ESCOLAS REGIMENTAIS

COMPÊNDIO DE GEOMETRIA

PARA O

2.º e 3.º CURSOS

POR

JOÃO ANTÓNIO CORREIA DOS SANTOS

Coronel de infantaria,
habilitado com o curso do Estado Maior,
professor no Colégio Militar

Aprovado pela Comissão nomeada para a escolha de livros.

1931
IMPRENSA BELEZA
99 – Rua da Rosa – 107
LISBOA

ESCOLAS REGIMENTAIS

COMPÊNDIO DE GEOMETRIA

PARA O

2.º E 3.º CURSOS

ADAPTADO AO PROGRAMA

POR

JOÃO ANTÓNIO CORREIA DOS SANTOS

Coronel de infantaria, habilitado com o curso do Estado Maior, professor no Colégio Militar

Aprovado pela Comissão nomeada para a escolha de livros.

1931
IMPRENSA BELEZA
99 — Rua da Rosa — 107
LISBOA

ESCOLAS REGIMENTAIS

2.º CURSO DE HABILITAÇÃO

GEOMETRIA

PROGRAMA

Revisão e desenvolvimento da matéria dada no 1.º curso. Polígonos, sua nomenclatura e elementos; triângulo, sua nomenclatura; conhecimento do teorema de Pitágoras. Nomenclatura dos ângulos formados por duas rectas cortadas por uma terceira; quadrilateros, sua nomenclatura, circunferência e círculo; nomenclatura dos seus elementos e das partes do círculo; perímetro dos polígonos e da circunferência, área dos polígonos regulares, círculo, sector e coroa circulares.

PREFÁCIO

O compêndio de geometria para o 2.º e 3.º cursos foi elaborado em harmonia com o programa. Achamos todavia conveniente fazer a aplicação de princípios mais usualmente empregados na solução de alguns problemas de aplicação mais freqüente na vida prática. Alguns dêsses exercícios — em pequeno número — empregam princípios, que não foram estudados, mas vêem indicadas as fórmulas a que se tem de recorrer, para a sua solução.

Entendemos que o estudo da matemática tem de ser acompanhado de numerosos exercícios de aplicação prática, para ser mais profícuo, e quanto mais elementar fôr êsse estudo, maior será a necessidade de aplicação das regras estudadas à prática da vida corrente. Não é obrigatória a exigência de todos os exercícios apresentados, poderão mesmo ser eliminados alguns, se fôr êsse a critério da Ex.ᵐᵃ Comissão, mas o que não deve deixar dúvida alguma é que, com esta série de exercícios, se presta aos professores um auxílio importante, para poderem assim aplicar o que foi estudado na teoria.

2.º Curso de habilitação

Geometria

a) *Polígonos. — Sua nomenclatura e elementos.*

1 — Dá-se o nome de *polígono* à porção de plano limitada por uma linha quebrada fechada. Assim a porção do plano limitada pela linha abcd da fig. 1 é um polígono.

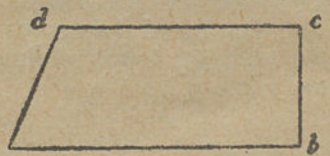

Fig. 1

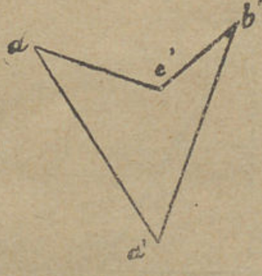

Fig. 2

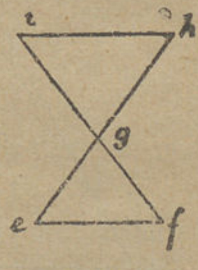

Fig. 3

A linha quebrada que limita a figura chama-se *contôrno* do polígono; os segmentos que o formam têem o nome de l*ados,* os quais se encontram nos pontos chamados *vértices.* Os ângulos formados pelos lados reünidos dois a dois chamam-se ângulos do polígono. Chama-se *perímetro* dum polígono a soma dos números que exprimem a medida dos seus lados.

Um polígono diz-se *convexo*, se fica todo da mesma banda de qualquer lado, quando prolongado, e *côncavo* no caso contrário. Assim na fig. 1. o polígono abcd é convexo, e nas fig. 2 e 3 os polígonos $a'b'c'd'$, efghi são, côncavos,

Os polígonos teem tantos vértices e tantos ângulos, quantos são os seus lados.

2 — O mais simples dos polígonos ê o *triângulo*, que é formado por três lados.

Seguem-se-lhe o *quadrilátero*, *pentágono*, *hexágono*, *heptágono*, *octógono*, *eneágono*, *decágono*, *endecágono*, *pentadecágono*, *icoságono*, conforme teem 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20 lados.

Os outros polígonos não teem denominação especial e designam-se polígonos de 13, 14, 16 lados.

b) *Triângulo.* — O triângulo é, como dissemos, o polígono de três lados. Chama-se *base* do triângulo a qualquer dos seus lados, e *altura* ao segmento tirado perpendicularmente do vértice oposto, sôbre a base.

1 — Os triângulos podem ter os três lados iguais, e dizem-se *equiláteros*, ex. abc (fig. 4); só dois lados iguais, e chamam-se *isósceles*, ex. def; ou todos desiguais, e denominam-se *escalenos*, ex. g h i.

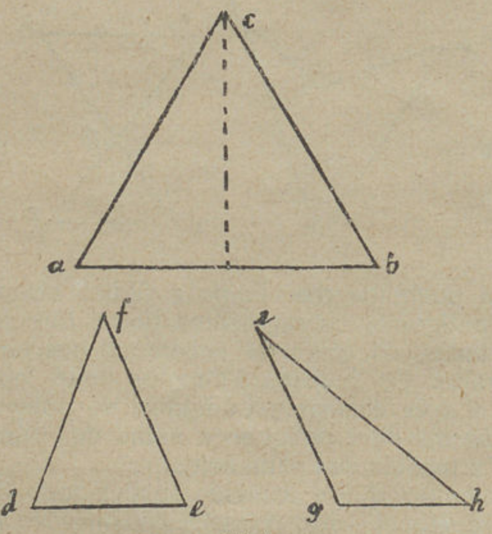

Fig. 4

2 — *A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois rectos.*

Assim no triângulo g i h fig. 5,
igh + gih + ghi = 2 ângulos rectos.

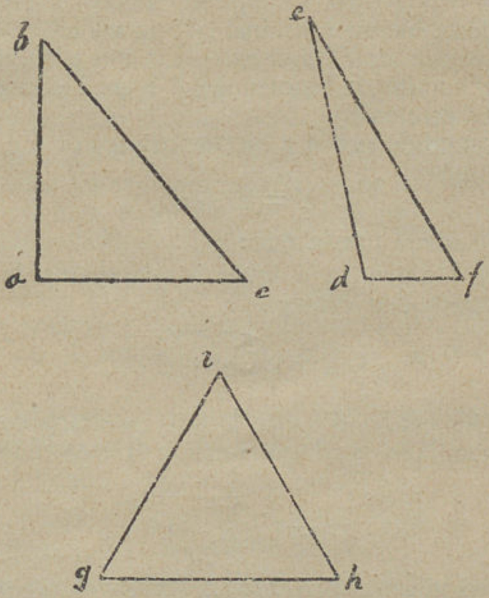

Fig. 5

Os ângulos costumam-se medir, habitualmente, tomando para unidade um ângulo que se chama *grau* e tal que, somando 90 dêsses ângulos, obtém-se um ângulo recto.

A soma dos ângulos de um triângulo é poís igual a 180°.

3 — a). Se num triângulo dois lados são iguais, os ângulos opostos a estes lados são iguais.

b). Se dois lados de um triângulo são desiguais, os ângulos opostos a estes lados são também desiguais, e ao lado maior opõe-se ângulo maior.

E assim reciprocamente, se num triângulo dois ângulos são iguais, os lados opostos são também iguais.

A maior ângulo opõe-se maior lado.

4 — Em um triângulo, qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois lados e maior do que a sua diferença.

Assim no triângulo a b c da fig. 5.

$$bc < ab + ac$$
$$bc > ab - ac$$

o sinal $<$ lê-se menor e o sinal $>$ lê-se maior.

5 — *Teorema de Pitágoras.* — Em um triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Representando por *a* a hipotenusa e por *b* e *c* os catetos, temos que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

e desta igualdade tira-se que:

1.° — A hipotenusa é igual à raíz quadrada da soma dos quadrados dos catetos.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

2.º — Um cateto é igual à raiz quadrada da diferença entre o quadrado da hipotenusa e o quadrado do outro cateto.

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

c) *Nomenclatura dos ângulos formados por duas rectas cortadas por uma terceira.*

1 — *Quando duas paralelas AB e CD são cortadas por uma secante qualquer MN* (fig. 6) *os quatro ângulos agudos formados são iguais entre si, bem como os quatro ângulos obtusos.*

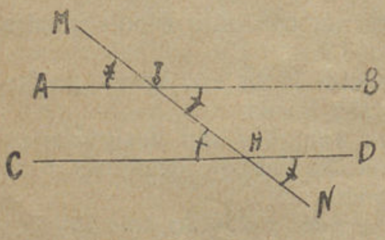

Fig. 6

Na fig. 6 temos o ângulo BIN = CHM. Os outros dois ângulos agudos AIM, DHN, são respectivamente iguais aos precedentes, como verticalmente opostos que são.

Da igualdade dos quatro ângulos agudos conclui-se a igualdade dos quatro ângulos obtusos, porque cada um dêstes últimos é o suplemento de um dos ângulos agudos.

2 — Dão-se nomes particulares aos ângulos diversos, que uma secante forma com 2 rectas *quaisquer*.

Chamam-se ângulos *alternos internos* dois ângulos não adjacentes, situados no interior das duas linhas e de lados diferentes da secante: os ângulos BIN e MHC (fig. 6).

Ângulos *alternos externos* são dois ângulos não adjacentes situados por fóra das duas rectas e de lados diferentes da secante: AIM e DHN, MIB e CHN.

Ângulos *correspondentes* são dois ângulos não adjacentes situados de um mesmo lado da secante, um do lado de fora e outro do lado de dentro das duas rectas: os ângulos AIM e CHM, AIH e CHN, e BIM e DHI, BIN DHN.

Há ainda a atender aos ângulos *internos do mesmo lado da secante*: os ângulos BIN e DHM, AIH e CHM e os *externos do mesmo lado da secante*: BIM e DHN, AIM e CHN.

3 — Quando as duas rectas cortadas pela secante são paralelas, dá-se o caso de a secante formar:

1.º—Ângulos alternos internos iguais.

2.º—Ângulos alternos externos iguais.

3.º—Ângulos correspondentes iguais.

4.º—Ângulos internos do mesmo lado, suplementares.

4 — Reciprocamente:

Se duas rectas AB e CD (fig. 5) cortadas por uma secante MN formam;

Ângulos alternos internos iguais,
ou ângulos alternos externos iguais,
ou ângulos correspondentes iguais,
ou ângulos internos do mesmo lado, suplementares,
ou ângulos externos do mesmo lado, suplementares,
estas duas rectas são paralelas.

d) **Quadriláteros**

1 — O *quadrilátero* é como já se disse um polígono de quatro lados.

2 — *Nomenclatura dos quadriláteros.* — Dá-se o nome de *paralelogramo* a um quadrilátero que tem os lados oposto paralelos (fig. 7). *base* do paralelogramo é qual-

quer dos seus lados; a *altura* é a distância da base ao lado oposto.

3—*Rectângulo* é o quadrilátero, cujos quatro ângulos são rectos (fig. 7).

4—*Losango* ou *rombo*, é o quadrilátero, cujos lados são todos iguais. (fig. 8)

Quadrado, é o quadrilátero que tem iguais os ângulos e os lados é pois equiângulo e equilátero (fig. 9).

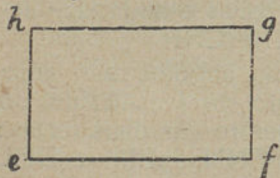

Fig. 7

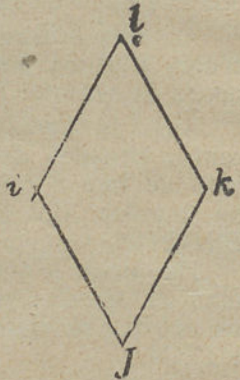

Fig. 8

5 — *Trapézio*, é o quadrilátero, que tem só dois lados paralelos *ab* e *ef* (fig. 10).

Um trapézio é *rectângulo* quando

Fig. 9

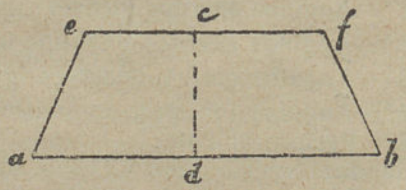

Fig. 10

os seus lados paralelos são perpendiculares a um terceiro lado.

O trapézio que tem os lados *ae*, *bf* (fig. 10) iguais, chama-se *isósceles;* o que os não tem chama-se *escaleno* (fig. 11).

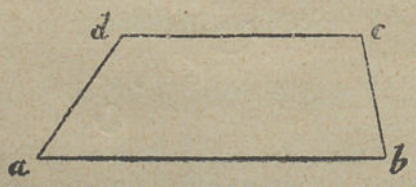

Fig. 11

Exercícios de recapitulação

1.º — Dois ângulos medem, um dêles 60.º 45′, o outro 45.º 24″, calcular a sua diferença. R = 15.º 44′ 36″.

2.º—Qual é o complemento do ângulo 67.º 25′? R, 22.º 35′.

3.º — Qual é o suplemento do ângulo 74.º 8′? R. 105.º 52′.

4.º—Que particularidade apresenta um triângulo rectângulo, em que um dos ângulos valha 45.º?. É isósceles.

5.º—Um ângulo é igual a $\frac{82}{99}$ do ângulo recto; exprimir êste valôr em graus, minutos e segundos. R. 74.º 32′ 42″.

6.º—O ângulo no vértice de um triângulo isóscele mede 24.º 32′, calcular os ângulos com a base. R. 77.º 44′.

7.º—Um dos ângulos agudos de um triângulo rectângulo mede 26.º 17′. Qual é o valor do outro ângulo agudo? R 63.º 43′.

8.º—Em um triângulo rectângulo com os dois catetos iguais entre si, qual é o valor dos ângulos adjacentes á hipotenusa? R. 45.º.

9.º—Em um triângulo, um dos ângulos vale $\frac{2}{5}$ de um ângulo recto. Qual é o valor da soma dos outros dois ângulos. Esse triângulo poderá ser equilátero? R. 144.º Não pode.

10.º — Em um triângulo um dos ângulos vale $\frac{2}{5}$ do ângulo recto, e outro vale $\frac{3}{4}$ do recto. Qual é o valor do terceiro ângulo? R. 76.º, 30′.

11.º — A diferença entre os dois ângulos agudos de um triângulo rectângulo é $\frac{1}{5}$ do ângulo recto, achar o valor dêsses ângulos. R. 54.º e 36.º

12.º — Em um triângulo, um dos ângulos agudos é $\frac{2}{5}$ do ângulo recto, o outro vale $\frac{5}{6}$ do ângulo recto. Qual é o valor do ângulo externo, adjacente ao terceiro ângulo? R. 111º.

13.º — Exprimir sôbre a forma fraccionária o valor do ângulo de um triângulo equilátero. R.=$\frac{1}{3}$ de 2 rectos, ou $\frac{2}{3}$ do recto.

14.º — Se um dos lados de um entrincheiramento, com o traçado de um triângulo rectângulo, isóscedes, tem de comprimento 10^m, quantos homens serão precisos empregar, para guarnecer o lado da hipotenusa, supondo que se emprega um homem por cada metro corrente? R. 14.

15.º — Se tivermos um triângulo rectângulo com a hipotenusa igual a 20^m, um dos catetos igual a 10^m, qual será o valor do outro cateto? R. $17^m,3$.

16.º — Se em um triângulo rectângulo, isósceles, o quadrado da hipotenusa fôr igual a 100^m, qual será o valor do quadrado de um dos catetos? R. 50^m.

17.º — Uma canhoneira fica a 12 metros do solo, que comprimento deverá ter uma escada para a atingir, supondo que os pés da mesma não se podem aproximar mais de 4 metros da muralha? R. $12^m,6$.

18.º — Temos duas rectas cortadas por uma secante e sabe-se que esta forma com uma das rectas um ângulo interno 35.º e com a outra um ângulo alterno interno que é suplementar do seu ângulo adjacente que mede 145º. Que propriedade têem as duas rectas?

e) Circunferência

1 — Há uma infinidade de linhas curvas; mas não nos preocupamos senão com uma única, a *circunferência*, que é uma curva fechada, traçada sôbre um plano e cujos pontos estão todos a igual distância dum ponto interior chamado *centro*.

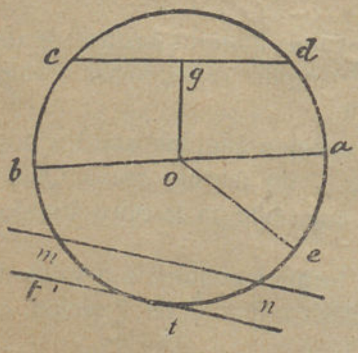

Fig. 12

A porção do plano limitada pela circunferência chama-se *círculo* e a linha oe, que vae do centro O a um ponto qualquer da circunferência chama-se *raio* do círculo.

13.º — Uma recta ab (fig. 12), que passa pelo centro e termina em dois pontos da circunferência, chama-se *diâmetro*. Todos os diâmetros da circunferência são iguais e cada um dêles é o dôbro do raio.

2 — Uma porção mtn da circunferência é um *arco*

de *círculo*. A recta mn que junta as extremidades do arco chama-se uma *corda*. Diz-se que a corda subtende o arco ou que o arco é subtenso pela corda.

A porção do plano que é limitada pela corda m n e pelo arco n t m forma um segmento de *círculo*.

A porção do círculo compreendida entre dois raios oa e o e é um *sector circular*.

Uma recta que corta a circunferência e que tem pontos no interior e exterior da curva chama-se uma *secante*.

A recta que toca a circunferência apenas num único ponto chama-se tangente, t't (fig. 12) e t é o *ponto de contacto*.

Chama-se *flecha* a linha conduzida do meio duma corda ao meio do arco subtenso.

f) Perímetro dos polígonos e da circunferência

1 — *Polígonos regulares.* — Um polígono que tem iguais todos os seus lados e os seus ângulos chama-se *polígono regular*. Assim sucede por exemplo com o triângulo equilátero e com o quadradro.

Um polígono está *inscrito* num círculo, quando todos os seus vértices se encontram na circunferência, que limita êsse círculo, e o círculo diz-se *circunscrito* ao polígono (fig. 13).

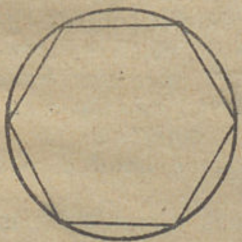

Fig. 13

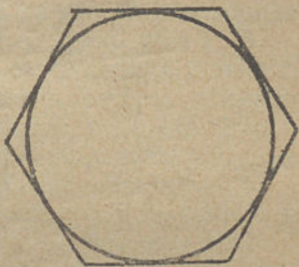

Fig. 14

Um pílogono é *circunscrito* a um círculo quando todos os seus lados são tangentes à circunferência. Nêste caso diz-se que o círculo está inscrito no polígono (fig. 14).

2 — Para se avaliar o perímetro dum polígono procederemos de duas maneiras, conforme se trata dum polígono regular ou dum outro com os lados desiguais.

Se o polígono é regular, basta medir o comprimento do segmento da recta que forma um dos seus lados e multiplicá-lo pelo número de lados. Assim se representarmos por C o comprimento dum dos lados, por n o número de lados, o perímetro do polígono regular será

$$P = n \times c$$

Se o polígono é irregular, temos de conhecer o comprimento de cada um dos lados e somá-los todos

3 — *Perímetro da circunferência e dos arcos* — A circunferência, sendo uma linha curva, não se pode obter o seu comprimento, comparando a com um segmento de recta tomado para unidade.

Daí resulta a necessidade de definir o que seja *comprimento duma circunferência.* Consideremos o polígono regular inscrito na circunferência (fig. 13); se lhe duplicarmos o número de lados, obter-se-há outro polígono, cujo perímetro é maior que o perímetro do primeiro; se duplicarmos o número de lados do novo polígono, obter-se-há um terceiro polígono, cujo perímetro é maior que o do segundo. Suponhamos que se aumenta indefinidamente o número de lados; os perímetros dos polígonos regulares inscritos irão crescendo sempre, tendendo para um limite isto é, para um certo estado de grandeza, que não poderão atingir, mas de que se aproximarão cada vez mais.

E' a êste limite que se chama o comprimento da circunferência. Donde se dá a seguinte definição de *comprimento de uma circunferência, ao limite para que tende o perímetro dum polígono regular inscrito, quando o número dos lados dêste polígono aumenta indefinidamente.*

4 — *A razão de duas circunferências é igual à dos seus raios ou à dos seus diâmetros.*

De sorte que, se representarmos duas circunferências por C e c e os seus raios por R e r. teremos:

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r}$$

ou ainda

$$\frac{C}{c} = \frac{2R}{2r}$$

substituindo 2R por D e 2r por d.

$$\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$$

ou ainda podemos escrever, alternando:

$$\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$$

de forma que, se tivermos várias circunferências C, C', C'', com os seus diâmetros D, D', D'',... haverá a razão constante

$$\frac{C}{D}=\frac{C'}{D'}=\frac{C''}{D''}$$

Esta razão constante, que existe entre a circunferência e o seu diâmetro, exprime-se pela letra grega π que se lê (pi).

Tem-se pois:

$$\frac{C}{2R}=\pi, \text{ ou } \frac{C}{D}=\pi$$

donde se tira

1.° — Para achar o comprimento de uma circunferência, de que se conhece o raio ou o diâmetro.

$$C=2\pi R, \text{ ou } C=\pi x D$$

2.° — Para achar o raio ou o diâmetro, quando se conhece a circunferência,

$$R=\frac{C}{2\pi} \text{ ou } D=\frac{C}{\pi}$$

Mas para se efectuar o cálculo é necessário conhecer o valor de π. Toma-se o valor aproximado 3,1416.

Se quizermos rectificar um arco com um valor menos do que uma circunferência, calcula-se o comprimento total da circunferência, correspondente ao raio do arco dado; divide-se êste valor encontrado por 360 e multiplica-se pelo numero de graus do arco, sendo conveniente efectuar a multiplicação antes da divisão por causa dos erros.

Exercícios

1.° — Qual é o ângulo que fazem os ponteiros de um relógio, às três horas menos dez minutos? R. 150.° — 5.° 145.°

2.º — Calcular o valor do comprimento dum quadrante traçado com o diâmetro de 26 cm. R. circ. = 81 cm. e o quadrante 20 cm.

3.º — A circunferência interior duma peça mede, rectificada, 44 centímetros.

Qual é o seu calibre? R. 14^{cm}.

4.º — Um arco de 10º, 24′ tem o comprimento de 7 decímetros. Qual é o raio da circunferência a que pertence o arco? R. 38^{dm}.

5.º — Qual é, sôbre uma circunferência de 5 metros de raio, o arco que tem 3^{m} de comprimento? R. 34º, 18′, 36″.

6.º — Qual será o perímetro interior duma bôca de fogo, que tenha de calibre 10 ^{cm}? R. 31 ^{cm}, 41.

7.º — Achar o comprimento duma circunferência cujo raio mede 1^{m},25? R. 7^{m},854.

8.º — Que diâmetro tem uma coluna, cujo contôrno mede 2^{m},356? R. 0^{m},749.

Determinar o comprimento dum arco correspondente a 108º, sabendo que a circunferência inteira é 7^{m},5? R. 2^{m},25.

Medição das áreas dos polígonos regulares

19. — Chama-se *área* ou superfície duma figura plana, à porção do plano limitado pelo contôrno dessa figura. Emprega-se muitas vezes a palavra superfície para designar a área.

20. — *Medir uma área* é compara-la com uma outra tomada para unidade.

A unidade da área é o *metro quadrado.*

Diz-se que as duas superfícies planas são *equivalentes*, quando têem a mesma área sem terem a mesma forma.

21. — A *área dum retângulo é igual ao produto da sua base pela altura.*

22. — O quadrado é um rectângulo cuja altura é igual à base, e por isso *a área dum quadrado é igual ao quadrado do seu lado.*

23. — *A área dum paralelogramo é igual ao produto da sua base, pela altura.*

Para base do paralelogramo toma-se um lado qualquer. A perpendicular tirada da base para o lado oposto representa a *altura* do paralelogramo.

24 — A *área dum triângulo é igual à metade do produto da sua base pela altura.* Assim, o triângulo que tenha a base de 5^m e a altura de 4^m terá a área de 10^{m^2}.

25 — A *área dum trapézio é igual ao produto da metade da soma das bases pela altura.*

Representando as duas bases por B e b e a altura por H, será

$$\text{Área do trapézio} = \frac{B+b}{2} x\ H$$

A *área do trapézio também se avalia multiplicando, pela sua altura, o valor da recta, que une os meios dos lados não paralelos.*

26 — A *área de um polígono regular é igual ao produto do perímetro, por metade do apótema* [1].

$$A = P\ x \frac{a}{2}$$

27 — A *área do círculo é igual ao quadrado do raio multiplicado por* π. $A = \pi R^2$.

28 — A *área do sector circular tem por medida o produto do comprimento do arco, por metade do raio.*

$$A = \frac{\pi\ x\ R\ x\ n}{180}\ x \frac{R}{} = \frac{\pi R^2 x\ n}{360}$$

Representando por n o número de graus do arco.

Assim para achar a área do sector de $2^m,5$ de raio e do ângulo 20°, a área será

$$A = \frac{3{,}1416\ x\ 2{,}5\ x\ 20}{360} = 1^{m^2}{,}18$$

Se fôsse o sector correspondente a um arco de $15^\circ\ 10'$ $10''$ reduzíamos a segundos e dividíamos pelo número de segundos existentes nessa circunferência, ou $360 x 60 x 60 =$ $1.296000''$.

---

[1] Apótema — É a perpendicular tirada do centro para qualquer dos lados.

Para reduzir 15° 10′ 10″ a segundos procedemos da forma seguinte:

$$\begin{array}{r} 60' \times 15° = 900' \\ + \quad 10' \\ \hline 910' \\ \times \quad 60'' \\ \hline 54600'' \\ + \quad 10'' \\ \hline 54610'' \end{array}$$

Vê-se que 15° 10′ 10″ correspondem a 54610″, multiplicávamos depois o número por r^2 e dividíamos por 1 296:000 e assim obtínhamos para a área o valor; supondo o mesmo valor $2^m,5$ para o raio:

$$A = 0^{m^2},85$$

29 — *A área duma coroa circular.* — *Coroa circular* é a porção de círculo compreendida entre duas circunferências concêntricas (fig. 14). Nas duas circunferências da fig. 14 representa-se por R o raio da circunferência exterior e por r o raio da circunferência interior. A área da corôa é evidentemente igual à diferença entre as áreas dos dois círculos de raios R e r; isto é igual a $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$

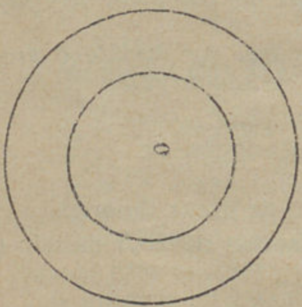

Fig. 14

Exercícios

1.° — Um triângulo que tem 10^m de base e 5^m de altura, qual será a sua área? R. 25^{m^2}.

2.° — Qual será a altura dum triângulo que tem de área 25^{m^2}. e de base 10^m? R. 5^m.

3.° — Qual é o perímetro dum triângulo isósceles que tem de área $5^{m^2},25$ e de base $2^m,10$? R. $12^m,10$.

4.° — Qual é a base do quadrado equivalente ao triângulo de $0^m,42$ de base, e de altura $0^m,22$? R. $0^m,2$.

5.º — Um pátio tem a forma quadrada de $182m^2,25$, Qual é o seu perímetro? R. 54m.

6.º — Calcular a área dum rectângulo que tem 12m,4 de base e 15m de diagonal. R. $104,m^2 96560$.

7.º — Qual é a área dum polígono regular que tem 8m,4 de perímetro e 1,212 de apótema? R. $5,m^2 90904$.

8.º — Com que raio devemos traçar um círculo para que a sua área seja $6m^2$? R. 1,m38.

9.º — Sôbre um círculo de 3,m6 de raio, qual é a superfície dum sector cujo arco mede 75 cm? R. $8m^2$, 4823.

10.º — O raio exterior de uma bacia é de 7m, o raio interior 4m. Qual é a superfície ocupada pela alvenaria? R. $103m^2,6728$.

3.º CURSO DE HABILITAÇÃO DAS ESCOLAS REGIMENTAIS

GEOMETRIA

DO 3.º CURSO

PROGRAMA

Revisão das matérias dos anos anteriores. Planos paralelos e oblíquos; ângulos diédros e seus rectilíneos; geração e planificação da pirâmide, prisma, cone e cilíndro rectos, secções planas e oblíquas; geração da esfera, áreas e volumes da esfera, pirâmides, prisma (cubo e paralelipípedo), cone e cílindro rectos.

Noções de geometria no espaço

CAPÍTULO I

a) Planos paralelos e oblíquos

1 — *A geometria no espaço*, ou geometria a três dimensões, trata das figuras cujos pontos não estão situados no mesmo plano.

2 — O *plano* é uma superfície tal, que uma recta que passe por dois dos seus pontos, tomados ao acaso, fica assente nêle completamente.

Assim, por exemplo, se um carpinteiro aplicar sôbre dois pontos dum bocado de madeira bem aplainada o bordo duma régua, êste bordo coincidirá em tôda a sua extensão com a superfície plana.

Devido à sua natureza, o plano é uma extensão indefínida. Contudo, para facilitar as demonstrações, fixar ideias, representa-se limitado por meio de rectas. Dá-se-lhe geralmente a fórma dum paralelogramo.

3 — Resulta da definição do plano, que:

1.º — *Uma recta não pode estar situada, parte num plano, e parte fóra dêle.*

2.º — Uma linha recta AB não pode cortar um plano (fig. 1) senão num ponto.

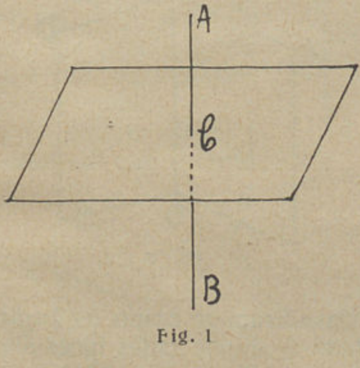

Fig. 1

Seja C êsse ponto, ao qual se chama pé da recta no plano.

4 — *Planos paralelos.* — Dois planos *N e M.* (Fig. 2) perpendiculares *a uma mesma recta AB* são *paralelos. Dois planos são paralelos* entre si, quando não podem encontrar-se, por mais que êles se prolonguem, e, por isso, dois planos paralelos estão igualmente afastados um do outro, em qualquer parte das suas superfícies.

5 — *Planos oblíquos.* — Dois planos que tendem a encontrar-se, quando se prolongam *são oblíquos.*

b) Ângulos diedros

6 — *Ângulos diedros.* — Dois planos A e D passando por uma recta BC (fig. 3), e limitados por esta recta, formam uma figura que se chama *ângulo diedro*. Um livro aberto, duas paredes que se encontram dão um ângulo diedro.

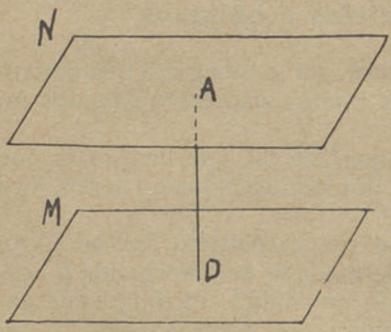

Fig. 2

Os dois planos que se encontram formam as *faces do diedro*, e a linha de intersecção BC constitui a *aresta*. Se vários diedros têem uma aresta comum, designa-se cada um dêles por quatro letras, duas das quais representam as faces. Conforme os casos dir-se há: o diedro BC (fig. 3), ou ainda, o diedro ABCD, enunciando as letras da aresta entre as outras.

7 — Se por um ponto *A* da aresta *DE* (fig. 4) dum diedro conduzirmos em cada face uma perpendicular a esta aresta, obtém-se um ângulo *BAC*, chamado *ângulo rectilínio do diedro*. Nêste caso, se o ponto *A* se deslocasse sôbre a aresta *DE*, o ângulo formado pelas rectas *AB* e *AC* não mudaria de grandeza. Por outros termos:

O ângulo rectilínio dum diedro é invariável, qualquer que seja a sua posição sôbre a aresta.

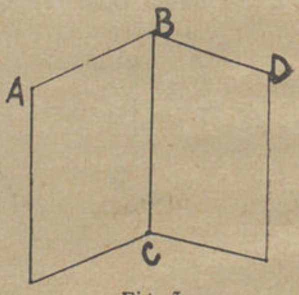

Fig. 3

8 — Os ângulos diedros classificam-se como os ângulos planos, isto é: *diedro raso* é aquele cujas faces são uma o prolongamento da outra. Exemplo: AMNB, e CMND (fig. 5) *Diedros adjacentes* são os que têem uma face comum, Exemplo : ABEC′ e C′BEC (fig. 6). E *verticalmente opostos* quando as faces de um são o prolonga-

mento das faces do outro. Exemplo: MABP e QAEN (fig. 7).

9 — Fazendo rodar o plano ABEN (fig.6) em tôrno de BE, êle

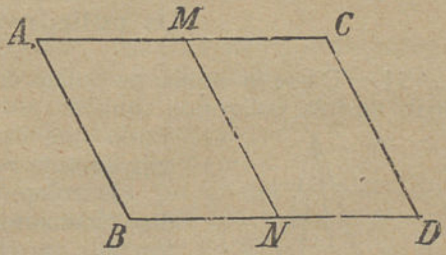

Fig. 5

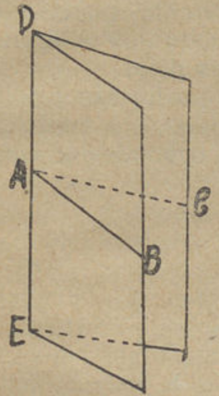

Fig. 4

passa pelas posições CEBC'' ,CEBD, etc., até chegar à posição GHBE, e nesta posição o diedro raso ABEL fica dividido em duas partes iguais que se donominam *diedros rectos.*

O diedro *agudo* é menor do que o recto

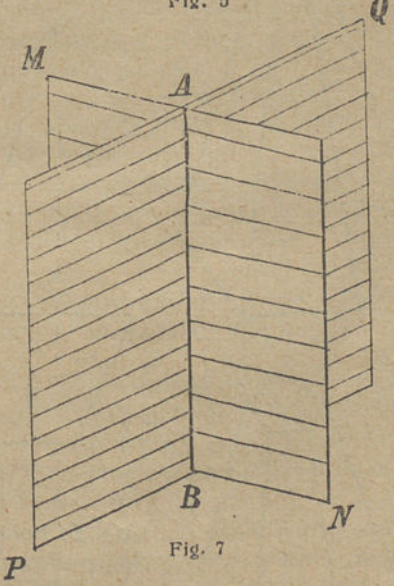

Fig. 7

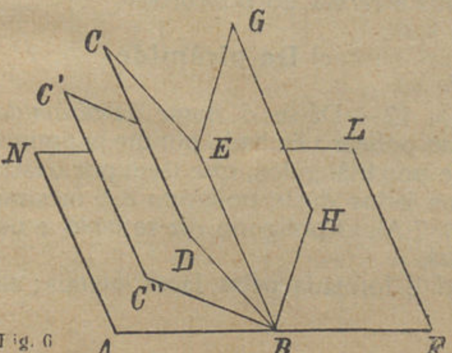

Fig. 6

e o *obtuso* é maior do que o recto.

10 — Quando dois planos se cortam formando diedros iguais dizem-se *perpendiculares* (fig.7); e, não se encontrando, dizem-se *paralelos* (fig. 2).

CAPÍTULO II

Os poliedros

11 — Dá-se o nome de poliedro à figura formada por mais de três polígonos situados em diferentes planos e de modo que cada lado dos polígonos seja comum a dois dêles.

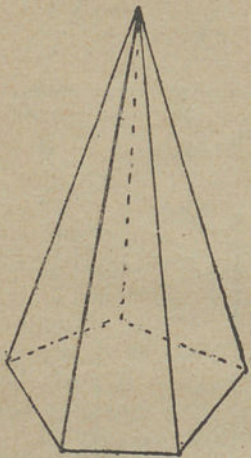

Fig. 7-A

Os polígonos que formam o poliedro chamam-se *faces* e a superfície formada por estas denomina-se *super-*

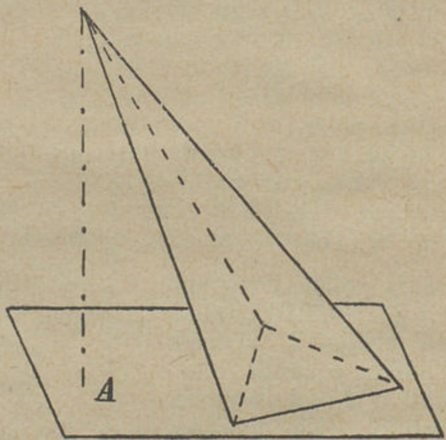

Fig. 9

fície do poliedro. Os lados e vértices dos polígonos têem o nome de *arestas* e *vértice* do poliedro.

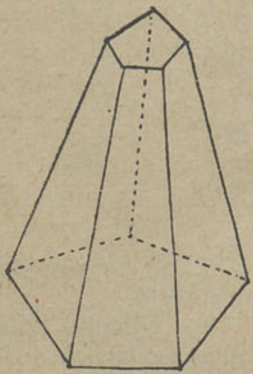

Fig. 8

c) Da pirâmide

12 — Dá-se o nome de *pirâmide* ao poliedro limitado por um polígono e por triângulos, que têem por bases os lados dêste polígono e o mesmo ponto para vértice (fig. 7-A). O poligono diz-se *base*, e os triângulos *faces laterais*.

A *superficie lateral* é formada pelas faces laterais; as *arestas laterais* são os segmentos que resultam da intersecção das faces laterais. *Vértice* é o ponto comum a tôdas as arestas laterais.

A pirâmide é *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc, segundo a base é um triângulo quadrilátero, pentágono, etc.

A *altura* da pirâmide é a perpendicular VA (fig. 9) baixada do vértice sôbre o plano da base.

Cortando uma pirâmide com um plano paralelo ou obliquo à base a porção de pirâmide que fica compreendida entre esta e o plano diz-se *tronco da pirâmide* (fig. 8).

13 — A pirâmide triangular tem o nome particular de *tetraedro*. É o poliedro mais simples Podemos tomar para base uma qualquer das suas quatro faces.

14 — Quando a base duma pirâmide é um polígono regular e o seu vértice se encontra sôbre a perpendicular levantada do centro da base, a pirâmide diz-se *regular*.

15 — Quando se corta uma pirâmide regular por um plano paralelo à base, obtêm-se um trônco de *piramide* regular, com as arestas laterais iguais. As faces laterais são trapézios.

Quando se corta uma pirâmide por um plano oblíquo obtém-se um tronco de pirâmide, e as arestas laterais são diferentes

16 — *Geração e planificação da pirâmide.* — A superfície lateral de uma pirâmide pode ser gerada por uma recta, que se desloca, apoiando um dos seus extremos na extremidade da perpendicular levantada ao centro da base e no outro extremo nos lados da base.

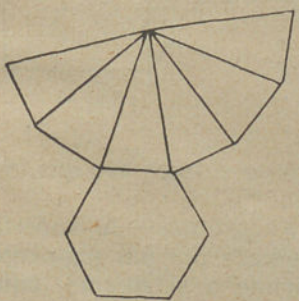

Fig. 10

Para se fazer a *planificação* duma pirâmide regular, suponhamos uma pirâmide hexagonal; traça-se um hexagono igual ao da base da pirâmide e sôbre um dos seus lados constroe-se um triângulo isósceles igual ao da face lateral da pirâmide e ligado a êste triângulo, com o mesmo vértice comum, desenham-se mais cinco triângulos, com os lados contíguos (fig. 10).

d) Prisma

17 — *Prisma* é o poliedro limitado por dois polígonos iguais e paralelos e por tantos paralelogramos quantos os lados de cada um dêsses polígonos. (fig. 11).

Os dois polígonos são as *bases* do prisma, e os paralelogramos as *faces laterais.*

O prisma cujas faces laterais são pependiculares às bases é *recto* (fig. 11), e, no caso contrário, *oblíquo* (fig. 12).

Altura do prisma é a perpendicular comum às bases.

Os prísmas denominam-se *triangulares*, *quadrangulares*, *pentagonais*, etc.; segundo as suas bases são triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.

18 — O prisma que tem por bases paralelogramos diz-se paralelipipedo (fig, 13).

Fig. 11

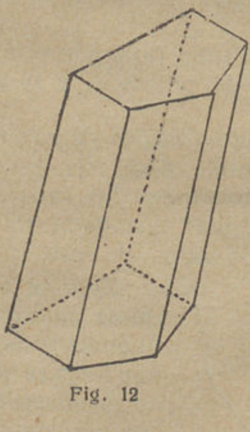

Fig. 12

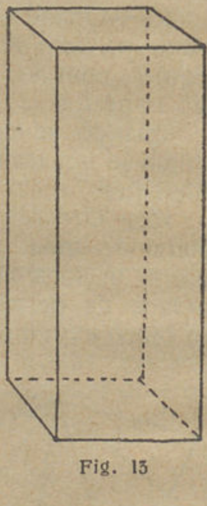

Fig. 13

19 — O paralelipipedo cujas bases e faces são quadrados tem o nome de *cubo* (fig. 15).

20 — *Geração e planificação do prisma.* — A superfície lateral do prisma pode ser gerada por um segmento de recta, deslocando-se paralelamente a si mesmo, conservando as suas extremidades apoiadas nos contornos das bases.

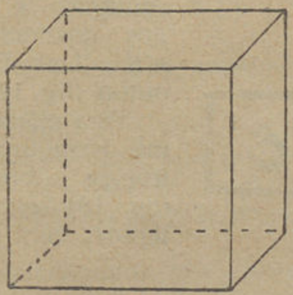

Fig. 15

Planificação dum paralelipipedo.—Constroe-se um rectângulo A igual à face ABEF do sólido. Sôbre os lados desta figura traçam-se outros 4 rectângulos, BB'. C e C',

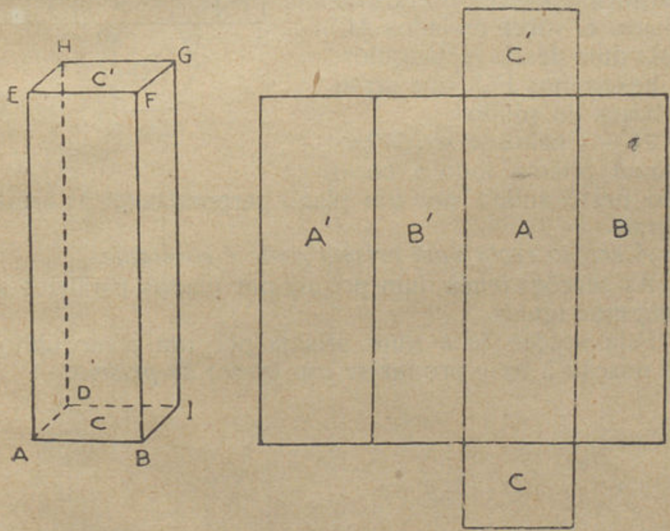

Fig. 16

os quais têem todos para largura a recta AD; por fim, a seguir a um dos retângulos B', traça-se um sexto rectangulo, A', igual ao prlmeiro (fig. 16).

Para planificar um cubo, traçam-se quatro quadrados

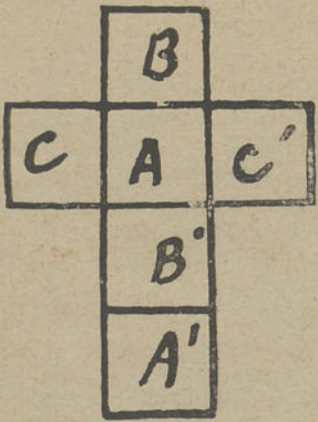

Fig. 17

contíguos, e juntos aos lados dos quadrados constroem-se mais duas figuras iguais às outras (fig. 17).

Para planificarmos um prisma hexagonal regular, constroe-se sôbre uma recta EF (fig. 18) seis rectângulos contíguos, com o comprimento e

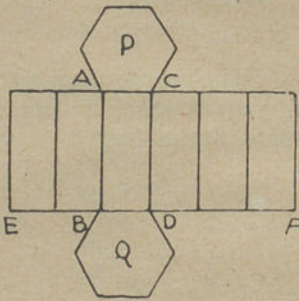

Fig. 18

a largura das faces laterais do prisma, e, sôbre os lados AC e BD dum dêstes rectângulos, os hexágonos PQ, que serão as bases do sólido.

21 — Chama-se *secção recta* dum prisma todo o corte feito neste sólido por um plano perpendicular às arestas laterais.

A secção recta dum prisma dado é constante.

As secções feitas num prisma por planos paralelos são polígonos iguais.

Pela secção feita num prisma por um plano oblíquo em relação à base produz-se um *tronco de prisma.*

CAPITULO III

Os três corpos redondos

22 — Dá-se em geometria elementar o nome de *corpos redondos* a três sólidos que têem as suas superficies curvas; êstes corpos são também chamados *sólidos de revolução*, porque são originados pelo movimento de rotação duma figura.

Os três corpos redondos são; o *cilindro*, o *cone* e a *esfera*.

e) Cone

23 — *Superfície cónica* (fig. 19) é a superfície gerada por um segmento de recta a a′ que se move no espaço, passando sempre um dos seus extremos por um mesmo ponto e o outro extremo por uma circunferência.

O *cone* é o sólido limitado por uma superfície cónica

Fig. 19

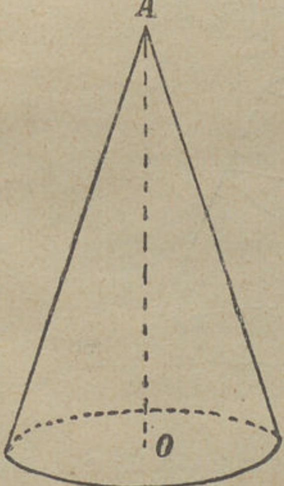

Fig. 20

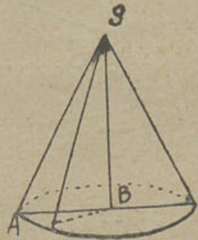

Fig. 21

e por um plano que se chama base (fig. 20). Se fizermos girar um triângulo rectângulo SBA em tôrno dum dos seus lados SB do ângulo recto, a hipotenusa SA gerará uma superfície curva, enquanto que o outro lado BA (fig. 21) descreverá um círculo.

O sólido assim determinado é *um cone recto de base circular*. A linha fixa SB é o *eixo* ou a altura do cone, o ponto S é o vértice; SA, geratriz da superfície curva ou lateral, tem os nomes de *aresta lado* ou *apótema*, e o círculo de raio BA é a *base* do cone.

O *cone recto de base circular* é pois o sólido gerado por um triângulo rectângulo girando em tôrno dum dos lados do ângulo recto.

24 — A superfície lateral dum cone recto desenvolvida sôbre um plano é um sector circular, que tem o vértice do cone para centro e o comprimento da circunferência da base para o comprimento do arco. Por conseguinte, para ter o desenvolvimento do cone proposto, traça-se o círculo O prolonga-se o raio OC dum comprimento CS igual ao apótema do cone; descreve-se a seguir do ponto S um arco AB, tangente à circunferência do círculo; e faz-se, com centro em S, um ângulo ASB igual a 360º x $\frac{OC}{SC}$ pois como se sabe as circunferências são proporcionais aos seus raios. (Fig. 23).

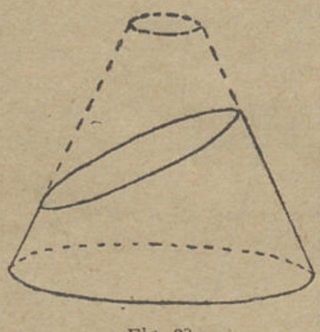

Fig. 22

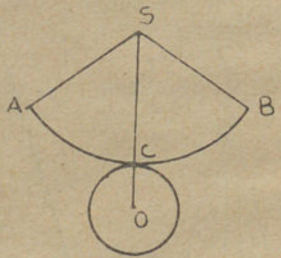

Fig. 23

25 — *Tronco de cone* (fig. 22) é a porção de cone compreendida entre a base e um plano secante paralelo ou obliquo a ela.

f) Cilindro

26 — Á superfície gerada por um segmento de recta, que se desloca paralelamente a si mesma e se apoia constantemente sôbre uma curva, dâ-se o nome de *superfície cilíndrica* (fig. 24).

Fig. 24

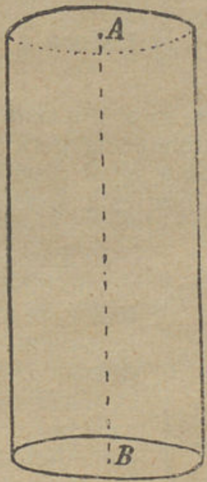

Fig. 25

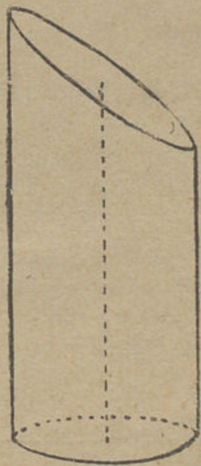

Fig. 26

27 — *Cilindro* (fig. 25) é um corpo limitado por uma superfície cilíndrica e por dois planos paralelos que se chamam bases do cilindro.

Eixo é a recta que une os centros das bases. O cilindro é recto quando o eixo é perpendicular às bases, e *oblíquo*, no caso contrário.

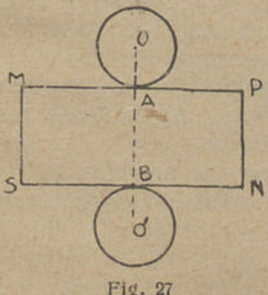

Fig. 27

O cilindro recto pode supor-se gerado, por um rectângulo que se move em tôrno dum dos seus lados.

28 — *Tronco de cilindro* é a porção de cilindro compreendida entre a base e um plano secante oblíquo a esta (fig. 26).

29 — *Planificação do cilindro.* — Traçam-se dois círculos iguais (fig. 27), que são as bases do cilindro e colocados a uma distância AB igual à altura dêste sólido; conduz-se depois, pela recta 00′ que reúne os dois centros as perpendiculares MP, SN tangentes às circunferências e às quais se dá o comprimento $2 \pi R$; o rectângulo MPNS é a superfície convexa desenvolvida do cilindro.

g) **Esfera**

30 — Quando se faz girar um semi circulo em tôrno do diâmetro, a semi-circunferência gera uma superfície com todos os seus pontos a igual distância do *centro*. O volume que é limitado por esta superfície tem o nome de uma *esfera* (fig. 28).

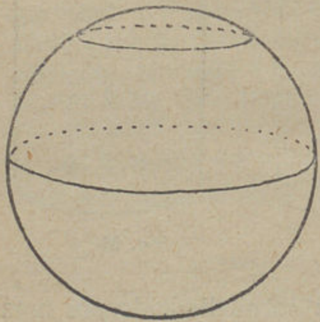

Fig. 28

Chama-se pois *esfera* um corpo limitado por uma superfície com todos os seus pontos igualmente distantes dum ponto interior chamado *centro*.

Raio da esfera é a recta tirada do centro para a superfície esférica.

Diâmetro é a recta que passa pelo centro e termina na superfície esférica.

31 — *Tôda a secção feita numa esfera por um plano é um círculo.*

Um plano secante à esfera divide-a em duas partes que se chamam *segmentos esféricos*. Se a secção é feita pelo centro, os segmentos dizem-se *hemisférios*. Á superfície esférica dêstes segmentos dá-se o nome de *calote*.

Dois planos paralelos dividem a esfera em três partes: dois segmentos esféricos e um *segmento esférico de duas bases*, cuja superfície esférica é a *zona*.

O círculo que resulta da intersecção de um plano com a esfera diz-se *máximo*, se a secção passa pelo centro, e *menor* no caso contrário.

CAPÍTULO IV

Áreas e volumes dos sólidos

32 — Chama-se *área* dum sólido limitado por faces planas a soma das áreas das suas faces.

Nos prismas e pirâmides há ainda a considerar a *área lateral*, que é a soma das áreas das suas faces laterais, e a *área total*, que é a soma da área *lateral* e das *áreas* das bases.

33 — Medir o *volume* dum corpo é procurar a sua relação, para um volume tomado para unidade. Toma-se para unidade de volume o cubo construído sôbre a unidade de comprimento. A unidade principal de comprimento sendo o metro, a unidade principal de volume é o *metro cúbico.*

34 — *Área do prisma. — A área lateral dum prisma recto é igual ao produto do perímetro da base, pela aresta lateral.*

Representando por P o perímetro da base, a aresta lateral por a, a area do prisma será:

$$A = P \times a$$

35 — A superfície total sendo igual à superfície lateral aumentada das áreas das duas bases, ter-se há representando por b a área duma das bases:

$$\text{Área total} = P \times a + 2b$$

36 — *A área lateral dum prisma oblíquo tem por medida o produto do perímetro da secção recta pela aresta lateral.*

37 — *Área do paralelipípedo.* — Como o paralelipípedo é um prisma, cuja base é um paralelogramo, obter-se há a sua área lateral ou total, segundo as mesmas regras indicadas para o prisma.

38 — *Volume do prisma. — O volume dum prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela altura.*

39 — *Volume do paralelipípedo. — O volume dum paralelipípedo rectângulo é igual ao produto das três arestas, que partem dum mesmo vértice.*

40 — Um *cubo* sendo um paralelipípedo rectângulo, cujas dimensões são iguais, obtém-se o seu volume pelo produto da sua aresta tomada três vezes como factor, isto é, *elevando ao cubo o número que mede uma aresta.*

41 — *Área da pirâmide. — A área lateral duma pirâmide regular é igual ao produto do perímetro da base pela metade do apótema.*

Seja a pirâmide S A B C D (fig. 29), culo apótema é S O (altura de cada um dos triângulos aterais). Designando por P o perímetro e por a o apótema, a área lateral da pirâmide será representada por

$$A = P \times \frac{a}{2}$$

42 — *A área lateral dum tronco de pirâmide regular é igual à semi-soma dos perimetros das bases, multiplicada pelo apótema do tronco. (Altura de qualquer das faces laterais).*

43 — *O volume duma pirâmide qualquer é igual ao têrço do produto da base pela altura.*

$$V = \frac{B \times H}{3}$$

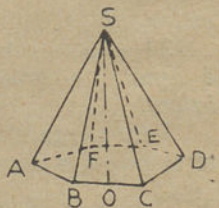

Fig. 29

44 — *O volume dum tronco de pirâmide é igual ao produto dum terço da altura do tronco pela soma das áreas das bases e da meia proporcional entre elas.*

$$V = \frac{H}{3} \times (B + b + \sqrt{B \times b})$$

45 — *Área do cilindro. — A área lateral dum cilindro recto é igual ao produto da circunferência da base pela altura.* Representando por R o raio da base e por H a altura do cilindro, será a expressão da área lateral:

$$A = 2\pi R \times H$$

Se acrescentarmos à área lateral do cilindro as áreas das duas bases, que vale cada uma πR^2, ter-se-há:

$$\text{Área total} = 2\pi R \times H + 2\pi R^2$$
$$\text{ou } 2\pi R\,(H + R)$$

46 — *O volume dum cilindro circular recto é igual ao produto da base pela altura.*

$$V = \pi R^2 x H$$

47 — *A área lateral dum cone recto é igual ao produto da circunferência da base pela metade do apótema.*

Se R representa o raio da base e a o apótema, ou a geratriz, a área lateral do cone será representada por

$$A = 2\pi R x \frac{a}{2} = \pi R x a$$

Adicionando à área lateral do cone a superfície do círculo da base, teremos:

$$\text{Área total} = \pi R x a + \pi R^2$$
$$\text{ou } \pi R x (R + a)$$

48 — *O volume dum cone recto é igual ao produto da base pelo terço da altura.*

$$V = \frac{\pi R^2 x H}{3}$$

49 — *A área lateral do tronco do cone de bases circulares é igual ao produto da semi-soma das circunferências das bases pelo apótema.*

$$A = \frac{2\pi R + 2\pi r}{5} x a$$

50 — *O volume dum tronco de cone de bases paralelas é igual ao produto dum têrço da altura do tronco pela soma das áreas das bases e da meia proporcional entre elas.*

$$V = \frac{H}{3} x (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2})$$

ou pondo π em factor comum

$$V = \frac{\pi H}{3} x (R^2 + r^2 + Rr)$$

51 — *Esfera. — A área da esfera é igual a quatro vezes a área dum círculo máximo.*

$$A = 4\pi R^2$$

52 — *O volume da esfera é igual ao produto da sua área pelo têrço do raio.*

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Recapitulação da Geometria

Em exercícios práticos

1.º — Uma recta encontra outra, formando dois ângulos adjacentes, um dos quais vale $\frac{5}{7}$ de um ângulo recto.

¿Qual é o valor do outro ângulo expresso por uma fracção?

R. — Os dois ângulos são suplementares, valem na totalidade 2 rectos. O ângulo, cujo valor é pedido, é pois $2 - \frac{5}{7}$, isto é, $\frac{9}{7}$ ou 1 recto $\frac{2}{7}$.

2.º — Em um triângulo, um dos ângulos vale $\frac{3}{5}$ de um ângulo recto, um outro vale $\frac{5}{7}$ de um recto.

¿Qual é o valor do terceiro ângulo?

R. — $\frac{24}{35}$ de um recto.

3.º — Sabe-se que dois ângulos de um triângulo valem: o primeiro 15º; o segundo 30º. ¿Qual será o valor do terceiro ângulo?

R. — 135º.

4.º — Num triângulo, um dos ângulos agudos é $\frac{2}{5}$ do ângulo recto e o outro vale $\frac{5}{6}$ do recto. ¿Qual é o valor do ângulo externo adjacente ao terceiro ângulo?

R. — 1 $\frac{7}{30}$ do recto.

5.º — Exprimir, sob a forma fraccionária, o valor do ângulo de um triângulo equilátero.

O triângulo equilátero é ao mesmo tempo equiângulo; um dos seus lados valerá pois $\frac{1}{3}$ de 2 rectos, ou $\frac{2}{3}$ do ângulo recto.

6.º — ¿Qual é o comprimento do lado dum losango, sabendo-se que o seu perímetro é igual a $\frac{2}{5}$ do que tem um rectângulo, cujos lados medem 9^m e 21^m?

R. — 6^m.

O perímetro do retângulo é $2 \times 30^m = 60^m$; $\frac{2}{5} \times 60 = 24^m$, o perímetro do losango é 24 metros.

Tomando a quarta parte, visto o losango ter os quatro lados iguais, obtemos 6^m.

7.º — Dois quartéis A e B estão situados a uma certa distância da carreira de tiro C. O ângulo CAB é igual a $\frac{4}{5}$. do ângulo recto; o ângulo CBA é $\frac{5}{9}$ do ângulo recto. ¿Qual é dos quartéis que fica mais próximo da carreira de tiro?

R. — O quartel A.

Vê-se qual dos ângulos é maior e depois aplica-se o princípio de que num triângulo a lado maior se opõe ângulo maior.

8.º — Um dos ângulos agudos dum triângulo rectângulo vale $\frac{2}{3}$ dum recto. ¿Quanto vale o outro?

R. — $\frac{3}{5}$ do recto.

9.º — O perímetro dum triângulo equilátero é metade do perímetro dum quadrado que tem 12^m de lado. ?Qual será a altura daquele triângulo?

R. — $6^m,928$.

A altura dum triângulo equilátero expressa no lado é

$$h = \frac{L}{2}\sqrt{3}$$

O perímetro do quadrado é 48^m.

O perímetro do triângulo é $\frac{48m}{2} = 24^m$.

O lado do triângulo é 8^m.

$$h = \frac{8}{2}\sqrt{3} = 4 \times 1,732 = 6^m,928$$

10.º — ¿Qual será o perímetro dum quadrado, cujo lado é igual ao dum triângulo equilátero que tem de altura $8^m,5$?

R. — $39^m,256$.

O lado do triângulo equilátero expresso na altura é

$$L = \frac{2}{3} h \sqrt{3}$$

$$L = \frac{2}{3} \times 8,5 \times \sqrt{3} = \frac{17^m}{3} \times 1,732 = 9^m,814$$

O perímetro do quadrado será $9^m,814 \times 4 = 39^m,256$.

11.º — Do mesmo lado duma recta formaram-se quatro ângulos com o vértice comum. Três dêstes ângulos valem: A, $52^\circ\ 25'$; B, $58^\circ\ 42$; C, $32^\circ\ 13'$.

¿Qual será o valor do 4.º ângulo D?

Fazendo primeiro a soma dos três ângulos temos:

$$52^\circ\ 25' + 58^\circ\ 42' + 32^\circ\ 13' = 143^\circ,\ 20'$$

Os quatro ângulos reünidos valem 2 rectos, isto é 180°; logo o valor do ângulo D será

$$180^\circ - 143^\circ\ 20' = 36^\circ\ 40'$$

12.º — ¿Qual é, expresso em graus, o valor dum ângulo inscrito, cujos lados interceptam um arco, que é igual aos $\frac{2}{9}$ da circunferência?

O ângulo inscrito tem por medida metade do arco compreendido pelos seus lados. É pois para o ângulo dado $\frac{1}{9}$ da circunferência $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$.

13.º — O ângulo no vértice dum triângulo isósceles é $24^\circ\ 32'$; calcular os ângulos da base.

Os dois ângulos da base valem:

$$180^\circ - 24\ 32' = 155^\circ\ 28'$$

um dos ângulos terá o valor $\frac{155^\circ}{2}\ 28' = 77^\circ\ 44'$.

14.º — Um dos ângulos agudos dum triângulo rectângulo compreende $26^\circ\ 17'$. ¿Qual é o valor do outro ângulo agudo?

Os dois ângulos agudos são complementares, e se um vale $26^\circ\ 17'$, o outro valerá

$$90^\circ - 26^\circ\ 17' = 63^\circ\ 43'$$

15.º — 1.º ¿Quais são os complementos dos ângulos $\frac{4}{9}$ do recto, $\frac{8}{15}$ do recto?

2.º ¿Os suplementos dos ângulos $\frac{5}{8}$ do recto $\frac{16}{9}$ do recto?

R. — 50°, 42°, $123\frac{3}{4}$, 20°.

16.º — Dois ângulos valem; um $\frac{3}{4}$ do ângulo recto, o outro $\frac{7}{8}$ do recto. ¿Qual é:

1.º O suplemento da sua soma? 2.º O complemento da sua diferença?

Suplemento da soma:

$$= 180 - (\tfrac{3}{4} x\, 90 + \tfrac{7}{8} x\, 90)$$
$$= 180 - \tfrac{1170}{8} = \tfrac{270}{8}$$
$$= 33^{o}\ \tfrac{3}{4}$$

Complemento da diferença:

$$90 - (\tfrac{7}{8} x\, 90 - \tfrac{3}{4} x\, 90)$$
$$= 90 - (\tfrac{630}{8} - \tfrac{270}{4})$$
$$= 90 - \tfrac{90}{8} = \tfrac{630}{8} = 78^{o}\ \tfrac{4}{3}$$

17.º—¿Qual é o ângulo que fazem dois ponteiros dum relógio às 13, 14, 15, 16, e às 17 horas?

R.—30º, 60º, 90º, 120º, 150º.

18.º—Num triângulo isósceles o ângulo no vértíce é $\frac{5}{6}$ do ângulo recto. ¿Qual é o valor do ângulo externo, formado por um dos lados e pelo prolongamento da base?

$$R. - 180^{o} - 52^{o}, 30 = 127^{o}\ 30'$$

O ângulo no vertice é 75º

$$\text{Os da base } \frac{180-75}{2} = 52^{o}, 30'$$

19.º—Cada um dos ângulos adjacentes à base dum triângulo isósceles é igual a 28º 36' 28''. ¿Qual é o valor do ângulo no vértice?

R.—122º 47' 4''.

20.º—Indicar a posição relativa de duas circunferências, quando os seus raios sejam respectivamente iguais a 42^{mm} e a 11^{mm} e a distância dos seus centros igual a 21 ^{mm}.

R.—As duas circunferências são uma interior à outra.

21.º — Calcular o valor da hipotenusa de um triângulo rectângulo, cujos catetos são: $2^m,1$ e $2^m,8$.

$$H = \sqrt{2,1^2 + 2,8^2} = 3^m,5.$$

22.º — Calcular o valor dum cateto do triângulo rectângulo, que tem a hipotenusa com o valor $3^m,5$ e o outro cateto com o valor $2^m,1$.

$$C = \sqrt{3,5^2 - 2,1^2} = 2^m,8.$$

23.º — Determinar o comprimento de uma circunferência cujo raio mede $1^m,25$.

R. — $7^m,854$.

24.º — Calcular o diâmetro duma coluna, cujo contôrno mede $2^m,356$.

$$D = \frac{C}{\pi}; R = 0^m,749$$

25.º — Determinar o comprimento dum arco correspondente a 108º, sabendo que na circunferência inteira mede $7^m,5$.

Pela proporção.

$$\frac{360^\circ}{7,5} = \frac{108^\circ}{x}$$

$$x = \frac{7,5 \times 108}{360} = 2^m,25$$

Se o comprimento do arco estivesse expresso em graus, minutos e segundos, reduzir-se-ia a segundos o valor da circunferência e o do arco, depois procedia-se pelo mesmo processo.

26.º — ¿Qual é, sôbre a circunferência de $4^m,2$ de raio, o arco que tem $2^m,5$ de comprimento?

Representando a semi-circunferência por π R temos:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi R}{2,5};$$

$$\text{donde } x = \frac{180 \times 2,5}{\pi \, 4,2} = 35^\circ \; 6' \; 16''$$

27.º — ¿Sôbre uma circunferência de $3^m,5$ de raio, qual é o valor do comprimento dum arco que mede $36^o 50'$?

R. — $2^m.25$.

$360 \; x \; 60 - 21600$

$36^o \; 50 = 2210'$

$$C = \frac{2 \pi R}{21600'} \, x \, 2210'$$

28.º — Um caminho de ferro descreve uma curva regular de 5 hectómetros, correspondendo a 72^o. ¿Qual é o raio desta curva?

R. — A 72^o correspondem 5 hectómetros, a 360^o corresponderá x

$$x = \frac{360}{72} \, x \, 5 = 25 \text{ hm}$$

29.º — Calcular a área dum triângulo equilátero, que tem de lado $22^m,33$.

A altura do triângulo $\frac{L}{2} \sqrt{3} = 11{,}165 \; x \; 1{,}732 = 19{,}34$

$$\text{Área} = \frac{22^m,33 \; x \; 19,^m34}{2} = 431^{m^2},986$$

30.º — Calcular a área do triângulo equilátero, cuja altura é igual a $2^m,27$.

$L = \frac{2}{3} \, h \sqrt{3} = 1{,}58 \; x \; 1{,}732 = 2{,}74$ R. — $3^{m^2},24$

31.º — Calcular a área do triângulo isósceles, que tem de lado $20^m,5$ e de base $10^m,2$.

A altura é o cateto de um triângulo cuja hipotenusa é

$20^m,5$ e o outro cateto $\frac{10{,}2}{2} = 5{,}1$ R. $\begin{cases} h = 19{,}8. \\ A = 100^{m^2},98. \end{cases}$

32.º — Um jardim de forma quadrada tem a área de $182^{m^2},25$. ¿Qual é o seu perímetro?

Sabe-se que o quadrado é um rectângulo, cuja altura é igual à base; a área do quadrado é igual ao quadrado do lado.

Representando o lado por L, temos a área

$$A = L^2, \text{ donde } L = \sqrt{A}$$

$$\text{Logo o lado do jardim} = \sqrt{182,25} = 13^m,5$$

o perímetro é $13^m,5 \times 4 = 54^m$.

33.° — Calcular a área dum rectângulo cuja base é de $12^m,4$ e a diagonal 15^m.

Para se calcular a altura vemos que é o cateto dum triângulo rectângulo, cuja hipotenusa é 15^m e o outro cateto 12,4.

Quadrado da diagonal..........	$15^2 = 225$
Quadrado da base..............	$12^2,4 = 153,76$
Diferença	71,24

Esta diferença é o quadrado da altura, que vale

$$\sqrt{71,24} = 8,44$$

ter-se há, pois, para área do rectangulo

$$12,4 \times 8,44 = 104^{m^2},6560$$

34.° — ¿Que raio deverá ter um crículo para que a sua área seja de 6 metros quadrados?

$$\text{Sabe-se que } A = \pi R^2$$

$$\text{donde } R = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad \text{logo } R = \sqrt{\frac{6}{3,1416}} = 1^m,38$$

35.° — Deseja-se cobrir o solo dum pátio, de $5^m,4$ de comprimento por $4^m,25$ de largura, com hexágonos regulares de azulejo de $0^m,12$ de lado, cuja importância é de $50 o cento. ¿Qual será o custo dos azulejos a empregar?

R. — A área de cada azulejo é $= 0^{m^2},0370$; 620 azulejos e 3$10.

36.° — A área dum octógono regular é $89^{m^2},64$; o apótema é igual a $5^m,07$? Qual é o comprimento do lado?

R. — $11^m,76$.

37.º — Um cilindro tem a altura de $0^m,60$ e o diâmetro da base igual a $0^m,42$. ¿Qual é a área lateral?

R. — $0^{m2},7916$.

38.º — ¿Que profundidade deverá ter um reservatório rectangular, cujo comprimento seja de $4^m,5$ e a largura $2^m,6$ para que possa conter 351 hectolitros?

A área da base é $4,5 \times 2,6 = 11^{m2},70$

$$\text{Sabe-se que } V = B\,H \text{ donde } H = \frac{V}{B}$$

$$\text{Como } V = 35^{m3},1 \text{ e } B = 11^{m2},7$$

$$\text{ter-se há } H = \frac{35,1}{11,7} = 3 \text{ metros.}$$

39.º — Um cubo tem $3^m,915$ de volume ¿Qual é a medida dum outro cubo cuja aresta é igual a $\frac{1}{3}$ da do primeiro?

$$\frac{3,915}{v} = \frac{3^3}{1^3}$$

$$\text{donde } v = \frac{3,915}{3^3} = \frac{3,915}{27} = 0^{m3},145$$

40.º — A base duma pirâmide regular hexagonal tem de lado $0^m,33$; o apótema da pirâmide mede 5^m. ¿Qual é a área lateral?

$$A = C \times \pi \times \frac{a}{2}$$

$$A = 0,33 \times 6 \times \frac{5}{2} = 4^{m2},95$$

41.º — Uma pirâmide tinha para base um quadrado de $2^m,33$ de lado; a sua altura era de $14^m,6$. Com os materiais que a constituíam deseja-se construir uma parede de 2^m de altura e $0^m,4$ de espessura. ¿Qual poderá ser o comprimento desta parede?

O volume da pirâmide:

$$\frac{2,33^3 \times 14,6}{3} = 26^{m3},420$$

Comprimento da parede

$$\frac{26,420}{2 \times 0,4} = 33^m.$$

42.º — Uma pirâmide tem o volume de 35 decímetros cúbicos e a altura de 75 centímetros; a base é um quadrado. ¿Qual é o lado desta base?

Área da base:

$$\frac{0{,}035 \times 3}{0{,}75} = 0^{m^2}{,}14$$

lado;

$$\sqrt{0{,}14} = 0^{m}{,}374$$

43.º — ¿ Qual é a capacidade, expressa em hectolitros, de uma bacia de $2^{m}{,}5$ de profundidade e que tem as paredes em talude: o fundo é um quadrado de 6^{m} de lado e os lados formam também um quadrado, cujo lado tem $11^{m}{,}2$ de comprimento?

Esta bacia representa uma pirâmide truncada de bases paralelas. O volume é:

$$V = \frac{H}{3} \times (B + b + \sqrt{B \times b})$$

A superfície da base maior:

$$11{,}2^2 = 125{,}44$$

A superfície da base menor:

$$6^2 = 36$$

Meio geométrico entre as bases:

$$\sqrt{11{,}2^2 \times 6^2} = 11{,}2 \times 6 = 67{,}20$$

Total 228,64

Ter-se-há, pois, para capacidade da bacia:

$$\frac{228{,}6 \times 2{,}5}{3} = 190^{m^3}{,}533$$

ou $1905^{hl}{,}33$.

44.º — Determinar a área total e o volume dum cubo que tem $0^{m}{,}4$ de aresta.

$$R.\begin{cases} A \text{ total} = 11^{m^2}{,}76 \\ V = 2^{m^3}{,}74 \end{cases}$$

45.° — Deseja-se cavar um fôsso com o comprimento de 400 metros; a profundidade deve ser $1^{m},40$. A secção recta será um trapézio de $2^{m},25$ e $1^{m},30$ de bases. Calcular a despesa feita, supondo que se paga $40 por cada metro cúbico de escavação.

$$R. \begin{cases} V = 994^{m^3} \\ \text{Despesa} = 397\$60 \end{cases}$$

46.° — A área lateral duma pirâmide regular é $12^{m^2},36$; a base tem $3^{m},42$ de perímetro. Qual é a altura duma face lateral?

$$A = P x \frac{a}{2}$$

$$12^{m^2},36 = 3^{m},42 \, x \, \frac{a}{2}$$

$$a = \frac{2 \, x \, 12,36}{3,42} = 7^{m},22$$

47.° — Deseja-se construír um tubo cilíndrico de ferro, cujo diâmetro seja $0^{m},85$ e a altura $9^{m}.44$. Calcular a superficie que se deve empregar.

R. — $25^{m^2},2082$.

A superficie será

$$2 \pi R x H$$

Substituíndo R e H pelos valores dados temos:

$$2 \pi \, x \, \frac{0,85}{2} \, x \, 9,44$$

48.° — Uma cisterna de forma cilíndrica contém 35 hectolitros e o seu diâmetro interior é igual $1^{m}.2$. ¿Qual é a sua profundidade?

$$V = \pi R^2 H$$

$$\text{donde } H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{3,5}{\pi x \, 0,6^2} = 3^{m},094$$

49.° — Uma tôrre termina por um teto de forma cónica cuja base tem $18^{m},4$ de contôrno e $8^{m},5$ de comprimento da geratriz. Calcular a superfície do teto.

$$S = C x \frac{a}{2} \text{ ou } S = \frac{18,4 \, x \, 8,25}{2} = 75^{m^2},90$$

50.° — O apótema dum cone círcular recto tem $4^{m},8$ e o diâmetro da base $2^{m},04$. Calcular o volume dêste cone.

A altura do cone pode-se determinar, atendendo a que é um cateto dum triângulo rectângulo, em que a hipotenusa é representada pelo apótema e o outro cateto pelo raio da base, como se vê facilmente construindo a figura.

A altura é pois

$$H = \sqrt{4{,}8^2 - 1{,}02^2} = 4{,}69$$

$$V = \frac{\pi \times 1{,}02^2 \, x \, 4{,}69}{3} = 5^{m},^{3}109787$$

51.º — Calcular a superfície lateral dum cone recto truncado de bases paralelas, que tem as seguintes dimensões: circunferências, $10^{m},16$ e $7^{m},30$; apótema $1^{m},60$.

A superfície lateral, supondo-a desenvolvida, representa um trapézio círcular, cuja base média é igual a

$$\frac{C + c}{2}$$

Multiplicando esta base pela apótema e substituindo as letras pelos seus valores, temos:

$$S = \frac{10{,}16 + 7{,}3}{2} \, x \, 1{,}6 = 13^{m^2},9680.$$

52.º — O globo terrestre pode ser considerado como uma esfera de 636 miriâmetros, 62 de raio. Calcular a sua área em miriâmetros quadrados.

$$A = 4 \, \pi \, R^2$$

$$A = 4 \, \pi \, 636{,}62^2 = 5092973 \text{ miriâmetros quadrados.}$$

53.º — ¿Quanto custará, à razão de \$40 por metro quadrado, a pintura de uma coluna cilíndrica de 10^{m} de altura e cuja base é um círculo de 5,18 de raio.

R. — 130\$18,7.

54.º — ¿Que raio se deve dar a uma esfera, para que a sua superfície seja igual a 1 metro quadrado?

$$R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{\frac{1}{4 \times 3{,}14}} = 0^{m},282$$

55.º — Um tubo com 150 metros de comprimento e $0,^{m}1$ de diâmetro foi formado com fôlhas de zinco, que tinham tôdas as dimensões de 38 por $65,^{m}$ ¿Quantas fôlhas foi preciso encontrar?

R. — 196,8.

56.º — Exprimir em litros a capacidade dum cilindro que mede interiormente $0,^{m}28$ e de diâmetro e $1,^{m}8$ de altura.

R. — $110,^{l}7$.

57.º — Deseja-se cavar um fornilho cilindrico de $2,^{m}5$ de profundidade, com uma capacidade de 500 hectolitros. ¿Que diâmetro deverá dar-se lhe?

R. — $2^{m},52$.

$$R=\sqrt{\frac{60}{3{,}141 \times 6 \times 2{,}5}}=2,^{m}76$$

58.º — Uma tôrre tem na parte superior uma esfera de pedra, cuja massa é de $2^{kg},3$ por cada decímetro cúbico. ¿Que carga suporta a tôrre, sabendo-se que a esfera tem o mesmo raio que o da base de um cone que tem de área lateral 255^{m^2} e de geratriz $2^{m},25$?

$$R.\begin{cases}\text{Raio}=36^{m},07\\ V=19631^{m^3}\end{cases}$$

452.251300 quilogramas.

59.º — Sabe-se que com 98 gramas de ácido sulfúrico preparam-se $22^{l},4$ de hidrogénio. ¿Que pêso de acido sulfúrico serà preciso empregar na preparação do gás necessário para encher um balão esférico que tenha $2^{m},3$ de diâmetro?

$V=6^{m^3},29$ ou 6290 litros.

27518 gramas.

ÍNDICE