Geometria Plana

e suas applicações

Martins Ribeiro
Cart

Materias que constituem esta Bibliotheca

1.ª SERIE — **Elementos Geraes**

1-Desenho linear.
2-Arithmetica pratica.
3-Algebra elementar.
4-Geometria plana e suas applicações.
5-Elementos de Phisica.
6-Elementos de Chimica.
7-Elementos de Electricidade.
8-Elementos de Mecanica.
9-Geometria no espaço.
10-Elementos de projecções.
11-Sombras e perspectiva.
12-Applicações e traçados praticos das projecções, penetrações, sombras, etc.
13-Trabalhos manuaes.

2.ª SERIE — **Mecanica**

1-Desenho de Machinas.
2-Nomenclatura de Caldeiras de vapor.
3-Nomenclatura de Machinas de vapor.
4-Problemas de Machinas.
5-Phisica Industrial.
6-Chimica Industrial.
7-Motores especiaes.

3.ª SERIE — **Construcção Civil**

1-Elementos de Architectura.
2-Materiaes de Construcção.
3-Construcções Civis.
4-Arte decorativa e Estylos.
5-Estylisação, composição e ornamentação.

4.ª SERIE — **Construcção Naval**

1-Construcção Naval.
2-Materiaes de construcção e processos de ligação.
3-Construcção de navios.
4-Historia da construcção naval.

5.ª SERIE — **Manuaes de officios** (em formato apropriado)

1-Conductor de Machinas.
2-Torneiro mecanico.
3-Forjador.
4-Fundidor.
5-Serralheiro e Montador.
6-Caldeireiro.
7-Electricista.
8-Carpinteiro Civil.
9-Marceneiro.
10-Entalhador.
11-Modelador, formador e estucador.
12-Pintor e Decorador.
13-Pedreiro ou trolha.
14-Canteiro.
15-Tintureiro.
16-Sapateiro.
17-Selleiro e correeiro.
18-Fiandeiro e tecelão.
19-Funileiro.
20-Encadernador.
21-Tanoeiro.

6.ª SERIE — **Conhecimentos geraes de diversas industrias, etc.**

1-A Hulha.
2-Metallurgia.
3-Fiação e Tecelagem.
4-Industria de Illuminação.
5-Industria do Vidro.
6-Industria do Papel.
7-Industria Ceramica.
8-Industrias de alimentação.
9-Industria do alcool, cerveja, licores, etc.
10-Industria do Azeite, Oleos, Sabões e Adubos.
11-Industria da Borracha.
12-Industria de Relojoaria.
13-Galvanoplastia.
14-Industria de Chapelaria.
15-Artes graphicas.
16-Photographia Industrial.
17-Hygiene das officinas.
18-Escripturação industrial.
19-Inventos Modernos.
20-Leis do trabalho e ensino industrial.

Manual do Operario

BIBLIOTHECA

de

Instrucção profissional

ELEMENTOS DE GEOMETRIA PLANA

E

SUAS APPLICAÇÕES

LISBOA
Bibliotheca de Instrucção e Educação Profissional
CALÇADA DO FERREGIAL, 6, 1.º

Typ. da «Empreza da Historia de Portugal» — Rua Ivens, 45 e 47

BIBLIOTHECA DE INSTRUCÇÃO PROFISSIONAL

MANUAL DO OPERARIO

ELEMENTOS DE GEOMETRIA PLANA E SUAS APPLICAÇÕES

PREFACIO

SEGUINDO na orientação que nos guiou na redacção dos compendios elementares já publicados por esta Bibliotheca, apresentamos sob a fórma que nos pareceu mais clara e simples, e ao mesmo tempo mais pratica, o presente livro *Elementos de geometria plana e suas applicações.*

Sendo o nosso fito ensinar os elementos de geometria indispensaveis áquelles que têem necessidade de os applicar na pratica, pozemos de parte complicadas theorias, que proveitosamente são substituidas por variadas applicações da geometria ás artes, ás industrias e ao desenho.

Tratamos da *linha recta*, da *circumferencia*, das *linhas proporcionaes* e das *medidas de superficie,* acompanhando este estudo com a resolução de problemas numericos e graphicos. Comtudo, para evitar repetições de materia, abstrahimo-nos de descrever a construcção graphica d'alguns d'estes problemas, visto já o termos feito no Desenho Linear d'esta Bibliotheca, livro que servirá de complemento a este compendio.

A. Cunha Rosa
Professor da Escola Industrial Affonso Domingues

NOÇÕES PRELIMINARES

1.—**Corpos** são os diversos objectos que nos cercam, e que de qualquer fórma impressionam os nossos sentidos.

2.—**Espaço** é o que podemos conceber abstrahindo de todos os objectos da natureza.

3.—**Extensão** é qualquer porção limitada do espaço.

A extensão póde ter uma só dimensão, póde ter duas e tres; mas não póde ter mais de tres.

4.—**Volume** de um corpo é a porção de espaço occupada pelo mesmo corpo, ou a extensão com tres dimensões: *comprimento*, *largura* e *altura*.

A altura póde denominar-se tambem **espessura** ou **grossura** e **profundidade** ou **fundura**.

Assim se diz: a **altura** de um homem ou de uma casa, a **espessura** de uma parede, a **grossura** de uma tábua, a **profundidade** do mar, e a **fundura** de um poço.

5.—**Superficie.** Quando se pega em um corpo, toca-se na sua superficie, quando se olha para um corpo opaco, é a sua superficie que se vê, quando se enverniza um movel, se pinta uma porta ou caia uma parede, é a superficie do movel, da porta ou da parede que é envernizada, pintada ou caiada.

A **superficie** é, portanto, a parte exterior de todos os objectos, o limite dos corpos em todos os sentidos, ou a extensão com duas dimensões: *comprimento* e *largura*.

Uma folha de papel, por exemplo, tem duas superficies, a frente e o verso. Em um vaso qualquer ha igualmente duas superficies, uma interior e outra exterior.

6.—**Linha.** O que vulgarmente se chama contorno das superficies, é uma linha ou uma serie de linhas.

Assim a orla de um rio é a linha que separa a terra da agua.

Esta linha póde ser representada por um fio muito fino, que segue fielmente as sinuosidades do rio.

O traço deixado por um lapis sobre uma folha de papel ou uma superficie qualquer, é uma linha.

A linha é, portanto, o limite das superficies ou a extensão com uma só dimensão: *comprimento*.

7.—**Ponto.** Muitas vezes a palavra ponto é empregada como synonymo de logar; é tambem no mesmo sentido que se emprega para indicar o cruzamento ou o encontro de duas ou mais ruas.

Se considerarmos essas ruas, mais ou menos largas, reduzidas a simples linhas, o seu encontro ou o ponto onde se cruzam é o **ponto geometrico.**

O ponto geometrico não tem comprimento nem largura nem espessura, isto é, não tem extensão alguma e póde ser considerado como o **limite das linhas.**

8.—As linhas são de duas especies: *rectas* e *curvas*. Da combinação d'estas duas especies fundamentaes de linhas resultam as linhas *polygonaes* e *mixtas*.

9.—**Linha recta** é aquella que póde girar sobre os seus extremos, sem mudar de posição, ou, é o caminho mais curto entre dois pontos, e mede a distancia entre elles.

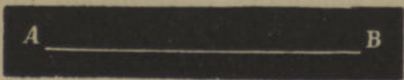


Fig. 1

Dão-nos exemplo da linha recta, um fio bem esticado, tal como a corda de uma viola.

Para designar uma linha recta, escreve-se uma letra em cada extremidade e lêem-se successivamente. Assim se dirá: a linha *AB*, *fig. 1*. Diz-se tambem o ponto *A* ou o extremo *A* da linha *AB*.

10.—Duas rectas *AB* e *CD* *fig. 2*, são iguaes quando collocando o ponto *A* da recta *AB* sobre o ponto *C* da recta *CD* e fazendo girar aquella em torno do ponto *C*, o ponto *B* vae coincidircom o ponto *D*.

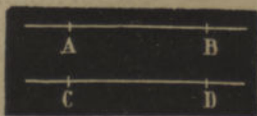


Fig. 2

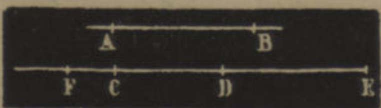


Fig. 3

As linhas rectas são grandezas que pódem sommar-se e subtrair se.

Para fazer a somma de duas linhas rectas *AB* e *CD*, *fig. 3*, colloca-se o extremo *A* da linha *AB* sobre o extremo *D* da linha *CD*, e faz-se girar aquella recta em torno d'este ponto até que o ponto *B* vá cahir em *E*, situado sobre a recta indefinida determinada pelos pontos *C* e *D*, na direcção *CD*. A somma procurada será pois a recta *CE*.

Se se faz girar a recta *AB* em torno do ponto *D*, de fórma que o seu extremo *B* vá cahir em um ponto *F*, na direcção *DC*, a quantidade *CF* é a differença entre as duas rectas dadas.

Uma linha recta *AB* é duas, tres, quatro vezes maior que uma outra *CD*, quando é igual á somma de duas, tres ou quatro rectas iguaes a *CD*.

Diz-se então que *CD* é metade, um terço ou um quarto de *AB*.

11 — **Linha curva** é aquella que não é recta nem composta de linha rectas.

Indica se geralmente por tres letras Tal é a linha *A B C*, *fig. 4*. Os pontos *A* e *C* são os seus extremos.

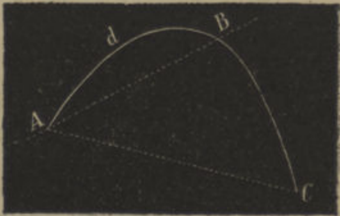


Fig 4

Se a linha curva *A B C* girar sobre os seus extremos *A* e *C*, andará em volta da recta *AC* e mudará de logar. A qualquer das suas partes, *A d B*, por exemplo, acontecerá o mesmo a respeito da recta *AB*, se girar sobre os seus extremos. Assim podemos tambem dizer que: *Linha curva é aquella que não póde girar sobre os seus extremos sem mudar de logar.*

Dão nos exemplos da linha curva: o *arco-iris*, o contorno das folhas das plantas, etc.

12. — **Linha quebrada.** Uma serie de linhas rectas dispostas em diversas direcções, unidas duas a duas pelos seus extremos e formando o que vulgarmente se chama **zig-zag**, não é uma nova especie de linha, mas sim uma linha composta.

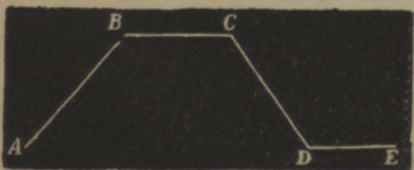


Fig. 5

Denomina-se **linha quebrada** ou **polygonal**, pelo facto de representar uma linha recta partida em differentes partes, mas sem que estas estejam separadas d'aquella, muito embora tenham tomado direcções differentes. Indica-se por letras collocadas nos extremos das rectas componentes. Tal é a linha *A B C D E*, *fig. 5*. As letras *M*, *N*, *Z*, dão nos um exemplo da linha quebrada.

13. — **Linha mixta** é a composta de rectas e curvas conjunctamente.

A linha *A B C D E F*, *fig. 6*, é mixta.

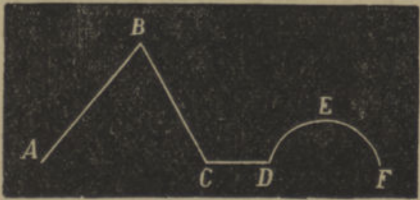


Fig. 6

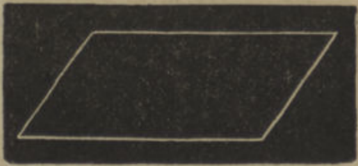


Fig. 7

14. — As superficies pódem ser *planas*, *polyedricas* ou *curvas*.

Superficie plana ou **plano** é aquella sobre a qual se póde ajustar uma recta em qualquer direcção, *fig. 7*.

Chama-se *plano* nas officinas, a uma chapa *metallica* cuja superficie tem sido rigorosamente aplainada e desempenada por meio de uma regua de aço perfeitamente direita que se faz applicar em todos os pontos e sobre todas as direcções.

Serve esta peça de ferramenta para assentar sobre ella outras peças que se desejam desempenar e verificar.

15. — **Superficie polyedrica** é a superficie formada por duas ou mais superficies planas que se cortam duas a duas. Exemplo: um dado de jogar.

16. — **Superficie curva** é toda a superficie que não tem parte alguma apreciavel que seja plana. Exemplo: uma bola.

17. — **Figura** é um nome generico dado aos volumes, superficies, linhas e pontos, ou ao conjuncto de algum d'estes elementos.

Figuras planas são aquellas que estão completamente assentes em um só plano.

18. — Duas ou mais figuras dizem-se **iguaes**, *fig. 8*, quando pódem sobrepôr-se uma á outra, o que exige que haja igualdade na fórma e na extensão; **similhantes**, *fig. 9*, quando têem a mesma fórma, embora não tenham a mesma extensão; e **equivalentes**, *fig. 10*, quando têem a mesma extensão, embora não tenham a mesma fórma.

Fig. 8

19. — **Geometria.** Os volumes, as superficies e as linhas têem fórmas diversas e portanto propriedades particulares para cada uma

Fig. 9

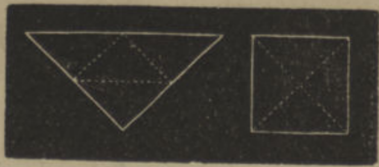


Fig. 10

d'essas fórmas. Assim a linha recta não tem as propriedades da curva nem esta as da circumferencia.

A **geometria** estuda as diversas propriedades das figuras e principalmente a medida dos volumes, das superficies e das linhas.

Divide-se em: **geometria plana** e **geometria no espaço.**

A primeira estuda as figuras cujos pontos estão todos n'um mesmo plano; a segunda as que não estão todas no mesmo plano.

APPLICAÇÕES

Traçado das linhas rectas

20 — **Regua; sua verificação.** Traçam-se as linhas rectas sobre uma superficie bem plana com o auxilio d'uma regua, que é geralmente uma prancha de madeira, de faces planas, de pequenissima espessura, com bastante largura e muito comprimento.

As reguas têem ás vezes um bordo chanfrado, para que, usando-se da tinta, que póde adherir á regua. não suje o papel.

Tendo uma boa regua, o traçado de uma linha recta não offerece difficuldades. Approxima-se um dos bordos da regua dos dois pontos por onde se quer traçar a linha, ficando á mesma distancia d'elles, distancia tão pequena quanto o permitta a grossura do instrumento empregado no traçado; apoia-se o lapis ou o tira-linhas sobre o papel junto de um dos extremos da regua, e percorre-se com elle o papel até ao outro extremo, tendo o cuidado de conservar sempre a ponta traçante na mesma situação a respeito do bordo da regua.

A regua deve ser bem desempenada e deve ter um dos bordos, pelo menos, bem rectilineo.

Verifica-se se está desempenada assentando-a sobre uma superficie bem plana, e vendo se fica algum intervallo entre essa superficie e a regua.

Verifica-se se um dos bordos da regua é rectilineo, da fórma seguinte:

Marcam-se dois pontos *A* e *B* (*fig. 1*), traça-se por elles uma linha com a regua, e voltando esta de modo que, a face que era inferior, se torne superior, e vice-versa, sem inverter a posição dos seus extremos, traça-se uma nova linha pelos mesmos pontos. Se o bordo da regua de que nos servimos é bem rectilineo as duas linhas assim traçadas entre os pontos *A* e *B* coincidem; porém, se as duas linhas não coincidem, é claro que não são rectas e que por conseguinte a regua deve ser regeitada.

21 — Os meios empregados nas artes para traçar uma linha recta, quando se torna impossivel o uso da regua, são mui varios.

Os pintores, serradores, carpinteiros, etc, servem se de um barbante ou cordel esfregado com giz, ou embebido n'uma tintura de negro de fumo ou de almagre. Esse barbante, depois de estendido e fixado nas duas extremidades, *fig. 11*, é puxado verticalmente para cima com dois dedos da mão direita, e é depois abandonado; cahindo com força sobre a peça de madeira, pedra, etc., elle traça, em todo o comprimento, uma linha branca, preta ou vermelha.

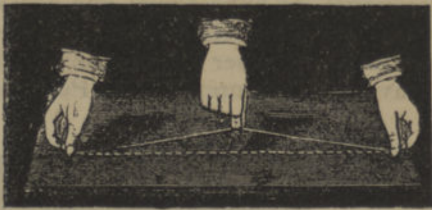


Fig. 11

22. — Na agrimensura e na topographia, traçam-se as linhas rectas por meio de *balisas* ou *bandeirolas*. As *balisas* são formadas de hastes de madeira *A fig. 12*, de $1^{m},50$ a 2 metros de comprimento, aguçadas na parte inferior, afim de se poderem cravar facilmente no terreno, e fendidas na extremidade superior, onde se mette um rectangulo de papelão, de madeira ou de lata, bi-partido de branco e encarnado para se poder distinguir a distancia, ou se prega uma bandeirinha de panno das mesmas côres, tomando então a balisa o nome de bandeirola.

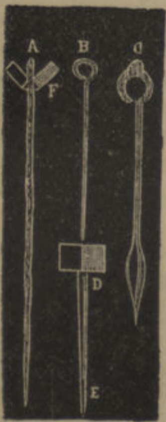


Fig. 12

23 — **Fixas e estacas.** As *fixas B*, *fig. 12*, são ordinariamente feitas de grosso arame de ferro de 5 millimetros de diametro, tendo n'uma das extremidades uma argola de 4 a 7 centimetros de diametro, terminando a outra extremidade em ponta aguda, afim de se poder cravar no solo.

As fixas têem de comprimento 30 centimetros.

Ha ainda outra especie de fixas *C*, *fig. 12*, que têem na parte superior do annel um reforço, afim de se apoiar n'elle o dedo pollegar, para quando se deixa cahir a fixa sobre o terreno seguir uma direcção vertical, o que é de grande conveniencia nas operações topographicas.

As *estacas* são pequenas peças de madeira *E*, *fig. 12*, tendo n'uma das extremidades um rectangulo *D* tambem de madeira, pintado metade de preto e metade de branco. Servem para indicar o logar da balisa ou de qualquer instrumento que se collocar acccidentalmente.

24. — **Traçar uma linha recta entre dois pontos.** Quando a distancia entre dois pontos é pouco consideravel, colloca-se em

cada um d'elles uma balisa ou bandeirola *A* e *B*, *fig. 13*. O operador estabelece-se a alguns passos áquem da balisa *A* e enfia a balisa *B* de maneira que se não veja nenhuma das suas partes para a direita ou esquerda da linha visual que passar por *AB*.

Se a distancia entre esses dois pontos fôr superior a 50^m, o operador deverá ser acompanhado d'um ajudante, por quem mandará cravar balisas intermedias. Para isso o operador colloca-se em *A* e o

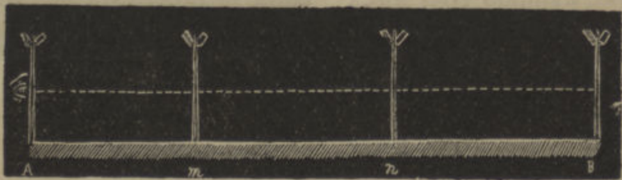


Fig. 13

ajudante munido de bastantes balisas, caminha de *B* para *A*; quando chega a 40 ou 50 metros de *B*, ao ponto *n*, pára e faz mensão de cravar uma balisa; o operador então, visando na direcção *AB*, observa se a balisa está no alinhamento; faz signal ao ajudante com o braço esquerdo ou direito, segundo seja necessario chegal-a mais para a direita ou esquerda, e finalmente, quando a balisa esconde a cravada em *B*, faz signal de a fixar, estendendo o braço direito e movendo-o de cima para baixo.

Em seguida o ajudante continua a caminhar para *A*, cravando a balisa *m*, pela mesma fórma que a precedente, e assim successivamente até chegar ao extremo *A*.

Medida das linhas rectas

25.—**Medir uma grandeza** é comparal-a com a unidade de medida adoptada; isto é, determinar quantas vezes a unidade de medida se contem na extensão a medir.

A unidade de medida adoptada entre nós, é o metro que está dividido em 10 partes iguaes, denominadas *decimetros*; cada uma d'estas em outras 10 partes ou *centimetros*, e ainda estas se dividem em *millimetros*.

Para medir uma linha recta, applica-se o metro sobre a recta, tantas vezes quantas fôr possivel; se ficar resto applica-se ainda sobre elle o metro, e vê-se quantos decimetros, centimetros e millimetros contem o resto.

Supponhamos que applicando o metro sobre a recta que se quer medir, se contem n'ella 5 vezes e deixa um resto que abrange 4 decimetros, 3 centimetros e 9 millimetros; é claro que a recta tem 5439 millimetros.

As rectas traçadas sobre o papel, são geralmente, pequenas, e então usa-se para as medir o **duplo decimetro**, isto é, uma regua de comprimento pouco superior a dois decimetros, dividida em centimetros e millimetros, e algumas vezes meios millimetros.

26. — **Cadeia metrica.** Quando a recta está determinada no terreno, é sempre facil a sua medição. Para esse fim, emprega-se uma cadeia de 10 ou 20 metros de comprimento, denominada *cadeia metrica* ou de *agrimensor*, *fig. 14*, que é composta de 50 em 100 *fuzis* de arame de ferro, de dois decimetros de comprimento cada um, e de tres a cinco millimetros de diametro. Os fuzis estão ligados uns aos outros por meio de anneis *B* do mesmo metal. De metro em metro, as argolas de ferro são substituidas por argolas *C* de latão, e de cada uma d'estas pende uma chapa com o numero de ordem, a fim de ser facil a contagem dos metros. A cadeia termina por duas argolas *A*, que fazem parte dos fuzis a que estão ligadas; isto é, argolas e fuzis não excedem $0^m,2$.

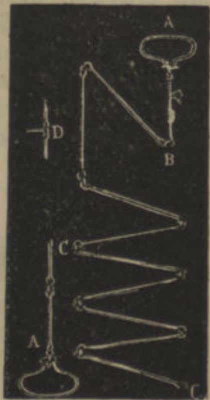


Fig. 14

27. — **Verificação da cadeia metrica.** Antes de nos servirmos da cadeia é preciso verificar a sua exactidão. Para isto, traça se sobre uma superficie uma linha recta de comprimento igual ao instrumento.

Quando o comprimento da cadeia não coincide com a linha tomada para medida, é preciso alongal-a até que a coincidencia se effectue; mas como é impossivel extendel a rigorosamente sem perigo de a quebrar, dá-se-lhe por isso mais 5 ou 6 millimetros a fim de compensar a curvatura que naturalmente apresenta quando é esticada.

Póde igualmente empregar-se na medição das distancias a *fita metrica*.

28. — **Fita metrica.** Este instrumento, *fig. 15*, consiste n'uma pequena caixa cylindrica, dentro da qual se enrola sobre um eixo, uma fita de 5, 10 ou 20 metros de comprimento. A fita é dividida em metros, decimetros e centimetros, sendo o primeiro decimetro dividido em millimetros. Ha uma manivella de latão, para enrolar a fita em volta do eixo interior, e um pequeno annel tambem de latão, que facilita a extracção da fita, e

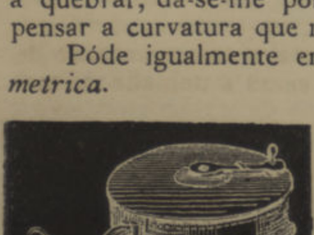


Fig. 15

ao mesmo tempo obsta a que ella se introduza inteiramente na caixa pela abertura *D*.

29.— **Medição das distancias com a cadeia.** Toma-se a primeira balisa do alinhamento que se pretende medir, á qual o operador encosta uma das pégas da cadeia, marchando o seu ajudante sobre o alinhamento com a outra péga segura, até que a cadeia fique bem estendida. Logo que isto se dê, crava-se no terreno por dentro da argola que serve de péga, uma **fixa** de ferro. Em seguida o operador desprende a extremidade da cadeia, e marcham ambos sobre o alinhamento, até que a cadeia fique novamente esticada, e ahi crava o ajudante a segunda *fixa*, como já se disse. Continuam assim a operação até que o ajudante chega ao fim do alinhamento, então o operador deixa a cadeia estendida no chão, approxima-se da ultima *fixa* cravada, e faz a contagem dos metros, pelo numero das *fixas* que foi arrancando á maneira que caminhou sobre o alinhamento, representando cada uma o comprimento da cadeia, ou 10 metros.

PRIMEIRA PARTE

GEOMETRIA PLANA

I

Da linha recta

1.º — Angulos

3o. — **Angulo, vertice, lados.** Diz se **angulo** a figura formada por duas linhas rectas partindo do mesmo ponto, ou a inclinação reciproca de duas rectas que se encontram, *fig. 16.* O ponto commum ás duas rectas diz-se *vertice*, e as duas rectas, prolongadas tanto quanto se quizer, chamam-se *lados*.

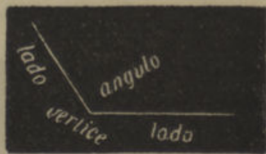


Fig. 16

Designa-se um angulo escrevendo uma letra em cada lado, e outra no vertice, devendo na enunciação ser esta nomeada entre as duas outras. Quando o vertice não pertença senão a um angulo basta a letra do vertice.

Para melhor se perceber a idéa de angulo, supponha-se que sobre a recta *A B*, *fig. 17*, assentava uma outra *O C*, que depois começava a girar em torno do ponto *O*, tomando as posições successivas *O C'*, *O C''*, *O C'''*, *O C''''*...[1]. N'este movimento a recta iria gerando os angulos *C' O B*, *C'' O B*, *C''' O B*..., successivamente maiores.

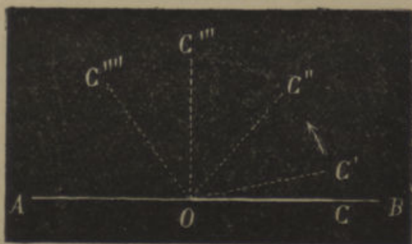


Fig. 17

A grandeza de um angulo depende pois da posição e não do comprimento dos lados. Dois angulos dir-se-hão iguaes, quando assen-

---

[1] Deve ler-se: *o,c linha; o,c duas linhas; o,c tres linhas; o,c quatro linhas.*

tando um lado de um sobre um lado do outro, de modo que os vertices coincidam, os outros dois lados tomam a mesma direcção; quando assim não succeda os angulos dir-se-hão desiguaes, e será maior aquelle dentro do qual cahir o segundo lado do outro angulo. Assim, os angulos *A* e *A'*, *fig. 18*, são iguaes; e, *fig. 19*, o angulo *B* é maior do que o angulo *C*.

Fig. 18

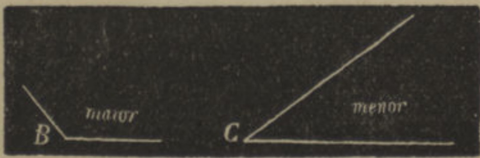


Fig. 19

31. — Dois angulos dizem-se **adjacentes**, quando têem o mesmo vertice, um lado commum e os outros dois para lados differentes. Tães são os angulos *A O C* e *C O B*, *fig. 20*.

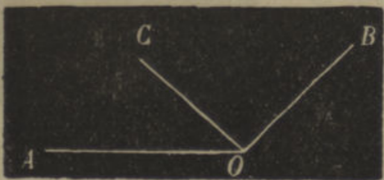


Fig 20

32. — **Angulos rectos e obliquos.** Quando uma linha recta encontra outra, forma com ella dois angulos adjacentes que pódem ser iguaes ou desiguaes. No primeiro caso os angulos denominam-se **rectos**, como *A C B* e *A C D*,

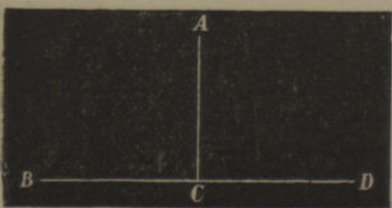


Fig. 21

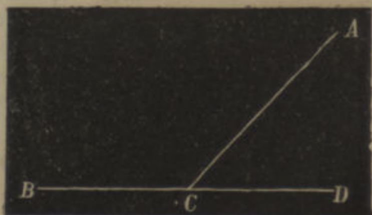


Fig. 22

fig. 21. No segundo caso os angulos são **obliquos**, como *A C B* e *A C D*, *fig. 22*. Podemos pois dizer que:

Angulo recto é um dos angulos que uma recta faz com outra não se inclinando mais para um lado do que para o outro d'essa outra recta; e **obliquo** quando essa inclinação não é a mesma para ambos os lados.

Os angulos obliquos são: **agudos** e **obtusos.**

Angulo agudo é o que é menor do que o recto. Tal é o angulo ACD, *fig. 22.*

Angulo obtuso é o que é maior do que o recto. Tal é o angulo ACB, *fig. 22.*

33. — **Angulos complementares** são aquelles cuja somma é igual a um angulo recto.

Angulos supplementares são aquelles cuja somma é igual a dois angulos rectos.

Assim os angulos EBD e DBC *fig. 23*, são complementares; e os angulos ABD e DBC supplementares.

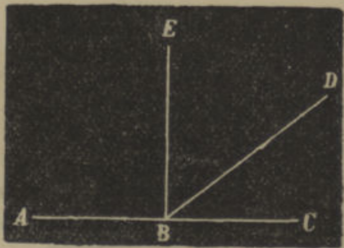


Fig. 23

34.—**Angulos verticalmente oppostos.** Se fôr dado um angulo e prolongarmos os seus lados além do vertice, formaremos um segundo angulo igual ao primeiro.

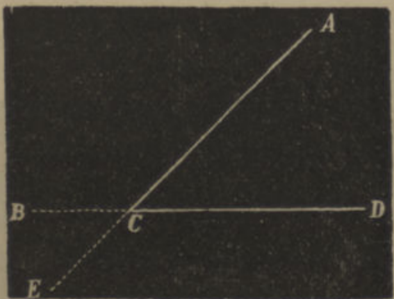


Fig. 24

Estes dois angulos denominam-se *verticalmente oppostos.* Taes são os angulos ACD e BCE, *fig. 24*, bem como ACB e DCE.

35. —**Bissetriz** de um angulo é a recta que o divide em duas partes iguaes. A bissetriz do angulo ABC, *fig. 25*, é a linha BD.

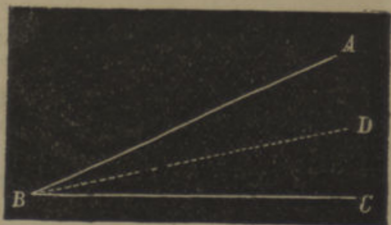


Fig. 25

36. — *Todos os angulos rectos são iguaes.*

Sejam com effeito os angulos rectos ACD, $A'C'D'$, *fig. 26.* Se sobrepozermos a recta AB sobre $A'B'$ de modo que o ponto C fique sobre C', a recta CD não póde deixar de tomar a direcção de $C'D'$, porque se tomasse outra, $C'E$ por exemplo, seria o angulo $EC'B'$ menor do que $EC'A'$, por quanto os angulos $A'C'D'$ e $D'C'B'$ são iguaes (32), $E C'B'$ é menor que $D'C'B'$ e $E C'A'$ é maior que $A'C'D'$, e então a recta CD formando com AB

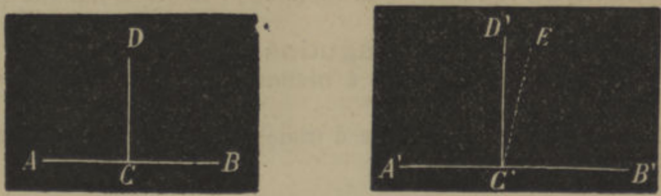


Fig. 26

angulos desiguaes não lhe seria perpendicular, ou, o que tanto vale, não seria recto o angulo ACD, contrariamente ao que haviamos estabelecido.

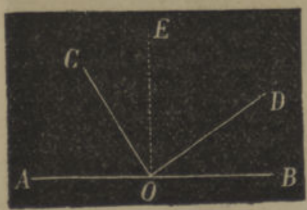


Fig. 27

37. — *A somma dos angulos formados em torno de um ponto e para o mesmo lado d'uma recta vale dois angulos rectos.*

Sejam os angulos $A\ O\ C$, $C\ O\ D$ e $D\ O\ B$, *fig. 27*. A sua somma vale dois rectos, porque é igual á dos angulos rectos $A\ O\ E$ e $E\ O\ B$.

38.— *A somma de todos os angulos formados em torno de um ponto vale quatro angulos rectos.*

Sejam os angulos $A\ O\ B$, $B\ O\ C$, $C\ O\ D$ e $D\ O\ A$, *fig. 28*. Prolongando a recta $A\ O$ vê-se que a somma d'estes angulos vale quatro rectos, visto que a dos da parte superior da recta $A\ E$ vale dois rectos, e a dos da parte inferior vale outros dois.

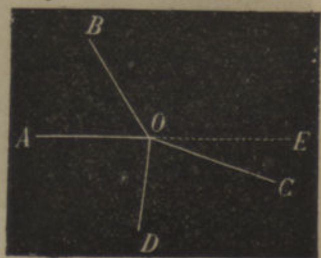


Fig. 28

2.° — Perpendiculares e obliquas

39. — Uma recta diz-se perpendicular a outra, quando fórma com ella dois angulos adjacentes iguaes, de modo que cahindo sobre ella não se inclina mais para um lado do que para outro. Diz-se obliqua, quando os dois angulos adjacentes formados pelas duas rectas são desiguaes.

Assim a recta $E\ B$, *fig. 23*, é perpendicular a $A\ C$ por serem os dois angulos adjacentes $E\ B\ A$ e $E\ B\ C$ iguaes, e a recta $D\ B$ é obliqua a $A\ C$ visto serem desiguaes os angulos $D\ B\ A$ e $D\ B\ C$, sendo a sua inclinação ou obliquidade determinada pelo menor dos angulos formados, isto é, pelo angulo $D\ B\ C$ e não por $D\ B\ A$.

O ponto B denomina-se **pé** da perpendicular $E\ B$, bem como da obliqua $D\ B$.

40. — A distancia que vae de um ponto a uma recta mede-se pela perpendicular baixada d'esse ponto sobre essa recta.

Assim a distancia que vae do ponto E á recta $A\ C$, *fig. 23*, é representada pela perpendicular EB, que se mediria com a unidade linear (metro) e seus multiplos e submultiplos.

41. — *A perpendicular baixada de um ponto sobre uma recta é menor do que qualquer obliqua tirada do mesmo ponto para essa recta.*

Para provar que a perpendicular $C\ D$, *fig. 29*, é menor que a obliqua $C\ E$, duplique-se a figura para a parte inferior de $A\ B$, e então, pela propriedade da linha recta, teremos:

$$C\ C' < C\ E\ C'$$

e conseguintemente:

$$\frac{1}{2}\ C\ C' < \frac{1}{2}\ C\ E\ C'$$

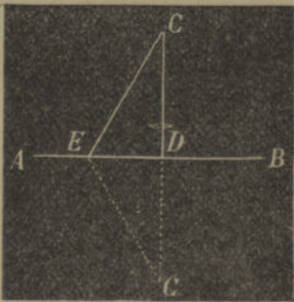


Fig. 29

e, como metade de $C\ C'$ é $C\ D$ e metade de $C\ E\ C'$ é $C\ E$, teremos finalmente:

$$C\ D < C\ E$$

42. — *Duas obliquas tiradas do mesmo ponto exterior para uma recta são iguaes, se se desviam igualmente do pé da perpendicular baixada d'aquelle ponto sobre a recta, e é maior aquella que se desvia mais.*

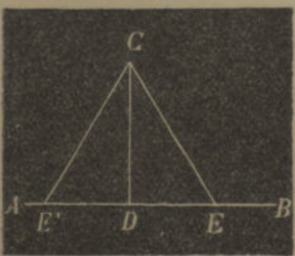


Fig. 30

1.º Sejam iguaes as distancias $D\ E$ e $D\ E'$, *fig. 30*. Para se ver que as obliquas $C\ E$ e $C\ E'$ são iguaes dobre-se o plano pela recta $C\ D$ (perpendicular); a recta $D\ B$ toma a direcção $D\ A$ por serem rectos, e portanto iguaes, os angulos $C\ D\ B$ e $C\ D\ A$, e o ponto E cairá sobre E' por serem iguaes as distancias $D\ E$ e $D\ E'$; conseguintemente coincidirão as rectas $C\ E$ e $C\ E'$. Fica incidentemente provado que são tambem, n'este caso, iguaes os angulos $E\ C\ D$ e $E'\ C\ D$, que as duas obliquas iguaes formam com a perpendicular.

2.º Para se provar que a obliqua $C\ F$, *fig. 31*, é maior do que $C\ E$, duplique-se a figura para a parte inferior de $A\ B$. Por ser a envolvente maior do que a envolvida será:

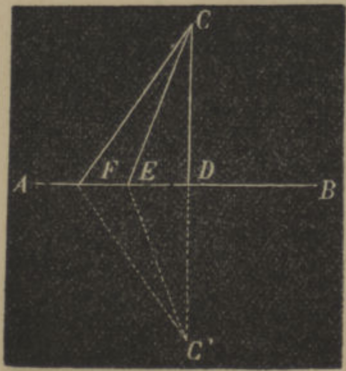


Fig. 31

$$C\,F\,C' > C\,E\,C'$$

$$\frac{1}{2}\,C\,F\,C' > \frac{1}{2}\,C\,E\,C'$$

$$C\,F > C\,E$$

Fica incidentemente provado que é maior o angulo $D\ C\ F$ formado pela maior obliqua com a perpendicular.

Se as obliquas não estivessem ambas para o mesmo lado da perpendicular, por exempla $C\ E$ e $C\ G$, *fig. 32*, reduzia-se a demonstração ao caso precedente, transportando uma d'ellas, $G\ C$ por exemplo, para o lado da outra, para o que basta tomar $D\ F$ igual a $D\ G$ e unir por uma recta os pontos F e C.

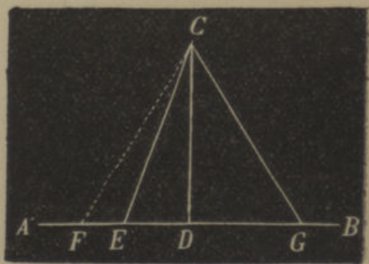


Fig. 32

43. — E' igualmente verdadeira a *reciproca* d'esta proposição: *Duas obliquas tiradas do mesmo ponto exterior para uma recta desviam-se igualmente do pé da perpendicular se são iguaes, e se são desiguaes a maior desvia-se mais.*

Demonstra-se, como quasi sempre acontece nas reciprocas, raciocinando pela *reducção ao absurdo*, isto é, mostrando que de se suppôr o contrario do que se affirma resulta um absurdo:

1.º Se duas obliquas iguaes não se desviassem igualmente do pé da perpendicular, uma desviar-se-ia mais e seria conseguintemente maior (42), o que vae contra a hypothese que estabelecemos de que ellas são iguaes.

2.º Se a obliqua maior se não desviasse mais do que a menor, ou se desviaria o mesmo e então seria igual á outra, ou se desviaria menos e então seria menor que a outra; em ambos os casos se iria contra a hypothese estabelecida de que a obliqua considerada é maior que a outra.

44. Da primeira parte do principio (42) resulta que a *perpendicular ao meio de uma recta tem cada um de seus pontos equidistante dos extremos d'essa recta.*

45. Da primeira parte do principio (43) resulta que *do mesmo ponto não se pódem tirar para uma recta duas obliquas, que, sendo iguaes, fiquem para o mesmo lado da perpendicular baixada d'esse ponto*, por isso que, devendo desviar-se ambas igualmente do pé da perpendicular, não seriam distinctas, visto ficarem ambas para o mesmo lado.

46. *Qualquer ponto da bissetriz de um angulo equidista dos lados d'esse angulo.*

Seja o angulo ABC, *fig. 33*, e BD a sua bissetriz. Tomemos um ponto O sobre ella e d'elle baixemos as perpendiculares $O\,M$ e $O\,N$ sobre os dois lados. Para provar que essas perpendiculares são iguaes dobre-se a figura por $B\,D$; a recta $B\,C$ tomará a direcção de $B\,A$, e o ponto N não póde deixar de cair sobre M, porque de contrario haveria do mesmo ponto O, duas perpendiculares, $O\,M$ e $O\,N$, á mesma recta $A\,B$, que é absurdo.

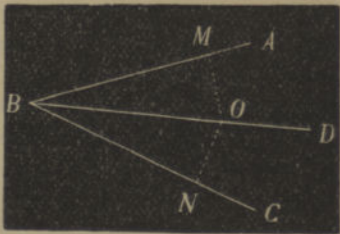


Fig. 33

47.— **Logar geometrico.** Denomina-se *logar geometrico* a linha ou superficie que passa por todos os pontos que gozam da mesma propriedade.

Póde-se pois dizer:

O logar geometrico de todos os pontos equidistantes dos extremos d'uma recta é a perpendicular levantada ao meio d'essa recta; a bissectriz d'um angulo é o logar geometrico dos pontos equidistantes dos lados do angulo.


Fig. 34

48.—**Linha vertical** é a que segue a direcção do fio de prumo.

Em architectura a *vertical* é muitas vezes denominada. **linha de prumo**, e **prumada.**

Linha horizontal é a linha perpendicular á vertical, ou a que póde assentar-se completamente sobre a superficie da agua em repouso.

Tambem se denomina **linha de nivel.**

Se fizermos fluctuar sobre a superficie tranquilla, da agua contida n'um copo, *fig. 34*, uma pequena palha, e mergulharmos, cruzando com esta, um fio de prumo, obteremos a imagem d'uma linha **vertical** cahindo perpendicularmente sobre a horizontal.

Quando se lança uma pequena porção de liquido, sobre uma superficie plana. bem lisa e rija, como por exemplo uma *chapa de vidro* ou de *metal*, ou uma *prancha de madeira* apparelhada, se o liquido não corre em sentido algum, a superficie está **horizontal**.

A superficie das aguas de uma lagôa, de um tanque, ou de um vaso, em quietação, é **horizontal** ou de **nivel**.

A superficie **horizontal** e a linha **horizontal**, são perpendiculares á linha de prumo.

Convem não confundir vertical com perpendicular. A vertical segue sempre a direcção do fio do prumo e só é perpendicular á horizontal, emquanto que uma linha recta póde ser, em qualquer direcção perpendicular a uma outra. Assim (veja-se applicações), o *nivel do carpinteiro*, *fig*. 47, não dá o angulo recto, e, portanto, a perpendicular senão quando o fio do prumo *OC*, passa pelo ponto central, *D*, da peça transversal, *A B*. Pelo contrario, o esquadro empregado no desenho, *fig*. 35, apresenta sempre um angulo recto *CDF*, seja qual fôr a posição em que se colloque, visto o lado *CD* ser sempre perpendicular ao lado *DF*.

APPLICAÇÕES

Traçado das perpendiculares com o esquadro

48. — Nas artes industriaes, as perpendiculares são traçadas por meio d'um instrumento que se denomina **esquadro** e que se compõe essencialmente de duas reguas perpendiculares entre si.

Ha varias especies de esquadros.

Fig. 35

49. — 1.º **Esquadro do desenhador**. E' uma pequena prancheta de madeira bem plana e delgada, com dois lados em angulo recto, e munida d'uma abertura circular para se poder manejar facilmente, *fig*. 35.

Um esquadro é perfeito quando tem um angulo rigorosamente recto. Para verificar esta condição, applica-se um dos lados *D F* do instrumento contra uma regua *A B*, *fig*. 35, na posição *M*, e traça-se uma recta seguindo se com exactidão o outro lado *DC*. Volta-se depois o esquadro a tomar a posição *M'*, de fórma que o vertice *D* fique no mesmo ponto, e traça-se uma nova recta *D C'* seguindo o mesmo lado *DC*. Se as duas rectas coincidem, o esquadro é bom; não coincidindo, é falso, devendo portanto ser abandonado, porque não serve para operações rigorosas.

PROBLEMA. — Tirar por um ponto dado uma perpendicular a uma recta

50. — 1.º Se o ponto dado *O*, estiver sobre a recta *AB*, *fig. 36*, para traçar a perpendicular ajusta-se sobre *AB* a aresta d'uma regua *R*, e faz-se correr ao longo d'ella um dos lados do angulo recto d'um esquadro *M*, até que o vertice d'este angulo attinja o ponto *O*; estando os instrumentos n'esta posição, firma-se o esquadro e traça-se pelo outro lado do angulo recto a recta *OC*, que será a perpendicular pedida.

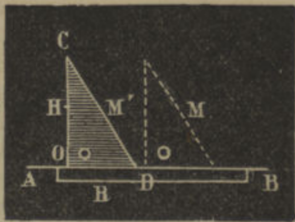


Fig. 36

2.º Se o ponto é dado fóra da recta, *H*, por exemplo, procede-se de fórma identica ao primeiro caso, parando o movimento do esquadro, quando o lado perpendicular á regua passe pelo ponto *H*.

51 — 2.º Esquadro do marceneiro e do carpinteiro. Este esquadro compõe-se de duas reguas faceadas A, B, formando angulo recto, *fig. 37*. A regua *A* é mais grossa que a outra e fórma um resalto que torna bastante commodo o uso do instrumento.

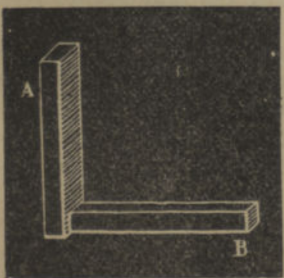


Fig. 37

Applica-se com effeito este resalto contra o bordo da tabua na qual se deseja levantar a perpendicular, e traça-se a linha seguindo o segundo lado do esquadro.

52. — 3.º Esquadro dos canteiros. O esquadro dos canteiros é de ferro e do mesmo feitio que o dos marceneiros; sómente differe d'este, em ter as duas reguas de igual espessura, *fig. 38*.

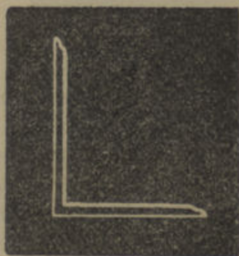


Fig. 38

53. — 4.º Esquadro em T. E' um duplo esquadro, *fig. 39*, muito util quando haja necessidade de tirar um grande numero de perpendiculares á mesma linha recta, como por exemplo no desenho architectonico.


Fig. 39

A folha de papel que deve receber o desenho está ordinariamente collocada sobre um estirador, portanto, applicando contra um dos seus bordos o lado menor do instrumento que tem um resalto, a regua maior ficará em todas as suas posições perpendicular a este bordo.

54.—5.º **Esquadro d'agrimensor.** O esquadro d'agrimensor serve para determinar perpendiculares no terreno.

Fig. 40

Este instrumento consta d'uma caixa de latão de fórma prismatica ou cylindrica. Tendo a fórma prismatica, *fig. 40*, duas das suas faces são perpendiculares a outras duas, e cada uma d'estas 4 faces tem uma abertura longitudinal, sendo a metade fresta e a outra metade janella, com o respectivo fio de seda ou de arame fino de ferro, collocado no prolongamento da fresta; a fresta d'uma face corresponde á janella da face opposta. As quatro faces estão pois dispostas de tal fórma, que os planos visuaes dos dois systemas de faces, estão perpendiculares entre si, e determinam sobre o terreno um systema de rectas igualmente perpendiculares.

As outras 4 faces são apenas munidas de frestas, tendo na parte superior um orificio, formando igualmente outros dois systemas de faces, cujos planos são tambem perpendiculares entre si.

Este systema combinado com o primeiro, serve para traçar angulos de 45.º

Este instrumento é sustentado por uma haste de madeira que tem proximamente $1^m,5$ de comprimento, e na qual uma das extremidades M é feita de modo que se possa adaptar n'ella o instrumento, e a outra P tem uma ponta de ferro aguçada, para se cravar com facilidade no terreno.

No caso do *esquadro* ser cylindrico, a sua superficie contem 8 fendas longitudinaes, collocadas a igual distancia.

Querendo com este instrumento levantar a perpendicular á recta AB, no ponto C, por exemplo, *fig. 41*, crava se n'este ponto a extremidade da haste, de fórma que fique bem vertical, e duas bandeirolas uma em cada um dos pontos A e B da recta dada. Faz-se então girar o esquadro, até que se veja d'um e outro lado do instrumento, por duas faces oppostas as referidas bandeirolas; dirige-se em seguida o raio visual pelas duas faces collocadas perpendicularmente ás primeiras e crava-se ao longe uma outra bandeirola, que determina a direcção da perpendicular pedida.

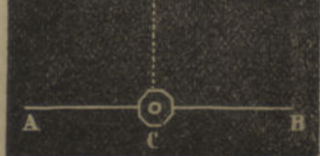


Fig. 41

No terreno, pódem fazer-se construcções identicas ás que se fazem no desenho, empregando uma corda, cadeia metrica ou fita graduada e duas estacas; uma para marcar os centros dos arcos e fixar a corda, cadeia, etc., e a outra, para riscar no terreno os arcos necessarios, á determinação da perpendicular.

55. — 6.º **Cordel esquadro.** Este instrumento serve igualmente para determinar perpendiculares no terreno.

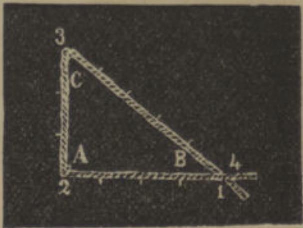


Fig. 42

Consiste n'um cordel com quatro nós, *fig. 42*, dados de modo tal que, dividindo em quatro partes iguaes a distancia do primeiro ao segundo nó, a distancia d'este ao terceiro tenha tres d'essas partes, e a do terceiro ao quarto cinco partes.

Querendo-se levantar a perpendicular a *AB* no ponto *A*, crava-se uma estaca n'esse ponto, e assenta-se sobre a recta a primeira divisão do **cordel-esquadro**, de modo que o 2.º nó fique junto á estaca do ponto *A*; segura-se o cordel, bem junto do 1.º nó, com outra estaca, e, com essa mesma se prende a outra extremidade junto ao 4.º nó; em seguida, pega-se no **cordel-esquadro**, exactamente pelo 3.º nó, puxa-se até que as duas divisões, segunda e terceira fiquem bem tensas, e, crava-se junto ao nó a 3.ª estaca.

A distancia comprehendida entre o 2.º e 3.º nós, determinará com exactidão bastante a direcção da perpendicular pedida, como adiante veremos.

56. — 7.º **Fio de prumo.** O fio de prumo, *fig. 43*, consta de tres partes: 1.º do **pião** *b*, que é um duplo tronco do cone, de ferro ou de cobre; 2.º do fio *c* denominado **chicote**, passado pelo eixo do **pião**, e que é seguro por meio de um nó dado na extremidade; 3.º d'uma placa *e*, propria para enrolar o **chicote** e que é chamada **noz**.

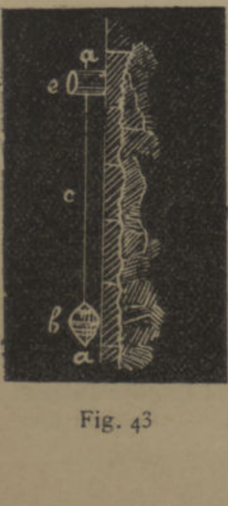


Fig. 43

O diametro do bojo do **pião** é do mesmo comprimento que o do eixo da **noz**.

Determinar a vertical que passe por um ponto dado. Seja *a* o ponto dado, *fig. 43*. Suspenda-se o prumo, superior ou inferiormente ao ponto *a*, de modo que um dos nós do fio, o de cima ou o de baixo, coincida com o ponto; e o chicote do prumo marcará então a vertical do ponto.

57.— Para determinar horizontaes, empregam-se instrumentos denominados **niveis**, dos quaes ha dois systemas: um que se funda n'um principio de phisica de que: «*a superficie livre de um liquido homogeneo contido em vasos communicantes se eleva em todos elles á mesma altura*»; outro na perpendicularidade da linha de prumo sobre a horizontal.

58. — 8.º **Nivel de agua.** Este instrumento compõe-se de um tubo cylindrico de metal *AB*, *fig. 44*, de um metro pouco mais ou menos de comprimento, por 30 a 35 millimetros de diametro, recurvado em angulo recto nas suas extremidades, ás quaes se ligam dois tubos de vidro. O diametro interior d'estes tubos é igual; e para evitar que possam quebrar-se com facilidade, quando se transporta o instrumento, cobrem-se com capsulas ou mangas de metal, do feitio da peça indicada pela letra *D*.

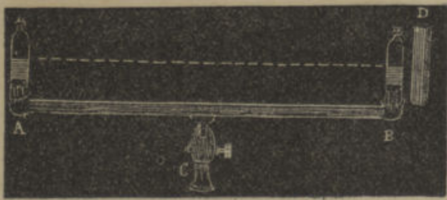


Fig. 44

O tubo metallico *AB* tem adaptada, a meio do seu comprimento, uma virola que sustenta o boccal *C*, onde entra a haste em volta da qual gira o instrumento, quando montado no competente tripé.

O liquido enche o vão interior até metade ou dois terços da altura dos tubos, e a capillaridade fazendo elevar a superficie do liquido junto das suas paredes fórma um annel ou menisco que a reflexão torna mais escuro do que o resto do liquido, e que estando á mesma altura em ambos os tubos determina a linha (pontuada) de nivel apparente. Os niveis do segundo systema são principalmente o de *pedreiro* e o de *carpinteiro*.

59. — 9.º **Nivel de pedreiro.** Consta este instrumento ou de

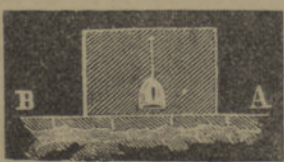


Fig. 45

Fig 46

uma prancha rectangular de madeira, com um fio de prumo, como representa a *fig. 45*, ou d'um caixilho, com o respectivo fio, como na *fig. 46*. O nivel de pedreiro determina horizontaes, quer pelo lado superior, quer pelo inferior. Para determinar uma horizontal, assenta-se o nivel por cima da linha ou encosta-se-lhe por baixo; em qualquer dos casos, logo que o fio ajuste com *a sua linha de fé*, a linha está horizontal. Este nivel serve tambem de *esquadro*.

60.—10.º **Nivel de carpinteiro ou de perpendiculo.** Compõe-se de duas reguas de madeira de iguaes dimensões e formando angulo, *fig. 47*. Estas peças estão ligadas a uma terceira *AB*, tambem de madeira no meio da qual existe um traço *D*, que corresponde á direcção do fio de prumo *OC* quando o instrumento estiver sobre uma superficie horizontal.

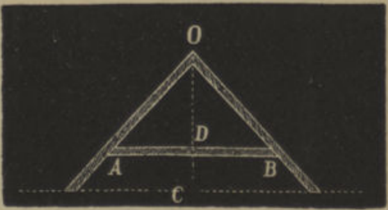


Fig. 47

Este nivel não determina a horizontalidade d'uma linha situada por cima, senão, mudando-se o ponto de suspensão do fio de prumo.

Para reconhecer a horizontalidade d'um plano, emprega-se geralmente o *nivel de bolha d'ar*.

61.—11.º **Nivel de bolha d'ar.** Este nivel, *fig. 48*, consiste n'um tubo de vidro cylindrico *AB*, ligeiramente curvo e quasi cheio de liquido. Dentro d'este tubo existe uma pequena porção de ar formando uma bolha movel que tende constantemente a collocar-se na parte mais elevada do tubo, que é graduado em partes iguaes, tendo o zero ao centro, (em *O*).

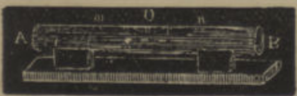


Fig. 48

Reconhece-se que uma superficie está horizontal, quando o instrumento collocado em duas direcções que se cruzem, tiver em ambas a bolha de ar com os extremos a igual distancia do zero.

O tubo de vidro que encerra o liquido, é introduzido n'outro de latão para evitar que se quebre quando fôr transportado, tendo na parte superior uma fenda *m n* que deixa ver os movimentos da bolha. Este tubo, assim resguardado, é fixo a uma regua de latão, formando um unico corpo.

3.º—Parallelas

62.—Nota-se que os dois carris de uma via ferrea estão sempre á mesma distancia um do outro. Caminham a par, sem se afastarem nem approximarem e por mais que se prolonguem ou se supponham prolongados será impossivel encontrarem-se.

Se considerarmos os carris assentes sobre uma superficie plana e seguindo em linha recta. e os substituirmos por simples linhas geometricas, diremos que ellas são **parallelas.**

E' condição essencial que estejam no mesmo plano. pois, do contrario, não são parallelas duas linhas, que, prolongadas nunca se encontram.

Por exemplo: se considerarmos como linhas uma das bordas de uma mesa e um dos pés do lado opposto e as prolongarmos indefinidamente, ellas nunca se encontram; apezar d'isso não são parallelas, visto não estarem no mesmo plano. Assim:

Rectas parallelas são as que estando situadas no mesmo plano, por mais que se prolonguem nunca se encontram, *fig. 49*.

Duas rectas parallelas são equidistantes em todos os seus pontos; assim na *fig. 49*, será *ab* igual a *cd*.

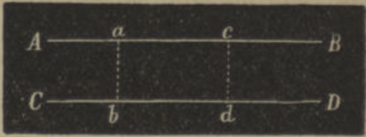


Fig. 49

63. **Curvas parallelas.**—Vê-se que o que caracterisa duas rectas parallelas é o estarem situadas no mesmo plano e sempre a igual distancia. Por consequencia duas linhas curvas podem igualmente ser parallelas, como por exemplo as linhas *ABC* e *DEF*, *fig. 50*.

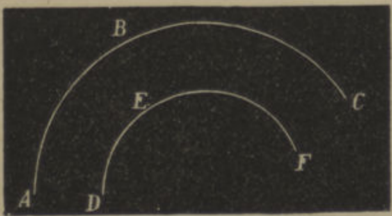


Fig. 50

64. — A doutrina das parallelas baseia-se no seguinte principio (conhecido pelo nome de *postulado d'Euclides*): *Uma recta perpendicular a outra é encontrada por qualquer obliqua a esta.*

Assim, a recta *CD*, *fig. 51*, perpendicular a *AB* é encontrada pela recta *EF* obliqua a *AB*, quando sejam sufficientemente prolongadas.

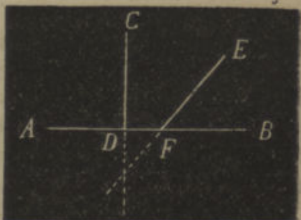


Fig. 51

65. — *Duas perpendiculares á mesma recta são parallelas entre si.*

Sejam com effeito *CD* e *C'D'*, *fig. 52*, perpendiculares a *AB*. Se prolongando-as se encontrassem n'um ponto, *O*, d'este ponto teriamos então duas perpendiculares á mesma recta, o que não póde admittir-se por ser absurdo.

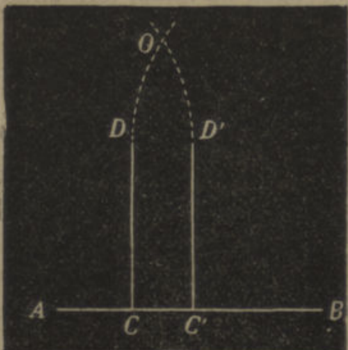


Fig. 52

66. — *Se uma de duas parallelas fôr perpendicular a uma recta tambem a outra o será.*

Sejam com effeito as duas parallelas AB e CD, a primeira das quaes é perpendicular a EF, *fig. 53*; CD ha de ser tambem perpendicular a EF, porque, se lhe fosse obliqua, encontraria AB (64) e não lhe seria portanto parallela, como haviamos estabelecido.

Esta proposição é *reciproca* da precedente.

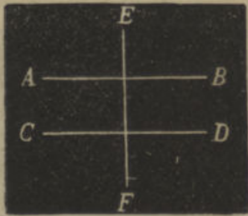


Fig. 53

67. — *Por um ponto exterior a uma recta só se póde tirar uma parallela a essa recta.*

Seja a recta AB e o ponto O, *fig. 54*. Para se ver que é possivel tirar por O uma parallela a AB, basta considerar que, se se baixasse sobre AB a perpendicular OC, e se sobre esta se levantasse pelo extremo O a perpendicular DE, esta seria parallela a AB (65). Pelo mesmo ponto O não seria possivel tirar outra parallela a AB, porque qualquer outra recta, $D'E'$, que por elle passasse, sendo obliqua a OC, encontraria AB (64), e não lhe seria portanto parallela.

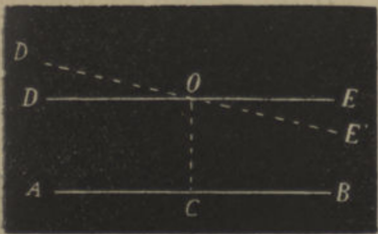


Fig. 54

68. — *Duas parallelas são equidistantes em todos os seus pontos.*

Sejam as duas parallelas AB e $A'B'$, *fig. 55*. Tomemos sobre a primeira os pontos C e D e d'elles baixemos sobre $A'B'$ as perpendiculares CC' e DD'. Para provar que estas são iguaes, tome-se o meio de CD e por esse ponto, M, baixe-se a perpendicular MN. Dobrando a figura por MN a recta MB tomará a direcção MA, a recta NB' tomará a direcção NA', o ponto D cairá sobre C, por serem iguaes as distancias MD e MC, e portanto a perpendicular DD' coincidirá com CC', porque de contrario do mesmo ponto baixar-se-iam duas perpendiculares á mesma recta.

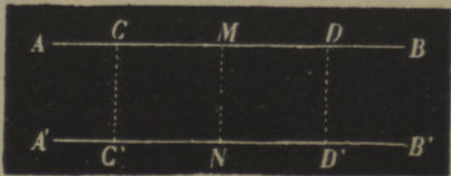


Fig. 55

69.—Quando duas rectas são cortadas por uma outra, a que se dá o nome de *transversal* ou *secante*, formam-se oito angulos, que têem denominações especiaes, *fig. 56*, segundo a sua posição.

Os angulos 1 e 2, ou 7 e 8 dizem-se externos adjacentes.
Os angulos 3 e 4, ou 5 e 6 dizem-se internos adjacentes.

Os angulos 1 e 7, ou 2 e 8 dizem-se **externos do mesmo lado da secante.**

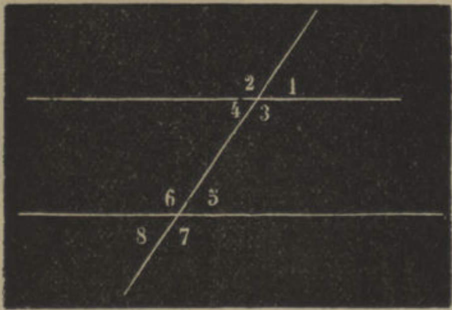


Fig. 56

Os angulos 3 e 5, ou 4 e 6 dizem-se **internos do mesmo lado da secante.**

Os angulos 1 e 8, ou 2 e 7 dizem-se **externos-alternos.**

Os angulos 3 e 6, ou 4 e 5 dizem-se **internos-alternos.**

Os angulos 1 e 5, ou 3 e 7, ou 2 e 6, ou 4 e 8 dizem-se **correspondentes.**

70. — *Os angulos internos-alternos formados por duas parallelas cortadas por uma secante são iguaes.*

Sejam as parallelas *AB* e *CD* e a secante *EF*, *fig. 57*. Para mostrar que os angulos *AMN* e *DNM* são iguaes, tome-se o ponto *O*, meio de *MN*, e tire-se por elle a recta *PQ* parallela a *AB* e portanto tambem a *CD*. Cortando a figura pela recta *PQ*, e fazendo girar a parte inferior em torno do ponto *O* até que a recta *OQ* tome a direcção de *OP*, a recta *ON* tomará a direcção de *OM* por serem iguaes os angulos *NOQ* e *MOP* (34), o ponto *N* cairá sobre *M*, por ser *ON* igual a *OM*, e a recta *ND* tomará a direcção de *MA* por serem ambas parallelas a *PQ* (67). Portanto são iguaes os angulos *AMN* e *DNM.*

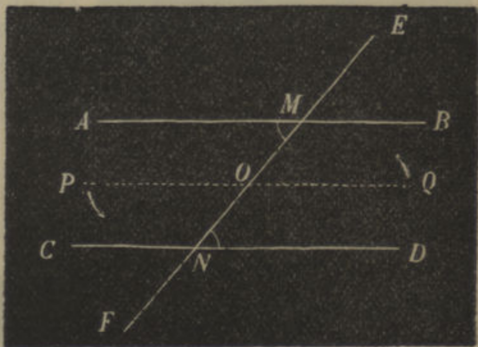


Fig. 57

Por serem iguaes os angulos verticalmente oppostos, fica incidentemente provado que tambem *são iguaes os angulos externos-alternos e os correspondentes,* isto é, que dos oito angulos são iguaes entre si os quatro agudos e bem assim os quatro obtusos, sendo tambem cada um dos agudos supplemento de cada um dos obtusos.

APPLICAÇÕES

Traçado das parallelas com a regua e esquadro

71.—**PROBLEMA.**—**Tirar por um ponto dado uma recta parallela a outra.**

1.° *Sobre o papel.*

Seja C o ponto e AB a recta dada, *figs. 58* e *59*. Ajuste-se um lado do esquadro sobre a recta dada, e, encostando uma regua a qualquer dos outros lados, faz-se escorregar o esquadro sobre esta, até que o lado que se ajustou com a recta dada esteja sobre o ponto

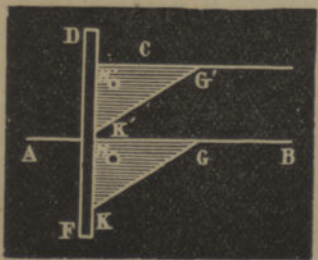


Fig. 58

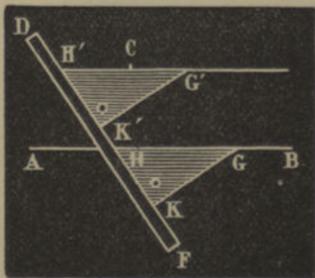


Fig. 59

pelo qual se quer tirar a parallela; fixando os dois instrumentos n'esta posição, traça-se uma recta ao longo do lado $H'G'$, a qual será a parallela pedida, visto serem iguaes os angulos correspondentes GHK e $G'H'K'$.

2.° *Sobre o terreno.*

Seja C o ponto e AB a recta dada, *fig. 60*. Baixe-se primeiramente do ponto C uma perpendicular CD sobre AB empregando o esquadro de agrimensor; depois com o mesmo instrumento levante-se no ponto C uma perpendicular FG sobre CD, as linhas FG e AB são parallelas por serem perpendiculares á mesma recta CD.

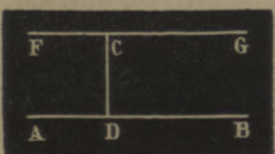


Fig. 60

72. – **Graminho.** Vimos (68) que duas rectas parallelas são equidistantes em todos os seus pontos. Esta propriedade é posta em pratica pelos marceneiros quando empregam o graminho para traçar parallelas. O *graminho* é formado por uma prancheta quadrada *A*, de madeira, bem desempenada, e denominada **guiador**, *fig. 61*, atravessada por uma haste *T*, com uma ponta *P* n'um dos seus lados; uma **chave** *C*, mais larga n'uma das extremidades do que na outra, permitte fixar ou tornar movel a haste.

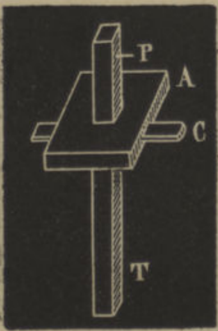


Fig. 61

Para tirar uma parallela, encosta-se a prancheta á borda da peça de madeira; a haste encurta-se ou alonga-se segundo a distancia a que ha de ficar a parallela, fixando-se em seguida por meio da chave, e a ponta conservando-se constantemente á mesma distancia do bordo rectilineo da peça de madeira, traça uma parallela a este bordo.

II

Circumferencia

1.° — Definições e propriedades principaes

73. — Entre as diversas especies de linhas curvas ha uma notavel pela sua perfeita regularidade, da qual podemos ter idéa pelo contorno da roda de qualquer viatura, e que tem na geometria o nome de circumferencia.

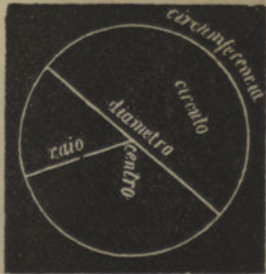


Fig. 62

Circumferencia é uma linha curva plana, cujos pontos estão todos equidistantes de um ponto interior chamado *centro*.

Circulo é a porção de plano limitada pela circumferencia.

As rectas tiradas do centro para qualquer ponto da circumferencia dizem-se *raios*. É claro que todos os raios do mesmo circulo são iguaes.

Um ponto do plano d'um circulo é exterior ou interior á circumferencia d'esse circulo, segundo a sua distancia ao centro é maior ou menor que o raio.

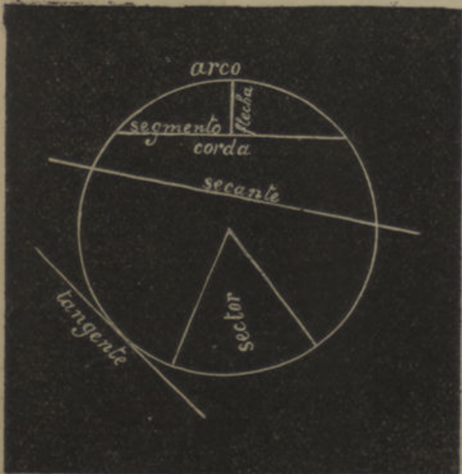


Fig. 63

Arco de circulo é uma porção qualquer da circumferencia.

Dois arcos do mesmo raio são iguaes quando applicados um sobre o outro, coincidem em todas as suas partes.

Corda é a recta que une as extremidades de um arco.

Flecha é a porção do raio perpendicular á corda, comprehendida entre ella e o arco.

Diametro é a recta que, passando pelo centro, tem os seus extremos na circumferencia. E' claro que todos os diametros do mesmo circulo são iguaes, por ser cada um d'elles igual ao dobro do raio.

Tangente á circumferencia é a recta que com ella tem só um ponto commum. Este ponto diz-se *ponto de tangencia* ou *de contacto*

Secante é toda a transversal que corta a circumferencia.

Sector circular é a porção do circulo comprehendida entre um arco e os raios tirados para os seus extremos.

Segmento circular é a porção de circulo comprehendida entre um arco e a corda respectiva.

Fig. 64

Qualquer corda divide o circulo em dois segmentos.

74.—Duas circumferencias dizem-se **concentricas**, *fig. 64*, quando têem o mesmo centro; e **excentricas** no caso contrario.

Diz-se **corôa circular** a porção do circulo maior comprehendida entre duas circumferencias concentricas.

Se duas circumferencias não têem ponto algum commum nem os seus circulos se sobrepõem, dizem-se **exteriores**; se a menor se encontra toda no interior da maior, sem ter ponto algum de commum com ella, diz-se **interior** a esta, *fig. 65*.

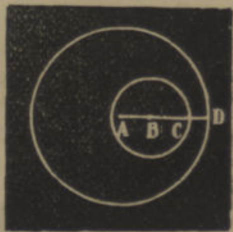


Fig. 65

Se tivermos duas circumferencias **exteriores** de raios differentes, *fig. 66*, e approximarmos successivamente uma da outra, veremos que, n'um dado momento ellas se tocam, *fig. 67*, isto é, passam a ter um ponto de contacto *C*; continuando a de menor

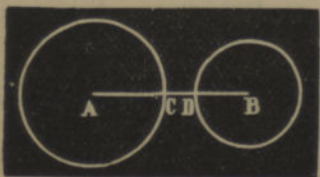


Fig. 66

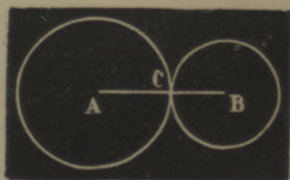


Fig. 67

raio a ser exterior á outra. N'esta posição as circumferencias dizem-se **tangentes exteriores**.

Continuando a approximar-se as circumferencias, observamos que, primeiramente se interceptam nos pontos *C* e *D*, *fig. 66*, e em seguida tornam a ter um só ponto commum *C*, *fig. 67*, achando-se então a de menor raio, interior á outra. No primeiro caso as circumferencias dizem-se **seccantes** e no segundo **tangentes interiores.**

São portanto cinco as differentes posições relativas que podem ter duas circumferencias situadas no mesmo plano:

1.° *Exteriores.*
2.° *Tangentes exteriores.*
3.° *Seccantes.*
4.° *Tangentes interiores.*
5.° *Interiores.*

N'estes diversos casos, ha sempre relação entre a distancia dos centros e a somma ou differença dos raios. Assim, pela simples ins-

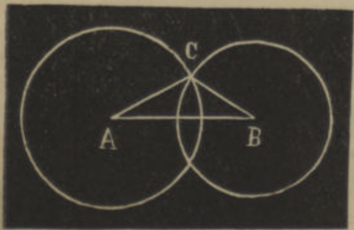


Fig. 68

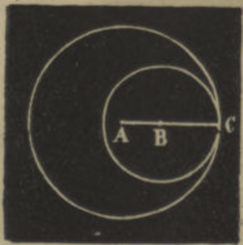


Fig. 69

pecção d'aquellas diversas figuras, vê-se que na *fig. 66*, onde as circumferencias são exteriores, a distancia dos centros AB é maior que $AC + DB$, somma dos raios.

Na *fig. 67*, onde as circumferencias são tangentes exteriormente é $AB = AC + CB$, isto é a distancia dos centros igual á somma dos raios.

Na *fig. 68*, onde as circumferencias são seccantes, AB é menor que $AC + CB$, ou ainda a distancia dos centros menor que a somma dos raios.

A *fig. 69*, mostra-nos as circumferencias tangentes interiormente, e então $AB = AC - BC$, isto é que a distancia dos centros é igual á differença dos raios.

Finalmente na *fig. 65*, que representa duas circumferencias interiores, é AB menor que $AD - BC$, isto é, a distancia dos centros menor que a differença dos raios.

75.—As *circumferencias e os circulos de raios iguaes são iguaes*, porque, se ajustarmos os centros e sobrepozermos os planos dos dois circulos, as curvas coincidem.

Um circulo, ou circumferencia, designa-se por um dos seus raios, ou, quando d'isso não resulte confusão, pela letra que designa o centro.

76.—*O diametro divide a circumferencia e o circulo em duas partes iguaes*, por isso que, dobrando um circulo por um dos seus diametros, todos os pontos de um dos arcos cairão sobre os do outro arco.

77.—*O diametro é a maior de todas as cordas.*

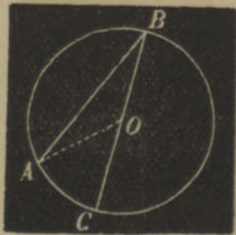


Fig. 70

Para provar que o diametro BC é maior do que a corda AB, *fig.* 70, una-se o extremo A da corda com o centro O.

Pela propriedade da linha recta será:

$$BA < BO + OA$$

ou, por ser AO igual a OC:

$$AB < BO + OC$$
$$AB < BC$$

78.—*A perpendicular baixada do centro sobre qualquer corda passa pelo meio da corda e pelo meio do arco.*

Seja OC, *fig.* 71, a prependicular a AB. Dobrando a figura pelo diametro DD' as duas semicircumferencias ajustam-se, a recta CB toma a direcção de CA, e portanto o ponto B cáe sobre o ponto A, o que mostra ser C o meio da corda AB e D o meio do arco ADB. Fica tambem incidentemente provado que D' é o meio do arco $AD'B$.

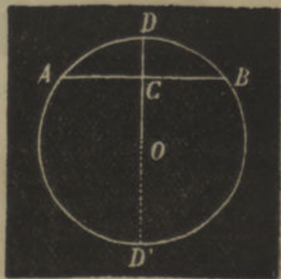


Fig. 71

79.—*No mesmo circulo ou em circulos iguaes a arcos iguaes correspondem cordas iguaes, e ao maior arco corresponde corda maior.*

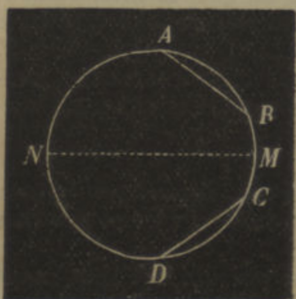


Fig. 72

1.º Seja o arco AB, *fig.* 72, igual ao arco DC. Tirando o diametro MN que passa pelo meio do arco BC, e dobrando por elle a figura, as duas semicircumferencias ajustam-se; o ponto C cairá sobre B, por serem iguaes os arcos MB e MC, e o ponto D sobre A, por serem iguaes os arcos BA e DC, o que mostra que são iguaes as cordas AB e CD, cujos extremos, depois da sobreposição, coincidiram cada um com cada um.

2.º Sejam os arcos desiguaes AC e AB, *fig.* 73; vamos demonstrar que a corda AC é maior que a corda AB. Tire-se a corda BC, baixe-se do centro sobre ella a perpendicular OE, e una-se o ponto D com B. Pela propriedade da linha recta será:

$$AB < AD + DB$$

e visto que DB é igual a DC, por serem ambas obliquas igualmente desviadas do pé da perpendicular (42) será ainda:

$$AB < AD + DC$$

ou finalmente:

$$AB < AC$$

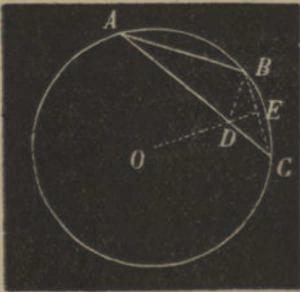


Fig. 73

Se as cordas estivessem cada uma em seu circulo, ou se, estando ambas no mesmo circulo, não tivessem a disposição considerada na demonstração precedente, reduzia-se a esses termos transportando uma d'ellas, para o que bastaria tomar um arco igual ao que corresponde a uma d'ellas a partir de um extremo do arco da outra e no mesmo sentido, e tirar depois a corda respectiva.

80.—A *reciproca* da proposição precedente: *No mesmo circulo ou em circulos iguaes a cordas iguaes correspondem arcos iguaes, e á maior corda corresponde o maior arco* demonstra-se analogamente ao n.º (43), raciocinando pela *reducção ao absurdo*.

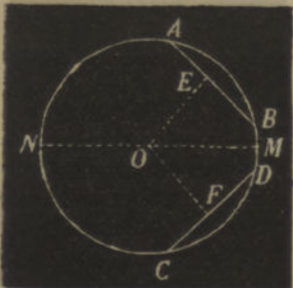


Fig. 74

81.—*No mesmo circulo ou em circulos iguaes, cordas iguaes equidistam do centro, e a corda maior dista menos.*

1.º Sejam as cordas iguaes AB e CD, *fig.* 74, e OE e OF as distancias a que estão do centro, Para provar que estas distancias são iguaes tire-se o diametro MN que passa pelo meio do arco BD, e dobre-se por elle a figura; o ponto D cairá sobre B, o ponto C sobre A, e o ponto E, que é meio da corda AB, coincidirá com o ponto F, que é meio da corda CD, o que mostra ser OE igual á OF.

2.º Seja agora a corda AC, *fig.* 75, maior que AB; queremos demonstrar que a distancia OE é menor que OD. Com effeito, sendo

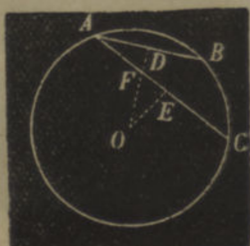


Fig. 75

OE menor do que *OF* (41), por maioria de rasão será *OE* menor do que *OD*.

82.—A *reciproca* da proposição precedente: *No mesmo circulo ou em circulos iguaes cordas igualmente afastadas do centro são iguaes, e a corda que dista mais é menor* demonstra-se analogamente ao n.º (43).

Fig. 76

83.—*Tres pontos não em linha recta determinam uma circumferencia.*

Sejam os tres pontos *A*, *B* e *C* *fig. 76*. Tirando a recta *AB* e levantando-lhe pelo meio a perpendicular *GD*, todos os pontos d'esta equidistarão de *A* e de *B* (44); tirando igualmente a recta *BC* e levantando-lhe pelo meio a perpendicular *EF*, todos os pontos d'esta equidistarão de *B* e de *C*; portanto o ponto de intersecção, *O*, de *GD* com *EF*, equidistando de *A*, *B* e *C*, será o centro da circumferencia que por elles passa.

84.—A *tangente a uma circumferencia é perpendicular ao raio tirado para o ponto de tangencia.*

Seja *AB*, *fig.* 77, a recta tangente á circumferencia *O* no ponto *T*. A recta *OT* que une o centro com o ponto de tangencia será um raio, ao passo que outra qualquer, *OE*, tirada do centro para um ponto da recta será maior do que o raio, d'onde se conclue que *OT* é perpendicular a *AB*, visto ser a menor recta que de *O* se póde tirar para *AB* (41).

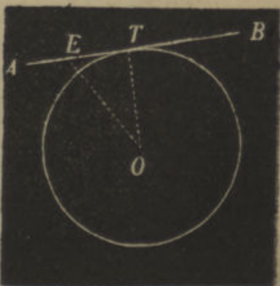


Fig. 77

85.—*Reciprocamente: A perpendicular tirada pela extremidade de um raio é tangente á circumferencia,* porque se encontrasse a circumferencia n'outro ponto, unindo-o com o centro teriamos uma obliqua e uma perpendicular tiradas do mesmo ponto para uma recta ambas iguaes, por serem raios do mesmo circulo, o que vae contra o principio (41).

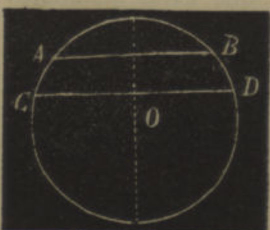


Fig. 78

86.—*Duas cordas parallelas interceptam na circumferencia arcos iguaes.*

Sejam *AB* e *CD* as cordas parallelas: vamos demonstrar que o arco *AC* é igual a *BD*, *fig. 78*. Baixando do centro uma perpendicular sobre *CD*, que o será tambem a *AB* (66), e dobrando por ella a figura, o ponto *D* cairá sobre *C* e o ponto *B* sobre *A*, o que mostra ser o arco *AC* igual a *BD*.

APPLICAÇÕES

Traçado das circumferencias

87.—Para traçar circumferencias sobre um plano, empregam-se os **compassos**.

Ha duas especies de compassos: de **pontas fixas** ou de **divisão**, e de **pontas moveis**. O primeiro consta de duas hastes metallicas chamadas **pernas**, terminadas em ponta n'uma das suas extremidades e reunidas na outra por uma **charneira**, que permitte abrir mais ou menos o angulo formado pelas pernas.

Fig. 79

O compasso de **pontas moveis**, *fig. 79* só differe do antecedente em ter uma perna disposta para receber e reter, por meio de um parafuso de pressão, um **porta-lapis**, ou um **tira-linhas**.

Para descrever uma circumferencia de raio dado, dá-se ao compasso uma abertura igual ao raio, *fig. 80*, colloca-se uma das pontas no centro, e gira-se com a outra sobre o plano; sendo constante a distancia entre as pontas, a movel descreve uma circumferencia.

Quando se quer traçar uma circumferencia muito grande, como

Fig. 80

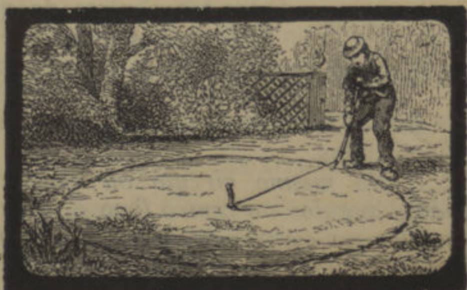


Fig. 81

acontece aos jardineiros, seria impossivel fazer uso do compassso; recorre-se então a um cordel, *fig. 81*.

Na extremidade do cordel faz-se ou prende-se uma argola, mette-se ahi uma estaca, e crava-se esta no logar onde se quer fazer centro; depois, ata-se uma segunda estaca ou um ponteiro de ferro á outra extremidade da corda, e descreve-se a circumferencia girando ao redor do centro, tendo cuidado em que o cordel se conserve sempre bem estendido, e a argola da estaca do centro não se eleve ou se abaixe.

A corda deve ser do comprimento do raio do circulo que se quer formar.

2.º — Medição dos arcos e dos angulos

88. — Os arcos medem-se não pelo seu comprimento rectificado, isto é, reduzido a uma linha recta, mas sim pela sua relação com a circumferencia.

Para os representar com facilidade suppõe-se a circumferencia dividida em 360 partes iguaes chamadas graus, ou em quatro partes iguaes chamadas quadrantes, tendo cada um d'estes, 90 graus, cada grau 60 *minutos* e cada minuto 60 *segundos*.

Os graus designam-se escrevendo um pequeno ° á direita e aci ma do numero que os exprime; os minutos designam-se por um accento agudo analogamente situado, e os segundos por dois accentos agudos. Assim, um arco que fosse a quarta parte de um quadrante (quarta parte de 90 graus) seria representado por 22° 30′ (22 graus e 30 minutos).

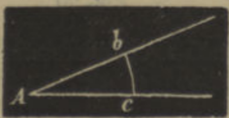


Fig. 82

89. — A grandeza dos angulos avalia-se tambem pelo numero de graus do arco de circulo descripto do seu vertice como centro e com qualquer raio e que fica comprehendido entre os seus lados; assim, *fig. 82*, se o arco *bc* fosse a terça parte do quadrante, diriamos que o angulo *A* tinha 30°.

E' claro que a grandeza do angulo recto é de 90°.

90. — Esta substituição dos arcos aos angulos resulta dos seguintes principios.

I. *No mesmo circulo ou em circulos iguaes, angulos ao centro* (isto é, que têem o vertice no centro) *iguaes interceptam arcos iguaes.*

Sejam com effeito iguaes os angulos *AOB* e *COD*, *fig. 83*. Para demonstrar que o arco *AB* é igual ao arco *CD*, tire-se o diametro que seja bissectriz do angulo *BOC*, e dobre-se por elle a figura; *OB* tomará a direcção de *OC* e *OA* a direcção de *OD*, e portanto o arco *BA* coincidirá com o arco *CD*.

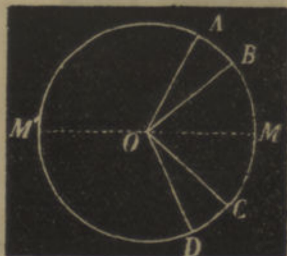


Fig. 83

II. *No mesmo circulo ou em circulos iguaes os angulos ao centro estão entre si como os arcos.*

Sejam os angulos BAC e $B'A'C'$, *fig. 84*. Descrevam-se dos vertices A e A' como centros e com raios iguaes os arcos DE e $D'E'$; queremos demonstrar que a razão entre os dois angulos é igual á razão entre os dois arcos.

Supponha-se que um certo angulo BAM, que tomâmos por unidade subsidiaria, se contém duas vezes em BAC e cinco vezes em $B'A'C'$; n'este caso a razão entre os angulos será:

$$\frac{BAC}{B'A'C'} = \frac{2}{5}$$

Em virtude, porém, do principio precedente os arcos DM, ME, $D'M'$, $M'M''$... são todos iguaes, e portanto a razão entre os arcos será:

$$\frac{DE}{D'E'} = \frac{2}{5}$$

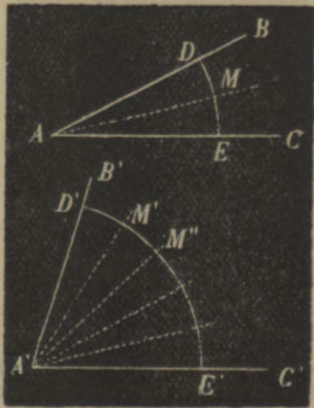


Fig. 84

d'onde se conclue que

$$\frac{BAC}{B'A'C'} = \frac{DE}{D'E'}$$

III. *O angulo ao centro tem a mesma medida que o arco comprehendido entre os seus lados, uma vez que se tome para unidade dos angulos o angulo correspondente á unidade dos arcos.*

Com effeito se o angulo $B'A'C'$ fosse a unidade adoptada para a medição dos angulos, a razão $\frac{BAC}{B'A'C'}$ seria o numero que representaria o angulo BAC expresso n'essa unidade; da mesma fórma, se o arco $D'E'$ fosse a unidade adoptada para a medição dos arcos, a razão $\frac{DE}{D'E'}$ seria o numero que representaria o arco DE expresso n'essa unidade; e portanto a proporção deduzida no principio precedente mostra que o mesmo numero exprime a medida do angulo BAC e do arco DE. D'aqui se conclue que, em vez de procurarmos a medida do angulo, podemos procurar a medida do arco, uma vez que, tendo-se escolhido para unidade principal dos angulos o angulo recto, se considere como unidade principal dos arcos o quadrante.

E' este o modo usado para a medição dos angulos e facilitado pelo emprego do instrumento conhecido no desenho pelo nome de *transferidor*; poderiamos, porém, ainda medil-os considerando-os como *inscriptos*, isto é, como tendo o vertice sobre uma circumferencia e por lados duas cordas.

91 — *O angulo inscripto tem por medida metade do arco comprehendido entre os dois lados.*

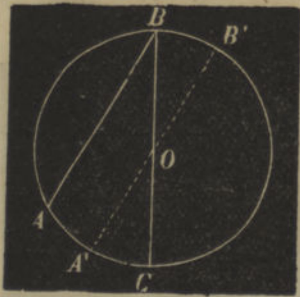


Fig. 85

Assim, se o arco comprehendido entre os lados de um angulo inscripto fôr a quarta parte do quadrante, o angulo terá metade de 22° 30′ ou 11° 15′.

1.° Consideremos primeiro o angulo ABC, *fig. 85*, em que um dos lados é diametro. Para demonstrar que elle é medido por metade do arco $A\,C$, tire-se pelo centro, O, uma recta $A'B'$ parallela a $A\,B$. Os arcos $A\,A'$ e $B\,B'$ são iguaes por estarem comprehendidos entre cordas parallelas e os arcos $B\,B'$ e $A'\,C$ são tambem iguaes por serem iguaes os angulos verticalmente oppostos $A'\,O\,C$ e $B\,O\,B'$, logo o arco $A'\,C$ é igual a AA' ou é metade de AC. Ora o angulo ABO, sendo igual a $A'OC$, por lhe ser correspondente, tem a mesma medida que este, isto é, $A'C$ ou metade de $A\,C$, como queriamos demonstrar.

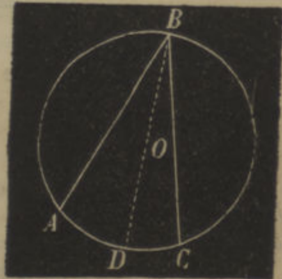


Fig 86

2.° Se o centro, O, do circulo está dentro do angulo, *fig. 86*, tirando o diametro $B\,D$ dividimos o angulo proposto em dois, $A\,B\,D$ e $D\,B\,C$, cujas medidas são respectivamente metade de $A\,D$ e metade de DC, e portanto a medida do angulo $A\,B\,C$, sendo a somma d'estas duas, será metade de $A\,C$.

3.° Finalmente, se o centro do circulo está fóra do angulo, *fig. 87*, tirando o diametro $B\,D$ vemos que o angulo proposto, $A\,B\,C$, é

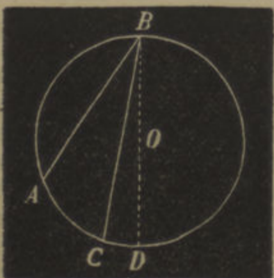


Fig. 87

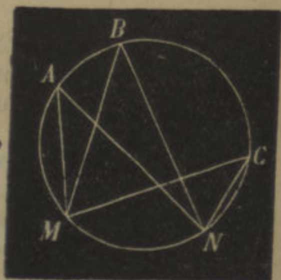


Fig. 88

igual ao angulo $A\,B\,D$ menos o angulo $C\,B\,D$, e, como as medidas d'estes são respectivamente metade do arco $A\,D$ e metade do arco

$C\ D$, a do angulo $A\ B\ C$ será a differença d'estas, isto é, metade de $A\ C$.

92—Do principio precedente conclue-se:

1.° *Todos os angulos inscriptos no mesmo segmento são iguaes.*

Assim, *fig. 88*, os angulos em A, B e C são iguaes, porque qualquer d'elles tem por medida metade do arco $M\ N$.

2.° *O angulo inscripto n'um semi-circulo é recto.*

Assim, *fig. 89*, o angulo $A\ B\ C$ é recto, porque tem por medida metade da semicircumferencia $A\ D\ C$, isto é, um quadrante.

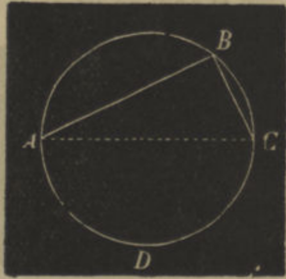


Fig. 89

APPLICAÇÕES

Medida dos angulos

93.—**Transferidor.** Este instrumento serve para medir angulos e para os construir com um determinado numero de graus. Consiste n'uma placa semi-circular de qualquer materia transparente ou de metal, *fig. 90*, cujo bordo exterior chamado **limbo** está dividido em dois sentidos differentes em graus, meios graus ou quartos de grau. O diametro AB, ou **linha de fé**, tem no centro um pequeno entalhe denominado **centro** do transferidor.

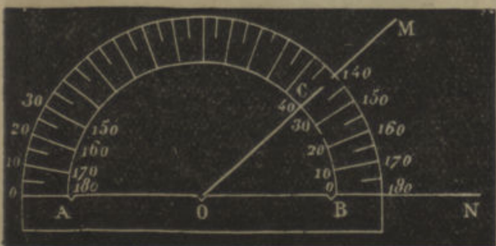


Fig. 90

Querendo, por exemplo, medir o angulo MON, *fig. 90*, ajusta-se o centro do transferidor com o vertice O do angulo de fórma que a linha de fé coincida com um dos lados ON, por exemplo; a divisão do limbo correspondente ao outro lado OM indica a medida do angulo.

A construcção d'um angulo de grandeza dada faz-se tambem por meio do transferidor, da seguinte fórma: traça-se uma recta AN, *figura 90*, e marca-se sobre ella um ponto O; ajustando a linha de fé do transferidor com AN de modo que o centro coincida com aquelle ponto, marca-se um ponto C junto á divisão que indica a grandeza do angulo; tirando em seguida o transferidor e unindo o ponto *C* ao ponto *O*, ter-se-ha construido o angulo *MON* com a grandeza dada.

D'aqui se vê que, o transferidor póde servir para tirar uma perpendicular a uma recta n'um ponto dado, para o que, basta construir um angulo recto, em que a linha dada seja um dos seus lados. Póde tambem fazer-se uso d'elle, para tirar por um ponto uma parallela a uma recta.

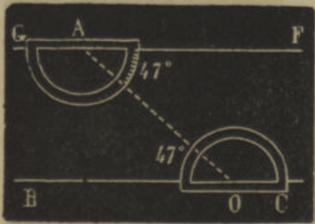


Fig. 91

Seja *A* o ponto e *BC* a recta dada, *fig. 91*. Traça-se pelo ponto *A* uma recta qualquer *AO* que intercepta *BC* no ponto *O*.

Medindo o angulo *AOB* e construindo no ponto *A* um angulo *FAO* igual a *AOB* de maneira que estes dois angulos tenham a posição d'alternos-internos, obter-se-ha uma recta *GF* parallela a *BC*.

94—Graphometro. O *graphometro* é um instrumento com que se medem os angulos sobre o terreno. Compõe-se principalmente d'um semi-circulo de latão *RKS*, *fig. 92*, de duas reguas, ou alidades do mesmo metal, *CC'* e *BB'*, a primeira fixa e a segunda movel, e de um bocal aonde se adapta um tripé *T* que permitte collocar o apparelho convenientemente para o trabalho.

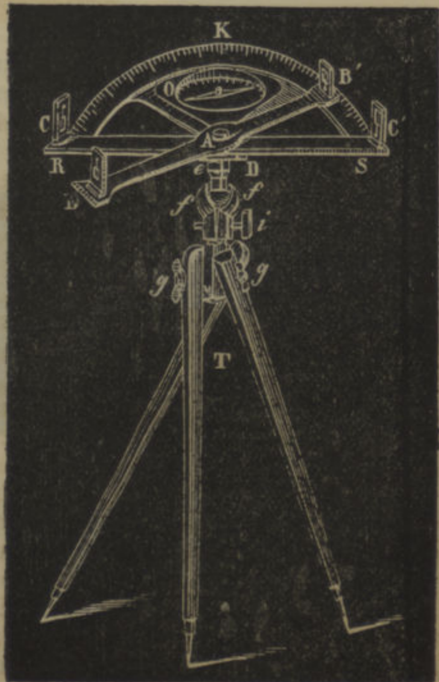


Fig. 92

O semi-circulo ou limbo está dividido em graus e meios graus sexagesimaes.

A alidade fixa *CC'* fórma o diametro do circulo, e a movel *BB'* gira sobre um eixo *A*, podendo percorrer as divisões do limbo e medir os angulos.

Cada alidade tem nas extremidades perpendicularmente ao seu plano uma pequena placa ou *pinnula* de platina ou de latão. Cada *pinnula* tem no meio uma fenda estreita ou *fresta* e uma abertura larga ou *janella*, dividida em duas partes iguaes por um fio de seda, crina ou arame muito fino, no prolongamento exacto da fresta. As frestas e as janellas das duas pinnulas são dispostas de modo que, por cima ou por baixo de uma janella fica uma fresta em cada pinnula, e cada janella de uma pinnula é opposta a uma fresta da outra.

A alidade movel tem fixa a cada extremidade um *nonio circular*, isto é, um arco de circulo, *fig. 93*, dividido em 30 partes iguaes. A primeira divisão, zero, está gravada em cada extremidade da recta que passa pelo centro do instrumento e as aberturas das placas da alidade movel. Como as trinta divisões do nonio correspondem a vinte e nove do limbo, claro está que devem ser mais pequenas do que estas $\frac{1}{30}$ do grau ou de 60′, isto é, 2′. Este quebrado que indica a differença entre uma divisão do nonio e uma do limbo, denomina-se *natureza do nonio*.

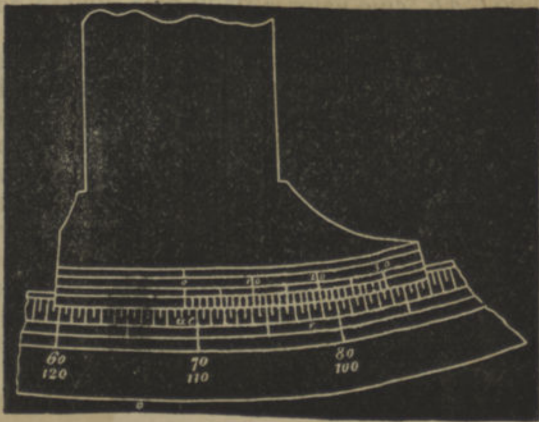


Fig. 93

Póde adaptar-se a este instrumento uma bussola *O*, *fig. 92*, para determinar relativamente aos pontos cardeaes, a posição do logar em que se opera, ou a dos objectos sobre que se dirigem os raios visuaes.

Uso do graphometro.—Mede-se com este instrumento um angulo *CAE*, *fig. 94*, formado por duas rectas balisadas, collocando o graphometro de fórma que o seu centro corresponda exactamente ao vertice *A* do angulo, o que se obtem collocando o fio de prumo no centro do tripé do instrumento, ou então deixando cair uma pedrinha d'esse ponto, e observando se ella cae exactamente no buraco aonde estava collocada a balisa.

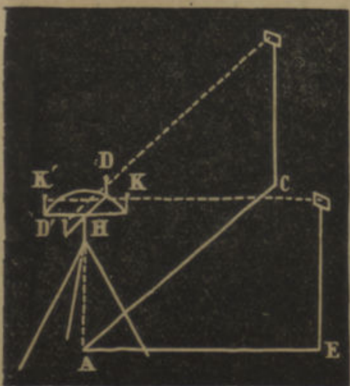


Fig. 94

Em seguida faz-se com que o limbo fique perfeitamente horisontal, (o que se consegue por meio do nivel de bolha d'ar), e dirige-se a alidade fixa para um dos pontos *C* ou *E*, para *E* por exemplo, girando com o limbo e applicando um olho a uma das frestas até conseguir que o fio da janella opposta da segunda pinnula, se confunda com a balisa do ponto *E*.

Feito isto, fixa-se o limbo por meio d'um parafuso, e dirige-se a alidade movel para o ponto *C*. Então o angulo formado pelo diametro 0°—180° e a linha media da alidade movel, é igual ao angulo pedido *CAE*, cujo valor é dado pela divisão do limbo, que coincide com o traço marcado no chanfro do extremo da alidade movel.

Póde porém acontecer que a linha media da alidade movel, denominada *linha de fé*, não ajuste exactamente com alguma divisão do limbo, e n'este caso, como a medida que se obtem não vem em numero exacto de graus, torna-se necessario o emprego do *nonio*. Supponhamos que a linha de fé da alidade movel caíu entre 58° e 59°, o angulo terá n'este caso 58° e uma fracção do grau, que se calcula por meio do *nonio*, sendo bastante procurar a divisão do nonio que coincida com uma divisão do limbo, a qual seja 7, por exemplo:

Multiplicando então este numero 7 pela *natureza do nonio*, que, como já se disse, é de 2′ (no graphometro), ter-se-ha o producto 14′ que juntos aos 58°, darão a medida exacta do angulo, a qual é portanto 58°,, 14′.

3.°—Rectificação da circumferencia e dos arcos

95. — Em todas as circumferencias é constante a rasão da circumferencia para o diametro, isto é, ha um numero constante que multiplicado pelo diametro de qualquer circulo dá o comprimento da circumferencia rectificada, ou reduzida á fórma de uma linha recta. Esse numero é representado pela letra grega π (que se lê *pi*) e tem para valor o numero incommensuravel 3,1415926... ou approximadamente $\frac{22}{7}$. D'este ultimo valor devido a Archimedes, no qual se vê, que a circumferencia tem approximadamente o comprimento de tres diametros e mais a setima parte de um diametro, deduz-se um meio muito simples para rectificar graphicamente a circumferencia, conhecido de alguns antigos operarios, pela denominação de **regra de tres e um setimo**. Consiste em dividir o diametro em sete partes iguaes, e em juntar uma d'ellas a uma recta que contenha tres vezes o mesmo diametro. Nos problemas em que se não exije grande rigor póde-se tomar para π o valor 3,14; quando porém se quer fazer um calculo com maior certeza, emprega-se a relação $\frac{355}{113}$ que é igual a 3,1416. Convem saber de cór estas expressões.

A relação $\frac{355}{113}$ conserva-se facilmente de memoria, porque escrevendo o numerador á direita do denominador obtem-se o numero

113355 formado pelos tres primeiros algarismos impares tomados duas vezes.

Representando por C a circumferencia e por R o raio será

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

D'onde se deduz:

$$C = 2\pi R \quad \text{e} \quad R = \frac{C}{2\pi}$$

A primeira d'estas ultimas formulas mostra que multiplicando o raio pelo dobro de π se obtem o comprimento da circumferencia, e a segunda mostra que dividindo o comprimento da circumferencia pelo dobro de π se obtem o raio.

PROBLEMAS:

1.° *Rectificar a circumferencia que tem de raio $4^m,6$.*

$$C = 2\pi R = 6,28 \times 4^m,6 = 28^m,888$$

2.° *Qual é o raio da circumferencia que tem 50 metros de desenvolvimento?*

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{50^m}{6,28} = 7^m,96$$

96. — Se se quizesse apenas rectificar o arco a, cujo numero de graus, minutos e segundos, n, é conhecido bem como o raio, servir-nos-iamos da formula:

$$a = 2\pi R \times \frac{n}{360}$$

tendo em vista que o valor de n deve ser reduzido a incomplexo da infima especie, e que o denominador 360 deve ser substituido por 360×60 se n fôr expresso em minutos e por $360 \times 60 \times 60$ se fôr expresso em segundos.

PROBLEMAS:

1.° *Rectificar um arco de 44° d'um circulo de 8 metros de raio.*

$$a = 2 \times 3,14 \times 8 \times \frac{44}{360} = 6^m,14$$

2.° *Rectificar um arco de 27° 12′ d'um circulo de 10 metros de raio.*

$$a = 2 \times 3,14 \times 10 \times \frac{1632}{21600}$$

3.º *Qual é o numero de graus, minutos e segundos d'um arco de* $4^m,5$ *n'um circulo de 10 metros de raio?*

Da formula precedente deduz-se

$$n = \frac{a \times 180}{\pi \times R}$$

que applicada ao problema dá

$$n = \frac{4,5 \times 648000''}{3,14 \times 10}$$

$$= 92879''$$

$$= 25^\circ\ 47'\ 59''$$

III

Polygonos

1.º — Definições

97 — **Polygono** é uma figura plana terminada por linhas rectas unidas duas a duas pelos seus extremos, de modo que fechem espaço. As linhas que o limitam chamam-se *lados*; a somma d'estes, *perimetros*; os angulos formados por cada dois lados contiguos, *angulos internos do polygono*; os pontos communs a dois lados contiguos, *vertices do polygono*; e as rectas que unem dois vertices não consecutivos *diagonaes.*

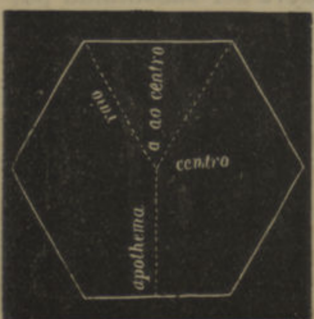


Fig. 95

Duas figuras que têem perimetros iguaes dizem-se *isoperimetras*.

Um polygono designa-se lendo successivamente as letras escriptas nos seus vertices.

Um angulo de um polygono diz-se **saliente**, quando os prolongamentos dos dois lados que o constituem se dirigem para fóra do polygono, e **reintrante** no caso contrario. Os polygonos cujos angulos são todos salientes, são **convexos**, *fig. 95*, e é d'elles que vamos especialmente tratar. São **concavos** os polygonos que têem um ou mais angulos reintrantes, *fig. 96*.

Diz-se **estrellado** o polygono concavo, cujos angulos são alternadamente salientes e reintrantes, *fig. 97*.

Um polygono diz-se **equilatero**, quando tem todos os seus lados iguaes; **equiangulo**, quando tem todos os seus angulos iguaes; e **regular**, *fig. 95*, quando é simultaneamente equilatero e equiangulo.

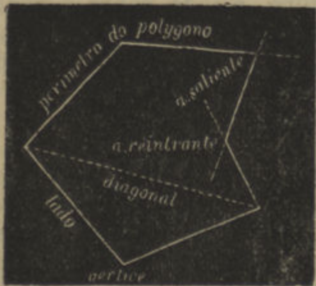


Fig. 96

Fig. 97

Nos polygonos regulares ha um ponto igualmente afastado de todos os vertices e de todos os lados, que se denomina **centro do polygono**. A perpendicular baixada do centro sobre qualquer dos lados diz-se **apothema do polygono**; a recta tirada do centro para qualquer dos vertices diz-se **raio do polygono**; e o angulo formado por dois raios contiguos diz-se **angulo ao centro do polygono**.

98 — Os polygonos têem diversos nomes segundo o numero de lados. Assim, diz-se:

Triangulo	o polygono de	3	lados
Quadrilatero	»	4	»
Pentagono	»	5	»
Hexagono	»	6	»
Heptagono	»	7	»
Octogono	»	8	»
Eneagono	»	9	»
Decagono	»	10	»
Endecagono	»	11	»
Dodecagono	»	12	»
Pentadecagono	»	15	»
Icosagono	»	20	»

O triangulo é o mais simples de todos os polygonos, porque menos de tres rectas não fecham espaço.

2.º — Triangulos

99 — Chama-se **base**, *fig. 98*, de um triangulo, e em geral de qualquer figura, o lado sobre o qual se suppõe que elle assenta; **vertice** o ponto mais afastado da base; e **altura** a perpendicular baixada do vertice sobre a base.

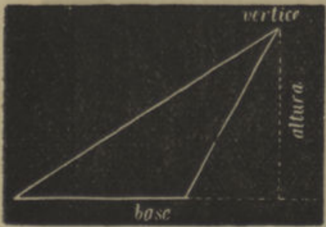


Fig. 98

100 — Os triangulos, quanto á grandeza relativa dos lados, podem ser: **equilateros**, *fig. 99*, se têem todos os lados iguaes; **isosceles**, *fig. 100*, se têem só dois lados iguaes; e **escalenos**, *fig. 101*, se os tres lados são desiguaes. Nos triangulos isosceles toma-se sempre para base o lado que não tem outro igual, e conseguintemente a altura passa pelo meio da base e é bissectriz do angulo do vertice, *fig. 104*.

Fig. 99

Fig. 100

Fig. 101

101 — Os triangulos, quanto á natureza dos seus angulos, dizem-se **rectangulos**, *fig. 102*, se um dos angulos é recto; **obtusangulos**, *fig. 98*, se um dos angulos é obtuso; e **acutangulos**, *fig. 100*, se todos os tres angulos são agudos. Os triangulos acutangulos e obtusangulos têem o nome commum de *obliquangulos*.

Nos triangulos rectangulos o lado opposto ao angulo recto diz-se **hypothenusa**, e os outros dois dizem-se **cathetos**.

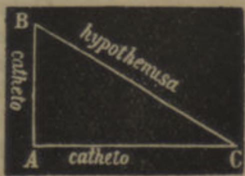


Fig. 102

102 — *N'um triangulo cada lado é menor do que a somma dos outros dois e maior do que a sua differença.*

Seja o triangulo $A\ B\ C$, *fig. 103*, no qual é $AB > AC > BC$. Pela propriedade da linha recta será:

$$AB < AC + BC.$$
$$AC < AB + BC.$$
$$BC < AB + AC.$$

o que justifica a primeira parte do principio.

Da primeira d'estas desigualdades tira-se:

$$AB - AC < BC.$$
$$AB - BC < AC.$$

e da segunda:

$$AC - BC < AB.$$

o que justifica a segunda parte do principio.

103 — *A somma dos tres angulos d'um triangulo vale dois angulos rectos.*

Seja o triangulo $A\ B\ C$, *fig. 103*. Tire-se pelo vertice B uma parallela a $A\ C$. O angulo $D\ B\ A$ é igual ao angulo A, por serem internos-alternos, e o angulo $E\ B\ C$ é igual ao angulo C pela mesma razão; logo os tres angulos formados em torno do ponto B para a parte inferior de $D\ E$ são iguaes aos tres do triangulo, e, como a somma d'aquelles, vale dois rectos (37), a d'estes valerá o mesmo.

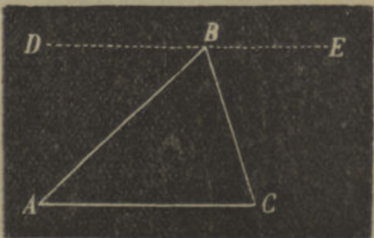


Fig. 103

Conclue-se que:

1.° *Um triangulo não póde ter mais de um angulo recto ou obtuso, nem um recto e um obtuso.*

2.° *Conhecidos dois angulos de um triangulo, conhece-se o terceiro achando-se o supplemento da sua somma.* Assim, se n'um triangulo dois dos angulos tiverem respectivamente 100° e 30° o terceiro tem 50°, que é quanto falta a 130° para perfazer 180° (dois rectos).

3.° *Dado o valor de um angulo agudo de um triangulo rectangulo, obtem-se o outro achando o complemento do primeiro.*

Assim, se um angulo agudo de um triangulo rectangulo fôr de 36°18′, o outro será de 53°42′.

4.° *Se dois angulos de um triangulo são iguaes a dois angulos de outro, os terceiros são tambem iguaes.*

104 — *N'um triangulo a lados iguaes oppõem-se angulos iguaes, e ao maior lado oppõe-se o angulo maior.*

1.º Seja o lado *A B* igual ao lado *B C*, *fig. 104*; vamos demonstrar que o angulo *C* é igual ao angulo *A*. Baixando a perpendicular *B D*, sabemos (42) que os angulos *A B D* e *C B D* são iguaes, como sendo os que obliquas iguaes fazem com a perpendicular e portanto sel-o-hão tambem os angulos *A* e *C*, que são os seus complementos (103).

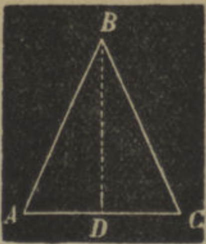


Fig. 104

2.º Seja o lado *A B* maior que o lado *B C*, *fig. 105*; vamos demonstrar que o angulo *C* é maior que o angulo *A*. Baixando a perpendicular *B D*, o angulo *D B C* será menor do que o angulo *D B A* (42) e portanto o angulo *C*, que é o complemento do primeiro, será maior do que o angulo *A*, que é complemento do segundo.

105. — A *reciproca* d'este principio: *N'um triangulo a angulos iguaes oppõem se lados iguaes, e ao maior angulo oppõe-se o maior lado*, demonstra-se raciocinando pela *reducção ao absurdo* (45).

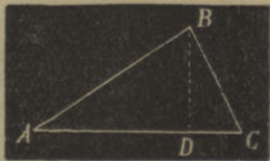


Fig. 105

Conclue-se que:

1.º *Para conhecer os tres angulos de um triangulo isosceles basta conhecer um opposto ou adjacente á base.* Assim se o angulo do vertice fôr de 40°, devendo os outros dois ter 140°, será cada um de 70°; e se um angulo adjacente á base for de 50°, como o outro tambem é de 50°, o do vertice será de 80°.

2.º *Os angulos agudos do triangulo rectangulo isosceles têem cada um 45°.*

3.º *Cada angulo de um triangulo equilatero vale 60°*, visto que o triangulo equilatero é tambem equiangulo.

106 — Os casos de **igualdade dos triangulos** são quatro:

1.º *Dois triangulos são iguaes, quando um lado de um é igual a um lado do outro e dois angulos do primeiro são respectivamente iguaes a dois angulos analogamente situados do segundo, fig. 106*, o que facilmente se prova sobrepondo-os e ajustando o lado *A' B'* com *A B*.

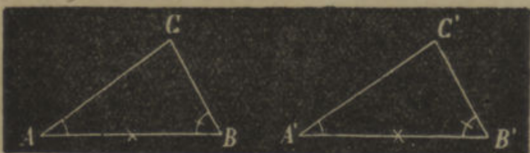


Fig. 106

2.º *Dois triangulos são iguaes, quando dois lados de um são respectivamente iguaes a dois lados de outro e iguaes os angulos por* *elles formados, fig. 107*. Prova-se por sobreposição, começando por ajustar $A'B'$ com AB.

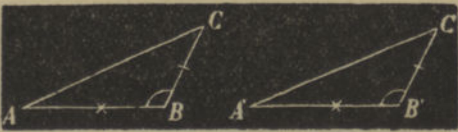


Fig. 107

3.° *Dois triangulos são iguaes, quando os tres lados de um são respectivamente iguaes aos tres lados do outro, fig. 108.*

N'este caso não podemos empregar a sobreposição, porque não

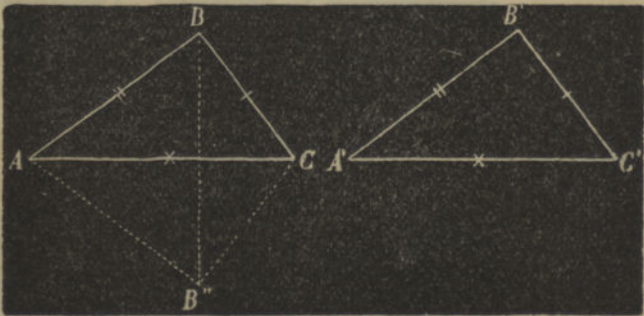


Fig. 108

sendo conhecida a igualdade entre nenhuns angulos, sobrepondo dois lados iguaes não poderiamos justificar que os contiguos tomam iguaes direcções; e então trataremos de demonstrar que um angulo do primeiro é igual ao angulo igualmente situado do segundo, porque d'esta fórma caímos no caso precedente.

Para isso assentemos o lado $A'C'$ sobre AC e rebatamos o vertice B' para a parte inferior de AC; o triangulo $A'B'C'$ occupará a posição $AB''C$, e, por ser $BC = B''C$ e $BA = B''A$, a recta CA será perpendicular ao meio de BB'', e portanto serão iguaes os angulos BCA e $B''CA$ (ou $B'C'A'$), como pretendiamos mostrar.

4.° *Dois triangulos são iguaes, quando dois lados de um são respectivamente iguaes a dois lados do outro e igual o angulo opposto ao maior d'elles, fig. 109.* Prova-se por sobreposição, começando por assentar BC sobre $B'C'$ e recorrendo ao principio (45).

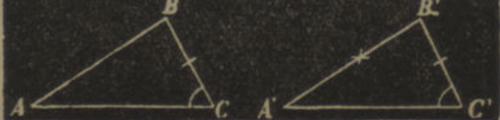
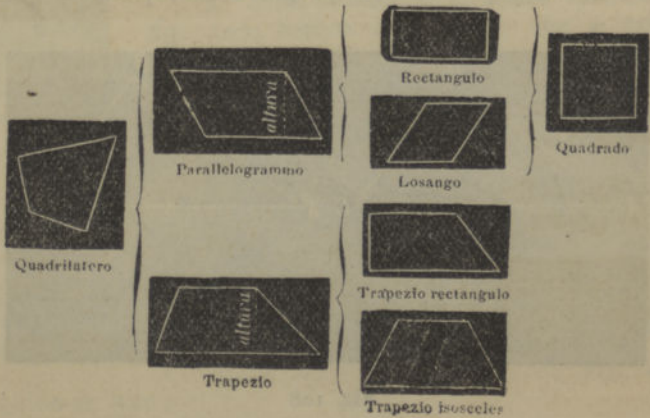


Fig. 109

Vê-se que havendo n'um triangulo seis elementos, tres lados e tres angulos, não é necessario senão o conhecimento de tres d'esses elementos, um dos quaes, pelo menos, ha de ser um lado para que o triangulo fique determinado e seja, portanto, possivel construil-o.

3.º—Quadrilateros

107 — Esta *familia* dos polygonos, para mais methodo na sua classificação e no estudo das suas propriedades, consideral-a-hemos dividida em dois *generos*, subdividos ainda em duas *especies*, como se vê no quadro seguinte :



Parallelogrammo é o quadrilatero que tem os lados oppostos parallelos. O parallelogrammo diz-se **rectangulo** quando tem os angulos rectos, e **losango** quando tem os lados iguaes. Diz-se *altura* de um parallelogrammo a perpendicular baixada sobre a base (99), de qualquer ponto do lado opposto. No rectangulo a altura é evidentemente igual ao lado contiguo á base.

O parallelogrammo gosa da propriedade de ter os lados oppostos iguaes e bem assim iguaes os angulos oppostos.

Trapezio é o quadrilatero que tem só dois lados parallelos, os quaes se denominam *bases*. Diz-se **trapezio rectangulo** quando um dos lados não parallelos é perpendicular ás bases, e **trapezio isosceles** ou **symetrico** quando os dois lados obliquos são iguaes.

A *altura* de um trapezio é a equidistancia entre as bases, representada pela perpendicular baixada sobre a base inferior, de qualquer dos pontos da base superior.

Quadrado é o quadrilatero que tem os lados iguaes e os angulos rectos. E' a figura regular da familia dos quadrilateros, e n'elle coexistem as propriedades das duas especies de parallelogrammos, por ser um *rectangulo-losango*.

108 — *Em todo o parallelogrammo os lados e angulos oppostos são iguaes.*

Seja o parallelogrammos *A B C D*, *fig. 110*. Tirando a diagonal *A C* dividimol-o em dois triangulos, que são iguaes pelo primeiro caso (106) por terem o lado *A C* commum, o angulo *C A B* igual ao angulo *A C D* e o angulo *A C B* igual ao angulo *C A D*; d'onde se conclue que o lado *A B* é igual a *C D* e *A D* igual a *B C*.

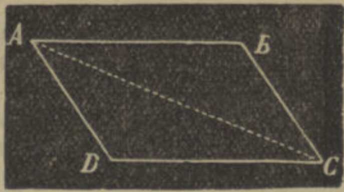


Fig. 110

Igualmente se mostra que o angulo *B* é igual ao angulo *D* por estarem oppostos a lados iguaes em triangulos iguaes e que o angulo *A* é igual ao angulo *C* por serem sommas de partes iguaes.

109 — *Em todo o parallelogrammo as diagonaes cortam-se em duas partes iguaes.*

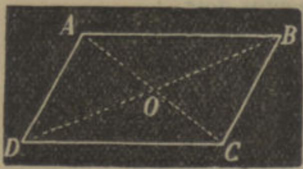


Fig. 111

Para se concluir que *A O*, *fig. 111*, é igual a *O C* e *O B* igual a *O D*, basta attender a que os triangulos *A O B* e *D O C* são iguaes pelo primeiro caso, por ser $A\ B = D\ C$, $O\ D\ C = O\ B\ A$ e $O\ C\ D = O\ A\ B$. O ponto de intersecção das duas diagonaes, diz-se *centro* do parallelogrammo.

110 — *Dois parallelogrammos são iguaes, quando têem dois lados contiguos iguaes cada um a cada um e o angulo por elles formado tambem igual.*

Sejam com effeito os parallelogrammos *A B C D* e *A′ B′ C′ D′*, *fig. 112*, nos quaes é $D\ C = D'\ C'$, $A\ D = A'\ D'$ e $D = D'$. Sobre-

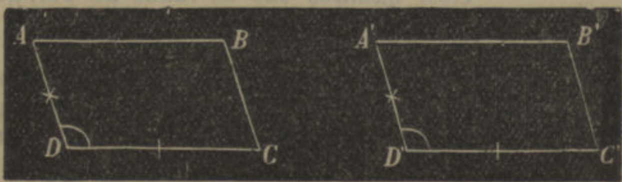


Fig. 112

pondo-os de modo que o lado *D′ C′* se ajuste com o lado, *D C*, a recta *D′ A′* cairá sobre *D A* por serem iguaes os angulos *D*, e *D′*, e, como os lados são iguaes, o ponto *A′* cahirá sobre *A*; a recta *A′ B′* tomará a direcção de *A B*, por isso que de um ponto não póde tirar-se mais do que uma parallela á mesma recta, e pela mêsma razão a a recta *C′ B′* tomará a direcção de *C B*, coincidindo portanto o vertice *B′* com o vertice *B*.

111 – Conclue-se que:

1.º *Um parallelogrammo fica determinado e póde portanto ser construido, quando são conhecidos dois lados contiguos e o angulo por elles formado.*

2.º *Para determinar um rectangulo bastam dois lados contiguos* visto ser recto o angulo por elles formado.

3.º *Para determinar um losango basta um lado e um angulo*, visto ser o outro lado do angulo igual ao primeiro.

4.º *Para determinar um quadrado basta um lado.*

4.º Propriedades geraes dos polygonos

112 — *De um vertice de um polygono podem tirar-se tantas diagonaes, quantos são os lados menos tres, ficando o polygono decomposto em tantos triangulos, quantos os lados menos dois.*

1.º Do vertice *A*, *fig. 113*, podemos tirar diagonaes para todos os vertices menos para *A* e para os contiguos, *B* e *F*, e, como ha tantos lados quantos os vertices, segue-se que o numero das diagonaes saídas de *A* é igual ao numero de lados menos tres.

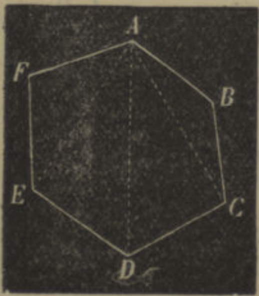


Fig. 113

Como cada diagonal produz um triangulo e a ultima produz dois, o numero dos triangulos será o numero das diagonaes mais um, isto é o numero dos lados menos dois.

113 — *A somma de todos os angulos internos de um polygono vale tantas vezes dois rectos, quantos são os lados do polygono menos dois.*

Para se evidenciar este principio basta attender a que um polygono se póde decompôr por meio das diagonaes, em tantos triangulos quantos os lados menos dois (112), que a somma dos angulos d'esses triangulos é precisamente a mesma que a dos angulos do polygono e que a somma dos angulos de cada triangulo vale dois rectos (103).

114 — Se representarmos por n o numero de lados de um polygono, a somma dos seus angulos internos será representada pela fórmula

$$2\,r \times (n - 2)$$

Notando que $2\,r$ equivale a $180°$ e dando a n os valores 3, 4, 5... obtemos os seguintes resultados:

Somma dos angulos internos do triangulo	$= 180^\circ \times 1 =$	180°
» » » » do quadrilatero	$= 180^\circ \times 2 =$	360°
» » » » do pentagono	$= 180^\circ \times 3 =$	540°
» » » » do hexagono	$= 180^\circ \times 4 =$	720°
» » » » do heptagono	$= 180^\circ \times 5 =$	900°
» » » » do octogono	$= 180^\circ \times 6 =$	1080°
Etc. Etc.		Etc.

Se o polygono fôr regular, obter-se-ha o valor de um angulo interno, dividindo o valor da somma de todos elles pelo seu numero.

Assim :

O angulo interno do triangulo equilatero vale........	$\frac{180^\circ}{3} =$	60°
O » » do quadrado »	$\frac{360^\circ}{4} =$	90°
O » » do pentagono regular »	$\frac{540^\circ}{5} =$	108°
O » » do hexagono » »	$\frac{720^\circ}{6} =$	120°
O » » do octogono » »	$\frac{1080^\circ}{8} =$	135°
Etc. Etc.	Etc.	

115 — Como a somma dos angulos ao centro de um polygono vale 360° (38) e elles são tantos quantos os lados, n, cada um valerá, sendo o polygono regular, $\frac{360^\circ}{n}$, fórmula que dá os seguintes resultados :

O angulo ao centro de um triangulo equilatero vale....	$\frac{360^\circ}{3} =$	120°
O » » » quadrado vale....	$\frac{360^\circ}{4} =$	90°
O » » » pentagono regular vale....	$\frac{360^\circ}{5} =$	72°
O » » » hexagono » vale....	$\frac{360^\circ}{6} =$	60°
O » » » octogono » vale....	$\frac{360^\circ}{8} =$	45°
O » » » decagono » vale....	$\frac{360^\circ}{10} =$	36°
O » » » dodecagono » vale....	$\frac{360^\circ}{12} =$	30°

APPLICAÇÕES

116 — *De um ponto dado C baixar uma perpendicular sobre uma recta A B do terreno, quando o pé da perpendicular é inacessivel, fig. 114.*

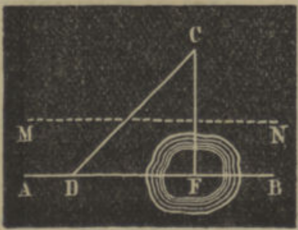


Fig. 114

Supponhamos que no pé *F* da perpendicular *C F* havia um tanque, por exemplo. Une-se o ponto *C* com um ponto qualquer *D* de *A B*, e mede-se com o graphometro o angulo *CDF*; em seguida construe-se no ponto *C* um angulo *D C F* igual ao complemento de *C D F*. A recta *C F* assim obtida é perpendicular a *A B*. Com effeito, valendo a somma dos dois angulos *C D F* e *D C F* do triangulo *D F C* um angulo recto (por serem complementares), o terceiro angulo *D F C* valerá um angulo recto.

117 — *Determinar a distancia de um ponto A a um ponto inacessivel, fig. 115.*

Levante-se no ponto *A* uma perpendicular *A M* sobre *A B*; determine-se com o esquadro um ponto *C* de *A M* tal que o angulo *B C A* seja metade de um recto. Resulta d'aqui que o 3.º angulo *A B C* vale tambem um semi-recto. O triangulo *A B C* é portanto isosceles, e *A C* = *A B*; mede-se *A C* e tem-se a distancia procurada.

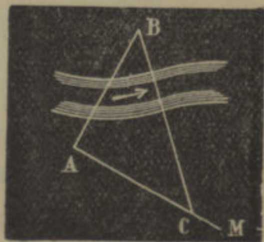


Fig. 115

118 — *Medir a distancia entre dois pontos inacessiveis A e B, fig. 116.*

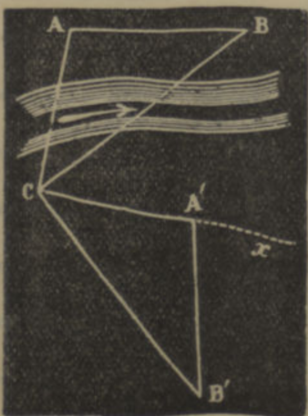


Fig. 116

Escolhe-se um ponto qualquer *C* sobre o terreno acessivel, e depois de ter balisado as direcções *C A* e *CB*, levantam-se com o esquadro perpendiculares *C x*, *C B'*, sobre estas rectas. Determinam-se, como no problema precedente, os pontos *A'* e *B'* taes que *CA'* = *CA*, *C B'* = *CB* e unem-se estes pontos por uma recta. Os angulos *ACB* e *A' C B'* são iguaes por terem os lados perpendiculares; os triangulos *A B C* e *A' B' C* são iguaes por terem um angulo igual comprehendido entre dois lados iguaes cada um a cada um.

D'onde se conclue que *A' B'* = *A B*.

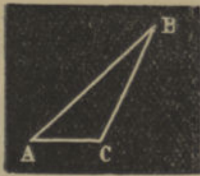


Fig. 117

* 119 — *Achar o valor de um angulo $A\ B\ C$, cujo vertice está muito afastado ou é inacessivel, fig. 117.*

Basta cortar os lados do angulo por uma recta qualquer $A\ C$, medir os dois angulos $B\ A\ C$, $B\ C\ A$ e tomar o supplemento da sua somma.

IV

Figuras semelhantes

1.º — Linhas proporcionaes

120 — Uma recta póde ser representada por um numero, comparando-a com uma unidade linear.

121 — **Razão entre duas quantidades** é o quociente indicado da divisão d'uma quantidade por outra. Assim, a razão entre 8 e 4 é $\frac{8}{4}$, que tambem se escreve 8 : 4, e lê-se oito dividido por quatro, ou oito está para quatro.

122 — **Proporção** é a igualdade de duas razões. Exemplo: $\frac{8}{4} = \frac{24}{12}$, que tambem se escreve 8 : 4 : : 24 : 12, e lê-se oito dividido por quatro igual a vinte e quatro dividido por doze; ou 8 está para 4, assim como 24 está para 12.

123 — **Proporção continua** é aquella que tem os meios iguaes.

124 — **Razão entre duas rectas** é a razão dos numeros que as exprimem, quando medidas com a mesma unidade. Assim, se medirmos duas rectas $A\ B$, e $C\ D$, *fig. 118*, e acharmos que é $A\ B = 3$ centimetros e $C\ D = 2$ centimetos, será $\frac{A\ B}{C\ D} = \frac{3}{2}$.

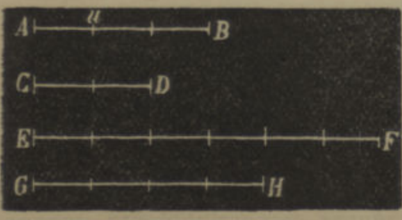


Fig. 118

125 — Quatro linhas dizem-se *proporcionaes*, quando os seus valôres numericos referidos á mesma unidade formam uma proporção. Assim, suppondo que a unidade $A\ u$, *fig. 118*, se contem 3 vezes na recta $A\ B$, 2 em $C\ D$, 6 em $E\ F$ e 4 em $G\ H$, por ser $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, di-

remos que estas rectas são proporcionaes, e poderemos formar tambem com ellas a seguinte proporção:

$$\frac{A\,B}{C\,D} = \frac{E\,F}{G\,H}$$

126—**Quarta proporcional** *a tres rectas*, é o quarto termo de uma proporção.

127—**Terceira proporcional** *a duas rectas*, é o quarto termo d'uma proporção continua.

128—**Meia proporcional** ou **meio geometrico**, é o termo medio de uma proporção continua.

129—Diz-se que muitas linhas são **proporcionaes** a outras, quando os seus valores numericos referidos á mesma unidade, formam uma serie de razões iguaes. Assim, diremos, que as rectas $A\,B$, $C\,D$, $E\,F$....., são proporcionaes a $A'\,B'$, $C'\,D'$, $E'\,F'$....., se fôr:

$$\frac{A\,B}{A'B'} = \frac{C\,D}{C'D'} = \frac{E\,F}{E'F'} = \ldots\ldots$$

N'este caso, se $A'\,B'$ fosse, por exemplo, 1:000 vezes menor que $A\,B$, $C'\,D'$ seria tambem 1:000 vezes menor que $C\,D$, $E'\,F'$ 1:000 vezes menor que $E\,F$, etc.

130—Tomando sobre uma recta um ponto, essa recta fica dividida por elle em duas partes a que se dá o nome de **segmentos**. Diz-se que esses segmentos são proporcionaes a dois numeros dados, quando a sua razão é igual á d'esses numeros. Assim dir-se-ha que os segmentos $A\,O$ e $O\,B$ da recta $A\,B$, *fig. 119*, são proporcionaes a 2 e a 3, visto que é:

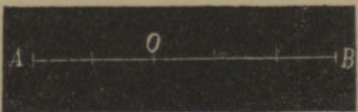


Fig. 119

$$\frac{A\,O}{O\,B} = \frac{2}{3}$$

2.° — Polygonos semelhantes

131—**Polygonos semelhantes** são aquelles que têem os angulos respectivamente iguaes, cada um a cada um, e os lados que terminam nos vertices dos angulos iguaes respectivamente proporcionaes.

Assim, o polygono $A\ B\ C\ D\ E$ será semelhante ao polygono $A'\ B'\ C'\ D'\ E'$, *fig. 120*, se tiverem:

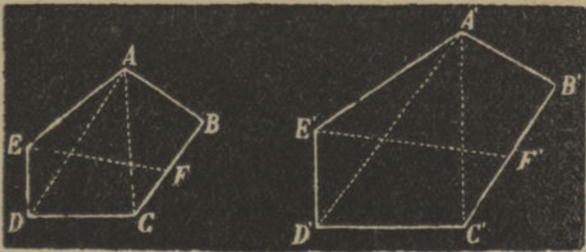


Fig. 120

$$A = A',\ B = B',\ C = C',\ D = D',\ E = E'$$

e bem assim

$$\frac{A\ B}{A'\ B'} = \frac{B\ C}{B'\ C'} = \frac{C\ D}{C'\ D'} = \frac{D\ E}{D'\ E'} = \frac{E\ A}{E'\ A'}$$

132 — De um modo geral e breve póde dizer-se que as **figuras semelhantes**, *fig. 121*, são caracterizadas pela *igualdade dos angulos e proporcionalidade dos lados*, vindo assim a differir na grandeza e na fórma.

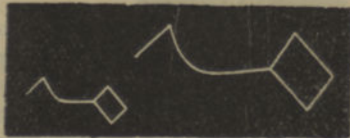


Fig. 121

Vê-se que são figuras semelhantes os polygonos regulares do mesmo numero de lados e bem assim os circulos.

Em figuras semelhantes dizem-se **vertices homologos** os que pertencem a angulos respectivamente iguaes; **lados homologos** os que terminam em vertices homologos, e, em geral **linhas homologas** e **pontos homologos** os que estão semelhantemente dispostos.

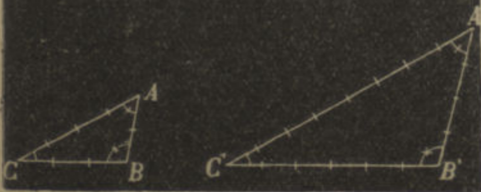


Fig 122

Assim, na *fig. 120*, o lado $C'\ D'$ é homologo de $C\ D$, o vertice A' homologo de A, a diagonal $A'\ D'$ homologa de $A\ D$, o ponto F homologo de F' e a linha $E'\ F'$ homologa de $E\ F$.

133 — Nas figuras semelhantes, a razão constante

que existe entre as linhas homologas diz-se **razão de semelhança**, e no desenho tem o nome de escala.

Assim, nos triangulos semelhantes da *fig. 122*, a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$, isto é, os lados do triangulo $A\ B\ C$ são respectivamente metade dos do triangulo $A'\ B'\ C'$.

APPLICAÇÕES

134 — **Compasso de reducção.** Este instrumento, *fig. 123*, compõe-se de duas pernas iguaes de latão, terminadas em pontas de aço. As pernas são vasadas de modo a formar duas fendas, no interior das quaes se move um pequeno cursor constituido por duas pequenas chapas de latão, que se podem fixar uma contra a outra por meio d'um parafuso que as atravessa. Apertado o parafuso por meio d'um botão que lhe serve de cabeça, fica impedido o movimento de rotação das hastes em torno do eixo do parafuso.

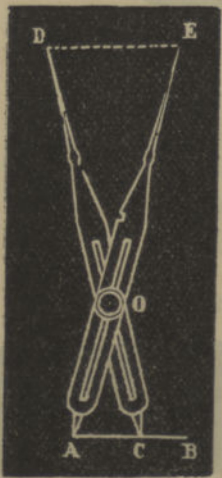


Fig. 123

Este instrumento serve para obter rapidamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{12}$ d'um comprimento dado.

Supponhamos que se deseja, por meio do compasso de reducção, tomar a metade d'uma linha recta AB, *fig. 123*. Fecha-se o instrumento e faz-se escorregar o cursor até que o comprimento OA seja metade de OE, o que tem logar quando a *linha de fé* ou traço indicador gravado sobre a chapa de latão coincide com a divisão $\frac{1}{2}$, da escala gravada n'uma das pernas do compasso.

Abre-se então o instrumento collocando as pontas D e E nas extremidades da recta AB e o affastamento AC das outras duas pontas representará exactamente a metade de AB.

O compasso de reducção é sobre tudo vantajoso quando se deseja reduzir um grande numero de linhas na mesma relação.

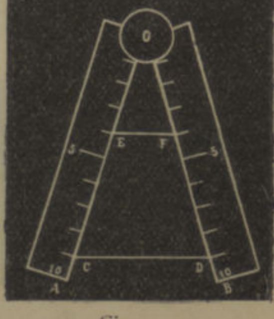


Fig. 124

135 — **Compasso de proporção.** Este instrumento serve para dividir uma linha recta em partes proporcionaes a numeros dados. E' composto de duas reguas iguaes AO,

OB, *fig. 124*, moveis em torno d'uma charneira *O*, cujo centro é o ponto de encontro dos bordos interiores das duas reguas. Estes bordos são divididos, a partir do *eixo*, em um mesmo numero de partes iguaes, seguidamente numeradas:

1.º Supponhamos que se procuram os $\frac{4}{9}$ d'uma recta *CD*. Abre-se o compasso até que a distancia das divisões 9 das duas reguas seja igual á recta dada; toma-se em seguida o comprimento da recta *EF* que une os dois pontos 4; *EF* representará os $\frac{9}{4}$ de *CD*. E é claro, porque do centro até *CD* ha 9 partes iguaes; por isso o lado *OD* se afasta de *OC*, ao fim de cada intervallo, $\frac{1}{9}$ de *CD*; e no fim dos nove intervallos está afastado toda a distancia *CD*. Logo, ao fim de 4 intervallos, isto é, no ponto 4, o afastamento vale $\frac{4}{9}$ de *CD*.

2.º Pretende-se dividir a recta *CD* proporcionalmente aos numeros 2, 3 e 4. A grandeza de cada uma das partes será respectivamente de $\frac{2}{2+3+4}$ ou $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{2+3+4}$ ou $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{2+3+4}$ ou $\frac{4}{9}$ de *CD*. Bastará pois abrir o compasso até que a distancia das divisões 9 seja igual á recta dada; as rectas que unirem os pontos das divisões, 2, 3 e 4 serão as linhas procuradas.

136 — **Escalas.** E' muito raro que um objecto possa ser desenhado na sua grandeza natural; umas vezes ha necessidade de o ampliar na copia, para se poderem analysar melhor os seus detalhes, outras é preciso reduzil-o, isto é, desenhal-o *em ponto menor*, para que a copia possa caber no papel do desenho. Ora, quer se amplie, quer se reduza a copia, para que o desenho seja exacto, tem de se modificar proporcionalmente todas as dimensões; d'onde resulta que a copia, n'este caso, é uma figura semelhante á do objecto na sua grandeza natural.

137 — As escalas pódem ser **numericas** ou **graphicas**.

As escalas **numericas** representam-se por uma fracção cujo numerador exprime o comprimento de um lado do desenho e cujo denominador representa o valor do lado homologo ou correspondente do objecto; sendo de toda a vantagem practica que ella tenha por numerador a unidade, o que se consegue dividindo ambos os termos da fracção pelo seu denominador. Assim, se medirmos um lado do objecto, e acharmos que elle é igual a 200 metros, e nos fôr conveninente represental-o no desenho só com 2 decimetros de comprimento, a escala será

$$\frac{0^{m},2}{200}$$

ou reduzindo os termos da fracção a decimetros virá

$$\frac{2}{2000}$$

e dividindo os termos pelo numerador teremos

$$\frac{1}{1000}$$

o que quer dizer, que a mil metros no original, corresponde 1 metro no desenho.

138 — A *base fundamental* das escalas numericas é representada pela fracção

$$\frac{1}{n} = \frac{\textit{comprimento tomado no desenho}}{\textit{comprimento tomado no objecto}} = \frac{d}{O}$$

Logo $d = \frac{O}{n}$ e $O = d \times n$

o que quer dizer: Um comprimento graphico *é igual ao quociente que se obtem dividindo o seu homologo natural pelo denominador da escala.*

Um comprimento natural *é igu l ao producto do seu homologo graphico pelo denominador da escala.*

Se tivermos um desenho na escala $\frac{1}{n}$, e desejarmos passal-o para a escala $\frac{1}{n'}$, teremos pela base fundamental

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{n} = \frac{d}{O} & O = n\,d \\ & \text{d'onde} \\ \frac{1}{n'} = \frac{d'}{O} & O = n'\,d' \end{array}\right.$$

logo $n\,d = n'\,d'$ e $d' = \frac{n\,d}{n'}$, isto é, para obter as grandezas d' do desenho a executar na escala $\frac{1}{n'}$, basta multiplicar as grandezas d do desenho na escala $\frac{1}{n}$ pela relação $\frac{n}{n'}$ dos denominadores das escalas.

Se fôr $\frac{n}{n'} > 1$ teremos uma ampliação.

Se fôr $\frac{n}{n'} < 1$ teremos uma reducção.

139 — As escalas geralmente mais usadas são:

As decimaes	simples	$\frac{1}{10^n}$
	duplas	$\frac{2}{10^n}$
	subduplas	$\frac{1}{2 \times 10^n}$
Especiaes		$\frac{1}{25 \times 10^n}$

e as $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}$.

140 — Erro tolerado, é a grandeza que reduzida á escala nos dá outra que não se póde apreciar graphicamente.

Exemplo: $0^m,1$ na medição natural para a escala $\frac{1}{1000}$, constitue o erro tolerado, porque na escala de $\frac{1}{1000}$, $0^m,1$ será representado por $0^m,0001$, dimensão esta que mal se póde apreciar á vista desarmada.

141 — **Escalas graphicas.** Estas escalas dão immediatamente a grandeza das linhas do desenho ou do objecto, sem ser necessario recorrer ao calculo. São figuras geometricas, que devem, sempre que fôr possivel, ter uma extensão igual á linha correspondente ao maior lado, e contar um certo numero de multiplos e submultiplos da unidade adoptada.

São geralmente empregadas no levantamento de plantas, no traçado de cartas e no desenho de machinas.

Uma simples recta dividida em partes iguaes, não é sufficiente para apreciar com exactidão as fracções da unidade, por isso, quando se deseja fazer um desenho rigoroso, emprega-se a *escala de dizima*, ou **escala de decimas partes**, cuja construcção é a seguinte.

Sejam AB, BC, etc., *fig. 125*, uma serie de comprimentos iguaes á unidade. Levante-se no ponto A uma perpendicular e marquem-se sobre ella 10 comprimentos iguaes de grandeza arbitraria; tirem-se por todos os pontos de divisão parallelas a AB, e pelos pontos B, C, etc., parallelas BE, CF á linha AD. Divida-se DE em 10 partes iguaes; una-se a divisão 1 com o ponto A e tirem-se pelos outros pontos de divisão, 2, 3, 4...9, *E* parallelas a 1 *A*, que dividirão *AB* em dez partes iguaes; cada uma d'estas partes será um decimo da unidade.

Posto isto, é facil mostrar que as porções de parallelas compre-

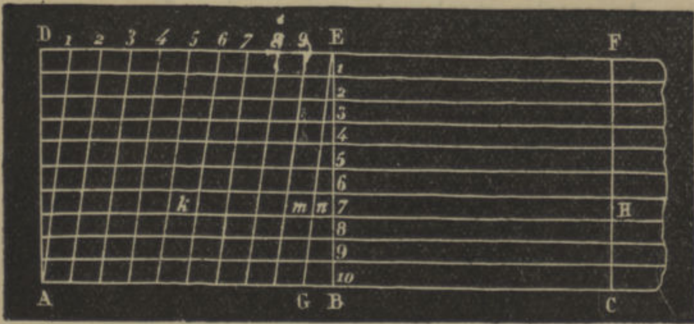


Fig. 125

hendidas entre os lados do triangulo *B E G* e marcadas 1, 2 3... são respectivamente iguaes a $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$... de *GB*. Com effeito, se se considera a septima parallela *m n*, os triangulos semelhantes *m E n* e *G E B* dão $\frac{m\,n}{G\,B} = \frac{E\,n}{E\,B} = \frac{7}{10}$.

Estas parallelas representam pois centesimas da unidade.

Supponhamos que se pretende tomar sobre esta escala um comprimento de 1,47. Collocar-se-ha uma das pontas do compasso em *H* sobre a 7.ª parallela a *AB*, e a outra ponta em *k*, de sorte tal que a distancia *m k* comprehenda quatro divisões inteiras iguaes a *GB*.

A recta *H k* sendo composta: 1.º de $H\,n = 1$, 2.º de $m\,k = 0,4$, 3.º de $m\,n = 0,07$, é igual a 1,47.

Reciprocamente para medir um comprimento dado, toma-se uma abertura de compasso igual a esse comprimento, e por tentativas, procura-se a parallela sobre a qual as duas pontas possam coincidir com duas divisões *H* e *k*, por exemplo; em seguida avalia-se facilmente este comprimento, pela forma acima indicada.

No levantamento de plantas, a unidade *A B* representa geralmente 100^m, *GB*, 10^m e as porções de parallelas, comprehendidas entre os lados do triangulo *B E G*, $1^m,0$.

142 — **Medição de distancias inaccessiveis.** O emprego dos triangulos semelhantes permitte medir com sufficiente exactidão a distancia entre pontos inaccessiveis:

1.º **Achar a distancia d'um ponto accessivel** *A, fig. 126* a um ponto *C*, do qual está separado por um obstaculo, um rio por exemplo. Traça-se sobre o terreno accessivel uma recta *A B*, chamada base, que se mede rigorosamente. Em seguida com o graphometro, medem-se os angulos *C A B* e *C B A*; traça-se no papel uma recta *a b* que representa n'uma escala conhecida a linha *A B*, (toma-se geralmente um millimetro por metro), e com o transferidor fazem-se em *a* e *b* os angulos *c a b* e *c b a* respectivamente iguaes a *C A B* e *C B A*.

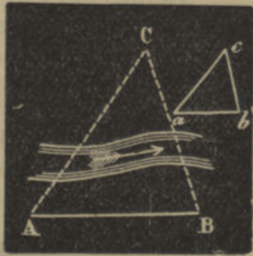


Fig. 126

Os triangulos *a b c* e *A B C* são semelhantes por serem equiangulos, e por tanto os lados homologos são proporcionaes. Basta pois avaliar na escala do desenho o lado *a c* para se obter a distancia procurada.

2.º Avaliar a distancia entre dois pontos inaccesiveis *C* e *D*, *fig. 127*.

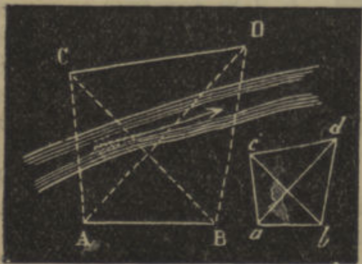


Fig. 127

Toma-se uma base qualquer *A B*, na parte mais plana e mais unida do terreno accessivel, e mede-se; e sobre um papel, traça-se uma recta *a b* n'uma escala conhecida, 1 millimetro por metro por exemplo. Depois, collocando o graphometro no ponto *A*, medem-se os angulos *C A B* e *D B A*; e passando o instrumento para *B*, medem-se os angulos *C B A* e *D B A*. No desenho, fazem-se então com o transferidor, os angulos *c a b* e *d a b*, assim como *c b a* e *d b a*, iguaes aos medidos no terreno, e igualmente dispostos na figura; a recta *c d*, que une as intersecções *c* e *d*, será, na figura traçada, a homologa da distancia *C D* dos pontos do terreno. Medindo então *c d*, quantos millimetros tiver, tantos serão os metros de *C D*.

3.º Medir a altura d'uma torre *A B*, *cujo pé é* accessivel, *fig. 128*.

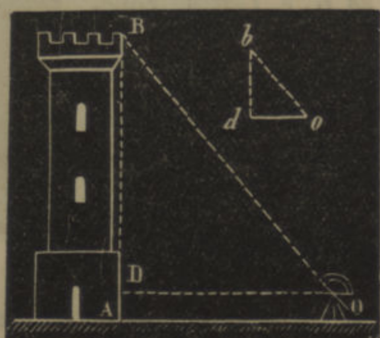


Fig. 128

Colloca-se a uma certa distancia do edificio, no ponto *O*, um graphometro pondo a linha de fé horizontal e o limbo n'um plano vertical passando pelo eixo da torre.

Feito isto, dirige-se a alidade movel para o vertice *B* e mede-se o angulo *B O D*.

Conhecido este angulo e a distancia *O D*, do triangulo rectangulo *O D B*, construe-se sobre o papel um triangulo *b o d* semelhante áquelle, no qual o lado *d b* homologo de *D B*, terá tantos millimetros quantos os metros de *D B*, se a escala empregada fôr de $\frac{1}{1000}$.

Finalmente, junta-se á distancia obtida a altura *D A*, que é igual á altura do instrumento se o terreno fôr horizontal.

4.° **Medir a altura d'uma torre, cujo pé é inaccessivel,** *fig. 129*.

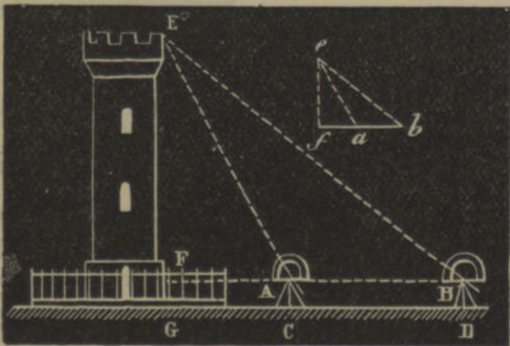


Fig. 129

Traça-se sobre um terreno sensivelmente horizontal uma recta *C D* cuja direcção vá passar pelo centro da base da torre; mede-se essa recta bem como os angulos *E B F* e *E A F*; construe-se n'uma certa escala um triangulo *e a b* semelhante a *E A B*; baixa-se do ponto *e* a perpendicular *e f* sobre *f b*; o comprimento d'esta perpendicular será, na escala do desenho, a altura *E F*, á qual se juntará a altura do instrumento.

5.° **Medir a altura d'uma montanha,** *fig. 130*.

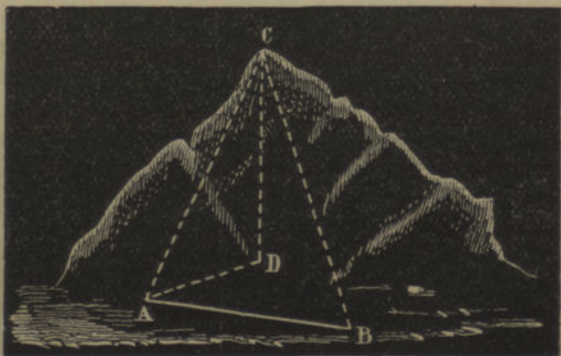


Fig. 130

Traça se ao pé da montanha uma recta *A B*, e mede-se. Com o graphometro, medem-se os angulos *C A B* e *C B A*, collocando-se o plano do limbo do instrumento no plano do triangulo *A C B*. Colloca-se em seguida o graphometro no ponto *A* com o limbo n'um plano vertical, passando pelo vertice *C* da montanha, e com a linha de fé em posição horizontal; mede-se então o angulo *C A D* dirigindo a alidade movel para o ponto *C*.

Construindo n'uma escala conhecida, um triangulo semelhante a

A B C, obter-se-ha o comprimento da recta *A C*. Um segundo triangulo semelhante a *C A D* dará o comprimento da vertical *C D*, isto é, a altura da montanha acima do ponto A.

Levantamento de plantas

143 — Levantar a planta d'um terreno é construir sobre o papel uma figura semelhante áquella que esse terreno representa.

No levantamento das plantas usa-se geralmente da cadeia metrica, e como este instrumento tem 10 metros de comprimento, dá-se-lhe o nome de **decametro**.

Quando o operador chega ao terreno para começar as operações, o seu primeiro cuidado é percorrel-o em toda a sua extensão, a fim de conhecer qual é a configuração que apresenta. Em seguida faz o **croquis** ou o esboço da parte que se pretende levantar, sem attender a uma grande precisão no valor dos angulos, e no comprimento dos lados. Depois, traçando linhas auxiliares **(diagonaes e perpendiculares)**, decompõe o polygono que comprehende a area do terreno que se propõe levantar, da maneira que julgar mais util ao trabalho a que vae dar começo.

O operador terá o cuidado de cravar balisas nos angulos, e sobre as linhas onde julgar mais conveniente estabelecer os alinhamentos.

Empregam-se differentes methodos segundo os instrumentos de que se póde dispôr.

144 — **Levantamento com o metro.** Seja *A B C D E*, *fig. 131*, o polygono traçado sobre o terreno. Determina-se sobre *A E*

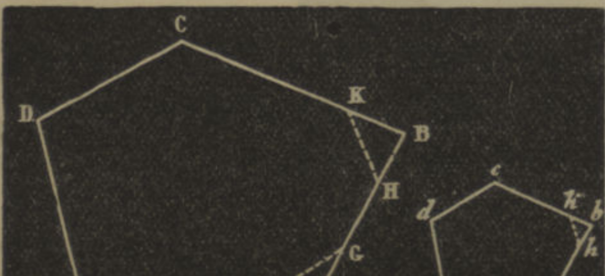


Fig. 131

um ponto *F* que esteja a uma distancia conhecida, 10 metros, por exemplo do ponto *A*; e, sobre o lado *A B*, um ponto *G* que esteja tambem a 10 metros de *A*; e mede-se a recta *F G*.

Depois de ter caminhado para *B* medindo *AB*, ahi se opéra como em *A*, e assim succesivamente até que se tenha voltado ao ponto *A*, depois de ter percorrido o perimetro do polygono.

Para construir a *planta* construe-se primeiramente um triangulo *a f g*, tendo por lados os comprimentos reduzidos á escala dos lados do triangulo *A F G*. Estes dois triangulos serão semelhantes por terem os tres lados proporcionaes, e por tanto serão iguaes os angulos *a* e *A*. Toma-se sobre *a g* o comprimento de *A B* reduzido e faz-se no ponto *b* um angulo igual ao angulo *B*, construindo um triangulo semelhante a *B H K*. Toma-se sobre o lado *b k* o comprimento de *B C* reduzido, etc. Os polygonos *a b c d e* e *A B C D E*, serão semelhantes por terem os angulos iguaes e os lados homologos proporcionaes.

145 — **Levantamento com o graphometro.** Quando se dispõe d'um graphometro, medem-se succesivamente todos os angulos do polygono e todos os lados com a cadeia metrica; depois faz-se a construcção do polygono como no caso precedente, com a differença de serem os angulos construidos com o transferidor, e não por meio de um triangulo cujos lados se conhecem. Este methodo é denominado de **caminhar e medir.**

146 — **Levantamento com o esquadro.** Seja *AB CDFG*, *fig. 132*, o polygono traçado sobre o terreno.

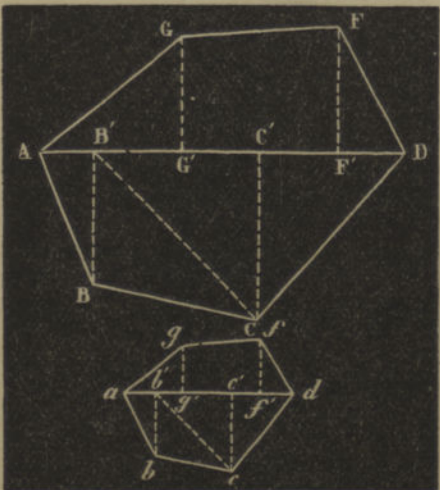


Fig. 132

Balisa-se uma base de operação, ordinariamente a maior diagonal. Baixam-se de todos os vertices *B*, *C*, *F*, *G*, sobre esta base perpendiculares *B B'*, *C C'*, *F F'* e *G G'* que se medem, bem como os comprimentos *AB'*, *AG'*, *AC'*, *AF'* e *AD*.

Para construir a planta, toma-se sobre uma linha indefinida *a d* e a partir do ponto *a* os comprimentos de *A B'*, *A G'*, *A C'*, *A F'* e *A D*, reduzidos á escala, e nos pontos obtidos *b'*, *c'*, *f'*, *g'*, levantam se perpendiculares iguaes aos comprimentos reduzidos das rectas *BB'*, *CC'*, *FF'*, *GG'*; unindo por meio de rectas os pontos *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, obter-se-ha um polygono semelhante ao polygono *A B C D F G*.

147 — **Levantamento com a prancheta.** A prancheta é

um dos instrumentos mais uteis e usados nos levantamentos em detalhe, offerecendo ao mesmo tempo uma grande promptidão na sua execução. E' uma simples mesa de trabalho semelhante a um estirador de desenho, perfeitamente desempenado e assentando por meio de um joelho de duas conchas sobre um tripé; esta disposição permitte a sua inclinação em todos os sentidos de fórma a poder ficar perfeitamente horizontal, posição em que é fixada por meio d'um parafuso de pressão. Cobre-se o estirador com uma folha de papel sobre a qual se desenha a planta do polygono que se deseja levantar.

A prancheta é sempre acompanhada d'uma alidade de pinulas, analoga á do graphometro, mas completamente livre e podendo ser collocada sobre a prancheta em todas as direcções possiveis.

Esta alidade serve de regua para traçar as rectas sobre o papel; para isso, é chanfrada n'um dos lados, de fórma que o bordo cavado fique situado no plano determinado pelos fios das pinulas. A recta traçada ao longo d'este bordo deve coincidir com a direcção do raio visual razando os fios das pinulas.

148 — **Declinatoria.** E' um instrumento de que se faz uso no levantamento das plantas, para orientar a prancheta.

A declinatoria consta de uma caixa rectangular *ABCD*, *fig. 133*, de 12 a 15 centimetros de comprimento por 6 a 8 de largo e 20 a 25 millimetros de altura, no meio da qual ha uma agulha magnetica em fórma de losango muito alongado, posta em equilibrio pelo centro sobre um fulcro de aço, collocado perpendicularmente ao plano inferior da caixa, de maneira tal que a agulha, tendo a propriedade de ter uma das suas pontas dirigida para o norte da terra, dá, mudando o instrumento de logar, direcções proximamente parallellas, todas as vezes que se opéra em sitios pouco distantes entre si. No fundo da caixa está traçada uma **linha de fé** que marca a direcção norte-sul magnetica do instrumento.

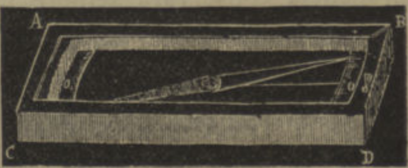


Fig. 133

149 — **Precaução a tomar no levantamento das plantas com a prancheta.** Antes de começar a levantar uma planta com a prancheta, é preciso haver o cuidado de estabelecel-a n'uma posição horizontal, o que se consegue por meio de tres parafusos proprios e empregando um nivel de bolha de ar A prancheta deve ser collocada de modo que se não desarranje durante todo o tempo que estiver em estação, havendo o cuidado de verificar de quando em quando se ella se conserva de **nivel** e **perfeitamente orientada.**

As estacas ou as balisas visadas deverão ser sempre cravadas bem verticalmente. Quando se passa de uma estação a outra é preciso ter cuidado de deixar a balisa no mesmo sitio, para poder servir depois para alguma observação ulterior.

Escolhe-se, em fim, para **base de operações**, dois pontos do terreno, dos quaes se possa descobrir alternativamente todos os vertices dos angulos da figura, medindo horizontalmente a distancia entre elles com o maior cuidado, porque o bom resultado do trabalho que se pretende levar a effeito depende do rigor d'esta operação.

150 — **Orientar a prancheta.** No levantamento das plantas com a prancheta a primeira operação a fazer-se, é oriental-a. Para isso, colloca-se na primeira estação, e dispõe-se de maneira tal, em relação ao terreno que queremos levantar, que se possa fazer o maximo trabalho possivel; depois colloca-se sobre ella a declinatoria, e move-se até que a agulha tome a direcção de N. S., (isto é norte sul), traçando pelo seu maior lado uma linha que representará o **meridiano magnetico.** Em qualquer outra estação que fizermos, pondo em contacto o referido lado com a linha traçada sobre o papel, gira-se horizontalmente com a prancheta até que a agulha tome a direcção N S, ficando assim orientada, (porque em uma estação qualquer todos os pontos situados sobre o plano corresponderão exactamente com os do terreno que se pretende levantar). D'este modo a prancheta conservará sempre uma posição parallela á primeira estação em que foi collocada.

151 — Para levantar com a prancheta o polygono *A B C D E*, *fig. 134*, opera-se do seguinte modo:

Colloca-se a prancheta em estação no ponto *A*, de fórma que o

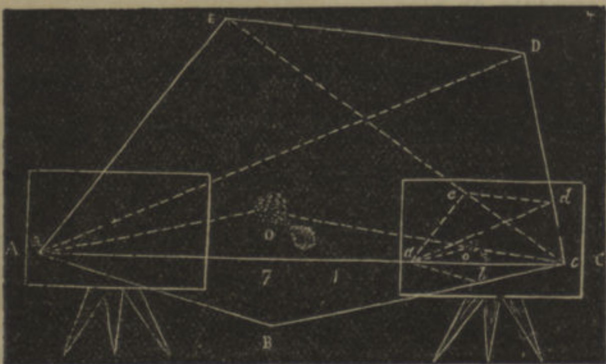


Fig. 134

ponto *a* do desenho se encontre sobre a vertical de *A*. Em *a* crava-se uma agulha, e dirige-se a alidade sobre o ponto *C*, a fim de se poder traçar uma linha na direcção AC; faz-se mover depois a alidade em volta da agulha cravada no ponto a, e traçam-se d'este ponto ao longo da alidade, rectas dirigidas para todos os vertices D, E, B, do polygono.

Querendo-se determinar ao mesmo tempo a posição de um objecto qualquer, por exemplo, uma arvore O, dirige-se a alidade de a para O e traça-se uma linha na direcção $a\ o$.

Tendo determinado todas estas linhas na primeira estação A, mede-se a distancia AC do terreno (isto é, a distancia que se adopta para a base da operação), achando, por exemplo, que esta distancia é de 7 decametros e 1 metro, toma-se este comprimento na escala adoptada e applica-se a partir de a para a direcção de C, obtendo-se assim o ponto c.

Feito isto transporta-se a prancheta para a segunda estação C, de modo que o ponto c do papel corresponda verticalmente acima do ponto correspondente C do terreno na direcção AC. Tendo obtido estas condições, dirige-se a alidade de c para todos os vertices, fazendo-a mover em volta da agulha que se crava perpendicularmente em c, e traçam-se rectas em todas aquellas direcções, ao longo da alidade; estas rectas vão encontrar as que já estavam traçadas no papel nos pontos d, e, b, o que são os vertices homologos dos do polygono $ABCDE$.

Quando exista no interior do polygono um ponto O, *fig. 135*, do qual se possa ver todos os seus vertices, colloca-se a prancheta n'esse ponto, de fórma que um ponto o marcado sobre o papel fique na vertical do ponto O, traçam-se com a alidade rectas dirigidas do ponto o para todos os vertices, e tomam-se sobre estas rectas a partir de o comprimentos $o\ a$, $o\ b$, $o\ c$, $o\ d$, $o\ f$ iguaes aos comprimentos reduzidos á escala, das rectas OA, OB, OC, OF que se medem com a cadeia.

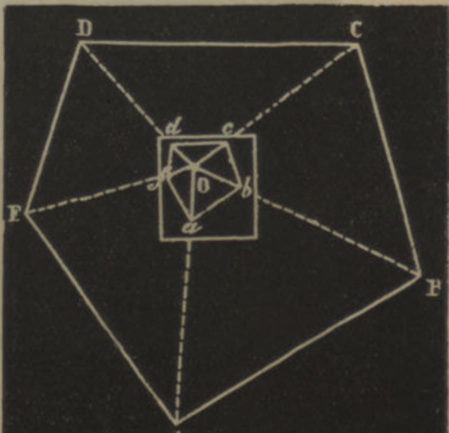


Fig. 135

Unindo por meio de rectas os pontos a, b, c, d, f, obtem-se um polygono $a\ b\ c\ d\ f$ semelhante a $ABCDF$.

A primeira fórma de executar o levantamento, denomina-se por intersecções e a segunda por uma só estação.

V

Relação numerica entre os tres lados de um triangulo rectangulo

152 — Em geometria chama-se quadrado de uma recta a segunda potencia do numero que exprime a medida d'essa recta.

O quadrado de uma recta representa, como se verá, a superficie do quadrado construido sobre essa recta.

153 — Entre a grandeza dos tres lados de qualquer triangulo rectangulo ha uma relação notavel, que se enuncia do seguinte modo: *N'um triangulo rectangulo o quadrado construido sobre a hypothenusa é igual á somma dos quadrados construidos sobre os cathetos.* Assim, no triangulo rectangulo ABC, *fig. 136*, será: [1]

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

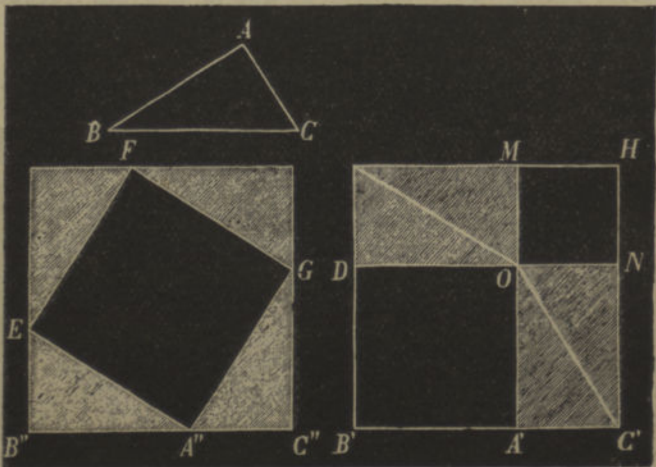


Fig. 136

Para demonstrar esta verdade construam-se dois quadrados, tendo por lado a somma dos dois $(AB + AC)$; n'um d'elles levantem-se perpendiculares nos pontos A' e D e no outro unam-se os pontos A'', E, F e G, que em cada lado estabelecem a divisão dos comprimentos dos dois cathetos. As partes tracejadas são equivalentes em am-

[1] A notação $\overline{BC}^2$ designa o *quadrado da recta BC*.

bos os quadrados, por representarem quatro triangulos iguaes a ABC; e, como são iguaes os quadrados totaes, o quadrado $A'' E F G$ será equivalente á somma dos dois quadrados $A' B' D O$ e $O N H M$. Ora o quadrado $A'' E F G$ tem por lado a hypothenusa $B C$ do triangulo considerado, o quadrado $A' B' D O$ tem por lado o catheto maior AB e o quadrado $O N H M$ tem por lado o catheto menor $A C$; portanto o quadrado construido sobre a hypothenusa é equivalente á somma dos quadrados construidos sobre os cathetos, o que demonstra a proposição.

154 — Este principio permitte calcular o valor de um lado de um triangulo rectangulo conhecidos os outros dois, porque d'elle se deduz:

1.° *A hypothenusa de um triangulo rectangulo é igual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos dois cathetos.*

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$$

2.° *Um catheto de um triangulo rectangulo é igual á raiz quadrada do quadrado da hypothenusa. menos o quadrado do outro catheto.*

$$AB = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}$$

$$AC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}$$

155 — Com tres rectas que sejam proporcionaes aos numeros 3, 4 e 5, póde formar-se um triangulo rectangulo, por ser $5^2 = 4^2 + 3^2$, ou $25 = 16 + 9$.

Eis em que se funda o cordel esquadro *(55)*, empregado no traçado de perpendiculares sobre o terreno.

Problemas

I. *Applicou se uma escada a uma parede, de modo que o pé da escada ficou $4^m,2$ distante do pé da parede. Que comprimento precisa ter a escada para chegar á altura de $5^m,6$?*

Como a incognita do problema é a hypothenusa de um triangulo rectangulo, cujos cathetos têem respectivamente $4^m,2$ e $5^m,6$, teremos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4{,}2^2 + 5{,}6^2} \\ &= \sqrt{17{,}64 + 31{,}36} \\ &= \sqrt{49} \\ &= 7^m \end{aligned}$$

II. *A que altura chega uma escada de $9^m,5$, cujo pé ficou $5^m,7$ distante do pé da parede a que foi applicada?*

Como a incognita do problema é um dos cathetos de um triangulo rectangulo, cuja hypothenusa tem $9^m,5$ e o outro catheto $5^m,7$ será:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{9{,}5^2 - 5{,}7^2} \\ &= \sqrt{90{,}25 - 32{,}49} \\ &= \sqrt{57{,}76} \\ &= 7^m{,}6 \end{aligned}$$

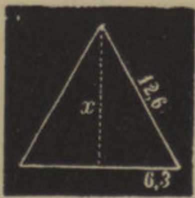


Fig. 137

III. *Qual é a altura de um triangulo equilatero de $12^m,6$ de lado?*

Pela *fig.* 137 se vê que a incognita é um catheto de um triangulo rectangulo, em que os outros dois lados são conhecidos, e portanto será:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{12{,}6^2 - 6{,}3^2} \\ &= \sqrt{119{,}07} \\ &= 10^m{,}91 \end{aligned}$$

IV. *Qual é a diagonal do quadrado de $4^m,8$ de lado?*

A simples inspecção da *fig. 138* mostra que é:

$$x = \sqrt{4{,}8^2 + 4{,}8^2} = 6^m{,}78$$

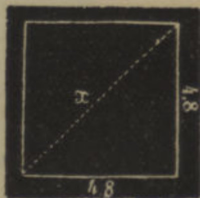


Fig. 138

Se representassemos a diagonal por d e o lado por l, deduziriamos a formula geral:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{l^2 + l^2} \\ &= \sqrt{2 \times l^2} \\ &= l \times \sqrt{2} \end{aligned}$$

o que mostra que a diagonal de qualquer quadrado se obtem immediatamente multiplicando o lado por $\sqrt{2}$, isto é por 1,414.

V. *Qual é o lado do quadrado cuja diagonal tem 10 metros?*

Pelo principio do n.º *153* temos que:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 10^2 \\ x^2 &= 50 \\ x &= \sqrt{50} = 7{,}07 \end{aligned}$$

Fig. 139

VI. *O perimetro de um triangulo isosceles tem 29 metros, e a base $8^m,5$. Qual é a altura?*

Tendo o perimetro 29 metros e a base $8^m,5$ os dois lados obliquos terão ao todo $20^m,5$ ou $10^m,25$ cada um. A questão reduz-se pois, *fig. 139*, a calcular um catheto de um triangulo rectangulo, cuja hypothenusa tem $10^m,25$ e o outro catheto $4^m,25$.

$$x = \sqrt{10,25^2 - 4,25^2}$$
$$= \sqrt{87}$$
$$= 9^m,32$$

VI

Polygonos inscriptos e circumscriptos

156 — Diz-se que um polygono está **inscripto n'um circulo**, quando tem todos os vertices na circumferencia d'esse circulo. N'esse caso diz-se reciprocamente, que, o circulo está *circumscripto ao polygono*, *fig. 140*.

Polygono **circumscripto a um circulo** é o que tem todos

Fig. 140

Fig. 141

os lados tangentes á circumferencia. N'este caso diz-se que o circulo está *inscripto no polygono*, *fig. 141*.

157 — E' claro que, para um polygono ser inscriptivel n'um circulo, é necessario que haja no polygono um ponto *O* igualmente afastado de todos os vertices; e para que seja circumscriptivel, é preciso que haja n'elle um ponto *O'* igualmente affastado de todos os lados.

Só o triangulo é que gosa da propriedade de poder ser sempre inscripto e circumscripto n'um circulo, *fig. 142*. Os outros polygonos não regulares pódem, segundo os casos, ser ou não inscriptiveis e circumscriptiveis; assim, por exemplo, o rectangulo é inscriptivel mas

Fig. 142

Fig. 143

não circumscriptivel, e o losango é circumscriptivel mas não inscriptivel.

158 — Todos os polygonos regulares pódem ser inscriptos e circumscriptos n'um circulo, *fig. 143*. O raio do circulo inscripto é o raio do polygono. N'este caso o mesmo ponto *(o centro do polygono)* é centro do circulo inscripto e do circumscripto.

159 —Em muitos dos polygonos regulares ha uma relação entre o lado e o raio, de modo que sendo conhecido o raio se póde calcular o lado e reciprocamente.

Essas relações são:

No triangulo [1] .... $l_3 = r \times \sqrt{3}$

No quadrado............... $l_4 = r \times \sqrt{2}$

No pentagono.............. $l_5 = \frac{r}{2} \times \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

No hexagono............... $l_6 = r$

No octogono .... $l_8 = r \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

No decagono............... $l_{10} = \frac{r}{2} \times \sqrt{5} - 1$

No dodecagono..... .... $l_{12} = r \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

[1] l_3, l_4, l_5... (que se lêem *l indece 3*, *l indece 4*, *l indece 5*,...) designam o lado do triangulo, do quadrado, do pentagono, etc.

Estas formulas servem para se calcular os lados dos polygonos inscriptos n'um circulo de raio conhecido. Se quizessemos os lados dos polygonos circumscriptos, teriamos de calcular primeiro os lados dos polygonos inscriptos e substituir depois esse valor e o do raio na seguinte formula, que dá o lado dos polygonos circumscriptos:

$$x = \frac{2 \times r \times l}{\sqrt{4 \times r^2 - l^2}}$$

Problemas

I. *Qual é o lado do decagono regular inscripto n'um circulo de $4^m,5$ de raio?*

$$l_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$= \frac{4^m,5}{2} \times (2,23 - 1)$$

$$= 2^m,25 \times 1,23$$

$$= 2^m,7775$$

II. *Qual é o raio de um pentagono regular que tem de lado $2^m,4$?*
Da formula do lado do pentagono tira-se:

$$r = \frac{2 \times l}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

e substituindo:

$$r = \frac{2 \times 2,4}{2,35} = 2^m,042$$

III. *Qual é o apothema de um hexagono regular inscripto n'um circulo de 12 metros de raio?*

Como o apothema é catheto de um triangulo rectangulo em que a hypothenusa é o raio e o outro catheto é o semi-lado, será, visto o lado do hexagono ser igual ao raio: [1]

---

[1] Poder-se-ia determinar a grandeza do apothema, com uma sufficiente approximação, por um processo graphico. Bastaria para isso construir um hexagono regular, cujos lados representassem 12 metros n'uma escala escolhida, traçar o apothema,

$$x = \sqrt{12^2 - 6^2}$$
$$= \sqrt{108}$$
$$= 10^m,39$$

IV. *Qual é o apothema de um octogono regular inscripto n'um circulo de $4^m,6$ de raio?*

Calculo do lado

$$l_8 = r \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$
$$= 4^m,6 \times 0,86$$
$$= 3^m,956$$

Calculo do apothema

$$x = \sqrt{4,6^2 - 1,978^2}$$
$$= \sqrt{17,247516}$$
$$= 4^m,153$$

V. *Qual é o lado do pentagono circumscripto a um circulo de 8 metros de raio?*

Calculo do lado do pentagono inscripto

$$l_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$
$$= 4 \times 2,35$$
$$= 9^m,4$$

---

medil-o com um duplo-decimetro e, por ultimo, vêr a quantos metros corresponde essa medida. Assim, se tivessemos escolhido a escala $\frac{1}{100}$, na qual cada metro é representado por um centimetro, medindo o apothema da figura encontrariamos $0^m,104$, o que mostraria que elle tem approximadamente 10,4.

Póde proceder-se analogamente nos outros problemas, devendo, porém, notar-se que d'este modo, por causa dos erros provenientes dos instrumentos e da execução, nunca se póde obter o rigor que dá o calculo, e que a approximação será tanto maior quanto maior fôr a escala adoptada, por isso que nas escalas pequenas um erro insignificante na figura se traduz n'um grande erro no problema.

Calculo do lado do pentagono circumscripto

$$x = \frac{2 \times r \times l}{\sqrt{4 \times r^2 - l^2}}$$

$$= \frac{2 \times 8 \times 9{,}4}{\sqrt{4 \times 8^2 - 9{,}4^2}}$$

$$= \frac{150{,}4}{\sqrt{167{,}64}}$$

$$= 11^m{,}6$$

VII

Areas

160—Diz-se **area** de uma figura a medida da sua superficie. Esta medida podia fazer-se escolhendo para unidade uma superficie bem conhecida, geralmente o quadrado que tem por lado a unidade linear, e vendo directamente quantas vezes essa unidade se contém na superficie a medir; a geometria, porém, ensina a avaliar as areas pela medição de determinadas linhas das figuras, o que é notavelmente mais simples.

161 — *A area de um rectangulo é expressa pelo producto da base pela altura* (dois lados contiguos).

Esta expressão quer dizer que o rectangulo contém tantas vezes a unidade de superficie, quantas as unidades que tem o producto de dois numeros que representam a base e a altura, na hypothese de que a unidade de superficie é o quadrado construido sobre a unidade linear, com que foram medidas a base e a altura. Assim, se o rectangulo tivesse de base 5 metros e de altura 3 metros teria de superficie 15 metros quadrados.

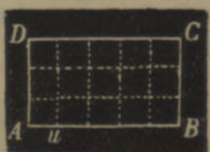


Fig. 144

E com effeito, se a unidade linear *A u*, *fig. 144*, se contem 5 vezes na base do rectangulo e 3 vezes na altura, tirando perpendiculares pelos pontos de divisão o rectangulo fica dividido em 3 fileiras, tendo cada uma 5 quadrados construidos sobre uma unidade linear, isto é, contém 15 vezes ou (3×5) vezes, a unidade de superficie.

Representando por S a superficie do rectangulo, por B a base e por H a altura, a expressão da area do rectangulo acha-se na formula seguinte:

$$S = B \times H$$

Problemas

I *Qual é a superficie d'um terreno de 17 metros de comprimento e $6^m,8$ de largura?*

$$S = 17^m \times 6^m,8 = 115^{mq},6$$

II. *Uma cavallariça tem $4^m,6$ de largura e $33^{mq},12$ de superficie. Qual é o comprimento?*

Como dividindo o numero que exprime a superficie do rectangulo pelo que exprime uma das suas dimensões se deve encontrar para quociente a outra dimensão, teremos:

$$B = \frac{33^{mq},12}{4^m,6} = 7^m,2$$

162 — *A area de um quadrado é expressa pela segunda potencia do seu lado*, porque o quadrado é um rectangulo que tem a base e a altura iguaes ao lado.

Representando por S a superficie do quadrado e por L um dos seus lados, a area do quadrado será expressa pela formula seguinte:

$$S = L^2$$

Problemas

I. *Qual é a area de um quadrado de $3^m,2$ de lado?*

$$S = 3^m,2^2 = 11^{mq},24$$

II. *Qual é o lado de um quadrado que tem de area $12^{mq},25$?*

Se o quadrado do lado produz a area, a raiz quadrada da area produz o lado, e portanto sera:

$$L = \sqrt{12^{mq},20} = 3^m,5$$

163 — *A area de um parallelogrammo é expressa pelo producto da base pela altura.* Assim, a area do parallelogrammo $ABCD$, *fig. 145*, é expressa por $DC \times AE$.

Na verdade, comparando as *figs. 145* e *146* vê-se que, se no parallelogrammo $ABCD$ cortarmos o triangulo AED e o collocarmos

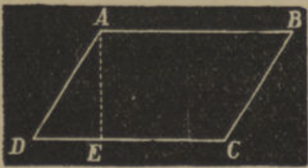


Fig. 145

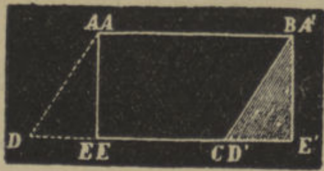


Fig. 146

adjacentemente ao lado BC, resultará o rectangulo equivalente $AA'EE'$, que tem a base e a altura respectivamente iguaes ás do parallelogrammo. A area do parallelogrammo é portanto expressa pela formula $S = B \times H$ sendo S a superficie do parallelogrammo, B a base e H a altura.

164 — *A area de um triangulo é expressa por metade do producto da base pela altura.*

As *figs. 147* e *148* mostram que o triangulo ABC é equiva-

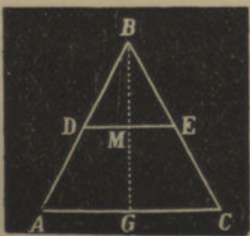


Fig. 147

Fig 148

lente ao rectangulo $A'\,B'\,M''\,M'$ que tem a mesma base que o triangulo, mas uma altura *(MG)* que é metade da do triangulo.

A formula da area do triangulo é pois a seguinte:

$$S = \frac{B}{2} \times H$$

Problemas

Qual é a area de um triangulo equilatero de $12^m,6$ de lado?

A altura, calculada como foi ensinado no problema III de pag. 74, seria $10^m,91$ e portanto a area pedida será:

$$S = \frac{12,6 \times 10^m,91}{2} = 6^m,3 \times 10^m,91 = 68^{mq},733$$

165 — Sendo conhecidos os tres lados de um triangulo póde determinar-se-lhe a area por meio da formula

$$S = \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}$$

na qual p representa metade do perimetro do triangulo, e a, b e c os tres lados.

Problemas

Qual é a area do triangulo, cujos lados têem 9 metros, 7 metros e 6 metros?

$$S = \sqrt{11 \times (11-9) \times (11-7) \times (11-6)}$$
$$= \sqrt{11 \times 2 \times 4 \times 5}$$
$$= \sqrt{880}$$
$$= 29^{mq},66$$

166 — *A area de um trapesio é expressa pela semi-somma das bases multiplicada pela altura.* Assim, a area do trapesio $ABCD$ é, *fig. 149*, $\frac{AD + BC}{2} \times EF$.

A inspecção da *fig. 150*, na qual se deslocaram convenientemen-

Fig. 149

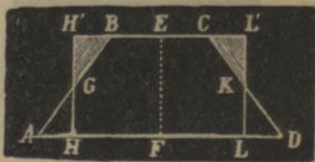


Fig. 150

te os triangulos AGH e KLD, mostra que o trapesio $ABCD$ é equivalente ao rectangulo $HH'L'L$, que tem a mesma altura que o trapesio e cuja base é igual á semi-somma das duas bases do trapesio.

A expressão da area do trapesio é pois a seguinte:

$$S = \frac{B + b}{2} \times H$$

Problemas

I. *O perimetro de um trapesio isosceles é 48 metros e as bases têem $6^m,6$ e $4^m,2$. Qual é a area?*

Como a somma das duas bases é $10^m,8$, a somma dos dois lados obliquos será $7^m,2$, isto é, cada um terá $3^m,6$. Determinar-se-ha pois a altura do trapesio, calculando o catheto *AB*, *fig. 151*, do triangulo rectangulo *A B C*, no qual a hypothenusa é de $3^m,6$ e o outro catheto *BC* de $1^m,2$, metade da differença entre $6^m,6$ e $4^m,2$ logo

Fig. 151

$$H = \sqrt{3{,}6^2 - 1{,}2^2} = 3^m{,}39$$

Portanto a area pedida será:

$$S = \frac{4^m{,}2 + 6^m{,}6}{2} \times 3^m{,}39 = 18^{mq}{,}306$$

II. *A area d'um trapesio é $11^{mq},25$ e as bases têem $3^m,4$ e $5^m,6$. Qual é a altura?*

Da formula $S = \frac{B+b}{2} \times H$ tira-se $H = \frac{2\,S}{B+b}$ e portanto será:

$$H = \frac{2 \times 11^{mq}{,}25}{3^m{,}4 + 5^m{,}6} = 2^m{,}5$$

Fig. 152

166 — *A area d'um polygono regular obtem-se multiplicando metade do perimetro pelo apothema.*

Comparando as *figs 152*, *153* e *154* vê-se que o polygono *A B C D E* é equivalente ao rectangulo *A P A' P'* cuja base *A P* é igual á metade do perimetro do polygono, e cuja altura *A P' = O M* é o seu apothema.

Representando por *S* a superficie do polygono, por *p* o perimetro e por *a* o apothema, teremos para a expressão da area:

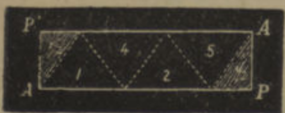


Fig. 153

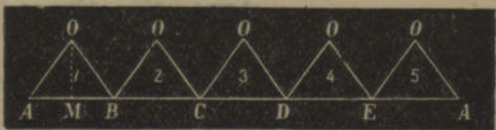


Fig. 154

$$S = \frac{1}{2} p \times a$$

Problemas

I. *Calcular a area d'um hexagono regular de 12 metros de lado.*

Sendo o lado do hexagono regular 12 metros, o perimetro será 72 metros, e portanto, para obter a area pedida basta multiplicar 36 metros pelo apothema.

O apothema póde facilmente ser calculado, pois que sendo no hexagono regular o raio igual ao lado, será $O\,M$ (*fig. 152*), o catheto d'um triangulo rectangulo, cuja hypothenusa é $A\,O = 12$ metros e o outro catheto $A\,M = 6$ metros; será pois:

$$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10^m,39$$

E portanto a area pedida será

$$S = 36^m \times 10^m,39 = 374^{mq},04$$

II. *Qual é a area d'um pentagono regular de 20 metros de lado?*

Como é dado o lado, e portanto o perimetro, é preciso calcular o apothema, para depois conhecer a area. Sendo, porém, preciso conhecer o raio e o lado para calcular o apothema será pelo calculo do raio que deveremos começar.

O raio do pentagono obtem-se recorrendo á formula que nos dá o lado d'este polygono expresso no raio do circulo circumscripto (*159*), da qual se tira

$$r = \frac{2 \times l}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{2 \times 20}{2,35} = 17^m$$

Calculo do apothema

$$a = \sqrt{17^2 - 10^2} = \sqrt{189} = 13^m,7$$

Calculo da area

$$S = \frac{100^m}{2} \times 13^m,7 = 685 \text{ mq}$$

167 — *A area de um circulo avalia-se multiplicando metade da circumferencia pelo raio.*

Mostra-se intuitivamente a veracidade d'esta proposição considerando as *figs. 155* e *156*, pelas quaes se vê que a area do circulo é equivalente á de um rectangulo, tendo por base metade da circumferencia rectificada e por altura o raio.

Fig. 155

Fig. 156

168—Como a circumferencia póde ser representada por $2\pi r$ (95) o circulo sel-o-ha por $c = \frac{2\pi r}{2} \times r$ ou por πr^2, formula que dá com maior facilidade a area do circulo, conhecido o raio, e da qual se deduz esta outra $r = \sqrt{\frac{c}{\pi}}$, que dá o raio conhecida a area. Para obter a area de um circulo basta, portanto, *multiplicar por π o quadrado do raio.*

Problemas

I. *Qual a area de um circulo de 5 metros de raio?*

$$c = 25^{mq} \times 3{,}14 = 78^{mq}{,}15$$

II. *Qual é o raio de um circulo que tem de area 120 metros quadrados?*

$$r = \sqrt{\frac{120}{3{,}14}} = \sqrt{38{,}2165} = 6^{m}{,}18$$

III. *Calcular a area de uma coróa circular, (fig. 64), sendo os raios dos dois circulos 10 metros e 5 metros.* Como:

	area do circulo maior........................	314mq
	area do circulo menor........................	78,5
será	area da corôa (differença)............	235,5

169—*A area de um sector circular avalia-se multiplicando metade do producto do arco rectificado pelo raio.*

E' uma consequencia da proposição precedente, visto que o sector é a porção do circulo comprehendida entre dois raios.

A expressão da sua superficie será representada pela formula:

$$S = \frac{R \times a}{2}$$

sendo S a superficie do sector R o raio, e a o comprimento do arco.

Se o arco é dado em graus, como geralmente acontece, podemos dispensar a rectificação do arco e empregar a formula seguinte:

$$S = \pi R^2 \frac{n^\circ}{360^\circ}$$

isto é, a *area de um sector* é igual ao producto da area do circulo, pela razão do numero de graus do arco correspondente, para 360°.

Problemas

I. *Qual é a area de um sector de 44° n'um circulo de 8 metros de raio?*

O comprimento do arco, calculado como foi ensinado no problema do n.° 96, é de $6^m,14$, e portanto será:

$$S = \frac{6^m,14}{2} \times 8 = 24^{mq},56$$

II. *Calcular a area de um sector de 60° no circulo de raio 10 metros.*

$$S = 3,14 \times 100 \times \frac{1}{6} = 52^{mq},36$$

170 — Para avaliar a area de um segmento circular $A\ C\ B$ seria preciso tomar a differença entre o sector correspondente ao seu arco $AC\ BO$ e o triangulo formado pela corda e pelos raios extremos do sector $O\ B\ A$, *fig. 157*.

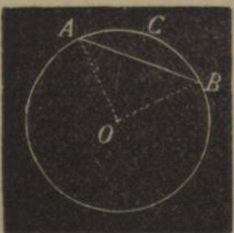


Fig. 157

Problema

Calcular a area de um segmento de 90° n'um circulo de 12 metros de raio.

Como o arco $A\ C\ B$, por ser um quadrante, tem

$$\frac{2 \times 3,14 \times 12^m}{4}$$

ou $18^m,84$, a area do sector será:

$$s = 9^m,42 \times 12^m = 113^{mq},04$$

Ora, no caso actual, o triangulo $A\ O\ B$, sendo rectangulo e tendo por cathetos dois raios do circulo, terá por area

$$t = \frac{12^m}{2} \times 12^m = 72^{mq}$$

Portanto, a area do segmento será:

$$S = 113^{mq},04 - 72^{mq} = 41^{mq},04$$

171—Para avaliar a area de um polygono irregular, tira-se no sentido da maior dimensão uma diagonal, a que se dá o nome de *directriz*, e baixando sobre ella perpendiculares de todos os vertices, decompõe-se o polygono em triangulos rectangulos e trapezios rectangulos, cujas areas se calculam depois de haver medido essas perpendiculares e as distancias entre os seus pés.

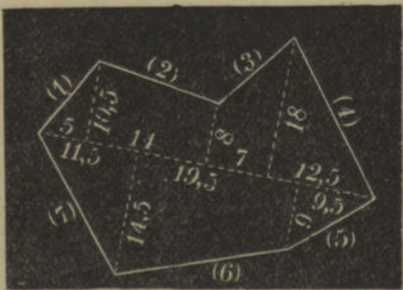


Fig 158

No caso considerado na *fig. 158*, seria:

(1) *Triangulo*.................. $5^m \times \frac{10^m,5}{2} = 26^{mq},25$

(2) *Trapesio*.................. $14^m \times \frac{10^m,5 + 8^m}{2} = 129^{mq},5$

(3) *Trapesio*.................. $7^m \times \frac{8^m + 18^m}{2} = 91^{mq}$

(4) *Triangulo*.................. $12^m,5 \times \frac{18^m}{2} = 112^{mq},5$

(5) *Triangulo*.................. $9^m,5 \times \frac{9^m}{2} = 42^{mq},75$

(6) *Trapesio*.................. $19^m,5 \times \frac{9^m + 14.5}{2} = 229^{mq},375$

(7) *Triangulo*.................. $11^m,5 \times \frac{14^m,5}{2} = 83^{mq},375$

Area total........ $= 614^{mq},5$

172—Avalia-se approximadamente a area de uma figura de contorno curvilineo, considerando-a como um polygono de lados muito pequenos, e decompondo depois este em triangulos e trapesios. Se o contorno fôr óra concavo, óra convexo, convem dispôr os lados do polygono de modo que os erros d'isso resultantes, sendo óra por excesso, óra por defeito, se neutralizem quanto possivel.

EXERCICIOS

1.º — Achar os complementos dos seguintes angulos: 38°; 47° 25′; 65° 24′ 43″; 27° 35′ 17″,43; 68° 44′ 37,053; 15″ 0′ 0″,25.

2.º — Achar os supplementos dos seguintes angulos: 58°; 125°; 57° 23′; 76° 15′34″; 108° 25′ 15″,75; 18° 0′ 0″,024.

3.º — Achar a razão numerica dos seguintes angulos: 47° 25′ e 53° 37′; 25° 17′ 36″ e 71° 24′; 23° 32′ 0″,76 e 54° 0′ 18″,53.

4.º — Calcular o valor do arco igual a 5 vezes 45° 23′ 36″ $\frac{2}{5}$.

5.º — Calcular a metade e a quarta parte do angulo de 125° 43′.

6.º — Que partes são da circumferencia os arcos seguintes: 120°; 72°; 60°; 45°; 36°; 30°; 18°; 9°.

7.º — Converter em grados, os seguintes angulos: 38° 23′ 34″,18; 85° 37′; 54° 25′ 33″,74.

8.º — Converter em graus, minutos e segundos sexagesimaes o valor de um angulo de 75 gradus; o de um angulo de 25gr.,6324; o de um angulo de 0gr.,3614.

9.º — Se os dois angulos de um triangulo valem 128°,,47′, quanto vale o terceiro?

10.º — Quantos graus vale cada um dos angulos de um triangulo equilatero?

11.º — Calcular a razão entre o arco de 35°54′45″ e o quadrante.

12.º — Um dos angulos de um triangulo rectangulo vale $\frac{3}{4}$ de um angulo recto, qual é o valor do outro?

13.º — Um dos angulos agudos de um triangulo rectangulo vale 27°43′18″,3, qual é o valor do outro?

14.º — O angulo do vertice de um triangulo isosceles vale $\frac{5}{6}$ do angulo recto, qual é o valor de cada um dos angulos da base?

15.º — Dois lados *A B* e *A C* de um triangulo *A B C* teem respectivamente 85ᵐ e 54ᵐ; por um ponto *D* situado sobre *AB*, e distanciado do vertice 26ᵐ,30, tire-se uma paralella ao 3.º lado *BC*; calcular os segmentos que ella determina sobre o lado *A C*.

16.º — Os raios de dois circulos concentricos teem respectivamente 20ᵐ e 25ᵐ; calcular o comprimento d'uma corda do circulo maior tangente ao menor.

17.º — Qual é o comprimento d'um arco de 35°40′ n'uma circumferencia de 10ᵐ de raio?

18.º — Qual é o raio do circulo no qual um arco de 43°50′ tem 25ᵐ de comprimento?

19.º — Um arco de circulo tem 32ᵐ de comprimento; o seu raio é de 9ᵐ. Qual é o valor d'este arco em graus?

20.º — Qual é o arco cujo comprimento é igual ao raio?

21.º — Calcular a area de um sector de 40°,35' n'um circulo de 12ᵐ,30 de raio.

22.º — N'um circulo de 10^m de raio, um sector tem uma superficie de 125^{mq}; qual é o numero de graus do seu arco?

23.º — Qual é o raio d'um circulo no qual um sector de 25º tem uma superficie de 150^{mq}?

24.º — Cada um dos angulos da base de um triangulo isosceles vale $\frac{3}{4}$ do angulo recto, qual é o valor do angulo do vertice?

25.º — Um dos angulos agudos d'um triangulo rectangulo vale $\frac{2}{5}$ de um angulo recto; qual é o valor do outro?

26.º — Um dos angulos agudos de um triangulo rectangulo vale 28º 35′ 47″,83; qual é o valor do outro?

27.º — Cada um dos angulos da base d'um triangulo isosceles vale 25º 12′ 38″,24; qual é o valor de angulo do vertice?

28.º — O angulo do vertice de um triangulo isosceles vale 50º; qual é o valor de cada um dos angulos da base?

29.º — Calcular a hypothenusa d'um triangulo rectangulo, cujos cathetos valem respectivamente $4^m,50$ e $6^m,29$.

30.º — Calcular um dos cathetos de um triangulo rectangulo, cuja hypothenusa vale $14^m,5$ e o outro catheto $8^m,30$.

31.º — Dado um circulo de raio $6^m,30$ e um ponto que dista do centro $8^m,40$, calcular o comprimento da tangente ao circulo tirada pelo ponto dado.

32.º — Calcular a altura d'um triangulo isosceles, cujo perimetro é igual a $14^m,50$ e a base $4^m,60$.

33.º — Calcular a altura d'um triangulo equilatero, cujo lado vale $8^m,50$.

34.º — Calcular, com um erro inferior a um millimetro, a diagonal de um quadrado cujo lado vale $8^m,625$.

35.º — Calcular, com um erro inferior a um millimetro, o lado de um quadrado, cuja diagonal vale $14^m,523$.

36.º — Calcular o angulo interno de um polygono equiangulo de 18 lados.

37.º — Calcular a somma dos angulos de um polygono de 13 lados, de 19 lados e de 37 lados.

38.º — A somma de todos os angulos internos de um polygono vale 38 angulos rectos, calcular o numero de lados.

39.º — Calcular o angulo interno dos seguintes polygonos regulares: de 17 lados, de 15 lados, de 18 lados de 20 lados e de 25 lados.

40.º — Calcular o angulo no centro dos seguintes polygonos regulares: de 6 lados, de 10 lados, de 12 lados, de 15 lados, de 20 lados, de 24 lados e de 25 lados.

41.º — Calcular o lado do quadrado inscripto no circulo do raio $5^m,30$.

42.º — Calcular o diagonal do quadrado cujo lado vale $14^m,20$.

43.º — Calcular o lado do quadrado cuja diagonal vale $68^m,30$.

44.º — Calcular o lado do triangulo equilatero inscripto no circulo de raio $26^m,32$.

45.º — Calcular a altura d'um triangulo equilatero cujo lado vale $14^m,18$.

46.º — Calcular o apothema do hexagono regular inscripto no circulo de raio $6^m,50$.

47.º — Calcular o comprimento da circumferencia de raio $25^m,30$.

48.º — Calcular o raio da circumferencia, que tem de comprimento $535^m,86$.

49.º — Calcular o raio da circumferencia, que tem de comprimento um metro.

50.º — Calcular o comprimento do arco de 65º no circulo de raio 8 metros.

51.º — Calcular o comprimento do arco de 38º 25′ no circulo de raio um metro.

52.º — Calcular o numero de graus do arco que tem de comprimento $25^m,30$ no circulo de raio $18^m,50$.

53.º — Calcular o comprimento do arco de 1º no circulo de raio 100 metros.

54.º — Calcular o numero de graus do arco, cujo comprimento é 1 metro, no circulo de raio 2 metros.

55.º — Calcular o comprimento de um arco de 86º 28′ 36″,40 no circulo de raio $4^m,20$.

56.º — O diametro de uma moeda de quinhentos réis tem 3 centimetros, calcular o comprimento da circumferencia.

57.º — Calcular a area de um rectangulo que tem um lado igual a $8^m,50$ e a diagonal igual a $12^m,20$

58.º — Um quadrado tem de area 620 ares e 38 centiares; calcular o valor do lado com um erro inferior a $0^m,1$.

59.º — Calcular a area de um quadrado cuja diagonal vale $5^m,18$.

60.º — Calcular o lado do quadrado cuja area é $0^{mq},9374$.

61.º — Calcular a area de um triangulo equilatero cujo lado vale $7^m,50$.

62.º — Calcular o raio do circulo circumscripto ao quadrado cujo lado vale $30^m,50$.

63.º — Calcular o lado do octogono regular inscripto no circulo de raio $6^m,30$.

64.º — Calcular o raio do circulo circumscripto ao octogono regular cujo lado vale $16^m,58$.

65.º — Calcular o lado do triangulo equilatero inscripto no circulo de raio $18^m,26$.

66.º — Calcular o apothema do decagono regular inscripto no circulo de raio $6^m,24$.

67.º — Calcular o lado do dodecagono regular inscripto no circulo de raio $15^m,34$.

68.º — Quanto se deverá dispender, á razão de 200 réis o metro quadrado, com a pintura das quatro paredes e o tecto de uma sala rectangular, que tem $6^m,15$ de comprimento, $3^m,75$ de largura e $2^m,90$ de altura?

69.º — Quanto será preciso de tapete, tendo $1^m,20$ de largo, para atapetar um quarto rectangular, cujas dimensões são $4^m,50$ e $5^m,40$?

70.º — Pede-se a area de um triangulo, cujos lados sejam 16^m, 12^m e 8^m.

71.º — Qual é a superficie de uma chapa de ferro, de fórma rectangular, tendo um dos lados $16^{dec},518$, e o outro $6^{dec},125$?

72.º — Pretende-se cobrir uma superficie de 25 metros quadrados com chapas de ferro quadradas, tendo de lado $0^m,8$. Quantas serão necessarias?

73.º — Qual será a superficie do embolo do cylindro de uma machina a vapor, cujo diametro é de 56 centimetros?

74.º — Qual é o valor do lado do quadrado igual em area a um circulo cujo diametro tem $13^m,6$?

75.º — Qual é o valor do lado do quadrado igual em area a um circulo cuja circumferencia tem $56^m,8$?

76.º — Sendo o diametro de um circulo igual a 16 centimetros, qual é o valor do lado do quadrado inscripto?

77.º — Calcular a area de um parallelogrammo, que tem 25^m de base e 17^m d'altura.

78.º — Achar a superficie de um trapezio, cujas bases têem 37^m e $59^m,75$, e cuja altura é igual a 25^m.

79.º — O comprimento d'uma porção de terreno é igual a 512^m, e a area tem 182 ares; qual é a largura?

80.º — Um triangulo que tem $120^m,5$ de base e $20^m,84$ de altura, que superficie tem?

81.º — Qual é o diametro de uma roda, cuja circumferencia mede 30^m?

82.º — Um pombal circular tem uma linha horizontal de frestas, cada uma das quaes, incluindo-se a separação, abrange $0,^m40$; tendo o diametro do pombal $8^m,25$, quantas serão as frestas da linha toda?

83.º — Qual é a superficie de cada uma das faces circulares d'uma mó de moinho cujo raio é igual a $1,^m07$?

84.º — Achar a area da superficie de nivel d'um tanque circular, cuja volta exterior mede $48^m,5$, sendo de $0^m,85$ a espessura da cortina.

85.º — Calcular a area de uma corôa circular, que mede 26^m por fóra e $16^m,4$ pelo lado de dentro.

86.º — A inclinação mais conveniente, de uma escada lançada a um muro, é a de $\frac{1}{4}$ da sua altura. Posto isto, determinar o comprimento de uma escada que deverá chegar a uma altura de 15^m.

87.º — Calcular a area do triangulo isosceles, cujo perimetro é de $12^m,3625$ e a base $3^m,05$.

88.º — Qual é o perimetro do triangulo isosceles que tem de area $0^{mq},627$ e de base $0^{m},018$?

89.º — Qual é o lado do quadrado equivalente ao triangulo de base $0^{m},86$ e d'altura $0^{m},42$?

90.º — Avaliar a area do sector de $85^{o},18',48''$ do circulo de $2^{m},018$ de raio.

91.º — Calcular a area do segmento de 72^{o} no circulo de $1^{m},215$ de raio.

92.º — Sendo 228 metros quadrados a area de um trapezio, 9 metros a altura e 30 metros uma das bases, calcular a outra base.

93.º — Calcular a area de um sector circular, cujo arco vale $58^{o},25'$ e o raio de circulo $15^{m},20$.

94.º — Calcular a area do pentagono regular inscripto no circulo de raio $2^{m},40$.

95.º — Calcular a area de um sector circular, cujo arco vale $36^{o},48', 58'',34$ e o raio de circulo 3 metros.

96.º — Um terreno, em fórma de triangulo, com 600 metros de base por 800 de altura, que superficie tem e que porção de trigo precisa para o semear, levando cada metro 4 litros?

97.º — Qual é a area de um trapezio isosceles, cujo perimetro é de 26^{m} e as bases têem $5^{m},8$ e $3,4$?

98.º — Calcular a area de um hexagono regular de 18^{m} de lado.

99.º — Calcular a area de um pentagono regular, cujo lado tem 15^{m} e o apothema $8^{m},6$.

100.º — Qual é a superficie d'um pentagono regular com 84^{m} de perimetro, e cujo apothema é igual $13^{m},24$?

101.º — Um quadrilatero irregular é dividido em dois triangulos por uma diagonal que lhes serve de base commum e que tem $235^{m},48$ de comprimento. Um dos triangulos tem de altura $58^{m}4$ e o outro tem $63^{m},14$. Qual é a superficie total do quadrilatero?

102.º — Calcular o lado e a altura de um triangulo equilatero inscripto n'um circulo de raio igual a $5^{m},18$.

103.º — Qual é o comprimento de um dos cathetos d'um triangulo rectangulo, sabendo-se que o quadrado construido sobre a hypothenusa tem $70^{mq},56$ e quadrado construido sobre o outro catheto tem $12^{mq},25$?

104.º — Calcular o raio do circulo equivalente a um triangulo isosceles, cuja base vale $3^{m},40$ e o perimetro $12^{m}80$.

105.º — Sendo $0^{mq},8274$ a area do hexagono regular inscripto, calcular o raio do circulo.

Resolução expedita de alguns problemas geometricos

Como nem sempre se dispõe do graphometro ou de qualquer outro instrumento para medir angulos, vamos indicar os meios expeditos de resolver os problemas do n.º 116 e seguintes, bem como outros semelhantes, apenas com o emprego do metro.

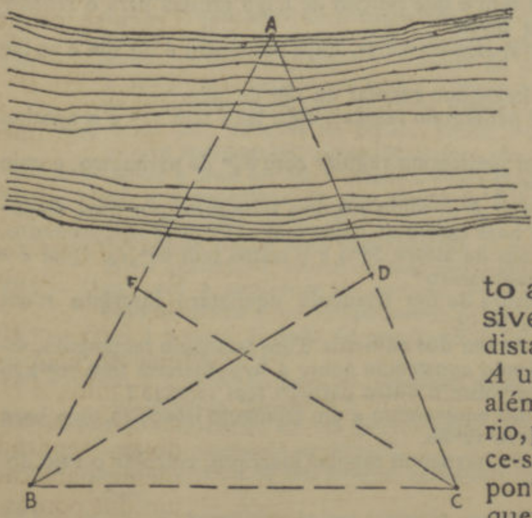


Fig. 159

Os processos que vamos descrever, comquanto sejam muito elementares, nem por isso deixam de ter a maior utilidade pratica.

I – Processo graphico para achar a distancia de um ponto a outro ponto inaccessivel. — Seja *B A*, *fig. 159*, a distancia pedida, sendo o ponto *A* um logar inaccessivel, isto é, além de um obstaculo, de um rio, por exemplo. Para isso, trace-se sobre o terreno a partir do ponto *B* uma linha recta qualquer *B C;* sobre as direcções *BA* e *CA* marquem-se com bandeirolas os pontos arbitrarios *D* e *F*; assim se formam no terreno os dois triangulos *B F C* e *B D C*, que têem um lado commum *B C* que se mede, bem como os outros lados *B F*, *F C*, *B D* e *D C*. Feito isto, trace-se n'uma folha de papel na escala adoptada uma linha *b c*, *fig. 160*, e sobre ella construam-se os triangulos *b f c* e *b d c*, semelhantes aos triangulos *B F C* e *B D C*, cujos lados são conhecidos. Depois prolonguem-se os lados *b f* e *c d* até se encontrarem em *a*; medindo finalmente na escala o comprimento *a b* e reduzindo este a metros, tem-se immediatamente a distancia procurada.

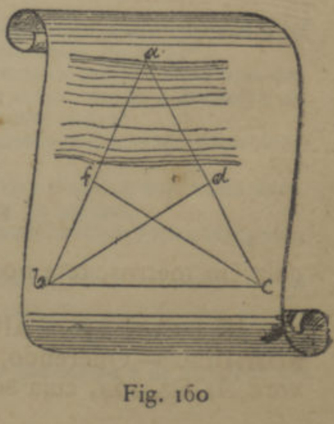


Fig. 160

Como sabemos, para construir um triangulo sendo conhecidos os lados, traça-se uma recta, *fig. 161*, representando um d'elles, e dos seus extremos como centro e com os raios respectivamente correspondentes a cada um dos outros lados, descrevem-se dois arcos de circulo, os quaes se interceptarão n'um ponto, ficando assim determinado o terceiro vertice do triangulo.

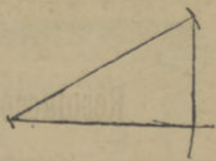


Fig. 161

II — Processo graphico para achar a distancia entre dois pontos inaccessiveis. — Seja, por exemplo, achar a distancia entre a arvore *A* e a casa *B*, *fig. 162*, que são dois pontos inaccessiveis. Traça-se primeiramente sobre o terreno uma linha recta arbitraria *C D*, cujo comprimento se mede; em seguida pelo processo anterior, determinam-se os comprimentos das linhas *A D*, *A C*, *B D* e *B C* que formam os triangulos *A D C* e *B D C*, operando-se separadamente para cada um dos pontos *A* e *B*.

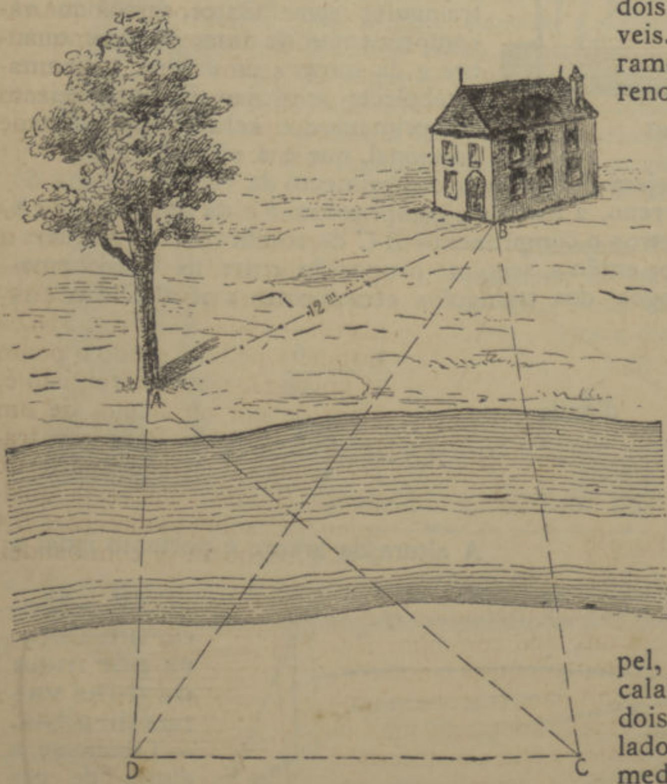


Fig. 162

Transportando agora para uma folha de papel, *fig. 163*, e na escala adoptada aquelles dois triangulos com o lado commum *C D*; medindo depois no papel a distancia *A B* e transformando-a na escala em metros, teremos a distancia procurada.

III — Achar a altura de um objecto por meio da sua sombra. — Querendo, por exemplo, determinar a altura de uma arvore *A*, *fig. 164*, cuja sombra se projecta nitidamente no terreno, procederemos da seguinte fórma: Crava-se bem verticalmente no terreno uma vara $a\ b$, ou uma canna muito direita, cuja sombra se projectará evidentemente sobre o terreno n'uma direcção parallela á sombra $B\ C$ da arvore. Teremos assim formado dois triangulos rectangulos $a\ b\ c$ e $A\ B\ C$, que são semelhantes por terem os angulos respectivamente iguaes cada um a cada um. Por isso, e por serem proporcionaes os lados homologos dos triangulos semelhantes, medindo os comprimentos da vara, da sua sombra e da sombra da arvore, podemos estabelecer a proporção entre esses comprimentos e achar a quarta proporcional, que é a altura pedida.

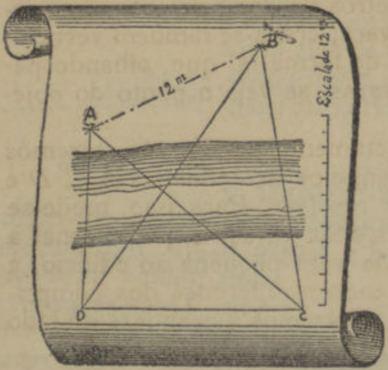


Fig. 163

Exemplo. Sejam 3 metros o comprimento da vara $a\ b$ acima do terreno, 2 metros o comprimento $b\ c$ da sua sombra e 8 metros o comprimento $B\ C$ da sombra da arvore; teremos então a seguinte proporção entre os lados homologos dos triangulos semelhantes a $A\ B\ C$ e $a\ b\ c$,

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{AB}$$

d'onde

$$AB = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

A altura da arvore é portanto igual a 12 metros.

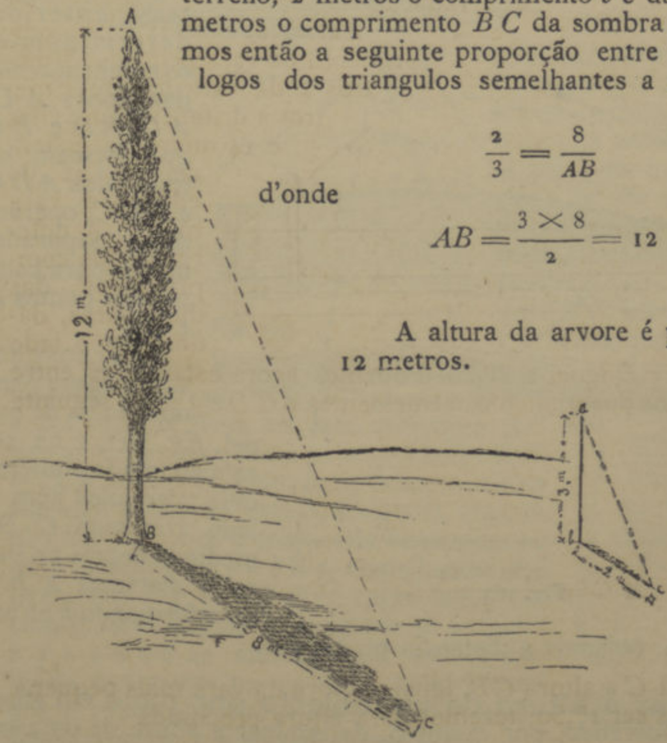


Fig. 164

IV — Medir uma altura por meio de duas varas direitas. — Obtem-se a altura de um objecto qualquer por meio de duas varas ou duas cannas muito direitas, da maneira seguinte:

Crava-se verticalmente a uma distancia arbitraria do objecto a medir, uma vara com tres a quatro metros de comprimento; em seguida no alinhamento do objecto e da vara, crava-se tambem verticalmente uma outra vara mais pequena e de fórma tal que, olhando pelas extremidades superiores das duas varas, se veja o ponto do objecto cuja altura se pretende.

Como se vê distinctamente na *fig. 165*, teremos assim formado dois triangulos semelhantes *A C D* e *a c D*, que pretendemos resolver. Para isso, mede-se a distancia *b E* entre as duas varas, a qual é igual a *c D*, e a distancia *E B* da vara pequena ao edificio, a qual é igual a *D C;* fazendo a differença dos comprimentos das duas varas, acharemos a grandeza do lado *a c*, do segundo triangulo.

Feito isto, só nos resta calcular por proporção o lado *A C* do primeiro triangulo e juntar-lhe o comprimento da vara pequena *D E*, igual a *C B*, para termos a altura *A B* procurada.

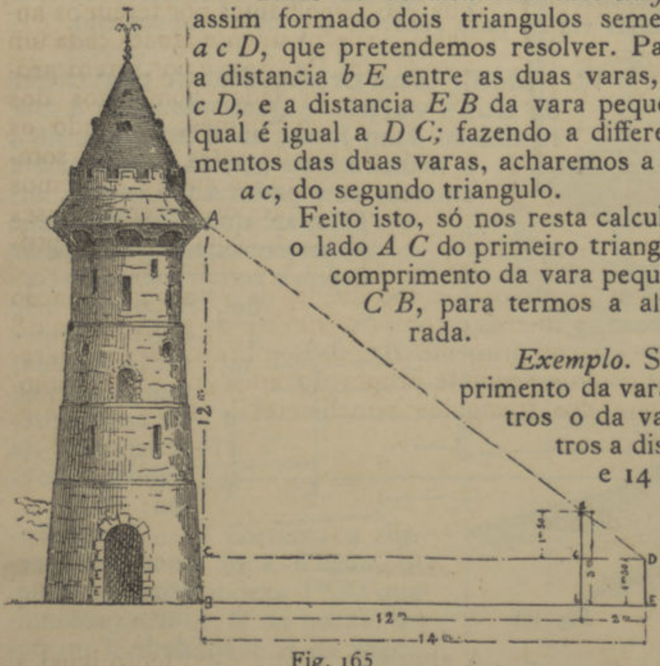


Fig. 165

Exemplo. Seja $1^m,50$ o comprimento da vara pequena, 3 metros o da vara maior, 2 metros a distancia entre ellas e 14 metros a distancia do pé do edificio á vara menor. A differença dos comprimentos das duas varas, dá-nos logo o lado *ac* do triangulo *a c D* igual a $1^m,50$. Podemos agora estabelecer entre os lados homologos dos triangulos semelhantes *ACD* e *a c D* a seguinte proporção:

$$\frac{1,50}{2} = \frac{A\ C}{14}$$

d'onde

$$A\ C = \frac{1,50 \times 14}{2} = \frac{21}{2} = 10,50$$

Juntando a *A C* a altura *CB*, igual á altura da vara mais pequena *E D*, que sabemos ser $1^m,50$, teremos para altura procurada

$$A\ B = A\ C + C\ B = 10,50 + 1,50 = 12 \text{ metros.}$$

V — Achar a altura d'um objecto cujo pé é inaccessivel. — Se quizermos, por exemplo, achar a altura da arvore *A B*, *fig. 166* que está separada de nós por uma ribeira, procederemos do seguinte modo:

Pelo processo do *Problema I* determinaremos a distancia do ponto *B* ao ponto *G;* conhecida essa distancia, não teremos mais que applicar aqui o processo anterior das duas varas, para resolver o problema proposto.

Fig. 166

VI — Medir uma profundidade por meio de duas varas. — Querendo medir a profundidade d'um fosso, ou d'um poço, etc., a maneira mais pratica é certamente amarrar uma pedra a um cordel, largal-o até que a pedra toque no terreno ou na agua e medir depois o comprimento do cordel. Se porém não dispozermos senão de duas reguas, varas, ou canas, procederemos da seguinte fórma:

Supponhamos que pretendemos medir a profundidade d'um poço, *fig. 167*, até ao lume d'agua; atravessemos na bocca do poço e segundo o diametro, uma regua ou uma vara *H G*; em seguida, encostada a esta regua e ao longo da parede interna do poço, faça-se escorregar uma outra regua *A F*, até que pela sua extremidade *A* se veja o ponto *E* diametralmente opposto na superficie da agua; marque-se então um traço na intersecção *C* do raio visual *A E* com a regua *H G*. Medindo agora os comprimentos *A B*, da regua acima da borda do poço, *B C* da borda do poço ao raio visual e o diametro *B O* do poço, teremos os elementos necessarios para calcular a profundidade do mesmo.

Com effeito, teremos dois triangulos semelhantes *A B C* e *A D E*, nos quaes os lados homologos *A B*, *B C* e *A D*, *D E* são proporcionaes, isto é

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$$

Sendo AB e BC quantidades conhecidas e sendo tambem conhecida a quantidade DE que é o diametro do poço, facil se torna achar o valor da altura AD; achado este valor, basta subtrahir-lhe o comprimento conhecido AB para termos a profundidade BD procurada.

Exemplo. Seja $1^m,20$ o comprimento AB da regua vertical acima da borda do poço, $0^m,40$ a distancia BC da borda do poço á intersecção do raio visual AE com a regua horisontal e 2 metros o diametro do poço. Teremos então a seguinte proporção:

$$\frac{1,20}{AD}=\frac{0,40}{2}$$

da qual se tira

$$AD=\frac{1,20 \times 2}{0,40}=6$$

6 metros é portanto a distancia de A ao lume d'agua, tirando a essa grandeza $1^m,20$ que é a distancia AB da borda do poço á extremidade A da regua vertical, teremos para profundidade do poço

$$BD=AD-AB=6-$$
$$-1,20=4,80.$$

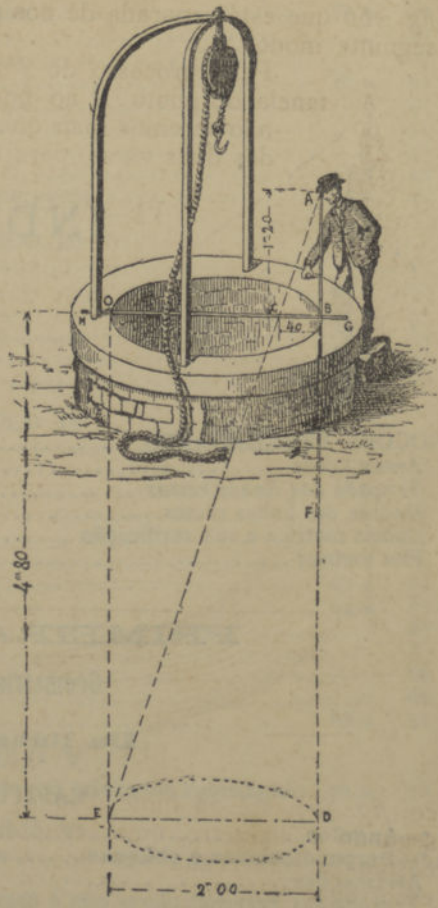


Fig. 167

FIM DA GEOMETRIA PLANA

INDICE

PRIMEIRA PARTE

Geometria plana

Da linha recta

CAPITULO I

CAPITULO II

PAG.

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO V

CAPITULO VI

CAPITULO VII

Resolução expedita de alguns problemas geometricos

Erratas principaes

Paginas	Linhas	Onde se lê	Deve lêr-se
18	16	exempla	exemplo
32	33	fig. 66	fig. 68
32	34	fig. 67	fig. 69
53	17	iguala	igual a
53	32	a a recta	a recta
59	10	e na forma	e não na forma
61	8	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{9}$
74	33	$\sqrt{50 = 7,07}$	$\sqrt{50} = 7,07$
76	20	$\sqrt{5 - 1}$	$(\sqrt{5} - 1)$
88	8	$15'' \; 0' \; 0'',25$	$15^\circ \; 0' \; 0'',25$
88	20	gradus	grados