Escola Normal Superior

Relatório do estágio

NO

Liceu de José Falcão

POR

ANTÓNIO LINO LOPES DOS SANTOS

1928

TIPOGRAFIA PENINSULAR
Praça do Comércio
Figueira da Foz

Escola Normal Superior

Relatório do estágio

NO

Liceu de José Falcão

durante o ano lectivo

DE

1927-1928

POR

António Lino Lopes dos Santos

La vie n'est bonne qu'à étudier
et à enseigner les mathématiques

POISSON

1928

TIPOGRAFIA PENINSULAR
Praça do Comércio
Figueira da Foz

A' memória de Meus Pais

À Minha Mulher
A Meu Filho

PREFÁCIO

O presente trabalho é o relatório das lições dadas no liceu de José Falcão, como aluno da Escola Normal Superior da Universidade de Coimbra, durante o ano lectivo de 1927-1928.

Fizemos o estágio em duas classes, uma do curso geral e outra do curso complementar.

Na introdução expomos de modo geral os principais métodos e processos de ensino das sciências matemáticas.

A primeira parte dêste relatório, relativa à 5.ª classe, compreende três capítulos.

No primeiro encontra-se um exemplo de duas lições com a respectiva preparação.

O segundo refere-se à revisão da matéria da terceira e quarta classes.

O terceiro capítulo diz respeito ao programa da 5.ª classe.

A segunda parte é dividida também em três capítulos e diz respeito à 6.ª classe.

Considerações gerais sôbre a turma e sôbre o programa do curso complementar encontram-se no primeiro capítulo.

O segundo compreende o exemplo duma lição com a preparação.

Apresentamos no terceiro capítulo uma lição de história da trigonometria e algumas notas sôbre matemáticas e matemáticos portugueses.

O Ex.mo Metodólogo tinha-nos mostrado a vantagem de darmos uma lição á turma sôbre história da matemática, e por nossa parte procurámos realisar o desejo de S. Ex.a. Não nos foi possível realisá-lo completamente, pois não podíamos contar com mais duma aula para êsse fim. Nestas condições escrevemos uma lição sôbre história da trigonometria cujo ensino esteve a nosso cargo.

*
* *

Dificuldades de toda a ordem encontrámos na elaboração dêste trabalho, não por falta de material, mas precisamente pela sua abundância.

E' que tendo tomado as nossas notas dia a dia chegámos ao mês de julho com cadernos e cadernos de papel que manifestamente não podíamos apresentar porque ficaria um relatório *excessivamente volumoso, o que nos pareceu fóra da indole dêste trabalho.*

Por outro lado não poderíamos resumir tanto as nossas notas que não dessem com toda a clareza uma impressão nítida da maneira como decorreu o nosso ensino.

Entendemos que atingiríamos talvez o fim em vista apresentando êste modesto relatório.

* * *

A todos os ilustres professores da Escola Normal Superior nos apraz consignar os nossos agradecimentos pelas atenções com que sempre nos distinguiram facilitando-nos os elementos de estudo.

Seja-nos permitido agradecer tambêm ao Ex.mo Metodólogo todas as suas sugestões, todos os seus conselhos e todas as considerações de ordem geral que nos deu durante o ano e que muito nos ajudaram a cumprir os nossos deveres de aluno e de mestre.

excessivamente volumoso, o que nos pareceu *fóra da indole* dêste trabalho.

Por outro lado não poderiamos resumir tanto as nossas notas que não dessem com toda a clareza uma impressão nitida da maneira como decorreu o nosso ensino.

Entendemos que atingiriamos talvez o fim em vista apresentando êste modesto relatório.

*

A todos os ilustres professores da Escola Normal Superior nos apraz consignar os nossos agradecimentos, pelas atenções com que sempre nos distinguiram facilitando-nos os elementos de estudo.

Seja-nos permitido agradecer tambem ao Ex.mo Metodólogo todas as suas sugestões, todos os seus conselhos e todas as considerações de ordem geral que nos deu durante o ano e que muito nos ajudaram a cumprir os nossos deveres de aluno e de mestre.

INTRODUÇÃO

«Pour appliquer notre esprit avec succés à la recherche ou à la démonstration d'une vérité scientifique, il est nécessaire de suivre certaines règles, variables avec la nature des choses envisagées et qui, prises isolément ou par groupes, suivant les cas, forment ce qu'on appelle des méthodes.»

DAUZAT

O sucesso no ensino depende principalmente do conhecimento da psicologia do aluno, do conhecimento dos métodos e da faculdade que o professor deve ter de os aplicar habilmente.

Quási todos os autores classificam os métodos em:

A)—Métodos de investigação das verdades matemáticas:

Analítico, sintético e de redução ao absurdo; deductivo, inductivo e dos coeficientes indeterminados; dos limites e dos infinitamente pequenos.

B)—Métodos de ensino: didáctico, socrático, heurístico e de laboratório.

C)—Modos de ensino: genético, didáctico e de laboratório.

Não trataremos desenvolvidamente estes assuntos; apenas faremos com algum detalhe um resumo dos métodos de ensino.

A)—Métodos de investigação

O método analítico reduz a questão a outra de que a primeira é conseqüência; esta ainda a outra e assim sucessivamente até se chegar a uma questão que se saiba resolver ou seja verdadeira.

Êste método segue do desconhecido para o conhecido.

O método sintético é um método de exposição; segue a ordem inversa do analítico; vai do conhecido para o desconhecido, das hipóteses para a tese.

O método de redução ao absurdo serve-se de proposições contraditórias: para provar que uma proposição é verdadeira prova que a sua contraditória é falsa.

O método deductivo vai do geral ao particular.

O método inductivo vai do particular ao geral.

Muitas vezes é necessário achar um polinómio ordenado em relação a x, cuja forma é conhecida, mas em que certos coeficientes são desconhecidos.

Usa-se então o

Método dos coeficientes indeterminados que consiste em escrever o polinómio, representar por letras os coeficientes desconhecidos e exprimir as condições a que deve satisfazer.

Método dos limites: consiste em substituir as quantidades de que se trata por outras, variáveis, de que aquelas são limites e substituir depois as variáveis pelos seus limites.

O método dos infinitamente pequenos consiste em substituir as quantidades de que se trata por outras infinitamente pequenas e de determinação conhecida e depois passar para as quantidades dadas.

B) — Métodos de ensino

Método didáctico

Êste método tem a forma de exposição. O sucesso no ensino depende essencialmente da atenção dos alunos, o que o torna inadaptável às primeiras classes.

O professor deverá

1.º—Mostrar que toma interêsse pelo ensino.

2.º—Não dar a sua lição sem a ter preparado convenientemente.

3.º—Tornar o ensino atraente.

4.º—Animar a classe ilustrando os assuntos com exemplos interessantes.

E' extremamente vantajoso resumir no fim de cada lição os pontos principais que se trataram, lembrar no comêço de cada lição o assunto da lição precedente e fazer repetições da matéria sempre que se julgue conveniente.

São tambêm de aconselhar as revisões a que deveremos dar um carácter tanto quanto possível imprevisto e ocasional.

Terão logar sempre que se lembre um ponto já dado antes e que se liga com o assunto que estamos tratando.

Método Socrático

Êste método tem a forma de diálogo, compreendendo duas partes: a primeira destructiva, a segunda constructiva.

É, como diz *Piat*, «um drama em dois actos, o primeiro acto consiste em confundir o interlocutor, o segundo em pôr de pé uma nova definição.»

No método socrático as preguntas sugestionam as respostas o que vai de encontro ao carácter activo que a classe deve manter sempre.

Método heurístico

O método heurístico foi ensaiado no ensino primário e depois no secundário.

Foi uma conseqüência das ideas formuladas por Rousseau, no *Émile*.

Estas ideas dominaram absolutamente os filósofos e educadores da época e, tornadas conhecidas por Kant e aplicadas por Pestalozzi, em breve foi possível formular um novo conceito de educação.

Mais tarde *Schellbach*, dentro do mesmo ponto de vista, fez uma grande propaganda a favor do emprêgo do método heurístico.

Enquanto estes factos se passavam na Suissa e Alemanha, a Inglaterra e os E. U. da América esforçavam-se por dar ao ensino da matemática o carácter que já tinha na Alemanha, e o método de que estamos tratando teve a consagração daqueles países.

A França só mais tarde acompanhou o movimento e Portugal só há poucos anos procura integrar-se nesta moderna maneira de transmitir conhecimentos.

E mesmo assim alguns professores julgam-no impraticável nas nossas classes numerosas.

De modo nenhum concordamos com esta opinião, pois tendo-o usado com turmas de cinco, vinte a trinta alunos tirámos sempre dêle óptimos resultados.

* * *

O método heurístico mantêm a classe activa por meio de preguntas fraccionadas, curtas, passando de um aluno a outro para os manter a todos em constante atenção.

As questões postas aos alunos devem ser

simples para que os alunos médios possam responder sem grande reflexão.

O método coloca o aluno na atitude de descobridor exigindo-lhe que tome uma parte activa no ensino e sobretudo êste método garante que o ensino não ultrapasse a capacidade do aluno.

Por meio do método heurístico dirige-se o ensino aos alunos médios e o seu emprêgo tem mostrado não ser necessário um dom especial para compreender a matemática.

* * *

A par de todas estas vantagens tem-se apontado um inconveniente a êste método: o de exigir na sua aplicação uma extrema lentidão. Ora admitindo que assim é, o defeito transforma-se, em nossa opinião, em vantagem.

Na verdade, no ensino da matemática é precisamente a lentidão o que é necessário. O professor não deve preocupar-se em avançar muito ràpidamente quer dizer os avanços não devem ser marcados pelo professor, mas pelos progressos dos alunos, porque só desta maneira é que os assuntos ficam sabidos e só assim é que o professor consegue realisar a sua missão: ensinar.

Os factos porêm mostram-nos que, se no princípio o método exige uma marcha vagarosa, também depois os alunos não marcham menos ràpidamente por êle do que por qualquer outro.

* * *

Como condições de aplicação mais importantes do método heurístico consideraremos:

a) o número de alunos da classe
b) a homogeneidade da classe
c) o livro

E' manifesto que quanto menos numerosa é uma classe mais fàcilmente é dirigida; todavia, seja o ensino feito pelo método heurístico, seja por qualquer outro, o efectivo da classe não tem uma importância fundamental, se bem que seja um factor a atender.

A homogeneidade da classe não é essencial, visto que o método heurístico é vantajoso para os alunos fracos e para os incapazes não há métodos que permitam obter resultado, devendo ter o seu logar próprio nas escolas de atrazados e anormais.

O livro é já um factor importante e essencial para a aplicação do método. O livro é, por assim dizer, o suporte e a síntese do ensino.

O professor deve pôr sempre nas mãos dos seus alunos um bom livro evitando, é claro, que êste possa falsear, de qualquer maneira, o ensino.

Método de laboratório

Nos fins do século XIX, princípios do século XX, manifestou-se na Inglaterra, E. U. da América, França e Alemanha, uma grande tendência para modificar o ensino da matemática.

Estudos feitos sôbre a criança indicaram que o ensino da matemática se devia dirigir à sua natural curiosidade, tornando o ensino vivo, atraente e interessante.

Para atingir o fim em vista é manifesto que o conhecimento da psicologia da criança tem, como já dissemos, uma importância capital no ensino.

Vários auctores se têm dedicado a êste assunto e de entre todos citamos Claparède que na sua «Psicologie de l'enfant» põe em destaque que o ensino da criança deve ser conduzido de modo a despertar-lhe o interêsse.

Na América o porta-voz dêste novo aspecto do ensino foi Ioung que recomenda que o ensino se deve dirigir à natureza da criança.

* * *

Como caracteristicas principais apresentamos as seguintes:

a) interêsse do aluno

b) Correlação dos assuntos

c) Passagem do concreto para o abstracto.

Seja qual fôr o assunto a ensinar, devemos ter sempre presente que não se deve produzir fadiga nos alunos e esta produzir-se-há com mais facilidade se o assunto desagrada; para evitar a fadiga devemos apresentar a matéria de maneira que desperte o interêsse dos alunos.

A criança é de natureza curiosa; *tudo* o que possa satisfazer a sua curiosidade, desde que a não leve a aceitar como verdadeiro o que é falso, pode constituir um meio para que na aula de matemática haja actividade e interêsse.

No que respeita à correlação dos assuntos, reconheceu-se que o estudo da matemática é mais proveitoso relacionando-o com outros assuntos do que fazendo-o isoladamente.

A física oferece um campo vasto para efectivar a correlação e é vantajoso, muitas vezes, deixar que a Física conduza ao problema matemático.

Tudo quanto a experiência ensinou e todas as lições de coisas constituem o concreto que também é constituido por tudo quanto, embora abstracto, a inteligência do aluno compreendeu e assimilou.

Devem ser reconhecidas as origens experimentais da matemática e devemos fazer uso da intuição, mas com cuidado porque pode conduzir a erros.

No método de laboratório não deveremos

marcar lição aos alunos. Aceitaremos, sem demonstração, os teoremas difíceis de demonstrar e cujo conhecimento exige muito tempo. Perry diz: «um rapaz não precisa de saber como se faz um relógio, basta que o saiba usar».

Para o uso dêste método é da maior conveniência uma sala-laboratório aonde se encontrem:

Modelos, balanças, réguas graduadas, fitas métricas, pêndulos, níveis, roldanas, barómetros, termómetros, areómetros, bustos de matemáticos, tábuas de juros, de multiplicação, de raiz quadrada, de números inversos, etc.

C)—Modos de ensino

Modo genético. Por este modo, as perguntas são postas a toda a classe e depois indica-se o aluno que deve responder.

Modo didáctico. Aqui, os alunos tomam notas sôbre a exposição do professor, completando-as fóra da aula.

Modo de laboratório. Neste, os alunos trabalham em pequenos grupos ou individualmente numa sala a que se dá o nome de laboratório,

PRIMEIRA PARTE

Capítulo Primeiro

«Toda lección será mala si no está pedagógicamente preparada».

D. RUFINO SANCHEZ

«Une démonstration a une valeur logique et du même coup, une valeur esthétique, parce qu'en satisfaisant la raison elle réjouit le coeur.»

«Elle est dite trés justement «élégante» si elle nous procure la joie d'arriver à l'évidence par une voie plus simple et plus courte qu'on ne s'y attendait».

GOBLOT

1) **Exemplo duma lição**
- A) **Preparação da lição**
- B) **A lição**

2) **Exemplo doutra lição**
- A) **Preparação da lição**
- B) **A lição**

A) Preparação da lição

Entendemos que um professor—por mais competente que seja e por mais experiência que tenha—não deve nunca ir para a aula sem ter preparado cuidadosamente a sua lição.

O professor, ao preparar a lição, deve lembrar-se do que se passou na última aula: se ficaria algum ponto por tratar ou incompletamente tratado; se os alunos teriam ficado de posse do assunto; se algum aluno, na lição precedente se manifestou pouco atento e com tendência a distrair-se, deve o professor estudar o meio ou meios de na primeira aula o obrigar a estar atento despertando-lhe o interêsse, excitando-lhe a curiosidade, podendo e sendo útil até que o faça quer lançando mão da história das matemáticas, quer contando alguma passagem da vida do Matemático que tivesse contribuido de alguma maneira para o assunto que se está tratando.

Se o número de lições dadas ao curso é já suficiente para ter um conhecimento o mais completo possível dos alunos, o professor, ao preparar a sua lição, deve lembrar-se dos mais atrasados, dos que têm mais dificuldade em seguir o curso, seja por serem pouco inteligentes, seja por em conhecimentos não estarem a par dos alunos médios, e não se esquecer de que tem o dever de aproveitar o maior número possível de alunos.

* * *

O professor deve dar entrada na aula com uma rigorosa pontualidade; deve manter sempre uma atitude de correcção, tratar os alunos com bondade, falar-lhes com amabilidade cativante, proceder de maneira que vejam em si não o algoz, que vai para a aula afim de marcar más notas, mas o companheiro mais velho que está a seu lado para os ensinar com paciência, sempre pronto a atendê-los como um amigo que deseja o seu bem estar e que pretende prepará-los para as lutas da vida.

Deve ainda o professor despertar nos seus alunos um respeito quási divino e inspirar-lhes uma confiança ilimitada.

Nunca deve ter atitudes bruscas, gestos de enfado, nem mostrar-se irascivel.

A influência nos alunos de qualquer destes actos é terrível.

Para não os praticar é necessário que o professor se estude a si próprio fazendo um exâme auto-psicológico para não desmerecer aos olhos dos seus alunos.

Como se vê, ensinar não é só saber os assuntos que, dia a dia, se transmitem aos outros e como se hão-de transmitir, é tambem possuir a arte de se apresentar diante dos seus alunos como que lavado dos seus defeitos, arte que lhe permita ao entrar na aula abrir um parêntisis na sua vida de homem para ficar só o professor.

E' preciso pois saber educar a vontade, ter um conhecimento profundo de si próprio e um grande amôr à sua profissão.

* * *

O professor não deve começar a explicar um assunto sem verificar se os alunos têm os conhecimentos precisos para a sua nítida compreensão. Para isso o professor, ao preparar a sua lição, fará um esquema dos teoremas, corolários, princípios, etc., em que baseie o que vai explicar ou que de qualquer modo se relacione com a lição.

Deve pois neste momento chamar à memória os alunos mais fracos para não se esquecer de lhes fazer as necessárias preguntas que o habilitem a saber qual é o estado do curso antes de receber a explicação—tal e qual o lavrador que não deita a semente á terra sem primeiro se certificar se está ou não em condições de bem a receber.

Sabido pelo programa qual é o assunto que deve preencher a lição e feito o esquema acima dito, o professor escolherá os métodos de raciocínio e de ensino que melhor se adaptem ao assunto, tendo em vista não só a experiência doutras lições, mas ainda a clara compreensão dos alunos.

A seguir — partindo de que em matemática nada deve ficar entregue ao acaso — deve o professor escolher os exercícios de descoberta que se dirigirão à inteligência e ao desenvolvimento das faculdades de raciocínio dos alunos e logo os exercícios de aplicação numérica.

O professor não deve esquecer que a preparação da lição deverá ser feita de maneira que o habilite a explicar sem ter de pedir auxílio ao livro ou a qualquer apontamento.

Se a lição exige material e se no liceu o não há ou se o que há não satisfaz ao professor, deve êste, quando prepara a lição, lembrar-se de o arranjar.

*
* *

Segundo D. Rufino Sanchez a preparação da lição compreende:

1.º — Fundo

2.º — Forma

No fundo temos a considerar a determinação, a invenção e a disposição.

Na forma temos a considerar a selecção e a preparação do material.

Isto no que respeita à preparação metodológica; quanto á preparação pedagógica o professor refletirá sôbre os seus defeitos habituais, seu aspecto exterior, sua linguagem, sôbre o aspecto exterior dos alunos, sua aplicacão e boa disciplina.

Esta maneira de tratar a preparação da lição vimo-la pela primeira vez num quadro, tirado do livro de D. Rufino Sanchez «Teoria de la Enseñanza», que a certa altura do ano nos foi mandado entregar pelo Ex.^{mo} Director da Escola Normal Superior.

* * *

Os assuntos que adiante apresentamos como exemplos de lições não foram escolhidos, mas tirados à sorte entre todas as lições.

Procedemos assim porque, seduzindo-nos igualmente todos os assuntos, teriamos uma grande dificuldade na escôlha.

O nosso desejo seria satisfeito se pudessemos apresentar tôda a matéria em forma de lição, e ainda o tentámos; tivemos de pôr de parte esta maneira de apresentar o nosso relatório não só pelo excessivo número de páginas com que ficaria mas ainda por nos parecer a sua leitura bastante monótona.

Explicada assim a preferência dada ao assunto da lição vamos apresentar a sua preparação.

* * *

O assunto é o estudo da área da superfície lateral do cone de revolução.

Para podermos conduzir com êxito os alunos é necessário que, no começo da aula, verifiquemos se têm perfeito conhecimento dos seguintes conhecimentos:

- Superfície piramidal;
- Pirâmides e área;
- Superfície cónica;
- Cones;
- Sua classificação, geração e planificação
- Limites.

Precisamos também de verificar se os alunos ainda têm presente a matéria explicada antes —área da superfície lateral do cilindro de revolução.

Não nos devemos esquecer de dirigir as preguntas que forem necessárias especialmente a dez alunos pois são estes os que mais precisam do nosso esfôrço, sem, é claro, abandonar os restantes. Deveremos ter na aula modelos de pirâmides e cones.

Empregaremos o método dos limites; o método de ensino será o heurístico e o modo genético.

B) A lição

1) Assunto: Área da superfície lateral do cone de revolução.

2) Métodos:
- De investigação: Dos limites;
- De ensino: heurístico.

3) Modo: Genético.

Não começámos êste estudo sem nos certificarmos se os alunos tinham noções bem claras e nítidas sôbre:

Pirâmides e área; superfície cónica, cones, sua classificação, geração e planificação; limites.

Por meio de preguntas dirigidas à classe e depois de indicados os alunos que a elas deviam responder—dando cada aluno a respectiva resposta por sua vez—reconhecemos que os alunos estavam de posse destes assuntos indispensáveis.

A seguir enunciámos à classe a pregunta relativa à expressão da área da superfície lateral do cilindro de revolução.

Um aluno prèviamente indicado deu resposta certa.

Outro aluno—depois de se ter dirigido a pregunta à classe — expôz, sem ir à pedra, a maneira como se obteve.

Outro aluno deu resposta à pregunta:

¿Qual foi o sólido de que nos servimos para deduzir a expressão da área da superfície lateral do cilindro de revolução?

A um novo aluno preguntámos:

¿De que sólido nos serviremos neste caso do cone?

O aluno responde: o sólido será a pirâmide.

Porquê? Insistimos.

«Porque de todos os modelos que estão em cima da mesa é o que se parece mais com o cone» (ipsis verbis).

Passei a outro aluno:

¿Como procederemos para avaliar a área da superfície lateral do cone de revolução partindo da área da pirâmide?

O aluno responde que pode inscrever a pirâmide no cone.

Outro aluno continua:

Se inscrever uma pirâmide regular no cone de revolução e se aumentar indefinidamente o número de faces—veremos que o perímetro do polígono regular da base da pirâmide se vai aproximando do perímetro da circunferência da base do cone.

Um novo aluno continua:

à medida que isto se dá o apótema da pirâmide se vai aproximando da geratriz do cone.

Outro aluno diz:

A expressão da área da superfície lateral da pirâmide regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema

$$A_p = \frac{1}{2} p \times a \ldots \quad (1)$$

representando por A_p a área da superfície lateral da pirâmide regular, por p o perímetro do polígono regular da base e por a o apótema da pirâmide.

Outro aluno repetiu o que o seu condiscípulo tinha dito e ainda outro continuou:

O número de faces cresce indefinidamente; portanto tomando os limites dos dois membros daquela igualdade(refere-se á igualdade (1)) temos:

$$\lim A_p = \lim\left(\tfrac{1}{2} p \times a\right) = \tfrac{1}{2} \lim p \times \lim a \ldots . \quad (2)$$

Um novo aluno interveiu na demonstração dizendo:

$$\text{mas } \lim A_p = A_C$$
$$\lim p = 2 \pi R$$
$$\lim a = g$$

sendo A_C a área da superfície lateral do cone,
R o raio da base do cone,
g a geratriz do cone.

Outro aluno continuou:

Substituindo naquela igualdade (refere-se à igualdade (2)) as variáveis pelos seus limites, vem

$$A_C = \tfrac{1}{2} \times 2 \pi R \times g \quad \text{ou}$$
$$A_C = \pi R g$$

Preguntámos a outro aluno:

O que representa π?

O aluno não responde; outro diz que π é 3, 1416. Nenhum aluno adiantou mais.

Um aluno interrogado sôbre o perímetro da circunferência diz:

$$C = 2 \pi r$$

sendo *C* o perímetro e *r* o raio.

Dissemos-lhe que tirasse desta igualdade o valor de π; o aluno escreve:

$$\pi = \frac{C}{2r}$$

A outro aluno preguntámos:

O que representa *2 r*?

O aluno responde que *2 r* é o diâmetro e, sob nossa indicação, escreveu:

$$\pi = \frac{C}{D}$$

Então o que é π? O aluno não responde; outro aluno, depois de interrogado, deu resposta certa.

Preguntámos a outro aluno:

O que representa π R?

O aluno não responde.

O que representa 2 π R?

Depois de responder bem preguntámos-lhe como se passou de 2 π R para π R.

Obtida resposta certa, o aluno disse logo que π R era metade do perimetro da circunferência da base.

O que representa g?

g representa a geratriz do cone, responde.

A outro aluno fizemos a pregunta:

¿Qual é a expressão da área da superfície lateral do cone de revolução?

O aluno diz:

$$Ac = \pi R. g$$

isto é, «a área da superfície lateral do cone de revolução é igual ao produto de metade do perímetro da circunferência da base pela geratriz».

Alguns alunos, sem auxílio de figuras e sem cálculos, expuseram o caminho seguido na demonstração.

Exemplo doutra lição com o assunto seguinte:

Exercício de descoberta— «Calcular a área da superfície lateral dum tronco de cilindro de revolução, considerando-a metade da área lateral dum cilindro cuja base é a mesma e cujo eixo é o dôbro do eixo do tronco».

A) Preparação da lição

Dois casos se podem dar:

1.º—Os alunos saberem fazer a demonstração.

2.º—Os alunos não a saberem fazer.

Neste segundo caso, deveremos apresentar o seguinte exercício de construção:

«Dado um tronco de cilindro recto de revolução, construir um cilindro recto de revolução que seja o dôbro do tronco».

Temos ainda dois casos a considerar:

1.º—Os alunos saberem fazer a construção.

2.º—Os alunos não a saberem fazer.

Neste segundo caso deveremos partir do seguinte ponto:

«Dado um trapézio rectângulo, construir um rectângulo que seja o dôbro do trapézio dado».

A seguir passaremos para o exercício anterior, e finalmente para:

«A área da superfície lateral do tronco de cilindro recto de revolução é igual a metade da área da superfície lateral do cilindro recto de revolução».

* * *

No princípio da aula, deveremos dirigir preguntas aos alunos sôbre:

a) Trapézios e área;
b) Rectângulo e área;
c) Cilindros, geração e área;
d) Tronco de cilindro;
e) Figuras iguais, equivalentes e semelhantes.

Material: modelos de cilindros e troncos;
papel, réguas e esquadros.
Métodos: sintético e heurístico
Modo: genético.

B) A lição

Depois de têrmos enunciado à classe a questão acima e de reconhecermos que os alunos não a sabiam resolver, enunciámos:

«Construir um cilindro recto de revolução que seja o dôbro dum tronco de cilindro recto de revolução dado».

Desenhado na pedra um tronco de cilindro recto, dois alunos repetiram o enunciado.

Não houve nenhum aluno que indicasse como se fazia a construção.

Dirigimos à classe a pregunta:

¿Que figura plana temos na pedra?

Indicado o aluno, êste disse que tinha um trapézio.

A seguir disse à classe: vejamos se partindo desta figura, poderemos construir outra que esteja em alguma relação com o trapézio.

Um aluno diz que pode construir um rectângulo equivalente ao trapézio.

Preguntado se poderia construir um rectângulo que estivesse noutra relação, o aluno não respondeu.

Outro aluno diz que pode construir um rectângulo que seja o dôbro do trapézio.

Enunciada à classe a pregunta relativa a esta construção, um aluno responde:

Para construir o rectângulo duplo do trapézio, prolongo a mediana dum comprimento igual a si mesma, tiro pela extremidade assim obtida uma perpendicular às bases e prolongo estas até encontrarem a perpendicular.

Passámos a outro aluno que fez a construção.

A um novo aluno dirigimos a seguinte pregunta depois de a termos enunciado à classe:

¿Que teremos de fazer para sabermos se o rectângulo é o dôbro do trapézio?

O aluno responde: «*é ver se êle é o dôbro.*»

Ver, como? insistimos.

O aluno diz: «*eu sei fazer, mas não sei dizer.*»

Dissemos-lhe que *fizesse*.

O aluno mede a base do rectângulo e, ao tentar medir a altura interrompemos:

¿Para que precisa de conhecer essas medidas?

Para medir a área, responde.

Nova pregunta: ¿Então como sabe se o

rectângulo está com o trapézio na relação indicada?

O aluno responde que é preciso medir as áreas.

Já vê que sabia fazer e sabia dizer, dissémos.

Outro aluno mediu as duas áreas e reconheceu que a do rectângulo era muito aproximadamente dupla da área do trapézio.

Passando ao tronco, um novo aluno dlsse sem mais indicações que bastava «*completar*» o cilindro.

O aluno prolongou as geratrizes, e conduzindo pela extremidade 0'' do eixo um plano paralelo ao plano da base, obteve o cilindro.

Dirigimos à classe a pregunta:

Estará o problema resolvido?

Um aluno diz que é preciso saber se o cilindro é o dôbro do tronco.

Será? Preguntámos. O aluno hesita e nós orientámos assim a classe:

¿ Haverá na figura alguns segmentos de recta iguais?

O aluno responde que por construção

$$0\,0' = 0'0''.$$

Haverá outros iguais?

A pregunta fica sem resposta.

Outro aluno diz:

A B E F é um rectângulo;

A B C D e C D F E são dois trapézios iguais e portanto

A D = E C e B C = D F

A outro aluno preguntámos se poderia tirar algum partido das considerações feitas por êste seu condiscípulo.

O nosso estudante hesita; como não responde, nós preguntámos-lhe:

Que queremos nós demonstrar?

Obtida resposta certa, preguntámos ainda o que seria preciso para atingir o fim em vista.

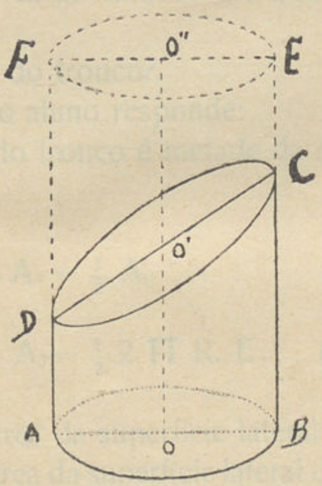
O aluno responde que é necessário que os dois troncos sejam iguais.

Repare bem na figura e veja se da sua consideração deduz a igualdade de alguns segmentos.

O aluno refletiu uns instantes e disse:

«Se levar o ponto *E* à coincidência com o ponto *A* e o ponto *F* à coincidência com o ponto *B*, acontece que *D F* coincide com *C B*.»

Outro aluno continua depois duma pequena hesitação: *E C* coincide com *A D*, ao que um novo aluno acrescentou:


F
O''
E
C
O'
D
A
O
B

A B E F é um rectângulo.

A B C D e C D E F são dois trapézios iguais e [illegible].

A C = E C e B C = D F

A seguir, alguns perguntámos se poderia fazer-se [illegible] das considerações feitas por seu condiscípulo.

O nosso estudante hesitou, como não respondia, nós preguntámos-lhe:

Que queremos nós demonstrar?

Obtida a resposta certa, preguntámos ainda o que seria preciso para atingir o fim em vista.

O aluno respondeu que é necessário que os dois trapézios sejam iguais.

[illegible] pela figura e [illegible] do seu [illegible] igualdade de alguns segmentos.

[illegible]

[illegible] ponto A [illegible] ponto E [illegible] o ponto B, acontece que D F coincide com C B.

Outro aluno continua depois duma pequena hesitação: A C coincide com A D, ao que um novo aluno acrescentou: [illegible]

$O'O''$ coincide com OO' e portanto os troncos são iguais.

Preguntámos se não faltaria mais alguma coisa.

O aluno olha para a figura, vê as igualdades escritas, e, depois dum momento de reflexão, disse satisfeito: «ah! E' que D C fica o mesmo».

Outro aluno: o cilindro é o dôbro do tronco, logo a área do cilindro é o dôbro da área do tronco.

E a área do tronco?

Um novo aluno responde:

A área do tronco é metade da área do cilindro;

Então: $A_T = \frac{1}{2} A_C$

$$A_T = \frac{1}{2}\, 2\, \pi\, R.\, E. \ldots (1)$$

sendo: A_T a área da superfície lateral do tronco;
A_C a área da superfície lateral do cilindro;
R o raio da base do cilindro;
E o eixo do cilindro.

Dissemos a outro aluno que enunciasse a questão proposta. Depois de a ter enunciado preguntámos se já tínhamos obtido o que queriamos.

O aluno diz: o eixo do cilindro é o dôbro do eixo do tronco $E = 2\, e$, sendo e o eixo do tronco. Substituindo êste valor naquela igualdade (refere-se à igualdade (1)) temos:

$$A_T \frac{1}{2} 2 \pi R. 2 e = 2 \pi R e.$$

Outro aluno: A área da superfície lateral do tronco de cilindro recto de revolução é igual ao producto da circunferência da base pelo eixo do tronco.

Três alunos expuseram o caminho seguido na demonstração — exposição que foi feita sem auxílio de figuras e sem calculo.

Capitulo segundo

«Le programme le plus beau et le plus judicieux sur le papier ne portera ses fruits que si l'enseignement qui en découle est adapté à l'esprit, au type mental des élèves.»

CLAPARÈDE

Revisão da geometria da terceira e quarta classes

A)—Geometria da terceira classe

B)—Geometria da quarta classe

A) Geometria da 3.ª classe

Começámos a nossa primeira lição no dia nove de Janeiro e até ao dia vinte de Junho tínhamos sessenta aulas para satisfazer ao programa de geometria, fazer revisões de álgebra e dar uma vez por semana, conforme foi resolvido numa reünião de classe, exercícios escritos.

Como proceder?

A nossa experiência tinha-nos dito que, pelo menos, por três maneiras podíamos proceder no nosso estágio:

Primeira — Fazer uma revisão completa de geometria da 3.ª e 4.ª classes e dar o que fôsse possível do programa da 5.ª classe.

Segunda — Considerar dada a matéria da 3.ª e 4.ª classes e começar logo com o programa da 5.ª classe.

Terceira — Repetir a traços largos o programa dos dois anos anteriores, detendo-nos sómente nas partes mais reconhecidamente importantes do programa e dar tôda a matéria da 5.ª classe.

Analisemos estas três maneiras para assim justificarmos o nosso procedimento.

Com a primeira maneira não tínhamos tempo para terminar a geometria da 4.ª nem portanto para dar a da 5.ª e, por isso, não pusemos em prática êste modo de proceder.

Com a segunda conseguíamos dar todo o programa da 5.ª, mas entendemos que prestaríamos mau serviço não tocando na matéria da 3.ª e 4.ª. Na verdade, a geometria destas duas classes contêm assuntos de importância capital e, embora os alunos os tivessem já dado nos dois anos anteriores, o facto é que a experiência de todos os dias confirma a necessidade de os rever.

Em virtude do que acabamos de expor, fômos levados a optar pela terceira maneira, mas procedendo de modo que o tempo não nos faltasse para dar integral e convenientemente a geometria da 5.ª classe.

Nestas circunstâncias fizemos a revisão dos seguintes assuntos:

a)—Proporcionalidade dos segmentos determinados por rectas paralelas em duas concorrentes e por um feixe de rectas concorrentes em duas paralelas.

b)—Igualdade e semelhança de triângulos.

c)—Teorema de Pitágoras.
d)—Angulos ao centro, do segmento, inscrito e ex-inscrito.

Na revisão desta parte do programa tivemos de nos subordinar à maneira como os assuntos tinham sido dados nas classes anteriores, tendo sido o nosso papel apenas êste: fazer recordar a muitos alunos o que estava esquecido.

B) Geometria da 4.ª classe

Como acontece com a geometria da 3.ª classe, na geometria da 4.ª temos assuntos de magna importância e que julgámos necessário rever.

Lamentamos que a geometria não esteja bem distribuida pelos diferentes anos e, tão pouco bem, que, devendo contribuir para o desenvolvimento intelectual dos nossos estudantes, e sendo um eficaz meio educativo, êste duplo fim não pode ser atingido pela enormidade de matéria que os programas exigem num tempo que não chega para se poder fazer coisa que se pareça com... ensinar.

¿Qual é o professor que não pasma ante o programa de matemática da 3.ª classe ao ver que tem de o ensinar dispondo apenas de 3 tempos semanais?

Deve notar-se que o tempo não chega para ensinar bem a álgebra e a geometria, e que é precisamente êste facto que contribui para que os alunos cheguem à 5.ª classe com uma preparação deficiente que não deixa fazer o ensino de maneira proveitosa.

Para justificarmos estas afirmações vejamos o que acontece:

Ou o aluno aprende à pressa alguma coisa de geometria, porque o ensino da álgebra ficou regularmente feito e tomou quási todo o ano, ou aprende bem a álgebra e transita para a classe seguinte sem dar geometria, o que muitas vezes acontece.

Na 4.ª classe o professor não começa o ensino da geometria desta classe sem os alunos saberem a da 3.ª, e o programa de 4.ª tem de sofrer um enorme corte.

Chegado o aluno ao quinto ano teremos na melhor das hipóteses:

Toda a álgebra sabida e a geometria da terceira classe esquecida, porque a maneira como teve de ser dada não permitiu que o estudante tivesse tempo de fixar ideas, de as alojar convenientemente no cérebro, deixando-lhe apenas noções vagas sem ligação de espécie alguma; a geometria da quarta classe dada aos bocadinhos, porque se assim não fosse nem tempo o professor teria para cumprir o programa da quinta classe.

Certamente as coisas não se passariam assim se a população dos nossos liceus fôsse constituida por estudantes previligiados; mas todos nós sabemos que em regra estes aparecem em bem pequena minoria.

Por outro lado os professores devem acompanhar, na medida do possível, os seus alunos dentro do mesmo ciclo, e muito se pode e deve esperar do seu são critério.

¿ Mas qual será o critério, por mais sensato e justo que seja, que permita ao professor poder ensinar, dentro do tempo que o horário concede, as matérias que os programas exigem ?

* * *

O programa inclui geometria métrica na 3.ª classe; mas parece-nos que os alunos desta classe não podem ainda entender limites, à parte um ou outro caso de precocidade. Seria vantajoso para o ensino que esta parte da geometria voltasse para o seu antigo logar.

E' necessário, pois, que os programas de geometria sejam revistos e que se a matéria é compressível se façam os cortes precisos, e, se o não é, se distribua de maneira mais conveniente.

Parece nos que se impõe um aumento de tempos semanais de três para cinco, para a matemática da terceira e quarta classes, caso não seja possível destinar-se-lhes uma hora diária, o que melhor seria, pelo menos para a terceira classe.

O programa de álgebra pode sofrer alguns cortes. Não reconhecemos vantagem à inclusão dos seguintes assuntos:

1.º—Casos complicados de divisão de polinómios;

2.º—m. d. c. e m. m. c. de polinómios;

3.º—Casos difíceis de simplificação de fracções.

Incluir estes estudos na terceira classe é levar ao espirito do aluno a confusão, o aborrecimento, o desânimo e a idea de que a álgebra é difícil, o que o leva a ter por esta disciplina quási horror.

Estes assuntos deveriam passar para a 6.ª classe.

Simplificado assim o programa, o seu cumprimento exíge um tempo mínimo de quatro meses; e por conseqüência, a geometria a incluir na terceira classe deveria ser só a que pudesse ser ensinada de maneira conveniente e proveitosa no resto do tempo.

Parece-nos que o ensino da matemática da 3.ª classe ficaria por êste modo, ordenado a poder cumprir o fim em vista.

* * *

Tivemos de escolher na geometria da quarta classe o programa mínimo seguinte:

a) Triedros (teoremas sem demonstração);

b) Poliedros e sua classificação;
c) Áreas e volumes.

Algumas das áreas pertenciam pelo programa à terceira classe, mas foram incluidas aqui por terem sido dadas na quarta classe.

Capitulo terceiro

« . . *la geomètrie euclidienne est et restera la plus commode:*
1.º Parce qu'elle est la plus simple; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré.
2.º Parce qu'elle s'acorde assez bien avec les propriétés des solides natürels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil e- avec lesquelles nous faisons not instruments de mesure».

POINCARÉ

Quinta classe

Concluida a revisão da matéria da 3.ª e 4.ª classes, entrámos no programa da 5.ª classe, que diz:

«Superfícies cilíndricas. Cones e cilindros de revolução. Tronco de cone e cilindro. Áreas das superfícies laterais e volumes dos cones, cilindros e troncos respectivos. Planos tangentes às superfícies cónicas e cilíndricas. Esfera, plano tangente. Área da superfície da esfera, do fuso esférico, da zona esférica e da calote esférica. Volume da esfera, do sector esférico, da camada esférica e da cunha esférica. Triângulos esféricos, seus elementos coordenadas esféricas; sistemas de coordenadas usadas em cosmografia.»

Superfícies cilíndricas e cónicas

Começámos por lembrar as noções aprendidas na segunda classe e insistimos, além das definições então aprendidas, nos seguintes pontos:

1.º—A superfície cilíndrica exige para a geratriz a dupla condição de ser sempre paralela a si mesma e de se apoiar continuamente sôbre uma linha determinada qualquer.

2.º—A superfície cónica exige a dupla condição de a geratriz passar constantemente por um ponto fixo e de se apoiar sôbre uma linha determinada qualquer.

3.º—A directriz duma superfície cilíndrica pode ser uma linha poligonal (superfície prismática), uma recta (superfície cilíndrica plana) e uma circunferência (superfície cilíndrica circular).

Demos as seguintes propriedades das superfícies cilíndricas e cónicas:

a) As secções feitas em uma superfície cilíndrica por dois planos são duas figuras sobreponiveis.

Concluimos êste enunciado considerando a propriedade correspondente para as superfícies prismáticas.

De (a) concluímos a propriedade equivalente para as secções feitas na superfície cilíndrica circular.

b) As secções feitas numa superfície cónica por dois planos paralelos são duas figuras semelhantes.

Esta propriedade proveiu da correspondente para as superfícies piramidais

De (b) concluímos a propriedade equivalente para as secções feitas numa superfície cónica circular.

c) Numa superfície cilíndrica ou cónica o plano determinado por uma geratriz e pela tangente conduzida a uma curva qualquer da superfície, no ponto em que esta curva encontra a geratriz, contêm a tangente conduzida nas mesmas condições a qualquer outra curva da superfície.

Lembrámos que êste plano assim determinado é o plano tangente.

Área da superfície lateral do cilindro de revolução

Para a determinação desta área os alunos reconheceram que ela é o limite para que tende a área lateral dum prisma regular inscrito no cilindro, quando o número de faces aumenta indefinidamente tendendo também cada uma delas para zero.

Mostrámos que o limite existe e que é único, considerando um prisma regular inscrito no cilindro e aumentando indefinidamente o número de faces; verificaram que a altura do prisma ficava constante e igual á do cilindro, tendendo o perímetro da base para um limite—circunferência da base do cilindro — e, atendendo a que em cada instante a área lateral do prisma é igual ao producto da base pela altura, os alunos concluiram que a área da superfície lateral do cilindro de revolução é igual ao producto da circunferência da base pela geratriz, isto é

$$A = 2 \pi R . g \text{ ou } A = 2 \pi R . E$$

representando A a área lateral do cilindro,
R o raio da base,
g a geratriz
E o eixo;

Como os alunos tinham já a noção de área total deduziram imediatamente a expressão da área total do cilindro.

* * *

Resolveu-se o seguinte exercício de descoberta :

Avaliar a área da superfície lateral do tronco de cilindro de revolução, considerando-o como metade dum cilindro recto.

Volume do cilindro

Determinou-se êste volume considerando-o como limíte do volume do prisma regular inscrito, cujo número de faces aumenta indefinidamente.

Como exercício de descoberta os alunos resolveram o seguinte:

Calcular o volume do tronco do cilindro de revolução, considerando-o como metade dum cilindro recto de base circular.

Área do tronco de cone de revolução

Foi ainda o método dos limites que nos conduziu à determinação desta área, considerando-a como o limite da área lateral dos troncos da pirâmide inscritos.

Como exercício de descoberta resolveu-se o seguinte:

Exprimir a área lateral do tronco de cone de revolução em função da circunferência média e da geratriz.

Volume do cone de revolução

Os alunos determinaram êste volume considerando-o como limite do volume das pirâmides regulares inscritas.

Resolveram o seguinte exercício de descoberta :

Calcular o volume do tronco de cone de revolução considerando-o como a diferença de dois cones.

A esfera

Começámos por recapitular o que se tinha dado na 2.ª classe, fazendo sempre uso de modelos. Desta maneira os alunos ficaram com ideas bem nítidas de esfera, ângulo esférico, fuso esférico, zona e calote esféricas.

Depois de termos definido esfera, superfície esférica, raio, diâmetro, plano secante, tangente e plano externo, ensinámos a determinar o raio da esfera' por meio de dois esquadros.

A seguir deduzimos :

a) Todos os raios de uma mesma esfera são iguais.
b) Duas esferas do mesmo raio são iguais.
c) Todo o diâmetro de uma esfera é igual ao dôbro do raio.
d) Um diâmetro é maior do que qualquer corda.
e) Todos os diâmetros de uma mesma esfera são iguais entre si.

f) O centro é centro de simetría da superfície esférica.

Intersecção dum plano com a esfera

Teorema—«Um plano e uma esfera não têm nenhum ponto de contacto se a distância do plano ao centro da esfera é maior do que o raio; se esta distância é menor, o plano e a esfera cortam-se segundo um circulo cujo centro é a projecção do centro da esfera sôbre o plano; se a distância é igual, há sómente um ponto comum às duas superfícies, dizendo-se que o plano é tangente à esfera.»

Para a demonstração procedemos assim:

Considerámos uma esfera, o seu centro e um plano qualquer intersectando a esfera, a uma distância do centro menor do que o raio.

Projectou-se o centro da esfera sôbre o plano; uniram-se os pontos de intersecção da es fera e do plano secante com o centro da esfera e depois com a sua projecção sôbre o plano.

Obtivémos com a primeira união obliquas iguais (raios da esfera) e da segunda concluimos que a projecção do centro da esfera era eqùidistante dos pontos da intersecção e que esta era um círculo, cujo centro satisfazia ao enunciado.

Representámos por r o raio do circulo, por R o raio da esfera e por d a distância do centro da esfera ao plano secante; e da consideração do triângulo rectângulo assim formado deduziu-se a fórmula

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

que discutimos da seguinte maneira :

Discussão	$d < R$....	o plano é secante; caso já considerado.
	$d = R$....	$r = o$; o plano é tangente.
	$d > R$....	r é imaginário; o plano é exterior.
	$d = O$....	o plano é diametral; o círculo é círculo máximo da esfera.

Teorema — Todo o plano perpendícular à extremidade dum raio da esfera é tangente à esfera.

Considerando a esfera e o plano nas condições do enunciado, viu-se que o raio era perpendicular ao plano, e que tirando do centro da esfera outra recta qualquer para o plano, esta, sendo obliqua, era maior do que a perpendicular (raio).

Considerámos ainda o plano tangente como o logar geométrico das tangentes que passam por um ponto dado.

Intersecção de uma recta com a esfera

Recordámos que

«uma recta não pode encontrar a circunferência em mais de dois pontos» e que

a) se a distância do centro da circunferência à recta é maior do que o raio, a recta não corta a circunferência: é exterior.

b) Se a distância do centro à recta é maior do que o raio, a recta corta-a em dois pontos: é secante.

c) Se a distância é igual ao raio, a recta tem um só ponto comum com a circunferência; a recta é, neste caso, tangente.

Semelhantemente para a esfera:

«Uma recta não pode encontrar a superfície duma esfera em mais de dois pontos».

Definimos depois recta exterior, secante e tangente à esfera.

A seguir demonstrámos:

«Toda a recta perpendicular à extremidade do raio duma esfera é tangente à esfera».

A demonstração fez-se partindo do teorema relativo à perpendicular e obliqua.

A seguir deduzimos:

1.º—O logar geométrico das tangentes à esfera num dos seus pontos é o plano perpendicular ao raio que passa nesse ponto; êste plano chama-se plano tangente à esfera no ponto considerado.

2.º—O logar geométrico das tangentes a uma esfera conduzidas por um ponto exterior, é um cone de revolução, que se diz cone circunscrito à esfera.

3.º—O logar geométrico das tangentes a uma esfera conduzidas paralelamente a uma direcção dada, é um cilindro de revolução, que se chama cilindro circunscrito à esfera.

Área da esfera

A determinação desta área fez-se aplicando o método dos limites; como exercício de descoberta e aplicação do mesmo método calculou-se a área da zona esférica.

Considerámos o caso particular duma base da zona se reduzir a um ponto, e assim fomos conduzidos à expressão da área da calote esférica.

A seguir demonstrou-se o

Teorema—A área do fuso está para área da esfera como o ângulo do fuso está para quatro rectos.

Concluíu-se a expressão da área em graus, grados e radianos.

Volume da esfera

A expressão do volume da esfera foi obtida aplicando o método dos infinitamente pequenos e partindo do volume da pirâmide.

O volume do sector esférico obteve-se

considerando o volume gerado pelo sector circular como o limite do volume gerado pelo sector poligonal inscrito, e exprimindo o volume do sector esférico em função do volume do cilindro de raio igual ao raio da esfera e de altura igual à altura da zona correspondente.

Da definição de camada esférica concluímos imediatamente o seu volume.

A fórmula que exprime o volume da cunha esférica deduziu-se do

Teorema—Uma cunha esférica está para a esfera inteira, como o ângulo da cunha está para quatro rectos.

Triângulos esféricos

Começámos por definir triângulo esférico e por mostrar como da definição se conclui que nenhum dos lados do triângulo pode ser igual a 180.°; os alunos reconheceram que se assim fôsse teriam uma lúnula em vez de um triângulo, e viram que no mesmo triângulo não há dois arcos maiores do que 180.° podendo haver um lado maior do que 180.°

Consideraram-se triângulos esféricos isósceles eqùiláteros, rectângulos e escalenos.

Os alunos viram que, tirando pelos vértices do triângulo três raios, se formou um triedro de vértice no centro da esfera; estabeleceram que os números que medem os lados e os ângulos dum triângulo esférico são respectivamente iguais aos números que medem as faces e os diedros do triedro ao centro correspondente.

Lembraram-se as propriedades dos triedros, e para enunciar as propriedades correspondentes aos triângulos esféricos bastou mudar «face» em «lado» e «diedro» em ângulo esférico.

Definimos excesso esférico e triângulos simétricos.

Os alunos reconheceram: «para que dois triângulos esféricos sejam iguais, é necessário que pertençam à mesma esfera ou a esferas iguais, e que os triedros ao centro sejam iguais».

Deduziram os casos de igualdade dos triângulos esféricos dos casos de igualdade dos triedros.

Coordenadas esféricas

Definiram-se as coordenadas dum ponto qualquer da superfície por meio de dois ângulos que o mesmo ponto determina.

Considerámos dois sistemas de coordenadas :

1.º—Sistemas de coordenadas azimutais.
2.º—Sistema de coordenadas equatoriais.

* * *

Resta-nos dizer ainda algumas palavras sôbre a nossa turma.

A turma tinha trinta e dois alunos incluíndo quatro repetentes; dêstes, um pediu pelo Natal transferência para o liceu de Castelo Branco, e dois nunca apareceram nas aulas, tendo perdido o ano por faltas.

Desta maneira ficámos com vinte e nove alunos que no fim do primeiro período se puderam agrupar assim :

Bons alunos.....	quatro (14 v. a 16 v.)
Alunos médios ..	quinze (10 v. a 12 v.)
Maus alunos....	dez (inferiores a 10 v.)

Entendemos que a nossa acção deveria ser orientada do seguinte modo:

Tentar conseguir que todos os maus alunos, ou pelo menos a sua maior parte, passassem para a categoria de alunos médios e depois, sendo possível, para a de bons alunos; proceder da mesma maneira para os médios, tentando fazer passar alunos de 12 valores para o grupo de bons alunos e não deixar que estes descessem.

Não pudemos conseguir tudo, mas alguma coisa se conseguiu.

No fim do segundo período e em vista das notas dadas pelo Ex.mo Metodólogo, pudemos fazer novo arranjo dos alunos da seguinte maneira:

Bons alunos.....	seis
Alunos médios...	vinte e um
Maus alunos	dois

No terceiro período desapareceram os maus alunos: um teve média e o outro passou ao ensino doméstico.

Todos os alunos fizeram exames decentes e o Ex.mo Metodólogo classificou alguns com notas elevadas.

Entende-se, é claro, que todas estas apreciações dizem sómente respeito à disciplina de matemática.

Nos exames, assim como no decorrer do ano lectivo, procurámos sempre ver se os alunos estavam de posse dos vários assuntos, não por meio de demonstrações com rigorosa perfeição, mas verificando se dominavam completamente o cálculo algébrico e tinham dos assuntos de geometria tão claro conhecimento que garantisse aos alunos da 5.ª classe a cultura geral própria a ingressarem com êxito no curso complementar de sciências e aos destinados ao curso de letras o indispensável das matemáticas do curso geral dos liceus.

SEGUNDA PARTE

Sexta classe

Capítulo Primeiro

« . . . il n'y a rien au monde, ni le témoignage d'un savant, ni la parole d'un penseur, qui ait une auctorité supérieure à l'observation directe, à l'expérimentation et à l'analyse immédiate, en un mot, au travail personnel. »

P. BAUDIN

« Le dégout ! On y pense trop peu. Voilà encore un des ces phénomènes qu'ignorent les dictionnaires pédagogiques et les cours d'éducation. »

CLAPARÈDE

a) **Considerações gerais sôbre a turma**

b) **Considerações gerais sôbre o programa**

A) Considerações gerais sôbre a turma

A turma tinha vinte e sete alunos, e como provinham de turmas diferentes e de liceus diferentes, apresentava uma heterogeneidade bastante pronunciada. As notas do primeiro período levaram-nos a classificá-la de muito fraca, e a concluir que certamente a escolha do curso complementar de sciências não representava para a grande maioria dos alunos nem o domínio da matemática do curso geral nem um gôsto marcado por esta disciplina.

Tivemos a pretensão que considerámos legítima de conhecermos o mais possível os alunos, e para o conseguirmos provocámos encontros que nos puseram diáriamente em contacto com os nossos estudantes — o que nos permitiu conhecer muitas das suas tendências, dos seus gostos, do seu moral e a explicação da sua matrícula no curso de sciências.

Os alunos na sua maioria tinham uma preparação deficiente; poucos possuiam a cultura própria a alunos dum curso complementar. Algumas notas escolhidas ao acaso nos nossos cadernos, e que passamos a expôr, bastarão para ajuizar do grau de cultura da nossa turma.

Foram bastantes os alunos que não souberam distinguir um triângulo isósceles dum eqùilátero; poucos sabiam a definição de triângulos semelhantes, e só alguns enunciaram os casos de semelhança.

Bastantes ignoravam o que era o ângulo ao centro bem como a sua medida.

Quási todos sabiam resolver uma equação mas, desde que a incógnita deixasse de ser representada por x, tinham muitas dificuldades na sua resolução.

Muitos diziam que a *área* da circunferência era $2\pi r$ e nenhum aluno sabia o que representava π.

Os casos notáveis da multiplicação de polinómios — de que muitas vezes tivémos de nos servir — eram ignorados pela grande maioria dos alunos.

Dos radicais tinham um conhecimento muito superficial. Assim, quando calculámos o valor de tg $\frac{\pi}{12}$ e se chegou à igualdade:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}$$

as dificuldades foram tremendas para desenvolver o numerador da fracção do segundo membro desta igualdade.

Onde a ignorância da turma se revelou duma maneira completa foi no conhecimento das inequações, pois muitos alunos nem sabiam a significação dos sinais > e <.

Outras notas sôbre a má preparação dos alunos temos nos nossos cadernos; não nos referiremos a mais para não tornarmos maçadora a exposição e porque as já mencionadas bastam para dar uma idea perfeita da *qualidade* do curso a quem tínhamos de ensinar trigonometria.

* * *

Postas as condições que a turma apresentava, depreende-se a necessidade de a nossa acção dever ser muito pensada e bem orientada para conseguir que o ensino resultasse, na medida do possível, proveitoso.

Por dois caminhos podíamos enveredar:

Explicar a matéria sem nos preocuparmos com o número de alunos que chegaria em boas ou pelo menos em regulares condições ao fim do ano, tendo apenas em mira dar o programa, ou adaptar o ensino ao desenvolvimento intelectual do curso sem preocupações de tempo nem do cumprimento de programa.

Pelo primeiro caminho tínhamos a certeza de que apenas três ou quatro alunos chegariam a Junho com média e pelo segundo tínhamos muitas probabilidades de aproveitar senão todos, pelo menos, muitos alunos.

* * *

O ensino, por esta maneira, decorreu com excessiva lentidão e, por vezes, receámos ter de renunciar ao estudo conveniente de algumas questões; mas, pelas razões que atrás ficam expostas e ainda atendendo a que na sétima classe os alunos voltariam a estudar trigonometria, continuámos a seguir pelo caminho traçado convencidos que a directriz escolhida era a única que poderia proporcionar a boa aprendizagem dos rapazes, a sua satisfação e, para que negá-lo, o desejo de fazermos uma experiência sem que os seus resultados redundassem em prejuízo dos nossos estudantes.

Ora tais resultados deixaram-nos plenamente satisfeitos : Chegámos ao fim do ano com os assuntos convenientemente dados a não ser a teoria das equações trigonométricas e as aplicações da trigonometria — nas quais não pudemos demorar-nos o tempo preciso—e, assim, conseguimos que os alunos transitassem para a sétima classe, senão com o programa profundamente sabido, pelo menos em condições de o poderem repetir com facilidade e êxito.

Quási todos os alunos se exprimiam muito incorrectamente: quando necessitavam de multiplicar ambos os membros duma igualdade por uma mesma quantidade, diziam: «multiplicando *os dois termos* desta igualdade por...», ou «multiplicando *tudo* por...».

Sempre que queriam tirar o valor da incógnita duma equação diziam: «tirando *daqui* o valor de...».

Por vezes foi necessário simplificar fracções, e então apontavam para o numerador e denominador dizendo: «tal e tal *anulam-se*»; outros afirmavam: «tal e tal *cortam-se*»; ao quererem significar que, por exemplo, $2 \times 0 = 0$, diziam: $2 \times 0 =$ *nada*.

* * *

Até aqui temos sómente apresentado as deficiências da turma; é justo que apresentemos também as suas virtudes.

Ainda hoje, e já lá vão quatro meses que démos a última aula, nos lembramos com saudade dêsses alunos, sempre correctos, sempre educados, manifestando sempre a maior vontade de aumentar os seus conhecimentos, e procurando constantemente seguir com o necessário interêsse e a indispensável atenção todas as nossas lições.

Se não fôssem estas excelentes qualidades não poderiamos obter o resultado que obtivemos: ver chegar ao fim do ano quási todos os alunos com média, pois só dois a não puderam conseguir.

Todos aqueles que ensinam e têm o sentimento da sua profissão, podem avaliar com justiça a legitimidade dêste nosso pequeno orgulho.

B) Considerações sôbre o programa do curso complementar

Se na primeira parte dêste relatório tivemos de fazer algumas referências aos programas de geometria, julgamos ter razões para dedicarmos algumas palavras ao programa de aritmética racional.

Certamente que esta disciplina foi incluida no curso complementar não para recordar o que se tinha aprendido na primeira classe, mas para os alunos adquirirem o desenvolvimento de raciocínio que o seu estudo permite obter. Na verdade, todo o aluno que possa ser bem orientado neste estudo e que se lhe tenha despertado o gôsto pela resolução de variadas questões adquire notável vigor intelectual.

O estudo da aritmética racional deve, em nosso entender, ser feito sem a preocupação de dar muita matéria tendo antes sempre em mira que o seja, tanto quanto possível, profundamente, de modo que o aluno fique senhor dos teoremas duma maneira rial, positiva e inteligente.

Os professores vêem diante de si programas extensos que, por mais que se esforcem, não podem dar como deve ser.

Nas observações diz o programa:

> «não será necessário estudar rigorosamente todos os capítulos da aritmética racional; o critério do professor escolherá conforme as circunstâncias os assuntos mais próprios para os fins que se tem em vista».

Ora dizer-se que não é necessário o estudo de todos os capítulos é reconhecer que por um lado o fim em vista se pode atingir estudando apenas alguns capítulos, e por outro lado que são igualmente justos os critérios de todos os professores.

Ouvimos algumas opiniões: uns entendem que basta repetir a aritmética da primeira classe, dando *algumas* demonstrações, mas escolhendo *tudo* o que fôr de mais fácil.

Não concordamos com esta opinião porque o fim que se pretende atingir com o estudo da aritmética racional não é recordar o primeiro ano, mas sim o que atrás expusemos.

Outros opinam pelo cumprimento integral do programa, achando um disparate a sua observação. Querem outros que se dê integralmente a trigonometria e a álgebra, passando para segundo plano a aritmética, e, se não houver tempo, que não se estude esta disciplina. A diferença de critérios que acabamos de apontar não pára aqui. Ela estende-se ainda á escolha das disciplinas que se devem dar nos dois anos do curso complementar. Assim, enquanto uns escolhem a aritmética e a trigonometria para a 6.ª classe e parte da álgebra para a 7.ª, com repetição d'aquelas, outros começam logo na sexta classe com a trigonometria, a seguir dão o que fôr possível de aritmética e reservam toda a álgebra para a classe seguinte.

Outros seguem o antigo programa: ensinam na 6.ª a aritmética e álgebra e na 7.ª o resto da álgebra e a trigonometria.

Como se vê, os critérios não são os mesmos e da nossa resumida exposição ressalta a barafunda do nosso ensino.

*
* *

Podemos concluir que o ensino da aritmética não atinge o fim em vista, e que urge remediar o mal dando mais unidade aos programas, remodelando-os sem fraquezas, com inteligência e sem a preocupação de transportar duma maneira rígida o que lá fóra se faz, antes adaptando às nossas necessidades e à nossa experiência, tudo quanto de melhor houver nos países que tratam a sério do problema educativo.

Por outro lado deveria legislar-se no sentido de terem os professores de organisar estatísticas do aproveitamento dos alunos, da matéria a incluir ou a excluir do programa, etc., estudando-as depois e comparando-as, de molde a tirarem-se conclusões atinentes a pôr no seu verdadeiro logar a instrução secundária do nosso país. Mas como a boa solução dêste problema não se pode procurar isoladamente, urge que a instrução primária e a superior sejam convenientemente estudadas solucionando-se a questão em conjuncto e não como se há feito, o que tem constituido uma das principais causas do insucesso de tantas e tão variadas reformas.

Não seria talvez legítimo incluir estas considerações no nosso trabalho, mas entendemos que assuntos desta importância têm o seu logar num relatório desta natureza, e julgámos um dever relatá-las para—embora duma maneira fraca e nada autorizada—podermos contribuir para que as coisas se modifiquem, e o nosso ensino atinja o grau de desenvolvimento e perfeição a que tem incontestável direito.

Capítulo Segundo

«O valor de qualquer ensino apoia-se no esfôrço necessário para vencer dificuldades».

(HIST. DA PEDAG. DE MONROE)

Exemplo duma lição

A) Preparação da lição

B) A lição

A) Preparação da lição

A lição terá por objecto:

«Representação gráfica das funções goniométricas de um angulo».

Demonstraremos que estas funções são representadas por segmentos e deveremos chamar a atenção dos alunos para o facto seguinte:

Dizer que as funções são representadas por segmentos não significa que elas são linhas mas números; que estes são os mesmos que medem os segmentos. E' necessário insistir neste assunto para que os alunos não fiquem com noções erradas.

O eixo da demonstração é a semelhança dos triângulos.

E' mister, pois, saber se os alunos estão ou não ao facto desta teoria. Para êste fim dois caminhos podemos tomar: ou no princípio da lição fazer perguntas aos alunos sôbre o assunto, ou começar a explicação e no momento oportuno informar-nos se êles estão de posse da referida matéria.

Qual dos dois caminhos escolheremos?

Para que os alunos fiquem a conhecer o assunto, qualquer dos dois caminhos serve, mas o meio de que nos deveremos servir para atingir o fim não é indiferente.

A psicologia do aluno do curso complementar é diferente da psicologia do aluno do curso geral.

Aquele sente-se homem; nas ruas da baixa, nos estabelecimentos, na estação do caminho de ferro, em toda a parte, o tratam por Snr. Dr.; tem já uma certa vaidade, e os principais factores de que depende uma lição — fadiga, interêsse e atenção — estão intimamente ligados ao modo de ser do aluno, e a êste modo de ser têm de se subordinar os meios por que impediremos que a fadiga seja atingida, por que lhe despertaremos o interêsse e a atenção. Ora se no princípio da lição fazemos preguntas sôbre um ponto que deve já ser conhecido pelo estudante, como êste ainda não viu a utilidade imediata da sua aplicação, podemos levar ao espirito do aluno a desilusão, e atingirá um grau de nervosismo que o impede de seguir convenientemente o encadeamento dos raciocínios.

Pelo segundo caminho, conservamos ou pelo menos aumentamos as condições psíquicas que o aluno tinha quando entrou para aula e, chegado o momento em que é preciso conhecer determinado assunto, o nosso estudante vê que fomos naturalmente conduzidos a formular-lhe as preguntas precisas e sente a necessidade de conhecer o que é indispensável para poder continuar a seguir a demonstração *que já o tinha interessado*.

Em virtude do que fica exposto seguiremos pelo segundo caminho.

—Outros assuntos necessitam os alunos de conhecer:

Definição de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e tangente; sôbre estas definições devem ser interrogados logo no princípio da lição porque foi matéria explicada no último dia de aula.

B) A lição

Depois de várias preguntas sôbre as definições de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente de um ângulo traçámos na pedra uma circunferência de centro 0 e considerámos dois eixos coordenados rectangulares cujo ponto de encontro coíncidisse com o centro da circunferência.

Tínhamos visto que as funções goniométricas de um arco, ou ângulo correspondente, são independentes do raio do arco; e interessa-nos ver agora como se comportam essas funções se escolhermos uma unidade de medida conveniente para o raio; consideremos a circunferência descrita com um raio igual à unidade linear de medida ; chamaremos a esta circunferência ou a êste círculo, circunferência ou círculo trigonométrico.

Interrogados dois alunos e obtida resposta certa inquirimos da razão que nos permitiu podermos supôr a circunferência descrita com um raio igual à unidade linear de medida.

Considerámos a origem dos arcos em A e chamámos a atenção dos alunos para o facto do eixo das abcissas passar pelo ponto A.

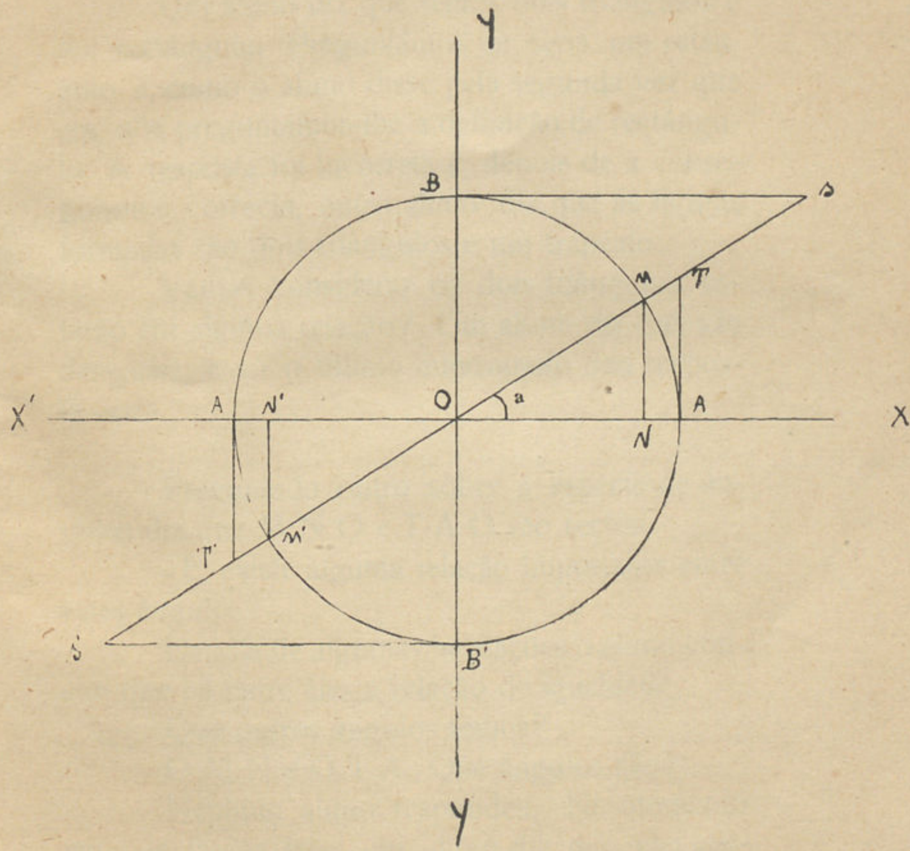
A partir dêste ponto e no sentido positivo dos arcos marquemos o arco AM, menor do que $\frac{\Pi}{2}$, e unamos M com O; vamos baixar de M a perpendicular MN ao eixo das abcissas. Um aluno préviamente indicado dictou o valor de sen a e nós escrevemos no quadro: sen a $= \frac{MN}{OA}$, mas como OA $=$ 1 outro aluno disse: sen a$=$M N.

Dissemos à classe que íamos ver se sabia a significação dêste resultado.

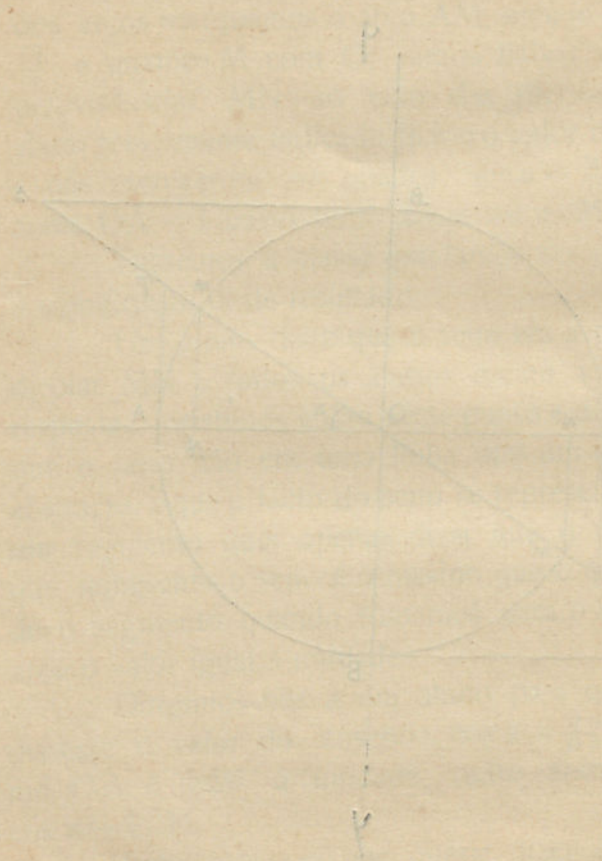
Um aluno disse que o seno era a perpendicular MN e todos os alunos deram a mesma resposta. Insistimos então neste ponto e dissemos que o seno não era uma linha mas um número abstracto, e que o facto do seno se representar por um segmento quer apenas dizer que o número que representa o seno é o mesmo que o que mede o segmento quando tomamos para o raio do arco o valor igual à unidade.

Dirigimos-nos a um aluno para que nos dissesse o valor do coseno: cos a $= \frac{ON}{OA}$ e como OA é igual à unidade, outro aluno diz: cos a $=$ O N.

Preguntámos o que queria dizer êste resultado; o aluno nada responde e só o quinto interrogado é que deu resposta certa. De novo insistimos neste ponto e certificámos-nos que, desta vez, o assunto ficou perfeitamente esclarecido.



Y
B
S
M
T
X′
A
N′
O
a
A
X
N
T′
M′
S′
B′
Y



Tiremos agora do ponto A, origem dos arcos o segmento da tangente A T até encontrar no ponto T o raio O M e vejamos as figuras que obtivemos com esta construção.

Um aluno diz que temos dois triângulos e um rectângulo. Preguntámos se seria um retângulo e, como o aluno disse pela segunda vez que era, nós preguntámos-lhe a definição de rectângulo. A resposta foi incorreta e, depois de a conseguirmos correcta, outro aluno diz que as figuras formadas são dois triângulos e um trapézio.

Vamos considerar os dois triângulos; estarão em alguma relação? Um aluno diz que são desiguais, e só o último interrogado deu resposta certa.

Preguntado outro sôbre a espécie de ângulos diz que M N O e T A O são rectos.

¿E existe alguma relação importante entre estes ângulos?

Depois de algumas hesitações o aluno conclui que há entre êles a relação de igualdade.

Que outros ângulos temos?

O M N e O T A. Que ângulos são?

Nenhum aluno respondeu. No momento em que íamos falar, um aluno diz que são correspondentes e, portanto, iguais. Outro diz que o ângulo em O é comum aos dois triângulos.

¿O que podemos concluir das considerações que acabamos de fazer sôbre os ângulos dos dois triângulos? Que os dois triângulos têm os ângulos iguais, diz um aluno.

Como se chamam dois triângulos nestas condições? Catorze alunos sucessivamente interrogados não respondem e só o décimo quinto diz serem os triângulos semelhantes.

Dissemos-lhe que enunciasse os casos de semelhança mas o aluno não responde. Repetimos a mesma pregunta a quási toda a turma e só, quando já faltavam poucos alunos para interrogar é que, obtivemos dum a resposta certa.

Alguns repetiram o enunciado e o assunto ficou suficientemente esclarecido.

Um aluno diz:

Ao ângulo *O*, no triângulo M O N, opõe-se o lado M N; ao mesmo ângulo no triângulo T O A opõe-se o lado A T e a razão dos lados é $\frac{MN}{AT}$

Outro aluno continua:

Ao ângulo M N O opõe-se o lado O M;

Ao ângulo T A O opõe-se o lado O T; logo $\frac{OM}{OT}$ é a razão dos lados.

Pela intervenção dum novo aluno estabeleceu-se a razão $\frac{ON}{OA}$, e pôde escrever-se:

$$\frac{MN}{AT} = \frac{OM}{OT} = \frac{ON}{OA}$$

O que representa M N? Um aluno diz que representa o seno de a; com preguntas semelhantes para A T, O M, O T, O N e O A chegou-se a

$$\frac{\text{sen a}}{\text{A T}} = \frac{1}{\text{O T}} = \frac{\cos a}{1} \quad \text{donde}$$

$$\text{AT} = \frac{\text{sen a}}{\cos a} = \text{tg a}$$

$$\text{OT} = \frac{1}{\cos a} = \sec a$$

Chamámos a atenção dos alunos para o facto dos segmentos que representam as tângentes serem contados sôbre uma paralela ao eixo dos Y Y, que é o eixo a que poderemos chamar, como já foi dito, o eixo dos senos.

Vejamos agora quais são os segmentos representativos da cossecante e da cotângente; vamos demonstrar que estes segmentos são respectivamente O s e Bs, que se obtiveram prolongando O M até encontrar no ponto *s* a tângente, á circunferencia, conduzida por B.

Os alunos reconheceram que os triângulos M N O e s B O são semelhantes e um aluno escreveu, já sem hesitar:

$$\frac{\text{O M}}{\text{O s}} = \frac{\text{M N}}{\text{O B}} = \frac{\text{O N}}{\text{B s}}$$

substituindo pelos seus valores obtivémos:

$$\frac{1}{O\,s} = \frac{\text{sen a}}{1} = \frac{\text{cos a}}{B\,s} \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{O\,s} = \text{sen a} \quad \text{e} \quad \frac{\text{cos a}}{B\,s} = \text{sen a} \quad \text{donde}$$

$$O\,s = \frac{1}{\text{sen a}} = \text{cosec a}\ ,\ B\,s = \frac{\text{cos a}}{\text{sen a}} = \text{cotg. a.}$$

Para terminar a representação das funções por segmentos restava mostrar aos alunos que — tendo sido feitas todas as demonstrações considerando a extremidade do arco no primeiro quadrante— esta representação é ainda legítima mesmo que a extremidade do arco não esteja no primeiro quadrante.

Entendemos que bastava fazer-lhes a demonstração para um outro quadrante; para isso considerámos a extremidade do arco no terceiro quadrante, em M'; um aluno fez as construções precisas e obteve triângulos semelhantes; considerando os triângulos M' O N' e B' O s' reconheceu a sua semelhânça e deduziu:

$$\frac{O\,M'}{O\,s'} = \frac{M'\,N'}{O\,B'} = \frac{O\,N'}{B'\,s'} \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{O\,s'} = \frac{-\text{sen a}}{1} = \frac{-\text{cos a}}{B'\,s'} \quad \text{donde}$$

$$O\,s' = \frac{1}{-\text{sen a}} = -\text{cosec a}\ ,\ B'\,s' = \frac{-\text{cos a}}{-\text{sen a}} = \text{cotg. a}$$

Capítulo Terceiro

«Prenez le contre-pied de l'usage et vous ferez presque toujours bien».

ROUSSEAU (Émilie, II)

«O papel da história, na educacão da mocidade, é dos mais importantes. Nenhuma disciplina fica bem ensinada sem um esbôço, embora rápido, da história da sua formação e desenvolvimento».

A) Breve resenha histórica de trigonometria

B) Algumas notas sôbre matemáticas e matemáticos portuguêses

A) Breve resenha histórica de trigonometria.

A matemática existe desde os mais remotos tempos e, como os povos mais antigos de que temos conhecimento são os Caldeus e os Egípcios, podemos dizer que a matemática existe pelo menos desde a existência dêstes povos. Os diferentes ramos das matemáticas não apareceram ao mesmo tempo ; a história da sua formação e desenvolvimento não cabem dentro duma lição desta classe e, por isso, limitar-nos-hemos a fazer um resumo do que foi a trigonometria, desde o seu princípio até aos nossos dias, completando esta resenha com algumas notas que julgamos interessante levar ao seu conhecimento.

A geometria apareceu pela necessidade da divisão das terras e, rudimentar antes dos gregos, adquiriu com estes bastante desenvolvimento, tendo sido Thales quem especialmente lhe imprimiu o carácter duma verdadeira sciência. A êste matemático, que viveu há 2568 anos e fundou na

Grécia uma escola—a Escola Jónica—, atribuem-se-lhe várias proposições de geometria relativas ao triângulo e algumas propriedades do círculo, havendo todas as probabilidades de ter inventado a seguinte proposição: «o ângulo inscrito num semi-círculo é recto». Tão satisfeito ficou com a sua descoberta que sacrificou um boi aos deuses imortais. Havia muito na antiguidade o costume dêstes sacrifícios; assim, Pitágoras, que foi discípulo de Thales, e que os senhores conhecem atravez do teorema que tem o seu nome, entusiasmado e contente pelas suas descobertas, ofereceu aos deuses o sacrifício de cem bois. Pitágoras fundou a Escola Pitagórica e os seus discípulos não podiam revelar o ensino que recebiam.

Por aqui se vê as dificuldades que houve para se saber ao certo a contribuição que Pitágoras deu à sciência geométrica. Os pitagóricos — nome por que eram conhecidos os alunos da escola — usavam como sinal de reünião um pentágono estrelado cujas letras dos vértices formavam na língua grega uma palavra correspondente à nossa palavra *saúde*.

Outros matemáticos se seguiram merecendo especial menção Hipócrates, que, alêm de fazer um estudo sôbre figuras semelhantes, descobriu algumas propriedades relativas ao círculo.

Hipócrates preocupou-se com a resolução do problema da quadratura do círculo, que na

Grécia se procurava resolver usando apenas régua e compasso visto só considerarem certas as soluções obtidas por êste processo.

Nem Hipócrates nem outros depois dêle o conseguiram, e só há um século se demonstrou que o problema era impossível pelo processo indicado.

Se Hipócrates não o solucionou, nem por isso foram improfícuos os seus trabalhos dirigidos neste sentido, pois o conduziram à descoberta das chamadas lúnulas de Hipócrates.

E' por esta razão e outras semelhantes, que a história das matemáticas nos apresenta, que eu lhes aconselho não deixarem nunca de atacar um problema, embora não se sintam com fôrças para o resolver, porque se o não conseguirem, pelo menos realisam trabalhos que lhes permitem ficar mais senhores da matéria ; e podem até ser conduzidos a questões novas, contribuindo os seus esforços para adquirirem aquela confiança em si mesmos que é necessária a espíritos que querem ter cultura.

Temos agora o dever de dedicar algumas palavras a Platão, nascido em Atenas 429 (a. C.).

Fundou nesta cidade uma escola—A Academia — em cuja porta colocou a seguinte inscrição: «Que ninguêm entre na minha escola se não sabe geometria». Platão contribuiu para a sciência geométrica com a invenção dos logares geométricos e deu precisão às definições de ponto, linha, superfície e volume; todavia foi maior filósofo do que matemático, considerando no entanto o estudo da matemática, e especialmente o da geometria, o treino fundamental para as meditações filosóficas. Ora como, por outro lado, a filosofia fornece os métodos de raciocínio necessários à matemática, aparece uma marcada interdependência entre estas duas disciplinas.

No estado actual da sciência não há ramo scientifico que não assente no seu conhecimento e torna-se necessário — não só por uma questão de dever profissional, mas tambêm por probidade intelectual — que o homem conheça o mais profundamente possível as questões da sua especialidade, e tenha de *tudo* uma certa cultura para que se possam formar as várias *élites* que orientam e dirigem os povos. Ora homem verdadeiramente culto é só aquele a quem são familiares os métodos filosóficos e matemáticos; e daí a importância que tem o seu estudo.

Tem agora o seu logar Euclides.

Este célebre matemático da escola da Alexandria escreveu os elementos de geometria. Para ajuizar da importância dêsses elementos, basta dizer que não só fizeram sucesso na sua época mas que este sucesso ainda se estende até nossos dias.

Com os progressos da sciência houve necessidade de modificar os métodos de demonstração, torná-los mais intuitivos; assim, por exemplo, a sobreposição de figuras, que os Elementos não incluem, é hoje dum largo uso, como viram na geometria que estudaram. Nem todas as proposições são de Euclides mas êste sábio teve não só o mérito de muitas descobertas, mas ainda o de ordenar de maneira conveniente o que outros, como Pitágoras, Arquimedes, etc., tinham escrito.

Vou agora falar-lhes de Blaise Pascal — exemplo notável de precocidade — que aos 11 anos escreveu a sua primeira memória. Pascal fôra proíbido por seu pai de estudar matemática, em virtude de desejar dirigi-lo de preferência para o estudo das línguas. Um dia Blaise pediu a seu pai que lhe dissesse do que tratava a matemática. O pai respondeu-lhe que a matemática procurava construir correctamente as figuras e determinar as suas proporções. Acrescentou que não lhe preguntasse mais nada e de novo o proíbiu de consultar livros de matemática. O pai tinha tido o cuidado de lhe esconder todos os livros desta especialidade.

Pascal nas horas de recreio trocava as brincadeiras próprias da sua idade por cogitações matemáticas no veemente desejo de pôr em prática o que tinha compreendido da explicação de seu pai. E assim, na sala de recreio, traçava, com carvão, circunferências e triângulos, procurando que estes tivessem os lados e os ângulos iguais e aquelas fossem perfeitamente redondas.

Caso interessante e admirável: o nosso pequeno sábio, unicamente pelo seu esfôrço, descobriu as 31.as primeiras proposições dos Elementos de Euclides. No dia em que procurava formular a 32.a foi surpreendido por seu pai. O assombro dêste foi extraordinário, a ponto de lhe dar os Elementos de Euclides que Pascal leu e compreendeu sem auxílio de ninguem. Aos 16 anos escreveu um tratado sôbre Cónicas.

Clairault e Galois são também exemplos notáveis de precocidade scientífica.

* * *

Os matemáticos entregavam-se de alma e coração às especulações abstractas e pouca importância ligavam à prática; no entanto é fóra de dúvida que pelo menos os gregos não ignoravam os princípios da trigonometria que aos próprios Egípcios foram familiares. A astronomia forneceu aos gregos um campo vasto para o desenvolvimento da trigonometria. Hipparco explicou a percepção dos equinócios e fixou a posição do ponto vernal; preparou o campo para que outros depois dêle pudessem produzir trabalhos da maior importância. Hipparco criou a trigonometria, mas foi Ptolomeu quem escreveu o seu primeiro tratado e quem dela e da Geometria fez uma larga aplicação à Astronomia.

Esta Trigonometria usava as cordas em

vez dos senos; inscrevendo um triângulo num círculo, Albatégnio notou que os ângulos do triângulo inscrito tinham por medida metade dos arcos compreendidos entre os seus lados — eram ângulos inscritos.

Êste facto teve a maior importância porque os gregos conheciam as razões dos lados do triângulo por meio dos ângulos e estes por meio daqueles, mas usando táboas que davam os comprimentos das cordas correspondentes aos arcos desde 0 a 2π, em partes do raio.

Albatégnio fazia corresponder, nas táboas, as cordas dos arcos duplos, aos arcos, mas, para não considerar dois sistemas de arcos, empregava as suas metades, que se obtêm baixando da extremidade do arco simples a perpendicular sôbre o diâmetro que passa pela outra extremidadc e que, como sabem, representa o seno.

Deve-se também a Albatégnio a idea das tangentes, sendo êle o primeiro que empregou a expressão $\frac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$. Estas e as outras funções introduzidas por Wefa tiveram origem geométrica, mas só no século XVIII é que Mayer mostrou a sua natureza algébrica. No século XV, princípios do século XVI, atingiu, com Régiomontano, a trigonometria o seu maior desenvolvimento com a publicação do seu *tratado dos triângulos.*

Foi ainda no século XVI que Tycho-Brahé —muito entregue aos seus trabalhos astronómicos, que mais tarde deviam conduzir Képler à invenção das leis que têm o seu nome, e que os senhores já conhecem da geografia — reduziu os cálculos trigonométricos a adições e subtracções; mas êste método não alcançou o sucesso que o seu autor esperava porque a descoberta dos logaritmos, levada a efeito por Néper, apresentava mais vantagens. E assim, com alguns teoremas que apresentou, a trigonometria atingiu quási a forma que hoje tem.

No século XVIII Euler contribuiu tambêm para o desenvolvimento da trigonometria expondo a verdadeira teoria das funções goniométricas.

*
* *

Feito êste breve resumo histórico, cabe agora a vez ao nosso país. Mostrar-lhes-hei em breves palavras que não temos de que nos envergonhar ante os exemplos dos sábios apontados e que tambêm a nossa terra contou e conta eminentes homens de sciência.

B) Algumas notas sôbre matemáticas e matemáticos portugueses.

As matemáticas começaram a ser estudadas entre nós no reinado de D. Afonso IV.

A princípio não tiveram outro fim senão predizer o futuro por meio dos astros, mas o génio guerreiro dos portugueses e o seu espírito de conquista em breve ia fazer convergir o estudo da matemática para um fim mais elevado e mais scientífico. E assim nos aparece o Infante D. Henrique dirigindo estudos de navegação e cartografia.

O estudo da geometria desenvolveu-se muito e nomes ilustres aureolaram a sua e nossa história. Citaremos principalmente Fernando de Magalhães, Francisco de Melo e Simão Fernandes. A primeira conseqùência notável do estudo da geometria foi a descoberta do caminho marítimo para a Índia.

A geometria adquiriu um grande desenvolvimento em Coimbra, desde D. João III.

Vários portugueses se distinguiram neste período, mas o maior de todos foi Pedro Nunes, que não só foi o maior matemático em Portugal mas dos maiores da Europa.

Escreveu várias obras e inventou o nónio. A França pretende que êste aparelho tivesse sido inventado por Vernier; mas a verdade é que o inventor foi o nosso glorioso Pedro Nunes, e, embora se não possa esclarecer devidamente a questão por terem sido os seus instrumentos destruidos pelos religiosos beneditinos, a nós cabe-nos o dever de pugnar em nome da pátria pela honra e memória do célebre sábio, reclamando para êle a glória de inventor.

Francisco Pimentel, de rara cultura matemática, deixou um manuscrito sôbre geometria.

No século XVIII viveu Manuel António Meireles que escreveu o *tesouro matemático*.

Neste século temos ainda dois nomes ilustres que muito contribuiram para o desenvolvimento da sciência matemática portuguêsa: José Monteiro da Rocha e Anastácio da Cunha.

O primeiro foi especialmente um prático e entregue a problemas astronómicos apresentou soluções interessantes. Entre os estudos que o preocuparam pode citar-se o problema da predição dos eclipses do sol e da lua e o movimento dos cometas.

Organisou o ensino da matemática em Portugal e o observatório astronómico desta cidade. Foi professor da nossa Universidade e seu Vice-Reitor honorário, título que lhe foi concedido por D. Maria I.

Anastácio da Cunha foi nomeado professor da Universidade pelo Marquês de Pombal, mas, perseguido pela inquisição, julgado e condenado teve de abandonar a regência da cadeira de geometria.

Embora parte da pena lhe tivesse sido perdoada passou por transes dolorosos que não lhe deram aquela paz e sossêgo de que um espírito de investigação necessita. Desta maneira não pôde produzir tanto quanto era lícito esperar. Em todo o caso o seu grande valor manifesta-se no livro que nos legou sob o título: *Princípios Matemáticos*, que se tornou conhecidissimo no nosso país e no estrangeiro. Foi um dos grandes precursores dos geómetras do século XIX.

Neste século fulgurou com invulgar talento outro matemático—Daniel da Silva—dos mais célebres, e que muito honrou a sciência matemática e especialmente a geometria.

Produziu trabalhos de subido valor que foram muito elogiados no estrangeiro chegando um sábio italiano a classificar como genial a obra dêste eminente geómetra.

Oficial de Marinha e formado em matemática foi lente da Escola Naval e sócio da Academia.

A Daniel da Silva seguiu-se o Senhor Doutor Francisco Gomes Teixeira, que produziu uma monumental Obra Matemática, traduzida em algumas línguas estrangeiras. Foi professor das Universidades de Coimbra e Pôrto e é hoje Reitor desta última.

Numa das salas da faculdade de sciências —nos Gerais,—a qual tem o seu nome, existe um busto dêste eminente matemático. Quiz desta maneira a nossa Universidade prestar homenagem ao sábio professor que foi um dos seus mais ilustres ornamentos.

Outro distincto professor contou Coimbra: o Doutor Luciano Pereira da Silva, assassinado por um louco, há três anos, em Caminha.

Entre os seus trabalhos avultam os de investigação histórica a que devotadamente se consagrou nos últimos anos. A sua notável obra, a Astronomia dos Lusíadas, causou um extraordinário sucesso, esgotando-se ràpidamente.

O Doutor José Bruno de Cabedo foi um dos mais ilustres e categorisados professores da nossa Universidade. Profundamente conhecedor dos assuntos matemáticos o seu nome é citado pelo Senhor Doutor Gomes Teixeira e o seu espírito culto e interessante, revelava-se formidavelmente superior a todos quantos podiam ter a felicidade do seu convívio.

Outros categorisados professores deveriam ter aqui o seu logar mas o tempo não nos sobeja. Não podemos, no entanto, terminar sem prestar o nosso humilde culto de homenagem ao Senhor Almirante Gago Coutinho.

Sábio inconfundível e português ilustre, os seus trabalhos scientíficos conduziram-no à invenção do sextante que lhe permitiu poder escrever uma das páginas mais brilhantes da nossa história.

Vejam como o Portugal d'hoje é ainda o legítimo representante dêsse Portugal de outrora que ofuscou o mundo com as suas riquezas, com o seu poderio e com os seus feitos de descobertas e conquistas.

Outros homens de sciência, dos muitos que ficaram por enumerar, contámos e contamos. Não podemos fazer referência a todos, pois a lista seria muitissimo longa, mas não devemos terminar sem lhes falar num dos mais distinctos alunos dêste liceu e que é hoje professor do Instituto Superior Técnico: o Senhor Doutor Aureliano de Mira Fernandes. Sua Ex.ª, que é o orientador de quási todos os que laboram em assuntos de matemática, tem já, apesar de relativamente novo, muitos trabalhos publicados, e a sua colaboração em revistas extrangeiras da especialidade — que lhe é insistentemente pedida pelos mais eminentes sábios de vários países — tem contribuido para que o seu nome, envolto numa auréola de consideração e respeito, seja pronunciado sempre que se quere apresentar o exemplo dum homem que atingiu o alto saber matemático.

*
* *

Pelas singelas palavras que pudemos dedicar aos sábios portugueses vêem que o nosso país contou em todos os tempos verdadeiros homens de sciência, que não só atingiram o mesmo grau de investigação e saber de sábios estrangeiros, mas até por vezes os ultrapassaram.

Queiram os senhores tomá-los para exemplo constante e sejam, na medida do possível, os continuadores de homens tão eminentes, colocando-se em condições de só se sentirem felizes com a consciência do dever cumprido, para que à sombra da bandeira da honra e do trabalho em toda a parte se possam orgulhosamente dizer portugueses.

OUTUBRO DE 1928

ÍNDICE

Primeira Parte

Segunda Parte

Sexta classe

ERRATAS

Apesar do maior cuidado na revisão das provas, não nos foi possível conseguir que êste relatório saísse limpo.

Além de trocas de accentos encontram-se, por vezes, palavras trocadas; assim, por exemplo, na página 38 conhecimentos por assuntos; na página 69 e—por et, e not, por nos; na página 112 conservamos ou pelo menos aumentamos por aumentamos ou pelo menos conservamos; na página 121 Émilie por Émile; na página 125 cabem por cabe; na página 136 Reitor por Reitor honorário; etc.

Pedimos, pois, desculpa ao Ex.^{mo} Júri e àqueles que por ventura nos lerem.