ser este intervalo grande de mais se se deseja obter um resultado preciso. Na prática, os erros inevitáveis das medidas poderão tornar inútil o cuidado de tomar intervalos de tempo muito curtos. Mas, teòricamente, quanto mais pequeno for o intervalo de tempo, melhor será para se obter um resultado preciso, e somos assim tentados a dizer que devemos escolher intervalos de tempo infinitamente pequenos. Os matemáticos antigos, e em particular Leibniz, foram não só tentados, como eles próprios adoptaram este ponto de vista. Hoje mesmo isso constitui um modo útil de expressão contanto que se saiba o que isso quer dizer na linguagem do senso comum. É curioso notar que, na sua exposição dos fundamentos do cálculo, Newton, o cientista tenha sido mais filósofo do que Leibniz, o filósofo, e que, por outro lado, tivesse sido Leibniz quem inventou a notação que foi realmente essencial ao desenvolvimento do assunto.

Tomemos agora um outro exemplo dentro do próprio campo da matemática. Determinemos o modo como aumenta a função x^2, para qualquer valor x do seu argumento. Não dissemos porém ainda de uma maneira rigorosa o que deve entender-se por «modo como a função aumenta». Quando x aumenta de h e passa a ter o valor $x+h$, a função x^2 aumenta para $(x+h)^2$ de modo que o acréscimo total da função é $(x+h)^2 - x^2$ devido ao acréscimo h do argumento. Logo, no intervalo x a $x+h$, o acréscimo médio da função por unidade de acréscimo do argumento é

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Mas

$$(x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$$

e portanto:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h.$$

Assim $2x+h$ é o acréscimo médio da função x^2 por unidade de acréscimo do argumento, tomando-se a média no intervalo x a $x+h$. Mas $2x+h$ depende de h que é o valor do intervalo. Logo evidentemente teremos o modo como aumenta a função para o valor x do argumento, fazendo com que h diminua cada vez mais. No *limite*, quando h tiver diminuído indefinidamente, dizemos que $2x$ determina como a função varia para o valor x do argumento.

Aqui apenas aparentemente pusemos de parte a noção de quantidades infinitamente pequenas ao dizermos «no limite quando h tiver diminuído indefinidamente». Leibniz sustentou que, por mais misteriosas que pudessem parecer, existem coisas infinitamente pequenas, e portanto números infinitamente pequenos que lhes correspondem.

A linguagem e os conceitos de Newton estavam mais perto do pensamento moderno mas foi pouco claro na sua exposição. A primeira exposição clara do assunto foi dada por Weierstrass e pela escola de Berlim pelos meados do século dezanove. Mas entre Leibniz e Weierstrass publicaram-se imensos trabalhos, tanto matemáticos como filosóficos, sobre essas misteriosas quantidades infinitamente pequenas que os matemáticos descobriram e os filósofos tentam explicar.

Newton exprimiu a questão dizendo que, quando h se aproxima de zero, no limite $2x + h$ torna-se igual a 2x. Mostremos que desta maneira ele não admite dissimuladamente a existência das quantidades infinitamente pequenas de Leibniz. Lendo com cuidado o método de Newton, é-se tentado, para obter uma maior simplicidade, a dizer que 2x + h é $2x$ quando h é igual a zero. Mas isto não é bem assim, porque desta maneira elimina-se o intervalo de x a $x+h$ para o qual se calcula o acréscimo médio da função. O problema consiste em, ao mesmo tempo, conservar o intervalo para o qual se deve calcular o acréscimo referido, e tratar h como se fosse zero. Newton conseguiu isto pelo conceito de limite; vejamos como Weierstrass explicou o assunto.

Em primeiro lugar notemos que, ao considerarmos $2x+h$, tomámos x como fixo e h como variável. Por outras palavras, x é considerada como uma variável «constante» ou parâmetro, como atrás explicámos no Capítulo IX; considerámos na verdade $2x+h$ como função do argumento h. Podemos generalizar a questão e perguntar o que significa dizer que a função $f\ (h)$ tende para o limite l, quando o argumento h tende para zero. Mas por outro lado veremos que o valor especial *zero* do argumento não é exigido essencialmente; por isso, generalizando mais, podemos perguntar o que significa dizer que a função $f\ (h)$ tende para o limite l quando h tende para o valor a.

Contudo, segundo o ponto de vista weierstrassiano, esta noção de h tendendo para o valor a, se bem que dê uma espécie de representação metafórica do que queremos representar, está fora do que desejamos. Na verdade, torna-se óbvio que, retendo como ideia fundamental qualquer coisa como «h tendendo para a», se bem que dê uma espécie de representação metafórica do que queremos representar, está fora do que desejamos. Na verdade, torna-se óbvio que, retendo como ideia fundamental qualquer coisa como «h tendendo para a», estamos nas garras do infinitamente pequeno, visto que isso implica a noção de h se aproximar infinitamente de a. Mas é disto justamente que nos queremos desembaraçar.

De acordo com isto, retomemos a frase que queremos explicar, e perguntemos antes o que significa dizer que o limite da função $f(h)$ em a, é l.

O limite de $f(h)$ em a é uma propriedade da vizinhança de a, entendendo-se por «vizinhança» o que dissemos no Capítulo XI, a propósito da continuidade das funções. O valor da função $f(h)$ em a é $f(a)$; mas o limite é uma noção distinta do valor, e pode mesmo ser diferente dele, podendo existir sem que haja necessidade de definir o valor. Utilizaremos também o significado que demos de «aproximação» no mesmo Capítulo XI. De facto, na definição de «continuidade» que demos quase no fim daquele capítulo, definimos pràticamente a noção de limite. A definição de limite é:

Uma função f (x) tem o limite l para o valor a do seu argumento x quando na vizinhança de a os seus valores se aproximam de l, qualquer que seja a aproximação desejada.

Compare-se esta definição com a já dada de continuidade, a saber:

Uma função $f(x)$ é contínua para o valor a do seu argumento, quando na vizinhança de a os seus valores se aproximam do seu valor em a qualquer que seja a aproximação desejada.

Torna-se imediatamente evidente que uma função é contínua em a quando 1.º) possui um limite em a e 2.º) aquele limite é igual ao seu valor em a. Assim os exemplos de continuidade que demos no fim do Capítulo XI exemplificam a noção de limite, visto que eles mostram que $f(a)$ é o limite de $f(x)$ em a para funções consideradas e para o valor a considerado. É realmente mais instrutivo considerar o limite num ponto em que a função não seja contínua. Por exemplo, consideremos a função cujo gráfico demos na fig. 20 do Capítulo XI. Esta função $f(x)$ é definida como tendo o valor 1 para todos os valores do argumento excepto os inteiros 0, 1, 2, 3, etc., sendo igual, para estes valores, a zero. Vejamos qual o seu limite para $x = 3$. Notemos que na definição de limite o valor da função em a (neste caso $a = 3$) é excluído. Mas, excluindo $f(3)$, os valores de $f(x)$ quando x está dentro de qualquer intervalo que 1.º) contenha 3 sem ser como ponto limite, e 2.º) não se estenda a 2 ou a 4, são todos iguais a 1; isto é, estes valores aproximam-se de 1 qualquer que seja a aproximação desejada. Logo 1 é o limite de $f(x)$ para o valor 3 do argumento x, mas por definição $f(3) = 0$.

Este é o exemplo de uma função que possui não só um valor como um limite para o valor 3 do seu argumento, mas o valor não é igual ao limite. No fim do Capítulo XI, a função x^2 foi considerada para o valor 2 do argumento. O seu valor em 2 é 2^2, isto é, 4, e prova-se que o seu limite é também 4. Este é o exemplo de uma função cujo valor coincide com o limite.

Finalmente, chegamos ao caso que é essencialmente importante ao fim que temos em vista, a saber, ao caso de uma função que tem um limite, mas não tem um valor definido para um certo valor do seu argumento. Não precisamos ir muito longe para ter uma tal função; bastará considerar a função $\frac{2x}{x}$. Em qualquer livro de matemática poderá encontrar-se a equação $\frac{2x}{x} = 2$, escrita sem qualquer hesitação ou comentário.

Contudo existe uma dificuldade, porque quando x é igual a zero, fica $\frac{2x}{x} = \frac{0}{0}$, e $\frac{0}{0}$ não tem qualquer significado definido. Logo o valor da função $\frac{2x}{x}$ para x = 0, não tem um valor definido, mas para qualquer outro valor de x, o valor da função $\frac{2x}{x}$ é 2. Logo o limite de $\frac{2x}{x}$ no ponto x = 0, é 2.

Da mesma maneira o limite de $\frac{x^2}{x}$ no ponto x = a, é a qualquer que seja a, de modo que o limite de $\frac{x^2}{x}$, para x = 0, é 0. Contudo o valor de $\frac{x^2}{x}$ para x = 0 toma a forma $\frac{0}{0}$ que não tem um valor definido. Portanto a função $\frac{x^2}{x}$ tem um limite mas não tem um valor definido no ponto x = 0.

Voltemos agora atrás ao problema que nos conduziu a esta discussão sobre a natureza dum limite. O problema consiste em definir como varia a função x^2 para um valor qualquer x do seu argumento. Vimos que tínhamos que considerar o limite da função $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ para o valor zero do seu argumento h.

(Note-se que x é aqui uma «constante»). Apliquemos a nossa definição de limite. Temos:

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2hx+h^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}.$$

Na determinação do limite de $\frac{h(2x+h)}{h}$ para o valor *0* do argumento *h*, o valor (se existir) da função para h $=0$ não tem que ser considerado. Por outro lado, para todos os valores de *h*, excepto para h $= 0$, podemos dividir a expressão por *h*.

Logo o limite de $\frac{h(2x+h)}{h}$ para h $= 0$ é o mesmo que o limite de 2x+h para h $= 0$. Agora, qualquer que seja o grau de aproximação *k* escolhido, considerando o intervalo de $-\frac{1}{2}k$ a $+\frac{1}{2}k$, vemos que para valores de *h* dentro deste intervalo, $2x+h$ difere de $2x$ menos do que $\frac{1}{2}k$, isto é, menos do que *k*. Isto é verdadeiro para *qualquer* grau de aproximação k fixado. Portanto na vizinhança do valor zero para *h*, $2x+h$ aproxima-se de 2x qualquer que seja o grau de aproximação fixado, isto é, 2x é o limite de 2x+h para h $= 0$. Nestas condições, pelo que dissemos, $2x$ é o limite de $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ para o valor 0 de *h*. Este método conduz-nos pois ao mesmo valor que o modo leibniziano de fazer com que *h* se torne «infinitamente pequeno». Os termos mais abstractos de «coeficiente diferencial» ou de «função derivada» são utilizados para exprimir aquilo que designámos por «modo como varia a função». A definição geral é a seguinte: o coeficiente diferencial da função $f(x)$ é o limite (quando existe) da função $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ do argumento h para o valor zero do seu argumento.

Como é que, com esta definição e com a definição auxiliar de limite, evitámos a noção de «quantidades infinitamente pequenas» que tanto afligiram os matemáticos antigos?

Para eles a dificuldade resultava de, por um lado, serem obrigados a considerar um intervalo de x a $x+h$ para o qual se deve calcular o acréscimo médio da função, e pelo outro, terem necessidade de considerar $h = 0$.

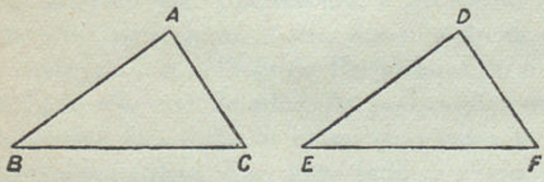

Fig. 33

Parecia pois, que havia a necessidade da consideração de intervalos de extensão igual a zero. Como eliminar a dificuldade?

Neste sentido, utiliza-se o conceito de que, em correspondência com um grau de aproximação *qualquer*, pode determinar-se um *certo* intervalo com tais e tais propriedades. A diferença está em que nós hoje apreendemos completamente a importância da noção de «variável», o que não foi feito pelos antigos. Assim, no final da nossa exposição sobre as noções essenciais da análise matemática, somos conduzidos às ideias que atrás já expusemos no Capítulo II, quando dissemos que, o que é realmente fundamental, são os conceitos de «*qualquer*» coisa ou de «*alguma*» coisa.

CAPÍTULO XVI

A geometria

A geometria, como o resto da matemática, é abstracta. Estuda as propriedades das formas e das posições relativas dos objectos. Num tal estudo, não é necessário saber quem observa os referidos objectos, nem saber se eles se tornam conhecidos pela vista, pelo tacto ou pelo ouvido. Em resumo, a geometria ignora as sensações particulares. Além disso, objectos particulares, tais como o edifício do Parlamento ou o globo terrestre não são considerados. As proposições da geometria referem-se a todas as coisas com tais e tais propriedades geométricas. Por outro lado, é evidente que auxiliamos a nossa imaginação vendo e observando objectos particulares com a forma de esferas, de cones, de triângulos ou de quadrados. Contudo, as proposições enunciadas não se referem só às figuras impressas num livro, mas a toda e qualquer figura. Nestas condições, a geometria, como a álgebra, é dominada pelas mesmas ideias de «qualquer» ou de «alguma» coisa. Do mesmo modo ela estuda as relações recíprocas entre vários objectos. Por exemplo, consideremos dois triângulos quaisquer *ABC* e *DEF*. Que relações devem existir entre algumas partes destes triângulos para que os triângulos sejam iguais? É um dos primeiros estudos feitos na geometria elementar. Mostra-se que dois triângulos são iguais se:

a) têm dois lados respectivamente iguais e o ângulo compreendido, ou
b) dois lados e um ângulo, ou
c) os três lados respectivamente iguais.

Esta última condição conduz-nos naturalmente a perguntar, que acontece quando são os três ângulos respectivamente iguais? Esta pergunta conduz à teoria da semelhança (vid. Cap. XIII) que é um outro tipo de correlação.

Tomemos ainda um outro exemplo; consideremos a estrutura interna do triângulo *ABC*. Existem relações entre os lados e os ângulos — o maior ângulo opõe-se ao maior lado e os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. Se recorrermos à trigonometria, mostra-se que:

$$\frac{sen\,A}{a} = \frac{sen\,B}{b} = \frac{sen\,C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,cos\,A\ .$$

Demonstra-se ainda que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos e que a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é maior do que o comprimento do terceiro.

O estudo da geometria começa pela consideração de figuras simples como o triângulo, o paralelogramo e o círculo, para os quais se enunciam certas correlações entre as diversas partes. O geómetra tem na sua mente não uma proposição destacada, mas uma figura com as suas diversas partes mùtuamente interdependentes. Como na álgebra, generaliza a noção de triângulo e considera o polígono, e daí passa às secções cónicas. Classifica os triângulos conforme a sua forma em equiláteros, isósceles e escalenos, os polígonos conforme o número dos lados e as secções cónicas, conforme também a sua forma, em hipérboles, elipses e parábolas.

Os exemplos anteriores mostram como as noções fundamentais da geometria são como as da álgebra; enquanto que a álgebra trata de números, a geometria trata de linhas, ângulos, áreas e outros seres geométricos. Esta identidade fundamental é uma das razões pela qual muitas verdades geométricas podem ser enunciadas com a forma algébrica. Assim se A, B, C são os números de graus dos ângulos do triângulo ABC, a correlação entre os ângulos é representada pela equação:

$$A + B + C = 180°;$$

e se a, b, c são os comprimentos dos três lados, tem-se:

$$a < b + c \quad b < c + a \quad c < a + b\,.$$

Assim, as noções de variável e de correlação entre variáveis são tão essenciais na álgebra como na geometria.

O paralelismo entre a geometria e a álgebra pode ainda ser levado mais longe em virtude do facto de serem mensuráveis os comprimentos, as áreas, os volumes e os ângulos, de modo que uma qualquer destas grandezas pode ser comparada com uma unidade da mesma espécie. As fórmulas trigonométricas exemplificam isto mesmo. Mas tudo isto recebe a sua maior aplicação na geometria analítica. Esta importante aplicação é muitas vezes designada pelo nome de Estudo analítico das Secções Cónicas fixando-se assim a atenção apenas sobre uma das suas subdivisões, e isto não está certo. É como se chamássemos à Antropologia, Estudo dos Narizes pelo simples facto do nariz ser uma parte saliente do corpo humano.

Se bem que os processos matemáticos na geometria e na álgebra sejam essencialmente idênticos e interligados no seu desenvolvimento, há necessàriamente uma distinção fundamental entre as propriedades do espaço e as propriedades do número — de facto toda a diferença essencial entre espaço e número. A «espacialidade» do espaço e a «numerosidade» do número são coisas essencialmente diferentes, e devem ser apreendidas directamente. Nenhuma das aplicações da álgebra à geometria ou da geometria à álgebra pode, no seu desenvolvimento, obliterar esta distinção vital.

Uma diferença bem acentuada entre o espaço e o número é que o primeiro parece ser muito menos abstracto e fundamental do que o último. O número dos arcanjos pode ser contado porque são coisas. Quando vimos a saber que os seus nomes são Rafael, Gabriel e Miguel e que estes nomes distintos representam seres distintos, ficamos a saber, sem pôr qualquer outra questão, que eles são três. Garantidas as premissas, quaisquer subtilezas feitas à volta das suas existências angélicas não modificam este facto. Contudo estamos completamente às escuras quanto às suas relações com o espaço. Existem no espaço? Talvez não tenha sentido dizer-se que eles estão aqui, acolá, ou em qualquer outra parte, ou em toda a parte. A sua existência pode não ter nenhuma relação com qualquer localização no espaço. Por consequência, enquanto que os números se podem aplicar a todas as coisas, o espaço não.

A percepção da localização das coisas ou dos objectos acompanha ou implica muitas ou todas as nossas sensações. É independente de qualquer sensação particular visto que anda acompanhada sempre por muitas sensações. Constitui, contudo, uma particularidade dos objectos que nós apreendemos pelas nossas sensações. A apreensão directa do que nós exprimimos falando das posições dos objectos, uns relativamente aos outros, é uma coisa *sui generis*, tal como a apreensão dos sons, das cores, dos paladares ou dos cheiros. À primeira vista parece que a matemática, porque inclui a geometria no seu domínio, não é abstracta no sentido definido no Capítulo I. Isto porém não é assim, visto que a «espacialidade» do espaço não intervém nos raciocínios geométricos. Intervém nas intuições geométricas dos matemáticos por um modo pessoal e particular a cada um deles. Mas o que intervém nos raciocínios são meramente certas propriedades das coisas no espaço ou das coisas que ocupam o espaço, e estas são completamente abstractas no sentido definido no Capítulo I; estas propriedades não envolvem qualquer apreensão espacial particular ou intuição espacial ou sensação espacial. Estão no mesmo pé das propriedades matemáticas do número. Portanto a intuição espacial que é essencial como ajuda no estudo da geometria é lògicamente não aplicável; não intervém nas premissas quando estas são definidas correctamente, nem em qualquer fase dos raciocínios. Tem apenas a importância prática de fornecer exemplos essenciais para estimular o pensamento. De resto, os exemplos são igualmente necessários para estimular o pensamento quando se trata de números. Quando pensamos em «dois» ou «três» vemos ou pancadas numa bulha ou bolas num monte ou qualquer outro conjunto de coisas particulares. A particularidade da geometria é a fixidez e a importância preponderante de um exemplo particular determinado que ocorre ao nosso espírito. A forma lógica abstracta das proposições, quando inteiramente enunciada, é «se uma colecção particular de objectos tem tais e tais propriedades abstractas, do mesmo modo tem tais outras propriedades abstractas». Mas o que aparece ao espírito é uma colecção de pontos, linhas, superfícies e volumes no espaço: o exemplo aparece inevitàvelmente, e o exemplo por si dá à proposição todo o seu interesse. Contudo, apesar da sua importância preponderante, não passa de um exemplo.

É fácil compreender a importância prática do espaço na formação do conceito científico de um mundo físico exterior. Por um lado, as nossas percepções espaciais estão ligadas a outras sensações. Normalmente pensamos que tocamos um objecto no mesmo lugar em que o vemos; e mesmo nos casos anormais tocamo-lo no mesmo espaço em que o vemos e este é o facto fundamental real que liga, em conjunto, todas as nossas diversas sensações. Isto é, as percepções espaciais são neste sentido a parte comum das nossas sensações.

Em resumo: 1) as propriedades do espaço que são investigadas na geometria, exactamente como as dos números, são propriedades que pertencem às coisas, como coisas, sem referência especial a qualquer modo particular de apreensão; 2) a percepção espacial acompanhada as nossas sensações, talvez todas, e certamente muitas; mas não parece ser uma qualidade necessária das coisas que elas devam todas existir num espaço ou em qualquer espaço.

CAPÍTULO XVII

Grandezas

No capítulo anterior indicámos que os comprimentos se podem medir comparando-os com uma unidade de comprimento, as superfícies com uma unidade de superfície, e os volumes com uma unidade de volume.

Quando temos um conjunto de coisas, tais como os comprimentos, que se podem medir tomando uma como unidade, dizemos que são grandezas da mesma espécie. Portanto, os comprimentos são grandezas da mesma espécie, e o mesmo se diz das superfícies ou dos volumes. Pelo contrário, uma superfície não é uma grandeza da mesma espécie de um comprimento, ou de um volume. Vejamos o que queremos exprimir quando dizemos que as grandezas se podem medir, tomando os comprimentos como exemplo.

Os comprimentos podem medir-se com uma régua de um pé. Com ela podemos saber se dois comprimentos são iguais ou não. Podemos ainda verificar que três comprimentos adjacentes, cada um de um pé de comprimento, formam um comprimento de três pés.

Pode pois definir-se a igualdade e a adição de comprimentos. Não pode tomar-se, porém, arbitràriamente qualquer critério como critério de igualdade, nem qualquer processo como processo de adição. Os resultados das operações de adição ou de verificação de igualdade devem estar de acordo com certas condições prévias. Por exemplo, a adição de dois comprimentos grandes deve dar um comprimento maior do que a adição de dois comprimentos mais pequenos. Essas diversas condições prévias, quando formuladas exactamente, podem ser chamadas os axiomas das grandezas. A única questão a pôr quanto à sua verdade ou falsidade é a de se obter, quando os axiomas são aplicados, os resultados próprios do que vulgarmente se considera como grandezas. Se não é assim, então o nome de axiomas das grandezas é mal posto, e sobre isto nada mais há a dizer.

Estes axiomas são inteiramente abstractos, tais como as propriedades matemáticas do espaço. São os mesmos para todas as grandezas, e não pressupõem nenhum modo especial de percepção. As ideias associadas com a noção de grandeza resultam dos modos pelos quais um contínuo, como uma linha, uma superfície ou um volume pode ser dividido em diversas partes. Estas partes podem ser contadas; deste modo os números podem ser usados para determinar as propriedades exactas de um todo contínuo.

A nossa percepção do curso do tempo e da sucessão dos acontecimentos é um exemplo importante da aplicação destas noções ligadas com o conceito de grandeza. Mede-se o tempo (como foi dito a propósito da periodicidade) pela repetição de acontecimentos idênticos — a combustão de partes iguais de uma vela homogénea, a rotação da terra relativamente às estrelas fixas, a rotação dos ponteiros de um relógio são exemplos de tais repetições. Acontecimentos destes tipos tomam aqui o lugar da régua de um pé relativamente aos comprimentos. Não é necessário admitir que os acontecimentos de um qualquer destes tipos são exactamente iguais em duração, para cada repetição. O que é necessário, é que uma determinada regra seja conhecida que permita exprimir as durações relativas de, digamos, dois exemplos do mesmo tipo. Por exemplo, podemos, se quisermos, supor que a rotação da terra diminui, de modo que cada dia se torna maior que o precedente com uma diferença de uma pequena fracção de um segundo. Tal regra permite-nos comparar a duração de um dia com a de um outro dia. O que é essencial é que uma série de repetições, tais como os dias sucessivos, possa ser tomada como uma série padrão; se os diferentes acontecimentos da série não são tomados como de igual duração, então deve enunciar-se uma regra que determine a duração a atribuir a cada dia em função da duração de um outro dia qualquer. Mas que requisitos deve possuir uma tal regra?

Em primeiro lugar, deve conduzir a atribuir durações aproximadamente iguais aos acontecimentos que o senso comum julga terem iguais durações. Logo, o primeiro requisito é o acordo com o senso comum. Mas isto não é absolutamente nada suficiente para determinar a regra porque o senso comum é um mau observador e por outro lado com pouco se satisfaz.

Um outro requisito é o de permitir um enunciado simples das leis da natureza. Por exemplo, os astrónomos dizem-nos que a rotação da terra diminui lentamente, tornando-se os dias sucessivamente maiores. A única razão para uma tal afirmação é que sem ela deveriam abandonar as leis newtonianas do movimento. Com o fim de conservarem as leis do movimento simples, alteram a medida do tempo. Isto é um procedimento perfeitamente legítimo quando bem compreendido.

Tudo o que foi dito sobre a natureza abstracta das propriedades matemáticas do espaço aplica-se com mudanças verbais apropriadas às propriedades matemáticas do tempo. O sentido do fluxo do tempo acompanha todas as nossas sensações e percepções, e pràticamente tudo o que nos interessa relativamente ao tempo pode ser posto em paralelo com as propriedades matemáticas abstractas que lhe atribuímos. Inversamente, o que dissemos sobre os dois requisitos que devem ser satisfeitos pela regra segundo a qual se determina a duração do dia, também se aplica à regra para a determinação do comprimento de uma jarda, que deve conservar o mesmo comprimento quando se desloca. De acordo com o segundo requisito, uma régua de uma jarda dilata-se ou contrai-se com as variações de temperatura conforme a natureza da substância de que é feita.

Se não fosse a circunstância de as nossas sensações serem acompanhadas de percepções de localização e de duração, e o facto ainda de serem grandezas, cada uma por seu modo, as linhas, as superfícies e os volumes, a teoria dos números seria de pequena importância na exploração das leis do Universo. E visto que é assim, as ciências físicas têm como base as noções de número, grandeza, espaço e tempo. As ciências matemáticas que também as consideram não constituem toda a matemática mas são o substractum da física matemática tal como ela existe hoje.

FIM

NOTAS

A (pág. 55) Na leitura destas equações deve notar-se que um parêntesis é utilizado no simbolismo matemático para indicar que as operações que estão dentro dele devem ser efectuadas em primeiro lugar. Assim $(1 + 3) + 2$ significa que deve juntar-se primeiro 3 a 1 e só depois juntar 2 ao resultado; da mesma maneira $1 + (3 + 2)$ significa que primeiro se deve juntar 2a 3, e depois somar 1 ao resultado.

Um exemplo numérico da equação (5) é

$$2 \times (3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$$

Efectuam-se primeiro as operações dentro dos parêntesis, obtém-se

$$2 \times 7 = 6 + 8$$

B (pág. 117) A razão $\frac{SP}{PN}$ é chamada excentricidade da curva. A forma da curva, distinta do seu tamanho ou grandeza, depende do valor da excentricidade.

É errado pensar que as elipses em geral, como as hipérboles, em geral, têm, em cada caso, uma mesma forma. As elipses de diferentes excentricidades têm formas diferentes enquanto que as suas grandezas dependem dos comprimentos dos eixos *maiores*. Uma elipse com pequena excentricidade é quase um círculo, e uma elipse de excentricidade quase igual à unidade é uma longa oval achatada. As parábolas têm a mesma excentricidade e são todas portanto da mesma forma, se bem que possam ser traçadas com escalas diferentes.

C (pág. 172) Se uma série com todos os termos positivos é convergente, a série modificada fazendo alguns termos positivos e outros negativos, segundo determinada regra, é também convergente. Cada uma das séries assim obtida, incluindo a série original, é chamada «absolutamente convergente». É contudo possível que uma série com termos positivos e outros negativos seja convergente, e a série correspondente com todos os termos positivos seja divergente. Por exemplo a série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+, \text{etc.}$$

é convergente, enquanto que a série:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

é divergente. Tais séries convergentes que não são absolutamente convergentes são muito mais difíceis de tratar do que as séries absolutamente convergentes.

ÍNDICE

OUTRAS PUBLICAÇÕES