JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XV—N.º 1

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1902

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc

VOLUME XV

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1902

DUAS CLASSES DE NUMEROS

POR

J. B. D'ALMEIDA AREZ

(Tenente de engenharia)

---

1. A expressão geral da differença d'uma ordem qualquer $\Delta^n u_0$ em funcção das quantidades

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ u_n$$

é dada pela formula

$$\Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \ldots\ldots - (-1)^n \frac{n}{1} u_1$$

$$+ (-1)^n u_0.$$

Fazendo n'esta formula

$$u_n = x^n$$

e dando a x os valores

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, i, \ldots\ n$$

teremos

$$\Delta^i 0^n = i^n - \frac{i}{1}(i-1)^n + \frac{i(i-1)}{1.2}(i-2)^n \ldots + (-1)^n \times 0^n.$$

Resultam tambem da theoria das differenças as egualdades (*) seguintes:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta^n 0^n = 1.2.3 \ldots n = n! \\ \Delta^{n+1} 0^n = 0. \\ \Delta^{n+2} 0^n = 0 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

O calculo dos numeros $\Delta^i 0^n$ póde ser feito, dispondo-o de modo indicado no quadro seguinte (**) onde para exemplificar fizemos $n=5$:

x	x^5	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	0	1	30	150	240	120
1	1	31	180	390	360	
2	32	211	570	750		
3	243	781	1320			
4	1024	2101				
5	3125					

Os numeros 1, 30, 150, 240, são os valores de $\Delta^1 0^5$, $\Delta^2 0^5$, $\Delta^3 0^5$, $\Delta^4 0^5$, $\Delta^5 0^5$.

(*) Vide por ex.: *Serret. Alg. Sup.*, tomo I.
(**) *Serret.*, loc. cit.

2. Para formar um quadro só dos $\Delta^i 0^n$, o processo adoptado seria moroso, e por este motivo vou apresentar um outro, fundado n'uma relação que passo a demonstrar.

Com effeito tem-se

$$\Delta^i 0^n = i^n - \frac{i}{1}(i-1)^n + \ldots \pm \frac{i(i-1)\ldots(i-m+1)}{m!}(i-m)^n$$

$$\mp \ldots + (-1)^n 0^n$$

$$= i\left[i^{n-1} - \frac{i}{1}(i-1)^{n-1} \ldots\right.$$

$$\left.\pm \frac{i(i-1)(i-2\ldots(i-m+1)}{m!}(i-m)^{n-1} + \ldots\right] +$$

$$+ i\left[(i-1)^{n-1} - \frac{(i-1)}{1}(i-2)^{n-1} \ldots\right.$$

$$\left.\mp \frac{(i-1)\ldots(i-m+1)}{(m-1)}(i-m)^{n-1} \pm \ldots\right]$$

isto é (*)

$$(3) \quad \Delta^i 0^u = i\,\Delta^i 0^{n-1} + i\,\Delta^{i-1} 0^{n-1} = i\left[\Delta^i 0^{n-1} + \Delta^{i-1} 0^{n-1}\right],$$

formula recorrente, que permitte organisar rapidamente uma tábua dos numeros $\Delta^i 0^n$, empregando uma somma e uma multiplicação

(*) Vide por ex.: Cesaro, *Analisi algebrica.*

TABOA I

Dos numeros $\Delta^i 0^n$

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
$\Delta^i 0^1$	1								
$\Delta^i 0^2$	1	2							
$\Delta^i 0^3$	1	6	6						
$\Delta^i 0^4$	1	14	36	24					
$\Delta^i 0^5$	1	30	150	240	120				
$\Delta^i 0^6$	1	62	540	1560	1800	720			
$\Delta^i 0^7$	1	126	1806	8400	16800	15120	5040		
$\Delta^i 0^8$	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	—
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

3. Da relação (3) deduz-se

$$\frac{\Delta^i 0^n}{i!} = i \times \left(\frac{\Delta^i 0^{n-1}}{i!}\right) + \left[\frac{\Delta^{i-1} 0^{n-1}}{(i-1)!}\right],$$

formula muito propria para o calculo dos numeros $\frac{\Delta^i 0^n}{i!}$ (*) e por meio da qual calculámos a tabella seguinte, empregando uma multiplicação e uma addição.

(*) Considerados por d'Ocagne (*American Jornal of Mathematics*, 1887).

TABOA II

Dos numeros $\frac{\Delta^i 0^n}{i!}$

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
$\frac{\Delta^i 0^1}{i!}$	1								
$\frac{\Delta^i 0^2}{i!}$	1	1							
$\frac{\Delta^i 0^3}{i!}$	1	3	1						
$\frac{\Delta^i 0^4}{i!}$	1	7	6	1					
$\frac{\Delta^i 0^5}{i!}$	1	15	25	10	1				
$\frac{\Delta^i 0^6}{i!}$	1	31	90	65	15	1			
$\frac{\Delta^i 0^7}{i!}$	1	63	301	350	140	21	1		
$\frac{\Delta^i 0^8}{i!}$	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nota. — A relação (4) mostra que os numeros $\frac{\Delta^i 0^n}{i!}$ *são todos inteiros*, isto é

$$\Delta^i 0^n \equiv 0 \pmod{i!}.$$

Os numeros $\Delta^i 0^n$ e os $\frac{\Delta^i 0^n}{i!}$ apparecem em muitas questões de analyse, e tendo nós já mostrado como pelo emprego das relações (3) e (4) se podem calcular, vamos ver que estes numeros apparecem sempre, quando se tracta de obter as derivadas d'uma funcção $f(e^x)$ para $x=0$; é isso o que succede no calculo dos numeros de Bernoulli, Euler, etc.

4. *Derivada de ordem* n *de* f(e^x).

Seja u uma funcção de x e $f(u)$ uma funcção de funcção que designaremos por y.

A derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x é dada pela formula (*)

$$(5)\qquad y^{(n)}=\sum\frac{n!\,\dfrac{d^iy}{du^i}(u')^\alpha(u'')^\beta\dots(u^{(n)})^\lambda}{\alpha!\,\beta\dots\lambda!\,(2!)^\beta\dots(n!)^\lambda}$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores de $\alpha, \beta \dots \gamma$, que satisfazem a equação

$$\alpha+2\beta+\dots n\lambda=n,$$

e onde é

$$i=\alpha+\beta+\dots\lambda.$$

Fazendo $u=e^x$, d'uma nota do sr. Gomes Teixeira conclue-se que a formula (5) pode escrever-se (G. Teixeira, *Calculo Differencial*, 3.ª edição, pag. 228):

$$(5')\qquad y^{(n)}=\sum_{i=1}^{i=n}f^{(i)}(e^x)\frac{e^{ix}}{i!}\left[\frac{d^n(e^x-1)^i}{dx^n}\right]_{x=0}$$

(*) Bertrand, *Calculo Differencial*, pag. 308; Gomes Teixeira, *Calculo Differencial*, cap IV. Vide principalmente para a deducção da formula (5′) as observações da pag. 228 d'este ultimo livro.

e para $x=0$

$$y_0^{(n)}=\sum_{i=1}^{i=n} f^{(i)}(1)\cdot\frac{1}{i!}\left[\frac{d^n(e^x-1)}{dx^n}\right]_{x=0}$$

Mas tem-se

$$\left[\frac{d^n(e^x-1)^i}{dx^n}\right]_{x=0}=i^n-\frac{i}{1}(i-1)^n+\frac{i(i-1)}{1.2}\times(i-2)^n-\ldots$$

isto é

$$(6)\qquad \left[\frac{d^n(e^x-1)^i}{dx^n}\right]_{x=0}=\Delta^i 0^n,$$

d'onde a formula de Herschell

$$(7)\qquad y_0^{(n)}=\sum_{i=1}^{i=n} f^{(i)}(1)\frac{\Delta^i 0^n}{i!}.$$

A formula (6) podia servir para definir os numeros $\Delta^i 0^n$ e em particular podiamos deduzir sem recorrer á theoria das differenças as formulas (2).

A formula (7) mostra que os numeros $\Delta^i 0^n$ e os $\frac{\Delta^i 0^n}{i!}$ apparecem na derivação de $f(e^x)$ para $x=0$, e é este o motivo porque apparecem nos problemas que em seguida vamos tractar.

5. *Coefficientes da formula que dá a derivada de ordem qualquer de funcção de funcção.*

Seja $y=e^u$, $u=e^x-1$; as formulas (8) e (7) dão

$$(8)\qquad y_0^n=\sum\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda\,(2)^\beta\ldots(n!)^\lambda}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\Delta^i 0^n}{i!},$$

formula esta que permitte calcular a somma d'estes coefficientes por meio da tabella II do n.° 2.

Da egualdade anterior deduz-se attendendo ás formulas (4) e (2)

$$y_9^n=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\Delta^i 0^n}{i!}=\sum_{i=1}^{i=n-1} i\times\frac{\Delta^i 0^{n-1}}{i!}+\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{\Delta^{i-1} 0^{n-1}}{(i-1)!}$$

e a desegualdade

$$\frac{y_0^n}{y_0^{n-1}}<n$$

ou

$$\frac{y_0^n}{n!}<\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}<\frac{y^{n-1}}{(n-2)!}<\ldots<\frac{y_0''}{2!}=1.$$

Mas por outro lado tem-se

$$y'=y\,.\,e^x,$$

e a formula de Leibnitz dá para $x=0$, attendendo ás desegualdades anteriores,

$$\frac{y_0^n}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{i=n-1}\binom{n-1}{i}\,y_0^i<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{(n-1-i)!},$$

e portanto

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n!}\,y_0^n=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\Delta^i 0^n}{i!}=0,$$

o que demonstra o theorema de O. Ramos e C. Faria (*) isto é,

(*) *Jornal de Sciencias Math. e Astron.*, tomo VII.

a *somma de todos os coefficientes da formula* (5) *dividida pela factorial* n ! *tende para zero quando* n *augmenta indefinidamente.*

6. *Numeros de Bernoulli.* — Definindo os numeros de Bernoulli pela egualdade

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} y_0^{(n)}$$

onde $y_0^{(n)}$ é o valor da derivada de ordem n da funcção

$$y = (1 + e^x)^{-1}$$

para $x = 0$, resulta (*) que os numeros bernoullianos são nullos quando n é par. Applicando a formula (7) a esta ultima funcção obtemos

$$y_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \frac{\Delta^i 0^n}{2^{i+1}},$$

temos, pois, a formula de Gomes Teixeira

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \frac{\Delta^i 0^n}{2^{i+1}}. \tag{9}$$

Ha ainda uma outra formula para o calculo dos numeros de Bernoulli, que como a anterior exprime estes ultimos numeros em funcção dos $\Delta^i 0^n$.

(*) A definição aqui adoptada é a do sr. Gomes Teixeira *(Calc. Diff.)*.

Para a deduzir considero a funcção

$$f(e^x)=\varphi(x)=\frac{x}{e^x-1}.$$

Derivando n vezes a identidade

$$\frac{x}{e^x+1}=\varphi(x)-\varphi(2x)$$

obtemos

$$(a)\quad x\frac{d^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^n}+n\frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^{n-1}}=\varphi^{(n)}(x)-2^n\varphi^n(2x)$$

e, em vista da definição dada, temos (*) para $x=0$

$$y_0^n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{B}_{n-1}.$$

Por outro lado temos, pondo $e^x=z$, e derivando em ordem a z:

$$f\ (e^x)(z-1)=\log z$$

$$f'(e^x)(z-1)=\frac{1}{z}-f(e^x)$$

$$f''(e^x)(z-1)=(-1)\times\frac{1}{z^2}-2f'(e^x)$$

(*) Gomes Teixeira, loc. cit.

e em geral

$$f^{(n-1)}(e^x)(z-1) = (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} - (n+1) f^{(u)}(e^x),$$

e portanto para $x = 0$

$$f^{(n)}(1) = (-1^n \frac{n!}{n+1},$$

valor este que substituido na formula (7) dá a formula de Herschell (*)

$$(10) \qquad y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} B_{n-1} = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \frac{\Delta^i 0^n}{i+1}$$

importante na theoria dos numeros bernoullianos:

$$B_1 = \frac{1}{6} \; B_3 = \frac{1}{30} \; B_5 = \frac{1}{42} \; B_7 = \frac{1}{30}, \text{etc.}$$

7. *Numeros de Euler* (**). — Definimos *números de Euler* os dados pela derivação da funcção

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

(*) Vide Ed. Lucas, *Theorie des Nombres*, pag. 125.

(**) Silvester, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris, tom. 25). Estes numeros têm sido estudados tambem por Catalau, *Memoires de l'Académie royale de Belgique*, 1877, e por André, *J. de Leouville*, III serie, e Lucas, loc. cit.

para $x=0$. Resulta d'aqui que estes numeros são nullos quando o indice da derivação for impar; como effeito é

$$\begin{aligned} f\ (x) &= f\,(-x) \\ f'\ (x) &= -f'(-x) \\ f''\,(x) &= f''(-x) \\ f'''(x) &= -f'''(-x) \end{aligned}$$

etc.

Quando n é par, podem ser calculados em funcção dos $\Delta^i 0^n$, por meio d'uma formula que vamos deduzir.

Fazendo $e^x=z$ e $f(x)=\varphi(e^x)=\varphi(z)$, tem-se

$$\varphi(z)\frac{2z}{1+z^2}=\frac{1}{z+\sqrt{-1}}+\frac{1}{z-\sqrt{-1}},$$

d'onde derivando e fazendo $z=1$,

$$\varphi^{(n)}(1)=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(1+\sqrt{-1})^{n+2}}+\frac{1}{(1+\sqrt{-1})^{n+1}}\right]$$

ou escrevendo os imaginarios debaixo da forma trigonometrica,

$$\varphi^{(n)}(1)=(-1)^n\frac{n!}{2^{\frac{n-1}{2}}}\cos(n+1)\frac{\pi}{4}.$$

Substituindo este valor na formula (7) e attendendo á definição dada, obtemos finalmente

$$E_n = [f^{(n)}(x)]_{x=0} = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \frac{\Delta^i 0^n}{2^{\frac{i-1}{2}}} \cos(i+1)\frac{\pi}{4}.$$

Podemos escrever esta formula d'um outro modo, empregando a notação symbolica; com effeito a formula precedente dá immediatamente:

$$E_n = -\frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{2} - \frac{\Delta^4}{2^2}$$

$$+\frac{\Delta^6}{2^3} - \frac{\Delta^7}{2^3} + \frac{\Delta^8}{2^4} - \frac{\Delta^{10}}{2^5} - \dots$$

e notando que $\Delta = 1$ temos a formula symbolica (*)

$$E_n = (1-\Delta)\left(1 - \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^4}{2^2} + \frac{\Delta^6}{2^3} + \frac{\Delta^8}{2^4} - \frac{\Delta^{10}}{2^5} - \dots\right)$$

$$-\frac{\Delta^5}{2^2} + \frac{\Delta^9}{2^3} - \dots$$

(*) Notarei que a formula dada por E. Lucas no Exercicio VII da pagina 263 da sua *Theorie de nombres*:

$$E = (1+\Delta)\left(1 - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^4}{2^2} - \frac{\Delta^6}{2^3} + \cdots\right)$$

é inexacta, pois que além da troca de signaes, não diz que se deva fazer a exclusão dos termos cujos expoentes forem da fórma $4m+1$.

na qual ao effectuar o producto devem ser substituidas as potencias de Δ pelas differenças correspondentes de x^n para $x=0$.

Por meio da formula obtemos os seguintes valores de E_n

$$E_0=-1,\ E_2=-1,\ E_4=+5,\ E_6=-61,$$

$$E_8=-1.385,\ \text{etc.}$$

8. *Numeros de Genocchi.* — Estes numeros, considerados por Euler e mais tarde por Genocchi (*), podem ser definidos pela formula

$$G_n=\left[\frac{d_n\left(\frac{2x}{e^x+1}\right)}{dx^n}\right]_{x=0,}$$

vê-se pois que é

$$G_0=0,\ G_1=+1.$$

Resulta da definição que os numeros de indices impar (salvo G_1) são nullos; com effeito temos

$$(b)\ \frac{d^{n+1}\left(\frac{2x}{e^x+1}\right)}{dx^{n+1}}=2x\times\frac{d^{n+1}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^n}+2(n+1)\,.\frac{d^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^n}$$

(*) *Annaes de Tortolini*, 1852.

e para $x=0$

$$G_{n+1}=2(n+1)\times\left[\frac{d^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^x}\right]_{x=0}$$

onde o 2.° membro, como se disse no n.° 6, é nullo quando n é par.

Da formula anterior deduz-se, para o calculo dos numeros de Genocchi em funcção de $\Delta^i 0^n$, a formula

$$(13) \qquad G_{n+1}=(n+1)\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i\frac{\Delta^i 0^n}{2^i}.$$

Notaremos que da definição dada no n.° 6 dos bernoullianos resulta a seguinte relação entre os numeros de Genocchi e os de Bernoulli

$$G_{n+1}=(-1)^{\frac{1+n}{2}}\,2\,(2^{n+1}-1)\,B_n.$$

Por meio d'esta formula ou por meio da formula anterior podiamos calcular os seguintes valores de G_n.

$$G_0=\ 0;\ G_1=+1;\ G_2=-1;\ G_4=+1$$

$$G_6=-3;\quad G_8=+17;\ G_{10}=-155.$$

9. *Numeros* R *de Lucas* (*). — Os numeros considerados pelo

(*) Lucas, *Théorie des Nombres*, pag. 125.

2

eminente geometra Ed. Lucas podem ser definidos pela relação

$$R_n = \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \left[\frac{d^n\left(\frac{x}{e^x - e^{-x}}\right)}{dx^n}\right]_{x=0}.$$

Resulta da definição que $R_n = 0$ quando n é impar.

Pode-se facilmente obter a expressão d'estes numeros em funcção de $\Delta^i 0^n$ do modo seguinte:

Da identidade:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{e^x + 1}\right]$$

resulta

$$(14)\ R_n = \left[f^{(n)}(x)\right]_{x=0} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^n\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)}{dx^n} + \frac{d^n\left(\frac{x}{e^x + 1}\right)}{dx^n}\right]_{x=0},$$

e, pondo

$$y = \frac{1}{1 + e^x},$$

as formulas (a) e (b) dos numeros 7 e 8 mostram que é

$$R_n = \frac{1}{2}\left[-\frac{n}{2^n - 1}\, y_0^{n-1} + n y_0^{n-1}\right]$$

$$= n \times \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i \frac{\Delta^i 0^n}{2^{i+1}}.$$

Por meio d'esta formula podemos calcular os numeros R:

$$R_0 = \frac{1}{2}, \quad R_2 = -\frac{1}{6}, \quad R_4 = +\frac{7}{30}, \quad R_6 = -\frac{31}{42}, \quad R_8 = +\frac{127}{30}.$$

10. *Numeros de Catalan e D. André* (*). — Estes numeros podem se obter derivando a funcção

$$y = 2 . f(2x) = 2 \times \frac{2x}{e^{2x}+1}$$

e fazendo $x=0$.

É facil exprimir estes numeros em funcção dos $\Delta^i 0^n$; com effeito temos

$$2^n f^{(n)}(2x) = \frac{d^n f(2x)}{dx^n},$$

logo, para $x=0$, attendendo á formula dada no § 6.º, temos

$$C_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} y_0^{n} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2 \times 2^n \times \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \frac{\Delta^i 0^n}{2^{i+1}}$$

ou

(15) $$C_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i 2^{n-i} \Delta^i 0^n.$$

Por meio d'esta formula achariamos

$$C_1 = 1, \quad C_3 = 2, \quad C_5 = 16, \quad C_7 = 272, \quad \text{etc.}$$

(*) Catalan, *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, 1877. D. André, *Journal de Liouville*, serie III, tomo VII.

Notarei que da propria definição dos numeros C_n, resulta que são nullos quando n é par.

Observarei, ainda, a respeito d'estes numeros e dos anteriores, que as formulas (9) (12) (14) (15) dão as seguintes relações

$$G_{n+1}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2\,(2^{n+1}-1)\, B_n$$

$$R_{n+1}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\, (2^n-1)\, B_n$$

$$C_n=\frac{2^{n+1}\,(2^{n+1}-1)}{n+1}\, B_n$$

que podiam servir de ponto de partida para o estudo dos numeros G, R e E, como ordinariamente se faz.

11. *Sommação de potencias semelhantes dos* n *primeiros numeros.*

Dos quatro methodos geraes, a saber os de Pascal, Abel, Bernoulli, e Fermat, só este ultimo comporta o emprego dos numeros $\Delta^i 0^n$.

Vamos deduzir a formula, que, segundo Ed. Lucas, constitue a extensão do methodo de Fermat, adoptando uma marcha differente. Com effeito tem-se (*).

$$1+e^x+e^{2x}+\ldots+e^{(p-1)x}=\frac{e^{px}-1}{e^x-1}=f(e^x),$$

e, pondo $e^x=z$, vem

$$(z-1)\, f(e^x)=z^p-1$$

(*) Ed. Lucas, *Théorie des Nombres*, pag. 244.

e

$$f'(z)(z-1)=pz^{p-1}-f(z),$$

$$f''(z)(z-1)=p(p-1)z^{p-2}2f'(z),$$

$$f'''(z)(z-1)=p(p-1)(p-2)z^{p-3}-3f''(z),$$

e em geral

$$f^{(n)}(z)(z-1)=p(p\,1-)\ldots(p-n+1)z^{p-n}-nf^{(n-1)}(z).$$

Fazendo $x=0$, deduz-se

$$f^{(n-1)}(1)=\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n},$$

e, derivando os dois primeiros membros da identidade que nos serviu de ponto de partida e applicando ao 2.º membro a formula (7), tem-se, fazendo $x=0$,

$$(16)\quad 1^n+2^n+\ldots+(p-1)^n=\sum_{i=n}^{i=1}\frac{p(p-1)\ldots(p-i)}{1.2\ldots(i+1)}\Delta^i 0^n,$$

formula esta, que traduz, segundo Lucas, a extensão do methodo de Fermat (*).

(*) A potencia m^n d'um numero m é facil de obter em funcção dos numeros $\Delta^i 0^n$, applicando a formula (7) á funcção e^{mx}, o que dá immediatamente a formula : $m^n=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}\Delta^i 0^n$.

12. *Sommação d'uma serie.*

Seja

$$y = e^{e^x};$$

temos

$$y = 1 + \frac{e^x}{1} + \frac{e^{2x}}{2!} + \ldots + \frac{e^{nx}}{n!} + \ldots$$

serie esta, uniformemente convergente em todo o plano.
Por outro lado as series

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\frac{1}{2!} e^{2x} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2x}{1} + \ldots + \frac{(2x)^n}{n!} + \ldots\right]$$

$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

$$\frac{1}{n!} e^{nx} = \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{nx}{1!} + \ldots + \frac{(nx)^n}{n!} + \ldots\right]$$

$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

são tambem uniformemente convergentes no mesmo plano.

Temos pois, em virtude d'um theorema de Weierstrass (*),

$$
(17)\left\{\begin{aligned}
e^{e^x} = e + \frac{x}{1}\left[1 + \frac{2}{2!} + \ldots + \frac{n}{n!} + \ldots\right] + \\
+ \frac{x^2}{2!}\left[1 + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{n^2}{n!} + \ldots\right] + \ldots + \\
+ \frac{x^n}{n!}\left[1 + \frac{2^n}{2!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots\right] + \ldots
\end{aligned}\right.
$$

Mas a formula de Mac-Laurin dá

$$
e^{e^x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{n!}\left[\frac{d^n(e^{e^x})}{dx^n}\right]_{x=0},
$$

onde é (formula 8)

$$
\left[\frac{d^n e^{e^x}}{dx^n}\right]_{x=0} = e\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta^i 0^n}{i!}.
$$

Comparando o desenvolvimento dado pela formula de Mac-Laurent

(*) *Monat. der Kön. Akad. der Wissenchaften zu Berlin*, 1880. Vide tambem o cap. VII do *Calc. Diff.* de Gomes Teixeira.

com o da formula (17) obtemos

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^m}{n!} = 1 + \frac{2^m}{2!} + \frac{3^m}{3!} + \dots \frac{n^m}{n!} + \dots = e \sum_{i=n}^{i=m} \frac{\Delta^i 0^n}{i!} = \mathrm{K}\, e$$

onde o numero K é um numero inteiro; isto demonstra que a somma de todas as series da fórma $\sum \frac{n}{n!}$ são multiplos do numero e quando m for um numero inteiro; aquelle numero é facil de achar por meio da taboa II ou outra analoga.

Lisboa, outubro de 1901.

BIBLIOGRAPHIA

Bertrand W. Russel: Essai sur les fondements de la Géométrie (traduction par A. Cadenat), Paris, G. Villars, 1901.

O estudo dos fundamentos da Geometria tem em todos os tempos chamado a attenção dos mathematicos e dos philosophos; e não admira, porque poucos assumptos são tão bellos e interessantes. A lista dos trabalhos que a este respeito têem sido publicados, foi ultimamente enriquecida com um, extremamente notavel, devido a um sabio dotado da maior competencia sobre o assumpto, o sr. B. Russell, professor na Universidade de Cambridge. D'este trabalho magistral vem de publicar uma traducção franceza o sr. A. Cadenat, prestando assim um grande serviço aos que não podem ler a edição ingleza, publicada pelo auctor.

Na obra a que nos estamos referindo são systematicamente expostas e profundamente analysadas as opiniões dos sabios mais eminentes que se têem occupado da questão n'ella considerada, e são apresentadas, como consequencia d'este estudo critico, as opiniões do auctor a respeito da mesma questão.

Todos os assumptos considerados estão dispostos em quatro grandes capitulos. No primeiro vem a historia do nascimento e do desenvolvimento das Geometrias não euclideanas. No segundo são expostas e analysadas as opiniões dos philosophos a respeito dos fundamentos da Geometria. No terceiro são estabelecidos primeiramente os axiomas da Geometria projectiva e depois os da Geometria metrica. No quarto finalmente é descutida a questão de saber se alguma fórma de exterioridade é necessaria á experiencia e se se póde abstrahir de toda a referencia á materia contida n'esta fórma.

G. Vivanti: Teoria delle funzioni analitiche. Milano. Hoepli, 1901.

A magnifica collecção de Manuaes publicados por U. Hoepli vem de ser enriquecida com mais um volume, o qual é consagrado á theoria das funcções analyticas, e foi elaborado pelo sabio professor da Universidade de Messina, G. Vivanti. É n'elle exposta, com assaz desenvolvimento, e com muita clareza e rigor, pelo methodo de Weierstrass, não só a parte hoje classica d'esta theoria, mas tambem alguns dos seus capitulos que estão ainda em via de formação. Esta ultima circumstancia dá ao livro um interesse especial.

Para o estudo da theoria das funcções analyticas é subsidio indispensavel o da theoria dos agregados de pontos. Por isso o sr. Vivanti se occupou d'ella em primeiro logar, consagrando-lhe as primeiras 61 paginas do seu trabalho. Entrando depois no assumpto principal, estuda as series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas da variavel e, como consequencia, a definição de funcção analytica, dada por Weierstrass; estuda a noção de valor medio d'uma funcção ao longo d'uma circumferencia, e como consequencia apresenta a demonstracão do theorema de Laurent, dada por Pringsheim; demonstra um grande numero de theoremas relativos ás funcções inteiras; expõe as indagações de Mittag-Leffler sobre a representação analytica das funcções com infinitos pontos singulares quaesquer, etc. A reunião d'estes assumptos fórma uma segunda parte do livro, consagrado ás theorias hoje classicas. Na terceira parte, consagrada a complementos d'esta theoria, apresenta algumas indagações de Poincaré, Hadamard, Picard, etc., sobre as funcções inteiras; refere-se ás generalisações de que tem sido objecto modernamente o problema da representação das funcções analyticas; tracta das funcções com lacunas; tracta das relações entre os pontos singulares de duas funcções analyticas; estuda os pontos singulares d'uma serie de potencias existentes sobre a circumferencia do circulo de convergencia, etc.

M. Godefroy: La fonction gamma; théorie, histoire, bibliographie, Paris, G. Villars, 1901.

Em 1888 foi publicado por Brunel, nas *Mémoires de la Société* *des sciences physiques de Bordeaux*, uma monographia da funcção gamma. Desde essa occasião até agora novos e importantes trabalhos têem continuado a enriquecer a theoria d'esta funcção, e tornara-se por isso desejavel nova e mais completa monographia, que os tomasse em consideração. O excellente trabalho que, a respeito d'este assumpto, vem de publicar o sr. Godefroy satisfaz a esta condição, pois que ahi são apresentados todos os resultados importantes que, sobre elle, têem publicado os geometras até aos ultimos tempos.

Não é porém só por esta circumstancia que o livro a que nos estamos referindo merece attenção. Merece-a tambem pela elegancia e clareza da exposição, pelo interesse das suas informações historicas e bibliographicas, pelo modo original como são conduzidas algumas demonstrações, etc.

Abre o livro por um resumo, muito bem feito, da historia da funcção gamma. Depois é exposta, nos capitulos II e III, a theoria geral d'esta funcção e são demonstradas as suas propriedades essenciaes. N'esta exposição o auctor parte da definição de Gauss, e emprega, como instrumento para as suas demonstrações, a theoria das series.

O capitulo IV é consagrado á theoria da funcção de Binet, á demonstração das formulas de Gudermann e Stirling; o capitulo IV á theoria das funcções que se obtêem derivando a funcção gamma relativamente ao argumento; o capitulo VI á exposição das formulas para o desenvolvimento da mesma funcção e d'outras, com ella ligadas, em series inteiras. O capitulo VII encerra interessantes applicações analyticas das funcções estudadas.

Muitas questões interessantes da Analyse têem tido a sua origem na theoria da funcção gamma. O sr. Godefroy tem o cuidado de as indicar nos logares competentes, augmentando assim muito o interesse do seu bello trabalho.

E. Borel: Leçons sur les séries divergentes. Paris, G. Villars, 1901.

Como já aqui dissemos o sr. Borel anda escrevendo uma serie de livros, em cada um dos quaes é considerado um capitulo da theoria das funcções. De dois d'estes livros já têem conhecimento os leitores d'este jornal. O terceiro vem de ser publicado e é consagrado á theoria das series divergentes, assumpto que tem sido muito estudado pelo eminente geometra francez.

As series divergentes, quasi postas fóra do Analyse por Abel e Cauchy, á qual ficaram apenas ligadas por um laço, o da formula de Stirling, voltaram nos ultimos tempos a fazer ahi a sua entrada. Esta circumstancia tem facil explicação. Como os resultados, obtidos por meio d'ellas, pelos geometras anteriores áquelles dois grandes analystas, eram quasi sempre verdadeiros, era natural procurar o motivo d'esta coincidencia, que não podia ser fortuita, e, como consequencia, procurar em que casos se podem applicar sem receio de erro. É dos resultados obtidos n'este sentido, dos quaes grande quinhão pertence ao sabio auctor do livro a que nos estamos referindo, que elle se occupa no seu importante trabalho.

Abre o livro por uma introducção, muito bem feita e muito interessante, na qual é exposta a historia da questão n'elle considerada. Depois no capitulo I são expostos os trabalhos de Poincaré sobre as series asymptoticas; no capitulo II os trabalhos de Laguerre, Padé e Stieltjes sobre as fracções continuas e sobre a conversão das series divergentes n'aquellas fracções; nos capitulos III e IV os trabalhos do auctor sobre a generalisação da noção de somma d'uma serie, e as relações d'esta theoria com a do prolongamento analytico; finalmente no capitulo V os desenvolvimentos em serie de polynomios, para o que o auctor parta dos trabalhos importantes recentemente publicados por Mittag-Leffler sobre a representação analytica dos ramos das funcções.

D. Zoel G. de Galdeano: Estudios de critica y pedagogia mathematicas. Zaragoza, 1900.

A primeira parte d'este bello trabalho é consagrado á philosophia das mathematicas. N'elle são apresentados os systemas philosophico-mathematicos de Conte e Wronski, depois são indicados os mais importantes trabalhos de analyse critica relativos ás mesmas sciencias, em seguida são magistralmente analysados, com elevado criterio, os diversos conceitos fundamentaes que as formam e são classificados os ramos em que se dividem. Depois considera o auctor separadamente cada um d'estes ramos, e faz a sua analyse critica, considerando successivamente a Arithmetica, a Geometria, a Algebra, a Algebra da Logica, a Geometria analytica, a Geometria enumerativa, a theoria das funcções, a Geometria cinematica, a Geometria differencial, e finalmente a theoria dos grupos de transformação.

A segunda parte do livro a que nos estamos referindo é consagrado á exposição de interessantes e sensatas considerações a respeito do ensino em geral e do das mathematicas em especial.

Terminaremos estas rapidas indicações sobre o excellente trabalho do sr. Galdeano recommendando a sua leitura muito agradavel e instructiva.

R. Marcolongo Lezioni di meccanica razionale. Messina, 1901.

O nome do auctor d'este livro é bem conhecido dos leitores d'este jornal, que elle tem illustrado com interessantes artigos sobre applicação das funcções ellipticas a diversos problemas de Mecanica. Por isso conhecem já a sua alta competencia n'este ramo das sciencias mathematicas, a qual o referido livro, que encerra o seu curso feito na Universidade de Messina no anno de 1900 a 1901, completamente confirma. Lendo-o com attenção nota-se, com effeito, a boa escolha dos assumptos, a clareza, rigor e simplicidade inexcidiveis com que são expostos, a boa ordem em que estão encadeados, e a fórma elegante, moderna e muitas vezes original das demonstrações.

Os assumptos de que o sr. Marcolongo se occupa no seu livro são os que é uso ensinar em um curso regular de Mecanica racional; e, para os tratar, emprega o illustre geometra essa especie de methodo analytico-geometrico, em que o espirito caminha directamente para o fim que pretende attingir, auxiliado pelos poderosos recursos da Analyse.

Os professores de Mecanica das nossas Escolas superiores poderão, temos a certeza d'isso, tirar proveito da leitura d'este livro, onde encontrarão questões que os hão de interessar, demonstrações e modos de expôr que poderão approveitar. Aos alumnos das mesmas Escolas póde elle tambem prestar serviços como auxiliar do seu estudo.

H. Vogt: Éléments de Mathématiques supérieures. Paris, Nony et C.ie, 1901.

Os assumptos mathematicos considerados n'esta obra são intermedios entre os que fazem objecto do ensino dos Lyceus e os que são tratados nos cursos superiores d'esta sciencia. Por isso é ella destinada áquelles que, tendo terminado o curso do Lyceu, pretendem seguir um curso de sciencia applicada ou um curso superior de Mathematica. Está dividido em sete partes, cujo objecto vamos resumidamente indicar.

A primeira parte é consagrada a alguns complementos de Algebra. São ahi estudados os determinantes de duas e tres columnas e sua applicação á resolução das equações do primeiro gráo; a formula do binomio de expoente inteiro; a theoria dos radicaes e expoentes; a parte elementar da theoria das series, a theoria da funcção exponencial e dos logarithmos.

A segunda parte é consagrada á Geometria analytica. São n'elle expostos os principios geraes d'esta sciencia, e a sua applicação á recta, ás curvas de segunda ordem, ao plano e ás superficies de segunda ordem.

Na terceira parte é considerado o Calculo differencial. Trata-se n'ella de determinação das derivadas das funcções elementares, da formula de Taylor para o caso d'uma e muitas variaveis, das formulas de interpollação e das applicações analyticas mais usuaes do mesmo calculo.

A quinta parte é consagrada á theoria das equações. Abre pela theoria dos imaginarios. Vem depois o estudo das propriedades das raizes das equações algebricas. Segue-se a resolução da equação do terceiro gráo e termina pela resolução numerica das equações.

Na quinta parte trata o auctor das applicações geometricas da Algebra e do Calculo differencial que se encontram ordinariamente nos manuaes elementares de Calculo differencial.

A sexta e setima parte são consagradas ao Calculo integral, e constituem um curso regular d'esta sciencia.

Tem ainda o livro uma serie de notas, onde são completados alguns assumptos considerados anteriormente e uma serie de 218 exercicios relativos ás diversas questões estudadas.

A exposição das diversas doutrinas de que se occupa o sr. Vogt na sua excellente obra é feita com notavel clareza e perfeito rigor, qualidades indispensaveis em trabalho que tem o destino do actual. Por isso deve a sua leitura ser recommendada vivamente aos alumnos das nossas Escolas, que d'elle hão de tirar muito proveito.

F. Michel: Recueil de problèmes de Géométrie analytique. Paris, G. Willars, 1900.

Para se apreciar a utilidade d'esta collecção de problemas basta dizer que ella contém as soluções de todos os problemas de Geometria analytica propostos nos concursos de admissão á Escola Polytechnica de Paris nos annos de 1860 a 1900. Cada questão é seguida de preciosas indicações bibliographicas, onde são indicadas as obras ou jornaes onde se encontram outras soluções da mesma questão.

G. Pesci: Abbaco per el calcolo della latitude (Rivista marittima, Roma, 1898).

—— Cennï di Nomografia con molte applicazioni alla Balistica. (Item, 1900).

—— Abbachi trigonometrici (La Corrispondenza. Livorno, 1900).

—— Applicazione della Nomografia a un problema di Geometria pratica (Il Monitore tecnico. Milano, 1900).

—— Di una nuova macchina per risolvere le equazioni (Corrispondenza, Livorno, t. I).

—— Costruzione di due abbachi trigonometrichi (Supplemento al Periodico di Matematica, 1900).

Contém estes trabalhos importantes applicações da *Monographia*.

Pietro Ripa: Il problema della divizione della lemniscata (Giornale di Matematiche. Napoli, 1900).

O objecto d'este trabalho é a divisão de lemniscata em partes eguaes por meio da funcção p de Weierstrass.

V. Larangeira: A proposito do raio minimo de um arco de parabola comprehendido entre duas tangentes (Revista de Engenheria militar. Lisboa, 1900).

O auctor d'este util trabalho apresenta n'elle uma construcção geometrica simples do raio de curvatura minimo d'um arco de parabola.

Primera reunión del Congreso cientifico latino americano. Trabajos de la 2.ª sección (Ciencias fisico-quimicas y naturales). Buenos-Aires, 1899).

G. T.

CONDIÇÕES DE ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME XV

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1905

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS — VOLUME XV — 1905

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XV—N.º 5

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1905

BIBLIOGRAPHIA

E. Torroja: Tratado de Geometria de la posición y sus aplicaciones á la Geometria de la medida. Madrid, 1899.

Não é grande o numero de obras que têm sido publicadas sobre a Geometria de posição, e alguns paizes ha, em que a cultura das sciencias mathematicas está aliaz adiantada, nos quaes não existem tratados desenvolvidos d'este assumpto. Na nossa peninsula não tinha até agora sido publicado nenhum, nem em Hespanha, nem em Portugal. Esta lacuna vem de ser preenchida, pelo que respeita á Hespanha, pelo bello e importante *Tratado* que vem de publicar o sabio professor da Universidade de Madrid, D. E. Torroja; o qual prestou assim um grande serviço aos que quizerem estudar este ramo importante das sciencias mathematicas tanto n'aquelle paiz, como mesmo no nosso (graças ao facto de estar escripto n'uma lingua que todo o portuguez lê com facilidade), pondo á disposição d'elles um livro concebido com largueza de vistas, redigido com clareza, elegancia e originalidade, e que pode figurar na lista dos melhores tratados que têm sido publicados sobre a Geometria de posição.

Na obra referida são expostas, segundo o titulo mesmo indica, as doutrinas que constituem a Geometria de posição, e as suas applicações á Geometria da medida. Estas applicações vão até ao ponto de abranger propriedades que se deduzem mais facilmente por outros methodos, mas que o auctor quiz considerar, a fim de mostrar a fecundidade e generalidade dos methodos da Geometria de posição. Na ordem a seguir para expôr aquellas doutrinas preoccupou-se o sr. Torroja principalmente com o fim de ser util aos que as quizerem estudar pela primeira vez, não considerando desde o principio as theorias geraes para depois descer aos casos particulares, mas subindo pouco a pouco d'estes até áquellas. Este methodo tem tres vantagens principaes: dá logar a uma melhor graduação das difficuldades; permitte que as applicações venham mais cedo; educa melhor o espirito para as indagações originaes, porque é por este methodo que se formam as sciencias. Tambem, com o mesmo fim, misturou as propriedades metricas com as correspondentes propriedades projectivas, de modo a serem gradualmente estudadas umas e outras; e para que d'este facto não resulte inconveniente para aquelles que quizerem estudar só a Geometria de posição, são designadas por um signal as paginas que encerram propriedades metricas.

Não nos é possivel, sem exceder os limites de que dispomos, dar noticia de todos os assumptos que encerra o livro do sr. Torroja, tal é a riqueza de materiaes, fructo de conhecimentos profundos e extensos da sciencia a que é consagrado, que este illustre geometra ahi reuniu. Limitar-nos-hemos por isso a indicar qual é o objecto principal de cada um dos 36 capitulos em que elle está dividido, para que os leitores d'este jornal façam, pelo menos, ideia dos pontos á roda dos quaes se agrupam as doutrinas consideradas:

I Preliminares. II Parallelismo e elementos no infinito. III Relações metricas entre segmentos e angulos. Perpendicularidade. IV Series perspectivas. V Polygonos e polyedros. VI Figuras perspectivas planas e radiadas. VII Generalisação dos conceitos anteriores. VIII Relações metricas nos polygonos, angulos polyedros e polyedros ordinarios. IX Figuras harmonicas. X Series rectilineas perspectivas entre si. XI Curvas e cones de segunda ordem. XII Circumferencia. XIII Relações projectivas entre figuras de segunda ordem. XIV Figuras homographicas e correlativas. XV Figuras homographicas em posição especial. XVI Figuras correlativas com os recintos planos e os corpos geometricos. XVII Series em involução. XVIII Systemas em involução. XIX Elementos imaginarios XX Superficies de segunda ordem. XXI Polaridade e figuras inversas. XXII Relações metricas nas figuras perspectivas e na involução. XXIII Relações metricas nos polygonos e polyedros. XXIV Areas e volumes. XXV Superficies polyedricas e polyedros regulares. XXVI Figuras polares planas e radiadas. XXVII Curvas e cones de segunda ordem conjugados entre si. Involuções projectivas com uma figura elementar.

XXVIII Diametros e centros das curvas de segunda ordem. XXIX Planos diametraes e diametros dos cones de segunda ordem. XXX Systemas de circumferencias e de espheras orthogonaes. XXXI Fócos e directrizes das curvas de segunda ordem. XXXII Rectas focaes e planos cyclicos nos cones de segunda ordem. XXXIII Homologia das curvas ou cones de segunda ordem. XXXIV Elementos conjugados a duas curvas ou a dois cones de segunda ordem. XXXV Systemas de linhas e de cones de segunda ordem e segunda classe. XXXVI Curvas inversas relativamente a uma curva ou a um cone de segunda ordem.

Para terminar esta noticia resta nos recommendar vivamente aos que em Portugal cultivam a Geometria pura e acham prazer no estudo dos seus bellos methodos esta obra magistral, que dá a maior honra ao illustre professor que a escreveu e á sciencia hespanhola, e que mostra com quanto successo se estão cultivando no paiz visinho as sciencias mathematicas. Accrescentaremos que, por meio d'esta obra, ao mesmo tempo elementar e desenvolvida, podem principiar o estudo da Geometria de posição os que ainda a não conhecem; podem continual-o e estendel-o os que já a sabem.

E. Cahen: Élements de la théorie des nombres. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Existem em Allemanha muitos tratados modernos da theoria dos numeros. Em França porém não existia até agora nenhum, como diz o auctor do livro cujo titulo vimos de mencionar no prefacio d'este livro. Esta lacuna vem de a preencher o sr. Cahen da maneira a mais feliz com a publicação da sua excellente obra, onde é estudada a parte elementar e definitivamente constituida d'esta bella theoria. A respeito da parte mais elevada e ainda em via de formação da mesma theoria promette o sr. Cahen occupar-se mais tarde em outro trabalho. O modo como está redigido o primeiro leva-nos a desejar vivamente que elle cumpra brevemente esta promessa.

Para tornar a leitura do seu livro accessivel a maior numero de leitores o auctor principia pela exposição de alguns principios de Arithmetica elementar, passando todavia rapidamente por elles e notando só o que é fundamental e mais importante para os estudos feitos depois. Estas doutrinas elementares são consideradas no capitulo 1.°, onde se refere ás definições e leis das operações numericas, aos principios de theoria de divisibilidade dos numeros e da theoria dos numeros primos, e no capitulo 2.° onde são continuadas estas theorias e onde é exposta a parte elementar da theoria das fracções continuas.

O capitulo 2.° é consagrado á theoria das congruencias. Contém os principios da theoria geral das congruencias, a resolução das congruencias do primeiro gráo, a analyse indeterminada do primeiro gráo, a resolução das congruencias binomias, etc.

No capitulo 3.° é estudada a doutrina dos restos quadraticos, a lei de reciprocidade, a resolução das congruencias do segundo gráo, etc.

No capitulo 5.° é exposta a theoria dos numeros irracionaes, o seu desenvolvimento em fracção continua, a sua classificação, etc. É considerada tambem n'este capitulo a distincção entre numeros algebricos e transcendentes, e são expostos alguns theoremas relativos á primeira classe de numeros.

No capitulo 6.° são finalmente estudadas com bastante desenvolvimento as fórmas quadraticas binarias.

Contém ainda o volume nove notas muito interessantes sobre os systemas da numeração, sobre varios theoremas relativos aos numeros primos, sobre a decomposição dos numeros em factores primos, sobre as series de Brocot e de Farey, sobre os grupos modulares, sobre os numeros inteiros imaginarios, etc.

Algumas das questões consideradas levam a calculos numericos extensos. O auctor, n'estes casos occupa-se do modo de os realisar e apresenta varias taboas destinadas a este fim.

Todos os auctores, desde Gauss, que se têm occupado da theoria dos numeros, falam com enthusiasmo das suas bellezas. O livro que vem de publicar a respeito d'ella o sr. Cahen permitte que as possam apreciar aquelles mesmos que não têm cultura mathematica muito extensa, graças á clareza com que está escripto e á pequena preparação que exige para se poder ler.

E. Borel: Leçons sur les fonctions entières. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Contém este volume as lições feitas pelo sr. Borel na Escola Normal Superior de Paris no anno de 1897 a 1898. No seu ensino, que versa sobre a theoria das funcções analyticas, procura o eminente geometra francez dar aos seus alumnos conhecimentos mais intensos do que extensos da mesma theoria, profundando cada assumpto considerado e conduzindo-os até conhecerem o seu estado actual. Por isso considera em cada anno uma parte muito limitada d'esta theoria, mas que varía de anno para anno. Ora a publicação d'estas lições dá logar a uma serie de volumes preciosos, de um alto valor scientifico, em que vão sendo successivamente estudados com profundeza os diversos capitulos da theoria das funcções analyticas. Um d'estes volumes foi ainda ha pouco tempo mencionado n'este jornal O segundo vem de ser publicado e refere-se á theoria das funcções inteiras. N'elle os assumptos são expostos segundo a ordem dos progressos mais importantes que têm tido a referida theoria. Assim no capitulo 1.° é considerado o theorema fundamental de Weierstrass sobre a decomposição d'estas funcções em factores primarios. No capitulo 2.° são expostos os trabalhos de Laguerre sobre a noção de *genero* e sobre as funcções de genero 0 e 1, e são consideradas as indagações que tiverem a sua origem n'estes trabalhos. O capitulo 3.° é consagrado ao estudo das relações, descobertas por Poincaré, entre a ordem de grandeza de uma funcção inteira e o seu genero, supposto finito, e entre a ordem de grandeza da funcção e a dos seus coefficientes. No capitulo 4.° são considerados os resultados obtidos por Hadamard relativamente á relação entre o limite superior do crescimento de um producto de factores primarios e o expoente de convergencia da serie dos modulos dos seus zeros. Finalmente no capitulo 5.° é estudado o theorema de Picard segundo o qual se $F(z) = a$ e $F(z) = b$ ($F(z)$ sendo uma funcção inteira) não tiverem raizes $F(z)$ é constante. Contém ainda o livro tres notas importantes, uma sobre o theorema de Picard e duas sobre as funcções de crescimento regular e irregular.

A esta noticia rapida do livro importante que vem de publicar o sr. Borel resta-nos accrescentar que n'elle, como no que foi anteriormente mencionado, se encontram espalhadas por todos os capitulos vistas cheias de profundeza e originalidade sobre os assumptos considerados.

Heinrich Burkhardt: Elliptische Funktionen. Leipzig, 1899.

Este excellente manual da theoria das funcções ellipticas é notavel pela riqueza de informações que dá a respeito da theoria a que é consagrado e pela boa fórma como os assumptos estão expostos. Sem ser um livro muito extenso, entra muito no coração do assumpto e abrange o que de mais importante tem sido publicado a respeito d'elle até aos tempos mais recentes. Os methodos empregados são, pelo que respeita á parte em que a theoria das funcções ellipticas depende da theoria das funcções analyticas os de Cauchy, os de Riemann ou os de Weierstrass, segundo a natureza de cada questão considerada; pelo que respeita a notações, são introduzidas primeiramente as de Weierstrass e são depois ligadas com estas as de Jacobi.

Abre o livro um capitulo onde são estudadas, pelo methodo de Riemann, primeiramente as funcções racionaes de z e da raiz quadrada de um polynomio inteiro do terceiro ou quarto grão em z, depois os integraes d'estas funcções. Depois no capitulo 2.° são estudados os primeiros principios da theoria das funcções duplamente periodicas e são introduzidas as funcções $p(u)$, $\zeta(u)$ e $\sigma(u)$, a primeira sendo definida pela sua representação por uma serie de fracções racionaes simples e as outras por meio de integrações. É o mesmo methodo que para definir estas funcções nós empregamos já no nosso *Curso de Analyse*. No capitulo 3.° são expostos os theoremas de addição das funcções $p(u)$ e $\sigma(u)$ e são obtidas as decomposições das funcções duplamente periodicas em quocientes de funcções σ e em sommas de elementos simples. São tambem consideradas n'elle as funcções duplamente periodicas de segunda especie. No capitulo 4.° são estudadas as funcções $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ e $\sigma_3(u)$ e são definidas e estudadas por meio d'estas funcções as funcções de Jacobi $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$. No capitulo 5.° são estudadas as principaes propriedades das funcções duplamente periodicas de 3.ª especie, e são estudadas e relacionadas com as funcções σ as funcções ϑ de Jacobi. No capitulo 6.°

é estudado com desenvolvimento o problema da inversão das funcções ellypticas. O capitulo 7.° é consagrado á resolução dos integraes ellypticos ás fórmas canonicas; o capitulo 8.° á transformação linear das funcções ellypticas; o capitulo 9.° á degeneração das mesmas funcções, o capitulo 10.° ao estudo das condições da realidade dos valores d'estas funcções. No capitulo 11.° são estudadas com desenvolvimento as funcções modulares. No capitulo 12.° é continuada a theoria da transformação. No capitulo 13.° são expostos os methodos para o calculo numerico das funcções e dos ellypticos integraes. Os capitulos seguintes (14.° a 16.°) são consagrados ás applicações da theoria das funcções ellypticas a algumas questões de Analyse, Geometria e Mecanica.

Esta enumeração dos assumptos está longe de poder dar ideia da riqueza de informações que no livro se aprendem, mas o pouco espaço de que dispomos não nos permitte desenvolvel-a mais. Pelo mesmo motivo nada podemos dizer a respeito dos methodos empregados em cada questão; o que podemos é accrescentar que em todo o livro se faz uso consideravel dos methodos de Riemann e esta circumstancia torna-o muito differente de outros livros a respeito da mesma theoria que modernamente têm sido publicados.

P. Mansion: Élements de la théorie des déterminants. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Não é necessario fazer o elogio de uma obra que adquiriu tal credito que já conta seis edições, umas em francez e outras em allemão. Não conhecemos melhor livro para os alumnos estudarem a theoria dos determinantes, graças á clareza, simplicidade e rigor com que está escripto. Abre o livro por uma introducção consagrada á theoria dos determinantes de duas e tres alumnas. O estudo d'este caso simples, em que todos os elementos do determinante se escrevem, prepara bem o alumno para o estudo dos determinantes de um numero qualquer de columnas, o qual exige maior esforço de attenção. Estes ultimos são estudados em tres capitulos, o primeiro consagrado ás definições e propriedades fundamentaes dos determinantes, o segundo á exposição das regras para o seu calculo, o terceiro ás applicações dos mesmos á theoria de eliminação.

P. Barbarin: Notions complémentaires sur les courbes usuelles. Paris, Nony, 1899.

N'este opusculo, escripto pelo auctor para uso dos seus discipulos da classe superior de Mathematicas elementares dos Lyceus de França, são dadas demonstrações muito claras de varias proposições relativas ás conicas.

Tannenberg: Leçons nouvelles sur les applications géométriques du Calcul différentiel. Paris, Hermann, 1899.

Contém este livro as applicações geometricas do Calculo differencial que ordinariamente se encontram nos melhores manuaes consagrados a este assumpto. Para as tractar o sr. Tannenberg parte, pelo que respeita tanto ás curvas como ás superficies, das suas equações parametricas, e suppõe que as funcções dos parametros que representam as coordenadas são susceptiveis de ser desenvolvidas em serie ordenada segundo as potencias de $t - t_0$, no caso das curvas (t sendo o parametro considerado e t_0 o valor que elle toma no ponto estudado) e segundo as potencias de $u - u_0$ e $v_0 - v$ no caso das superficies (u e v sendo os parametros em funcções dos quaes se exprimem as coordenadas das superficies e u_0 e v_0 os valores que elles tomam no ponto considerado). Esta hypothese restringe um pouco o numero das curvas a que se applicam as theorias consideradas, mas, em compensação, permitte que se prescinda de considerar o resto das series, e de recorrer a outras hypotheses restrictivas mais particulares, que alongam muito a exposição e a tornam menos elegante e menos clara.

A primeira parte do livro é consagrada ás propriedades descriptivas das curvas. Encerra dois capitulos, o primeiro consagrado á theoria das tangentes e á theoria do plano osculador, o segundo á theoria dos envolventes.

Na segunda parte do livro são estudadas as propriedades descriptivas das superficies curvas. Contém tambem dois capitulos, o primeiro consagrado á theoria dos planos tangentes e á theoria das superficies envolventes; o segnndo á theoria das superficies regradas e das congruencias e complexos de rectas.

Na terceira parte da sua obra estuda o auctor as propriedades metricas das curvas. Vêm nelle em um primeiro capitulo a theoria da curvatura e torsão, as formulas de Frenet e Serret, etc., depois n'outro, applicações á helice e á deducção de muitas fórmulas relativas á variação de um segmento de recta que se desloca.

A quarta parte é consagrada ao estudo das propriedades metricas das superficies regradas, sendo um capitulo consagrado ás superficies empenadas e o outro ás superficies planificaveis. Depois na quinta parte são estudadas as propriedades metricas das superficies curvas em geral. Vêm n'esta ultima parte os theoremas relativos á curvatura das curvas traçadas sobre uma superficie dada, a theoria das linhas de curvatura, das linhas asymptoticas, das linhas geodesicas, os mais importantes resultados obtidos por Gauss na memoria celebre que consagrou a este assumpto, etc.

Eis expostos, em traços largos, os assumptos considerados. Em quanto á fórma como são tratados accrescentaremos que a este respeito se encontra por todo o livro muita novidade.

E. Fourrey: Récréations arithmétiques. Paris, Nony, 1899.

Eis um livro que instrue muito, recreando ao mesmo tempo. Têm-se publicado muitos livros consagrados, como este, a recreios arithmeticos, mas que só podem aproveitar a leitores preparados com alguns conhecimentos de Arithmetica. O presente volume, além de ter alguns recreios que são n'elle apresentados pela primeira vez, está redigido de modo a poder ser lido pelos que conhecem só as operações e regras praticas d'esta sciencia. Por isso póde elle aproveitar a um numero consideravel de leitores e póde mesmo ser util ás crianças que, por medo d'elle, aprenderão, brincando, muitas noções e theoremas de Arithmetica. Para justificar esta ultima asserção basta notar que todos os recreios considerados são acompanhados das respectivas explicações, dadas com a maior clareza, e que todas as noções e theoremas de Arithmetica empregados são explicados ou demonstrados por meios quasi intuitivos.

O livro está dividido em tres partes. Na primeira são considerados recreios relativos ás operações e são apresentadas propriedades curiosas de alguns numeros. Mencionaremos, em especial, entre os assumptos considerados n'esta primeira parte uma noticia muito interessante relativa ao systema de numeração e modo de realisar as operações empregados pelos diversos povos (egycios, phenicios, hebreus, chinezes, musulmanos e francezes do seculo XV). Na segunda parte, consagrada a problemas, é considerada em primeiro logar a questão que tem por objecto determinar a que dia da semana corresponde uma data dada; depois vêm muitos e variados jogos, uns antigos, outros modernos, mais ou menos interessantes. A terceira e ultima parte do livro é consagrada á exposição de muitas questões relativas aos quadrados magicos.

Fitz-Patrick e Chevrel: Exercices d'Arithmétique. Paris, Hermann, 1900.

O ensino das mathematicas, para ser efficaz, deve ser ao mesmo tempo theorico e pratico. Os alumnos tanto nos Lyceus como nas Escolas de instrucção superior devem fazer muitos e muitos exercicios. Entre nós tem-se descurado bastante o ensino pratico, e é facil encontrar estudantes intelligentes e que entendem bem as theorias que estudam, que sentem embaraços grandes para resolver questões mesmo simples que dependem das mesmas theorias. Ora, para auxiliar o professor no trabalho de preparar as questões e problemas que hão de propôr aos seus discipulos, são precisas e quasi indispensaveis as collecções de problemas e exercicios.

Pelo que respeita á Arithmetica é pequeno o numero de collecções, que têm sido publicadas, e aquella cujo titulo foi dado, no principio d'esta noticia é a melhor que conhecemos. A escolha dos problemas é muito bem feita. Vê-se que os auctores tiveram em attenção, n'esta escolha, as necessidades da vida pratica e o desenvolvimento intellectual dos alumnos. Tiveram tambem em vista que as questões escolhidas fossem interessantes. Esta ultima circumstancia é importante em obras d'esta natureza; convém que as questões propostas prendam a attenção do alumno, e julgo que a maior parte das que o livro encerra estão n'este caso. Para augmentar o interesse do livro fizeram os auctores acompanhar muitas das questões consideradas de notas e observações que devem tornar a sua leitura muito instructiva e agradavel mesmo aos professores.

Os problemas estão dispostos, como convinha, segundo a ordem porque se estudam ordinariamente os assumptos da Arithmetica, com 16 capitulos, onde são respectivamente consideradas as questões relativas á numeração (cap. I), operações arithmeticas (cap. II, III e IV), divisibilidade e numeros primos (cap. V, VI, e VII), fracções, dizima e proporções (cap. VIII, IX, X) systemas de numeração (cap. XI), raiz quadrada e raiz cubica (cap. XII e XIII), progressões (cap. XIV), questões diversas (cap. XV) e finalmente varias questões elementares da theoria dos numeros (cap. XVI). Estes capitulos encerram 465 questões com as respectivas soluções. Segue-se depois uma segunda parte do livro que encerra mais de 500 exercicios relativos aos mesmos assumptos e classificados pela mesma ordem, que não são acompanhados das respectivas soluções e que os alumnos que tiverem estudado a primeira parte do livro não devem ter difficuldade grande em resolver.

Viu-se pela enumeração das materias sobre que versam os problemas, que elles se referem aos assumptos que no nosso paiz constituem o ensino da Arithmetica nos Lyceus. Por isso póde elle prestar grandes serviços aos professores d'estes estabelecimentos de instrucção.

F. Tisserand: Leçons sur la détermination des orbites, professées à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Tisserand não se occupou no seu notavel *Traité de Mécanique celeste* da determinação das orbitas dos planetas e cometas. Occupou-se porém d'este problema em um dos seus cursos na Faculdade das Sciencias de Paris. Ora estas bellas lições foram felizmente recolhidas pelo sr. Perchot, que vem de as publicar em um volume onde é estudado em primeiro logar o methodo de Olbers para a determinação das orbitas dos cometas, depois o methodo de Gauss para a determinação da orbita d'um planeta por meio de tres observações. Estas lições são seguidas de um resumo, feito pelo sr. Perchot. das fórmulas empregadas para o calculo das orbitas, postas debaixo da fórma mais propria para o calculo numerico, e de um modelo de calculo para o mesmo fim, e são precedidas de um prefacio do sr. Poincaré, onde são analysados a largos traços os methodos para a determinação das orbitas.

Antonio dos Santos Lucas: A determinação da figura da terra pelas observações da gravidade. Porto, 1898.

O assumpto d'este opusculo é um dos mais interessantes da Mecanica Celeste e tem dado logar a trabalhos importantes de alguns dos mais celebres geometras que têm havido. O auctor, por meio de uma exposição clara e bem ordenada, conduz o leitor pelo caminho percorrido pelos geometras, até á actualidade, para resolverem o problema da determinação da figura da terra por meio do pendulo, dando-lhe conhecimento do que de mais importante tem sido feito para isso e do estado actual da questão.

Principia o opusculo por um prefacio onde são expostas rapidamente as principaes phases por que passou o problema considerado. No capitulo 1.º é desenvolvido em serie o potencial da gravidade e são expostos os principios da theoria das funcções esphericas de que o auctor faz depois uso. No capitulo 2.º vem uma primeira solução aproximada do problema, que se obtem empregando só os primeiros termos da serie do potencial. Depois no capitulo 3.º vem a solução que se obtém considerando toda a serie. No capitulo 4.º vêm os trabalhos de Helmert relativos á convergencia da serie referida. No capitulo 5.º são expostos e comparados os diversos methodos para a reducção da gravidade ao nivel do mar.

Mémain: Étude sur l'unification du calendier. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

São evidentes as vantagens que haveria em que os russos e gregos substituissem o calendario juliano, que ainda usam, pelo calendario gregoriano, usado pelos outros povos da Europa. Todavia não tem sido possivel até hoje obter esta substituição, por se oppôr a isso o clero greco-russo, que por motivos de ordem religiosa, não quer mudar a epocha de celebração da Paschoa juliana. Ora, para combater estes escrupulos, publicou o Revd.º Padre Mémain nos *Annales du Bureau de Longitudes* (t. VIII) a importante memoria cujo titulo antecede esta noticia, na qual faz a historia do calendario e das regras empregadas para determinar a Paschoa desde o tempo do estabelecimento d'esta festa por Moysés, para mostrar que a Paschoa gregoriana é a que está em harmonia com as tradições biblicas, com as regras paschaes empregadas pelos judeus e com as empregadas nos primeiros tempos do Christianismo.

A Catalogue of 16:748 southern Stars deduced by the United States Naval Observatory from the zone observations made at Santiago de Chile, etc. Washington, 1895.

The second Washington Catalogue of Stars together With the annual resultats upon which it is based. Washington, 1898.

O Observatorio Naval dos Estados Unidos da America tomou sobre si o trabalhoso encargo de construir um catalogo de estrellas, e a este encargo tem consagrado uma parte consideravel dos seus esforços. Os resultados das observações até agora feitas para esse fim foram consignados em dois livros volumosos que a este respeito publicou. O primeiro livro contém os resultados das observações feitas nos annos de 1849 a 1852 pelo tenente de marinha J. M. Gilliss em Santiago do Chili. Estas observações referem-se a 16:748 estrellas do hemispherio austral, cujas coordenadas vêm no livro referido. Precede este catalogo uma extensa introducção, onde são descriptos minuciosamente os instrumentos e os methodos empregados para fazer as observações.

O segundo dos livros mencionados no principio d'esta noticia contém os logares de 5:151 estrellas, deduzidos de 72:914 observações feitas no Observatorio Naval dos Estados-Unidos durante o intervallo de 1868 a 1891. D'estas observações 17:334 foram feitas pelo illustre astronomo do referido Observatorio John R. Eastman. Como no caso do volume anterior, uma larga introducção precede as tabellas dos resultados das observações, na qual são descriptos os instrumentos e os methodos empregados para fazer as observações e os calculos.

A. Mendes d'Almeida e Rodolpho Guimarães: Curso de Topographia, t. 1. Lisboa, 1899.

A obra excellente cujo titulo precede foi escripta pelos auctores para auxiliar os alumnos da cadeira de Topographia da Escola do Exercito de Lisboa no estudo d'esta sciencia. Em dois pontos de vista differentes podiam pois elles collocar-se no que respeita á escolha dos assumptos a expôr. Podiam fazer uma obra de menores dimensões que contivesse só as materias professadas no estabelecimento a que a destinavam ou fazer um Tratado desenvolvido da sciencia a que é consagrado, redigindo-o porém de tal fórma que as doutrinas essenciaes não estivessem de tal modo enlaçadas com as que o não são que não fosse possivel estudar as primeiras sem conhecer as segundas. Optaram pelo segundo modo de vêr e por este facto, que lhes augmentou consideravelmente o trabalho, merecem elogios e agradecimentos. Quando mais tarde os mesmos alumnos, já engenheiros, tiverem de fazer trabalhos de topographia, para os quaes precisem de conhecimentos mais especiaes, que não aprenderam na Escola, em obra alguma os podem procurar e estudar com mais facilidade do que n'aquella que tantas vezes tiveram de folhear e em que elles apparecem methodicamente ligados com os que aprenderam.

A obra a que nos estamos referindo constará, segundo dizem os auctores no prefacio, de dois volumes. O primeiro vem de ser publicado e trata dos levantamentos planimetricos regulares e dos elementos que os compõem.

Principia por uma introducção que encerra ideias geraes sobre as cartas topographicas. Depois no capitulo 1.° vêm os modos de figurar o terreno nas cartas, no capitulo 2.° vem a doutrina relativa á leitura e copia das cartas. Nota-se n'este ultimo capitulo um estudo bastante completo dos methodos geometricos aproximados para o calculo das areas planas e ainda um estudo desenvolvido da theoria dos planimetros; para este ultimo inspiraram-se os auctores n'um bom trabalho de Marrecas Ferreira, de que se deu noticia n'este jornal. No capitulo 3.° apresentam os auctores muitos methodos para determinar sobre o terreno a direcção do meridiano. No capitulo 4.° são estudados os instrumentos e os methodos de observação empregados nos levantamentos destinados ás cartas planimetricas. Finalmente no capitulo 5.° são considerados os meios para executar estes levantamentos no campo.

A leitura d'este livro deixa a impressão de que os auctores não se inspiraram em obra alguma especial, mas leram muitos e variados trabalhos sobre Topographia e, meditando depois sobre o assumpto, fizeram trabalho proprio pelo que respeita á fórma e ao methodo de o tratar. Tiveram tambem o cuidado de mencionar tudo o que em Portugal tem sido feito a respeito da questão a qne o livro é consagrado, dando-lhe assim uma feição nacional muito louvavel. Devemos ainda observar que em todo o livro se nota rigor na exposição do que é theorico e cuidado na exposição de todos os detalhes que póde necessitar o engenheiro geographo para levantar e construir uma carta.

D. Eugenio Guallart: Monografia del planimetro de contador y principalmente de los modelos Amsler y sus derivados. Madrid, 1898.

No opusculo, cujo titulo vimos de mencionar, são descriptos os planimetros de contador e é exposta com muita clareza a theoria d'estes instrumentos preciosos. É considerado primeiramente e estudado com certo desenvolvimento o planimetro de Amsler;

depois são considerados os planimetros cartesiano, o planimetro polar com disco giratorio Amsler-Laffon, os tres planimetros de Coradi, o planimetro de Wetty-Starche, etc. Com a publicação d'este opusculo prestou o sr. Guallart um bom serviço aos engenheiros.

G. T.

D'où

$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{R}{2} \cos \frac{\omega}{2} \left(\frac{\omega^2}{2} + 4 \cos \frac{\omega}{2} - 4 \right),$$

$$\frac{dY}{d\omega} = -\frac{R}{2} \sin \frac{\omega}{2} \left(\frac{\omega^2}{2} + 4 \cos \frac{\omega}{2} - 4 \right).$$

Pour l'arc s_3 de la troisième développante on a donc

$$ds^2_3 = dX^2 + dY^2 = \frac{R^2}{4} \left(\frac{\omega^2}{2} + 4 \cos \frac{\omega}{2} - 4 \right)^2 d\omega^2,$$

$$ds_3 = \frac{R}{2} \left(\frac{\omega^2}{2} + 4 \cos \frac{\omega}{2} - 4 \right),$$

$$s_3 = \frac{R}{2} \left(\frac{\omega^3}{6} + 8 \sin \frac{\omega}{2} - 4\omega \right).$$

Pour $\omega = 2\pi$, on a

$$(27) \qquad s_3 = \frac{2R}{3} (\pi^3 - 6\pi).$$

Il est facil de voir que l'on a les relations

$$\frac{ds_2}{d\omega} = \frac{s_1}{2}, \quad \frac{ds_3}{d\omega} = \frac{s_2}{1}.$$

et même

$$\frac{ds_1}{d\omega}=\frac{s}{2}$$

s étant l'arc de la cycloïde.

Ces relations sont tout-à-fait générales, et on a l'arc s_n de la n développante en fonction de l'arc s_{n-1} de la $(n-1)$ développante au moyen de la formule

$$s_n=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} s_{n-1}\,d\omega. \tag{28}$$

Voici donc la loi de formation des arcs $s_1, s_2, \ldots, s_n$. On prend les intégrales successives de

$$s=4R\left(1-\cos\frac{\omega}{2}\right).$$

que l'on divise successivement par 2. On a ainsi

$$s_1=2R\int_0^{\omega}\left(1-\cos\frac{\omega}{2}\right)d\omega=2R\left(\omega-2\sin\frac{\omega}{2}\right),$$

$$s_2=R\int_0^{\omega}\left(\omega-2\sin\frac{\omega}{2}\right)d\omega=R\left(\frac{\omega^2}{2}+4\cos\frac{\omega}{2}-4\right),$$

$$s_3=\frac{R}{2}\left(\frac{\omega^3}{6}+8\sin\frac{\omega}{2}-4\omega\right),$$

$$s_4 = \frac{R}{4}\left(\frac{\omega^4}{24} - 16\cos\frac{\omega}{2} - 2\omega^2 + 16\right),$$

$$s_5 = \frac{R}{8}\left(\frac{\omega^5}{24+5} - 32\sin\frac{\omega}{2} - 2\frac{\omega^3}{3} + 16\omega\right),$$

$$s_6 = \frac{R}{16}\left(\frac{\omega^6}{30+24} + 64\cos\frac{\omega}{2} - \frac{\omega^4}{6} + 8\omega^2 - 64\right).$$

....

et pour les arcs totaux de ces diverses développantes, en y faisant $\omega = 2\pi$,

$$s = 8R,$$

$$s_1 = 4\pi R,$$

$$s_2 = 2R(\pi^2 - 4),$$

$$s_3 = \frac{2R}{3}(\pi^3 - 6\pi).$$

$$s_4 = \frac{R}{12}(2\pi^4 - 24\pi^2 + 96),$$

$$s_5 = \frac{R}{30}(\pi^5 - 20\pi^3 + 120\pi),$$

..

$$s_6 = \frac{R}{16}\left(\frac{4\pi^6}{45} - \frac{8\pi^4}{3} + 32\pi^2 - 128\right),$$

. . . .

En écrivant les arcs de la manière suivante, leur loi de formation est mise en evidence:

$$s = 4R\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right),$$

$$s_1 = \frac{4R}{2}\left(\frac{\omega}{1} - 2\sin\frac{\omega}{2}\right),$$

$$s_2 = \frac{4R}{2^2}\left(\frac{\omega^2}{1.2} + 2^2\cos\frac{\omega}{2} - 2^2\right),$$

$$s_3 = \frac{4R}{2^3}\left(\frac{\omega^2}{1.2.3} + 2^3\sin\frac{\omega}{2} - 2^2\frac{\omega}{1}\right),$$

$$s_4 = \frac{4R}{2^4}\left(\frac{\omega^4}{1.2.3.4} - 2^4\cos\frac{\omega}{2} - 2^2\frac{\omega^2}{1.2} + 2^4\right),$$

$$s_5 = \frac{4R}{2^5}\left(\frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - 2^5\sin\frac{\omega}{2} - 2^2\frac{\omega^3}{1.2.3} + 2^4\frac{\omega}{1}\right),$$

$$s_6 = \frac{4R}{2^6}\left(\frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + 2^6\cos\frac{\omega}{2} - 2^2\frac{\omega^4}{1.2.3.4}\right.$$

$$\left. + 2^4\frac{\omega^2}{1.2} - \frac{2^6}{1}\right),$$

$$s_7 = \frac{4R}{27}\left(\frac{\omega^7}{1.2.3...7} + 2^7 \sin\frac{\omega}{2} - 2^2 \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5}\right.$$

$$\left. + 2^4 \frac{\omega}{1.2.3} - 2^6 \frac{\omega}{1}\right).$$

....;

et, pour $\omega = 2\pi$, on a les longueurs totales des arcs;

$$s_1 = \frac{4R}{2}\left(\frac{2\pi}{1}\right),$$

$$s_2 = \frac{4R}{2^2}\left(\frac{(2\pi^{2}}{1.2} - 2.\, 2^2\right),$$

$$s_3 = \frac{4R}{2^3}\left(\frac{(2\pi)^3}{1.2.3} - 2^2.\, \frac{2\pi}{1}\right),$$

$$s_4 = \frac{4R}{2^4}\left(\frac{(2\pi)^4}{1.2.3.4} - 2^2.\, \frac{(2\pi)^2}{1.2} + 2.\, 2^4\right),$$

$$s_5 = \frac{4R}{2^5}\left(\frac{(2\pi)^5}{1.2.3.4.5} - 2^2\, \frac{(2\pi)^3}{1.2.3} + 2^4.\, \frac{2\pi}{1}\right),$$

$$s_6 = \frac{4R}{2^6}\left(\frac{(2\pi)^6}{1.2.3.4.5.6} - 2^2\, \frac{(2\pi)^4}{1.2.3.4} + 2^4.\, \frac{(2\pi)^2}{1.2} - 2.\, 2^6\right),$$

$$s_7 = \frac{4R}{2^7}\left(\frac{(2\pi)^7}{1.2.3\ldots7} - 2^2.\frac{(2\pi)^5}{1.2.3.4.5} + 2^4.\frac{(2\pi)^3}{1.2.}\right.$$

$$\left. - 2^6.\frac{2\pi}{1}\right).$$

. . . .

VII. Conrbes équitangentielles à la cycloïde

Si on porte sur la tangente en M à la cycloïde, a partir du point M, une longueur constante T, le lieu des extrémités de cette longueur est une *courbe équitangentielle.* Elle se compose de deux branches, suivant le sens dans lequel est porté la longueur T, et ces deux branches sont égales et symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée à la base de la cycloïde en son milieu.

Les coordonnées d'un point de l'une des branches de la courbe équitangentielle sont

$$x = x_M + T\sin\frac{\omega}{2},$$

$$y = y_M + T\cos\frac{\omega}{2}.$$

ou

$$x = R(\omega - \sin\omega) + T\sin\frac{\omega}{2},$$

$$y = R(1 - \cos\omega) + T\cos\frac{\omega}{2}.$$

D'où

$$\frac{dx}{d\omega} = \mathrm{R}\,(1 - \cos\omega) + \frac{\mathrm{T}}{2}\cos\frac{\omega}{2},$$

$$\frac{dy}{d\omega} = \mathrm{R}\sin\omega - \frac{\mathrm{T}}{2}\sin\frac{\omega}{2}.$$

Aire de la courbe équitangentielle. L'aire comprise entre la courbe et la base de la cycloïde est

$$\mathrm{U} = \int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} y\,dx = \mathrm{R}^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\omega)^2 d\omega + \frac{3\mathrm{RT}}{2}\int_0^{2\pi}\cos\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)d\omega$$

$$+\frac{\mathrm{T}^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega,$$

ou

$$\mathrm{U} = 3\pi\mathrm{R}^2 + \frac{\pi\mathrm{T}^2}{2}. \qquad (29)$$

L'aire comprise entre l'une des deux branches de la courbe équitangentielle et sa base est donc égale à l'aire comprise entre la cycloïde et sa base, augmentée de la moitié de l'aire du cercle.

Arc de la courbe équitangentielle. On a

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 = 2\mathrm{R}^2(1-\cos\omega) + \frac{\mathrm{T}^2}{4}.$$

Or, ds peut s'crire, en posant $\frac{\omega}{2} = \varphi$,

$$ds = \sqrt{(16R^2 + T^2)\sin\varphi + T^2\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

C'est un arc d'ellipse. Donc:

Le périmètre de l'une des branches de la courbe équitangentielle est équivalent au demi-périmètre d'une ellipse dont les demi-axes sont

$$A = \sqrt{16R^2 + T^2}, \quad B = T.$$

Quelque soit T cette ellipse a la même distance focale 8R.

Il est à remarquer que, dans le cas particulier où $T = 3R$, l'aire U (29) est équivalente à l'aire de la demi-ellipse précedente. On a $U = \frac{15\pi R^2}{2}$.

On a alors ce cas assez curieux et asser rare en même temps d'une courbe qui a même aire et même périmètre qu'une autre courbe. Ce sont des genres de courbes que l'on peut désigner à la fois sous le nom de *isopérimètres* et *d'isoaires*.

VIII. Développées obliques de la cycloïde

Cherchons l'enveloppe de la droite qui passant par M fait un angle θ constant avec la tangente en M. Par chacun de ces point M passe deux droites faisant un angle θ. Considérons celle de ces droites qui est au dessous de MT; elle fait avec AB l'angle ψ, et l'on a

$$\psi + \theta = 90° - \frac{\omega}{2},$$

et

$$\psi = 90^\circ - \left(\theta + \frac{\omega}{2}\right).$$

L equation de la droite en question, ou *tangente oblique*, est

$$Y - R(1 - \cos\omega) = [X - R(\omega - \sin\omega)] \operatorname{tg}\psi,$$

ou

$$Y - R(1 - \cos\omega) = \operatorname{cotg}\left(\theta + \frac{\omega}{2}\right)[X - R(\omega \sin\omega)],$$

ou

$$(30) \left\{ \begin{aligned} X\cos\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right) - Y\sin\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right) = R\Big[& (\omega - \sin\omega)\cos\left(\theta + \frac{\omega}{2}\right) \\ & - (1 - \cos\omega)\sin\left(\theta + \frac{\omega}{2}\right)\Big]. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir l'enveloppe de cette droite, ou *développée oblique*, prenons la dérivée par rapport à ω. On a

$$(31) \left\{ \begin{aligned} X\sin\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right) + Y\cos\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right) = R\Big[& (\omega + \sin\omega)\sin\left(\theta + \frac{\omega}{2}\right) \\ & - (1 - \cos\omega)\cos\left(\theta + \frac{\omega}{2}\right)\Big]. \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées d'un point de la développée oblique sont donc, en résolvant les deux équations (30) et (31),

$$X = R\,[\omega - \sin(2\theta + \omega) + \sin 2\theta] \tag{32}$$

$$Y = R\,[-\cos(2\theta + \omega) + \cos 2\theta]. \tag{33}$$

Il est facile de se rendre compte que ces coordonnées sont celle d'une cycloïde égale à la cycloïde donnée.

Posons en effet $2\theta + \omega = \omega'$; il vient

$$X = R(\sin 2\theta - 2\theta) + R(\omega' - \sin\omega')$$

$$Y = -R(1 - \cos 2\theta) + R(1 - \cos\omega').$$

On reconnait bien là les coordonnées d'une cycloïde, dont l'un des points de rebroussement a pour coordonnées

$$x = R(\sin 2\theta - 2\theta),$$

$$y = -R(1 - \cos 2\theta).$$

D'ailleurs, d'après (32) et (33), on a

$$\frac{dX}{d\omega} = R\,[1 - \cos(2\theta + \omega)],$$

$$\frac{dy}{d\omega} = R\sin(2\theta + \omega).$$

En formant *l'aire* $\int YdX$, on a

$$(34) \qquad U = \pi R^2 (2 \cos 2\theta + 1).$$

Lorsque $\theta = 0$, on retrouve bien $U = 3\pi R^2$, aire de la cycloïde, et lorsque $\theta = 90°$, on retrouve $U = \pi R^2$, aire de la développée de la cycloïde.

L'arc de la développée oblique est donné par la formule

$$ds = 4R \sin\left(\theta + \frac{\omega}{2}\right) d\omega.$$

D'où

$$(35) \qquad s = -4R \cos\left(\theta + \frac{\omega}{2}\right) + \text{constante}.$$

En intégrant de $\omega = 0$ à $\omega = 2\pi$, on trouve $8R \cos\theta$, qui représente, non pas l'arc total compris entre A et B, mais la différence des arcs IA et IB, I étant le point de rebroussement compris entre A et B.

On voit aussi que la somme de ces mêmes arcs IA et IB est égale à 8R.

Si Q est le point de la développée oblique correspondant à $\omega = \pi$, on a

$$\text{Arc } QA = 4R (\sin\theta + \cos\theta),$$

$$\text{Arc } QI - \text{arc } IB = 4R (\cos\theta - \sin\theta)$$

En changeant θ en $180° - \theta$, on aurait la seconde développée oblique, qui est evidentement symétrique de la première par rapport à la perpendiculaire élevée à la base AB de la cycloïde en son milieu.

En faisant le changement de θ en $180° - \theta$ dans les équations (32) et (33), on obtient pour les coordonnées du point où la seconde développée oblique touche son enveloppe

$$(36) \qquad X_1 = R\,[\omega + \sin(2\theta - \omega) - \sin 2\theta],$$

$$(37) \qquad Y_1 = R\,[-\cos(2\theta - \omega) - \cos 2\theta].$$

Les coordonnées (36) e (37) sont les *centres de courbure obliques* relativement aux tangentes obliques inclinées de l'angle θ sur la tangente, ou aux *normales obliques* inclinées sur la normale de l'angle $(90° - \theta)$.

Voici deux lieux géométriques intéressants qui sont la conséquence des formules précédentes.

1.° *Lieu du milieu de la distance des deux centres de courbure précédents.*

On a pour les coordonnées de ce point

$$2x = X + X_1,$$

$$2y = Y + Y_1,$$

ou

$$x = R\,(\omega - \cos 2\theta \sin \omega),$$

$$y = R \cos 2\theta\,(1 - \cos \omega).$$

On trouve, sans difficulté que l'aire $\int y dx$, entre les limites

$\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$ est

$$U = \pi R^2 \cos 2\theta (\cos 2\theta + 2). \tag{38}$$

2.° *Enveloppe de la droite qui joint les deux centres de courbure.*

On trouve pour l'equation de cette droite

$$\left\{ \begin{aligned} x \sin \omega - y (1 - \cos \omega) = R [\omega \sin \omega + 2 \cos \omega \cos 2\theta \\ - 2 \cos 2\theta]. \end{aligned} \right. \tag{39}$$

Sa derivée par rapport à ω est

$$x \cos \omega - y \sin \omega = R [\omega \cos \omega + \sin \omega - 2 \sin \omega \cos 2\theta]. \tag{40}$$

D'où, en résolvant (39) e (40) par rapport à x et à y,

$$x = R (\omega - \sin \omega),$$

$$y = R [2 \cos 2\theta - (1 + \cos \omega)],$$

et comme y peut s'écrire

$$y = -2R (1 - \cos 2\theta) + R (1 - \cos \omega),$$

on voit que l'enveloppe est une cycloïde égale a la cycloïde donnée et que l'un de ses points de rebroussement est ($x=0$, $y=-4R\sin^2\theta$).

Voici deux questions que, pour terminer, nous signalons à nos lecteurs qui voudraient les rechercher:

1.° *Lieu de la projection d'un point* (α, β) *sur les tangentes obliques précédentes.* On autremant dit, *podaire de la développée oblique de la cycloïde.*

2.° *Lieu de la projection d'un point* (α, β) *sur la droite* (39).

UN TEOREMA DELLA TEORIA DELLE SERIE DI POTENZE

PER

FILIPPO SIBIRANI

(à Bologna)

Sia

$$(1) \qquad a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$$

una successione infinita di numeri i quali pei valori di n compresi fra

$$pm_1 \text{ e } (p+1)m_1 - 1 \quad (m_1 \geq 1\,;\ p = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots)$$

abbiano valori uguali $\alpha_{1,p}$. I numeri

$$(2) \qquad \alpha_{1,0},\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,2}, \ldots\ldots \alpha_{1,p}, \ldots\ldots$$

siano tali che le differenze

$$\alpha_{1,p+1} - \alpha_{1,p}$$

pei valori di p compresi fra

$$qm_2 \text{ e } (q+1)m_2-1 \quad (m_2 \geq 9\,;\ q=0,\,1,\,2,\,3,\ldots\ldots)$$

abbiano valori uguali $\alpha_{1,q}$. I numeri

$$(3) \qquad \alpha_{2,0}\,,\ \alpha_{2,1}\,,\ \alpha_{2,2}\,,\ldots\ldots\ \alpha_{2,q}\,,\ldots\ldots$$

siano tali che le differenze

$$\alpha_{2,q+1}-\alpha_{2,q}$$

pei valori di q compresi fra

$$sm_3 \text{ e } (s+1)\,m_3-1 \quad (m_3 \geq 1\,;\ s=0,\,1,\,2,\,3\ldots\ldots)$$

abbiano valori uguali $\alpha_{3,s}$.

Così supponiamo che si possa formare un numero qualsivoglia finito di successioni come le (2) e (3) e si pervenga ad una successione

$$\alpha_{\lambda,0}\,,\ \alpha_{\lambda,1}\,,\ \alpha_{\lambda,2}\ldots\ldots\ \alpha_{\lambda,v}\,,\ldots\ldots$$

tale che le differenze

$$\alpha_{\lambda,v+1}-\alpha_{\lambda,v}$$

abbiano valori uguali $\alpha_{\lambda+1,h}$ pei valori di v compresi fra

$$w_h \text{ e } w_{h+1}-1 \quad (h=0,\,1,\,2,\,3\ldots\ldots)$$

sotto la condizione che $w_{h+1} - w_h$ cresca indefinitamente al crescere di h.

Ancora si supponga che $\alpha_{\lambda+1,\mu} \gtrless \alpha_{\lambda+1,\nu}$ almeno per $\nu = \mu + 1$. Posto poi

$$U_h = m_1 m_2 \ldots\ldots m_\lambda w_h ,$$

sia ρ il limite superiore dell'insieme derivato della successione

$$\left| \sqrt[U_{h+1}]{\alpha_{\lambda+1,h+1} - \alpha_{\lambda+1,h}} \right| \quad (h = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots)$$

Allora sussiste il teorema:
«La serie

$$\mathcal{P}(x) = \sum_0^\infty a_n x^n ,$$

dove i coefficienti sono i numeri della successione (1), definisce una funzione che non esiste se non entro il cerchio $\left(0, \frac{1}{\rho}\right)$ (*). Entro a questo cerchio la $\mathcal{P}(x)$ o é regolare ovunque o, se $\rho < 1$, puo avere un numero finito di poli sulla circonferenza del cerchio (0,1)».

(*) Indichiamo così il cerchio di centro $x = 0$ e raggio uguale a $\frac{1}{\rho}$.

Noi potremo infatti scrivere

$$\mathcal{P}(x)=\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{1,p}(x^{pm_1}+x^{pm_1+1}+\ldots\ldots+x^{(p+1)m_1-1})$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{1,p}\frac{x^{pm_1}-x^{(p+1)m_1}}{1-x}=\frac{\alpha_{1,0}}{1-x}+\frac{x^{m_1}}{1-x}\sum_{p=0}^{\infty}(\alpha_{1,p+1}$$

$$-\alpha_{1,p})x^{mp_1}.$$

Ma

$$\sum_{p=0}^{\infty}(\alpha_{1,p+1}-\alpha_{1,p})\,x^{pm_1}=\sum_{q=0}^{\infty}\alpha_{2,q}(x^{qm_2m_1}+x^{(qm_2+1)m_1}+\ldots\ldots$$

$$+x^{\{(q+1)m_2-1\}m_1})=\sum_{q=0}^{\infty}\alpha_{2,q}\frac{x^{qm_2m_1}-x^{(q+1)m_2m_1}}{1-x^{m_1}}=\frac{\alpha_{2,0}}{1-x^{m_1}}$$

$$+\frac{x^{m_1m_2}}{1-x^{m_1}}\sum_{q=0}^{\infty}(\alpha_{2,q+1}-\alpha_{2,q})\,x^{qm_2m_1},$$

onde

$$\mathcal{P}(x)=\frac{\alpha_{1,0}}{1-x}+\frac{\alpha_{2,0}\,x^{m_1}}{(1-x)(1-x^{m_1})}+\frac{x^{m_1+m_1m_2}}{(1-x)(1-x^{m_1})}\sum_{q=0}^{\infty}(\alpha_{2,q+1}$$

$$-\alpha_{2,q})x^{qm_2m_1}.$$

Seguendo questo procedimento vediamo che si arriverà ad avere

$$\mathcal{P}(x)=\frac{\alpha_{1,0}}{1-x}+\frac{\alpha_{2,0}\,x^{m_1}}{(1-x)(1-x^{m_1})}+\frac{\alpha_{3,0}\,x^{m_1+m_1m_2}}{(1-x)(1-x^{m_1})(1-x^{m_1m_2})}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\alpha_{\lambda+1,0}\;x^{m_1+m_1m_2+m_1m_2m_3+\ldots\ldots+m_1m_2\ldots\ldots m_\lambda+m_1m_2\ldots\ldots m_\lambda w_0}}{(1+x)(1-x^{m_1})\,1-x^{m_1m_2})\ldots\ldots(1-x^{m_1m_2m_3\ldots\ldots m\lambda})}$$

$$+\frac{x^{m_1+m_1m_2+\ldots\ldots+m_1m_2\ldots\ldots m_\lambda}}{(1-x)(1-x^{m_1})(1-x^{m_1m_2})\ldots\ldots(1-x^{m_1m_2m\lambda})}\sum_{h=0}^{\infty}(\alpha_{\lambda+1,h+1}$$

$$-(\alpha_{\lambda+1,h})x^{m_1m_2\ldots\ldots m_\lambda w_{h+1}}.$$

Ora per l'ammessa condizione che $w_{h+1}-w_h$ cresca indefinitamente con h, la serie del secondo membro della precedente eguanoglianza non è continuabile al di fuori del proprio cerchio di convergenza, giusta un teorema dovuto al sig Fabry (*). Il cerchio di convergenza di questa serie ē appunto, in virtù di un noto teorema del sig Hadamard, il cerchio $\left(0,\frac{1}{\rho}\right)$ (**).

Ponendo

$$P_1(x)=(1-x)(1-x_{m_1})(1-x^{m_1m_2})\ldots\ldots(1-x^{m_1m_2\ldots\ldots m\lambda})$$

$$\begin{aligned}Q(x)=\alpha_{1,0}&(1-x^{m_1})(1-x^{m_1m_2})\ldots\ldots(1-x^{m_1m_2\ldots\ldots m_\lambda})\\&+\alpha_{2,0}\,x^{m_1}(1-x^{m_1m_2})\ldots\ldots(1-x^{m_1m_2w\lambda})\\&+\alpha_{3,0}x^{m_1+m_1m_2}(1-x^{m_1m_2m_3})\ldots\ldots(1-x^{m_1m_2\ldots\ldots m\lambda})+\ldots\ldots\\&+\alpha_{\lambda+1,0}\,x^{m_1+m_1m_2+m_1m_2m_3+\ldots\ldots+m_1m_2\ldots\ldots m_\lambda w_0}\end{aligned}$$

$$P(x)\,\mathcal{P}(x)=x^{m_1+m_1m_2+\ldots\ldots+m_1m_2m_3\ldots\ldots m_\lambda}\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_{\lambda+1,h+1}$$

(*) Fabry, Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux. *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 1896.

(**) Hadamard, Éssai sur l'étude des fonctions données par son développement. *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1802.

Da qui si vede che $\mathcal{P}(x)$ definisce uno funzione che non esiste se non alle interno di $\left(0, \frac{1}{\rho}\right)$ e si deduce senz'altro la seconda parte dell'enunciato.

Se si suppone che per tutti gli h i numeri $\alpha_{\lambda+1,h}$ siano uguali fra loro, si trae evidentemente

$$\mathcal{P}(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$$

ossia la $\mathcal{P}(x)$ ci definisce una funzione razionale fratta.

Osserviamo per ultimo che il teorema del sig. Lerch publicato in questo giornale al vol. X, pag. 27, non è che un caso assai particolare del teorema che noi abbiamo stabilito.

20 maggio, 1902.

TERCEIRO CONGRESSO INTERNACIONAL DOS MATHEMATICOS

O terceiro Congresso internacional dos Mathematicos ha de ter logar em Heidelberg nos dias 8 a 13 de agosto de 1904, e coincide com a celebração do primeiro centenario do nascimento de Jacobi. Uma commissão, de que fazem parte alguns dos mais eminentes geometras allemães, foi encarregada dos preparativos para esta reunião. Na mesma occasião ha de ter logar na mesma cidade uma exposição de modelos mathematicos e de obras publicadas nos ultimos annos.

As adhesões devem ser dirigidas ao illustre professor dr. A. Krazer (Kalsruhe, Westendstrasse, 57), que dará tambem aos que pretenderem ir ao Congresso todas as informações de que carecerem.

BIBLIOGRAPHIA

C. Alasia: I complementi di Geometria elementare. Milano, Hoepli, 1903.

O livro, cujo titulo vimos de escrever, faz parte da rica e importantissima collecção de manuaes consagrados ás sciencias, ás lettras e ás artes, publicados em Milão pelo sr. U. Hoepli. Fôra já ha annos publicado n'esta collecção um excellente manual consagrado á geometria elementar, redigido pelo sr. Pincherle. No presente volume são completadas e desenvolvidas algumas das doutrinas consideradas n'aquelle manual, de modo que os dois junctos contêem os assumptos de geometria elementar que encerram os programmas actuaes dos institutos technicos italianos.

O livro está dividido em 14 paragraphos, consagrados á theoria dos vectores, á theoria dos polyedros, ao estudo da symetria das figuras planas e solidas, á theoria do movimento das figuras no plano e no espaço, á theoria da similhança, á theoria dos maximos e minimos, á theoria das transversaes, á theoria da involução, á theoria dos polos e das polares, á theoria da inversão, á theoria das secções conicas, etc.

Todos estes assumptos são tratados de um modo extremamente claro e simples, e com todo o rigor necessario, e por isso este livro merece ser vivamente recommendado aos que quizerem tomar conhecimento dos referidos assumptos, que n'elle os encontrarão expostos sem largos desenvolvimentos, mas tambem sem faltar nada que seja essencial e fundamental.

E. Pascal: I gruppi continui di trasformazioni. Milano. Hoepli, 1903.

Á mesma collecção de manuaes, a que anteriormente nos referimos, pertence o livro cujo titulo vimos de escrever.

São tantas e tão importantes as applicações que tem a bella theoria dos grupos de transformações, que se deve a S. Lie, que se tinha tornado necessaria a publicação de um livro em que fosse exposta a parte essencial d'esta theoria, a fim de poder ser estudada por quem não dispõe de tempo para ler as obras extensas que a respeito d'ella foram publicadas por aquelle grande geometra e por seus discipulos. Ora esta lacuna na litteratura da theoria considerada acaba de ser preenchida pelo sr. E. Pascal com a publicação do volume indicado no principio d'esta noticia, e por isso se lhe deve ser extremamente grato.

O livro está dividido em cinco grandes capitulos. No primeiro é considerada a theoria geral dos grupos de transformações; no segundo a theoria geral da invariantividade de uma funcção a respeito de um grupo de transformações; no terceiro são estudadas as propriedades relativas á constituição dos grupos; no quarto são considerados os grupos aggregados a um grupo dado; no quinto, finalmente, é estudada a theoria invariantiva dos grupos ampliados.

N'esta vasta doutrina o sr. Pascal escolheu o que é mais importante, expol-o com clareza, originalidade e elegancia, e, em alguns pontos, junctou resultados das suas proprias indagações.

E. Pascal, Lezioni di Calcolo infinitesimale:
Parte I. Calcolo differenziale, 2.ª ed., Milano. Hoepli, 1902.
Parte II. Calcolo integrale, 2.ª ed., Milano. Hoepli, 1903.

Já démos noticia n'este jornal d'esta obra, que faz parte da collecção dos *Manuali Hoepli*, quando appareceu a primeira edição, e n'essa occasião referimo-nos ás suas excellentes qualidades. Hoje só temos a accrescentar que a nova edição foi revista pelo autor e melhorada ainda em muitos pontos.

Annuaire pour l'an 1903 publié par le Bureau des Longitudes. Paris, G. Villars.

Contém este volume do *Annuaire du Bureau des Longitudes* todos os trabalhos, informações, formulas, etc., de utilidade pratica que é uso contêr, e as noticias scientificas seguintes:

1.° *Radau: Estrellas cadentes e cometas;*

2.° *Janssen: Sciencia e poesia;*

3.° *Janssen: Nota sobre os trabalhos executados no Observatorio do Monte-Branco em 1902;*

4.° *Discursos pronunciados nos funeraes de A. Cornu por Bassot e Poincaré;*

5.° *Discursos pronunciados nos funeraes de Faye por Bouquet de la Grye, Bassot, Loewy e Bakkuyzen.*

Joannis Bolyai in memoriam. Claudiopli, 1902.

Este bello livro foi publicado pela Faculdade de Mathematica da Universidade Claudiopolitanea, da Hungria, para commemorar o centenario do nascimento de J. Bolyai, um dos fundadores da geometria abstracta. Contém a reproducção por photogravura de uma carta dirigida por J. Bolyai a seu pae em 3 de novembro de 1823, sobre o desenvolvimento do binomio; um importante trabalho de Schlesinger sobre algumas applicações da geometria absoluta á theoria das funcções de variaveis complexas; outro de Stäckel sobre o papel da mesma geometria na mecanica analytica; e, finalmente, uma lista das obras que têem sido publicadas a respeito da referida geometria. Todos estes trabalhos estão escriptos na lingua latina.

G. Peano: Arithmetica generale. Torino, 1902.

Temos já por varias vezes fallado n'este jornal dos trabalhos importantes feitos pelo sr. Peano para introduzir nas sciencias mathematicas certos symbolos que, substituindo a linguagem ordinaria, permittem abreviar as demonstrações e dar-lhes clareza e precisão. Entre estes symbolos merecem principal attenção os de Logica mathematica, que, sendo em pequeno numero, uns cincoenta, permittem, como diz o illustre geometra, substituir milhares de palavras.

No presente volume é exposta por meio d'estes symbolos a Arithmetica geral e a Algebra elementar. Em uma introducção são primeiramente indicados os symbolos empregados e em numerosas notas são dadas todas as explicações necessarias e interessantes informações historicas sobre alguns pontos.

Accrescentaremos que o sr. Peano anda publicando na sua *Rivista di Matematica* um *Formulario geral* das Mathematicas, trabalho vasto e importante, que seria quasi impossivel realizar sem o emprego dos symbolos da Logica.

Compte-rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens. Paris, G. Villars, 1902.

Esta obra importante contém, em uma primeira parte, noticias sobre o que de mais interessante se passou no Congresso dos mathematicos que teve logar em Paris nos dias 6 a 12 de agosto de 1900.

Na segunda parte vêem primeiramente as bellas e importantes conferencias feitas durante o Congresso por *M. Cantor*, que fallou sobre a historiographia das mathematicas; por *Volterra*, que se occupou da maneira como Betti, Brioschi e Casorati consideravam as questões de Analyse; por *Hilbert*, que indicou quaes são os grandes problemas hoje formulados e que ao futuro pertence resolver; por *Poincaré*, que fallou sobre o papel da intuição e da logica nas mathematicas; e finalmente por *Mittag-Leffler*, que deu noticias interessantes sobre alguns factos da vida de Weierstrass. Em seguida vêem os trabalhos apresentados ás diversas secções, os quaes versam sobre a Arithmetica, Algebra, Analyse, Geometria, Mecanica, Bibliographia e Historia das mathematicas.

J. Tannery et J. Molk: Éléments de la Théorie des fonctions analytiques, t. IV. Paris, G. Villars, 1902.

Temos-nos referido em diversos logares d'este jornal a esta obra magistral, em noticias n'elle dadas a respeito dos volumes anteriores. O presente volume é o ultimo da obra e é consagrado á theoria da inversão dos integraes ellipticos, já principiada no volume anterior e continuada n'este, e ás applicações. A estas applicações são consagrados dois capitulos, sendo no primeiro consideradas as applicações á Geometria e á Mechanica, e no segundo as applicações á Algebra e á Arithmetica.

Alfredo Capelli: Istituzioni di Analisi algebrica, 3.ª ed. Napoli, 1902.

Deu-se já noticia n'este jornal da edição anterior da obra importante cujo titulo vimos de escrever, a qual contém o curso, com ampliações, professado pelo seu sabio auctor na Universidade de Napoles.

Na presente edição encontram-se muitas doutrinas, que não vinham na edição anterior; e, em especial, uma exposição assaz desenvolvida, e feita com muito rigor, clareza e originalidade, da theoria dos numeros naturaes, e dos negativos e fraccionarios, em que o auctor se colloca no ponto de vista combinatorio e que faz preceder de um estudo desenvolvido do conceito de aggregado de objectos, o qual lhe serve de base.

Eis o objecto dos 16 capitulos em que está dividida a obra:

I. Genesis combinatoria da Arithmetica e introducção ao calculo litteral. II. Divisibilidade e propriedades elementares dos numeros naturaes. III. Elementos de analyse combinatoria. IV Operações com numeros racionaes. V. Theoria dos determinantes e sua applicação á resolução dos problemas algebricos do 1.º grau. VI. Elementos do calculo das funcções racionaes inteiras. VII. Operações com numeros reaes. VIII. Generalidades sobre continuidade e derivabilidade das funcções de variaveis reaes. IX. Propriedades geraes das operações com coefficientes reaes.

X. Resolução numerica das equações. XI. Operações com numeros complexos. XII. Das raizes das equações do grau *n*. XIII. Theoria geral da divisibilidade e da eliminação. XIV. Transformação das equações. Resolução geral das equações dos primeiros quatro graus. XV. Principios da theoria dos irracionaes algebricos. XVI. Transformação linear das fórmas algebricas. Invariantes e covariantes.

Todos estes assumptos são estudados com muito rigor e clareza, e com todos os desenvolvimentos necessarios e mesmo com riqueza de informações, expostas ou no texto mesmo ou em interessantes notas e exercicios que os acompanham.

Gustave Robin: Oeuvres scientifiques. Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Paris, G. Villars, 1903.

As obras scientificas de G. Robin, que estão sendo publicadas pelo sr. L. Raffy, formam tres volumes, um consagrado ás Mathematicas, outro á Physica e o terceiro á Chimica.

O presente volume é consagrado á Theoria das funcções analyticas, que Robin tratou, partindo apenas da ideia de numero racional, sem fazer em parte alguma intervir os numeros irracionaes, que considerou como puros symbolos de grandezas geometricas incommensuraveis, nem as noções de infinitamente pequeno e de limite, que substituiu pela noção de approximação *indefinida* por meio de numeros racionaes.

O plano da constituição da Analyse mathematica, em conformidade com estas ideias, é exposto em uma introducção, cheia de interesse, pela qual abre o livro a que nos estamos referindo.

A theoria das funcções é em seguida exposta em dez capitulos respectivamente consagrados aos assumptos seguintes: I. Series convergentes e series numericas. II. Definição geral das funcções d'uma variavel. Funcções finitas. III. Funcções de oscillação media nulla, ou funcções integraveis. IV. Problema inverso do calculo das funcções. Funcções inversas; exponencial e logarithmo. V. Derivadas. Primeiros exemplos de funcções uniformemente differenciaveis. VI. Propriedades geraes das funcções uniformemente differenciaveis. VII. Series de funcções. VIII. Series inteiras. IX. Integraes das funcções primitivas. Serie de Fourier. X. Noções sobre as funcções de duas variaveis e applicações á theoria das funcções d'uma variavel.

É justo accrescentar que, ainda que as ideias apresentadas nesta obra pertençam a Robin, não lhe pertence a sua redacção. Esta redacção, muito clara e elegante, pertence a L. Raffy, a quem Robin communicou verbalmente, em 1894, o seu modo de vêr a respeito de cada assumpto n'ella considerado.

T. W. Backhouse: Publications of West Hendon House Observatory. Sunderland, 1902.

Contém esta importante obra as observações feitas pelo sr. Backhouse no *West Hendon House Observatory* sobre a structura do Universo sideral, sobre os cometas de Bernard e Holmes, sobre a luz zodiacal, sobre as auroras boreaes, sobre as estrellas variaveis, etc.

E. Pascal: Eugenio Beltrami (Mathematische Annalen, t. LVII).

—— Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali di second'ordine, e su di una estensione dei simboli di Christoffel (Rend. della R. Accademia dei Lincei. Roma, 1902).

—— Su di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali totali, etc. (R. Istituto Lombardo, 1902).

G. Pesci: Sopra uno degli errori prodotti della interpolazioni simplice (Periodico di Matematica, t. XVIII).

L. Sinigallia: Sulle equazioni ai differenzialli totali di ordine qualunque (R. Istituto Lombardo, 1902).

S. Pincherle: Sulle derivate ad indice qualunque (Memorie della R. Accademia di Bologna, série V, t. IX*).*

R. Marcolongo: Teorie del Giroscopio symmetrico pesante (Annali di Matematica. Milano, série 3.ª, t. VII*).*

—— La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limite (Rend. della R. Accademia dei Lincei. Roma, 1902).

G. Giorgi: Unità razionali di elettromagnetismo (Ingegneria moderna. Napoli, 1901).

—— La trazione elettrica sulle ferrovie (Elettricità. Roma, 1902).

—— Il sisteme assoluto M. K. G. S. (Item).

P. Savio: Sulle formazioni invarïantiva della corrispondenza binaria (2,2) *(Giornale di Matematiche. Napoli t.* XL*).*

D. André: Supplément à la comptabilité des assauts complets (Bulletin de la Société Philomatique, 1900).

G. B. Guccia: Sulle curve algebriche piane (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1902).
—— *Sulle superficie algebriche (Item).*

E. Cesàro: Sur un problème de propagation de la chaleur (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1902).

C. Alasia: H. Faye (Rivista di Fisica, etc. Pavia, 1902).

Macfarlane: Peter Guthrie Tait (Physical Review, vol. XV, 1902).

G. Veronese: Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement (Congrès des Mathématiciens. Paris, 1900).

Fr. Nusl et J. Jan Fric: Étude sur l'appareil circumzénithal (Bulletin de l'Académie des Sciences de Bohème, Prag, 1903).

N'este artigo occupam-se os auctores da descripção e uso de um instrumento circumzenithal, por elles imaginado, que serve para a determinação da hora e da latitude.

S. Pincherle: Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione (Rend. della R. Accademia di Bologna, 1903).

E. Cesàro : Analisi intrinseca delle eliche policoniche (Rend. della R. Accademia di Napoli, 1903).

—— Per analisi intrinseca delle superficie rotonde. (Item).

P. Mansion : Sur la méthode d'Abel pour l'inversion de la première intégrale elliptique dans le cas où le module a une valeur imaginaire complexe (Acta mathematica, t. XXVII).

G. Pesci : Sul calculo relativo alle rette d'altezza (Revista Marittima. Roma, 1903).

—— Sul quadrangulo sferico inscrittibile (Periodico di Matematico, t. XIX).

A. R. Forsyth : The differencial invariants of a surface, and their geometrie significance (Phylosophical Transactions of the Royal Society of London, 1903, vol. 201).

Thomaz Muir : The generating function of the reciprocal of a determinant (Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1903, t. XL).

Brocard: Note sur la quartique

$$y = \pm\sqrt{rax} \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

(Le Mathematiche. Città di Castello, 1901).

M. Lerch: Bemerkung über die theorie der Gauss'schen Summen (Sitz. der K. Bïhm. Gesellschaf der Wissenchaften. Prag, 1903).

—— *Ueber der funften Gauss'schaften Beweis des reziprocitätsgesetzes fur die quadratischen reste (Item).*

—— *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel (Acta Mathematica, t. XXVII).*

G. T.

SUR LA CINQUIÈME DÉMONSTRATION DE GAUSS DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE LEGENDRE

PAR

M. Lerch

(Professeur à l'Université de Fribourg)

Soit m un entier quelconque, n un entier positif impair, premier avec le précédent, et posons

$$(1) \qquad \mu(m, n) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)}{2},$$

où l'on pose suivant l'habitude

$$\mathrm{R}(x) = x - \mathrm{E}\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

et sgn. z étant $+1$ ou à -1, suivant que z est positif ou négatif. Au moyen de la formule (1) soit défini le signe de gendre

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\mu\,(m,\,n)}. \tag{2}$$

En supposant $m = n'$ positif et impair, on a le théorème de réciprocité

$$\left(\frac{n}{n'}\right)\left(\frac{n'}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}}.$$

La cinquième démonstration que Gauss a donnée de ce théorème, deviné par Euler et formulé par Legendre, est susceptible d'une modification qui permet d'établir en même temps les lois

$$\left(\frac{m\,m'}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n}\right), \quad \left(\frac{m}{n\,n'}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right),$$

qui résument presque toute la théorie du signe de Legendre.

J'emploi, pour simplifier, la notation

$$\varphi(x) = \text{sgn. R}(x),$$

et j'observe que l'expression

$$\frac{1+\varphi(x)}{2}\,\frac{1+\varphi(y)}{2}\,\varphi(x)\,\varphi(y)$$

est toujours un entier. Cela étant, soient n, n' deux entiers impairs et positifs, premiers entre eux, puis choisissons deux entiers

m et m', soumis à la seule condition que m soit premier envers n, et m' envers n', et considérons la somme

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(nn'-1)} \frac{1+\varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right)}{2} \cdot \frac{1+\varphi\left(\frac{m'\nu}{n'}\right)}{2} \cdot \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right)\varphi\left(\frac{m'\nu}{n'}\right),$$

dont la valeur est toujours un entier.

En introduisant les notations

$$A = \sum_{\nu} \varphi^2\left(\frac{m\nu}{n}\right)\varphi^2\left(\frac{m'\nu}{n'}\right)$$

$$B = \sum_{\nu} \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right)\varphi^2\left(\frac{m'\nu}{n'}\right),$$

$$C = \sum_{\nu} \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right)\varphi^2\left(\frac{m'\nu}{n'}\right),$$

$$B' = \sum_{\nu} \varphi^2\left(\frac{m\nu}{n}\right)\varphi\left(\frac{m'\nu}{n'}\right),$$

$$\left(\nu = 1, 2, 3, \ldots \frac{nn'-1}{2}\right),$$

on aura

$$4\alpha = A + B + B' + C.$$

La somme A contient autant d'unités qu'il y a des valeurs ν

non divisibles par n ou par n', et il s'ensuit

$$A = \frac{(n-1)(n'-1)}{2}.$$

Pour évaluer la somme C, observons que ses termes ne changent pas en mettant $-\nu$ au lieu de ν, d'où il suit que

$$2C = \sum_{\mu} \varphi\left(\frac{m\mu}{n}\right) \varphi\left(\frac{m'\mu}{n'}\right), \left(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{nn'-1}{2}\right).$$

Puisque le terme général

$$\varphi\left(\frac{m\mu}{n}\right) \varphi\left(\frac{m'\mu}{n}\right)$$

ne change pas en augmentant μ d'un multiple du module nn', on peut remplacer l'ensemble des valeurs de μ par un autre ensemble de nn' valeurs incongrues ; choisissons

$$\mu = nh' + n'h, \left\{\begin{array}{l} h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \dfrac{n-1}{2} \\ h' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \dfrac{n'-1}{2} \end{array}\right\}.$$

Puisque, cette substitution faite,

$$\varphi\left(\frac{m\mu}{n}\right) = \varphi\left(\frac{mn'h}{n}\right), \varphi\left(\frac{m'\mu}{n'}\right) = \varphi\left(\frac{m'nh'}{n'}\right),$$

il vient

$$2C = \sum_{h=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \varphi\left(\frac{mn'h}{n}\right) \cdot \sum_{h'=-\frac{n'-1}{2}}^{\frac{n'-1}{2}} \varphi\left(\frac{m'nh'}{n'}\right).$$

Chacun des deux facteurs est evidemment égal à zéro, et par conséquent

$$C = 0.$$

Il restent encore à évaluer les deux sommes B et B'. La somme B s'obtient en supprimant dans la somme

$$\sum_{\nu} \varphi\left(\frac{m\nu}{n'}\right)$$

les termes qui rendent nulle la quantité $\varphi\left(\frac{m'\nu}{n'}\right)$. Or ce sont les valeurs $\nu = hn'$ $\left(h \leqq \frac{n-1}{2}\right)$, et il s'ensuit que

$$B = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(nn'-1)} \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right) - \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \varphi\left(\frac{mn'h}{n}\right).$$

La signification de la fonction $\varphi(x)$ fait voir immédiatement que toutes les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{kn} \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right), \ (k \text{ entier})$$

sont nulles. Puisque

$$\frac{nn'-1}{2}=n\,\frac{n'-1}{2}+\frac{n-1}{2},$$

il ne restent de la première somme, dans l'expression de B, que les termes

$$\sum_{\nu=n\frac{n'-1}{2}+1}^{n\frac{n'-1}{2}+\frac{n-1}{2}}\varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right)=\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}}\varphi\left(\frac{mh}{n}\right),$$

et il s'ensuit

$$\mathrm{B}=\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}}\varphi\left(\frac{mh}{n}\right)-\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}}\varphi\left(\frac{mn'h}{n}\right),$$

ou bien, en faisant usage de l'écriture (1),

$$\mathrm{B}=2\mu\,(mn',\,n)-2\mu\,(m,\,n).$$

On trouve de la même manière

$$\mathrm{B}'=2\mu\,(m'n,\,n')-2\mu\,(m',\,n'),$$

et en portant ces valeurs dans l'équations

$$4\alpha=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{B}'+\mathrm{C},$$

il vient

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n'-1}{2} + \mu(mn', n) + \mu(m'n, n')$$

$$-\mu(m, n) - \mu(m', n') = 2\alpha.$$

En faisant usage de la définition (2), on en tire

$$(A) \qquad \left(\frac{mn'}{n}\right)\left(\frac{m'n}{n'}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n'-1}{2}} \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n'}\right).$$

Faisant $m = m' = 1$, on a la loi de réciprocité

$$(B) \qquad \left(\frac{n'}{n}\right)\left(\frac{n}{n'}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n'-1}{2}},$$

puisque la définition (1) donne immediatement

$$\mu(1, n) = 0, \left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Faisant $m' = 1$, la formule (A) devient

$$\left(\frac{mn'}{n}\right)\left(\frac{n}{n'}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n'-1}{2}} \left(\frac{m}{n}\right),$$

d'où, en divisant avec (B) membre à membre,

$$(3) \qquad \left(\frac{mn'}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n'}{n}\right).$$

Observant que la formule

$$\text{sgn. R}\,(x+h) = \text{sgn. R}\,(x)$$

donne

$$\mu\,(m+hn, n) = \mu\,(m, n),$$

on voit que

$$(C) \qquad \left(\frac{m+hn}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right).$$

Ce théoreme là permet de conclure au moyen de (3) la relation plus générale

$$(D) \qquad \left(\frac{mm'}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n}\right).$$

Prenant m, m' positifs et impairs, et transformant les deux membres d'après la loi de reciprocité (B), on en tire un troisième théorème fondamental

$$(E) \qquad \left(\frac{m}{nn'}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right),$$

écrit avec notation changée.

On sait comment on peut déduire du théorème (D) la signification habituelle du signe $\left(\frac{m}{n}\right)$, si n est un nombre premier (*).

(*) V. *Kronecker, Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1876; ou *Bachmann, Niedere Zahlentheorie* (Leipzig, 1902, pag. 245).

SOBRE A THEORIA DAS RAIZES CONJUGADAS

POR

L. F. Marrecas Ferreira

A designação de *raizes conjugadas* é susceptivel de maior extensão do que a usual, abrangendo não só grupos de duas, differindo apenas pelos signaes, mas de muitas outras. Podemos tambem intitular assim as sujeitas a lei tal, que a entrada de qualquer d'ellas n'uma equação arraste, como consequencia necessaria, a de todas as outras. No que vae seguir considerarei equações algebricas, que, tendo coefficientes reaes e commensuraveis, se achem n'aquellas circumstancias.

Se $a, b, c, d, e \ldots$ forem quantidades commensuraveis, inteiras, ou fraccionarias, positivas ou negativas; n, numero inteiro e positivo; $\sqrt[n]{c}, \sqrt[n]{e}, \sqrt[n]{g} \ldots$ incommensuraveis, ou imaginarios, verifica-se a proposição seguinte:

Se a equação algebrica $F(x) = 0$, *de coefficientes reaes e commensuraveis, admittir uma raiz da forma:* $a + b\sqrt[n]{c} + d\sqrt[n]{e} + f\sqrt[n]{g} \ldots$ *deverá conter como raizes todos os polynomios, derivados d'este pela multiplicação arbitraria dos coefficientes dos radicaes pelas raizes, de grau* n, *da unidade.*

Sendo, com effeito, $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varphi \ldots \lambda, \mu \ldots$ funcções de x, i e j numeros inteiros, menores que n, virá

$$F(x) = (x - a - b\sqrt[n]{c} - d\sqrt[n]{e} \ldots) \{ \alpha + \beta\sqrt[n]{c} + \gamma\sqrt[n]{e} + \ldots$$

$$+ \varphi\sqrt[n]{c^i e^j} + \ldots + \lambda\sqrt[n]{c^{n-1}} + \ldots + \mu\sqrt[n]{e^{n-1}} + \ldots \}$$

ou

$$F(x) = (x - a)\alpha - b\lambda c - d\mu e \ldots + I;$$

e, como I, polynomio, contendo todos os termos incommensuraveis, ou imaginarios, sejam quaes forem os valores attribuidos a x, deve ser nullo, resulta

$$F(x) = (x - a)\alpha - \beta\lambda c - d\mu e \ldots,$$

em que os termos, a partir do segundo, seguem a mesma lei de formação que este.

Representando r uma das raizes primitivas da unidade, de grau n, o quadro de todas as do mesmo grau, será $r, r^2, r^3 \ldots r^n$. Sendo k e l inteiros e $k + l = n$, é claro que $(br^k) \times (\lambda r^l) = b\lambda$, $(ar^k) \times (\mu r^l) = a\mu, \ldots$

Podemos, pois, multiplicar os factores $b, d, f \ldots$ dos radicaes da raiz proposta pelas diversas raizes, de grau n, da unidade sem mudar a equação; d'onde se vê que $F(x) = 0$ admittirá não só a raiz proposta, mas todas as que d'ella derivam pela multiplicação de qualquer d'aquelles factores por qualquer das raizes de $x^n = 1$.

As raizes imaginarias de $F(x) = 0$ são sempre conjugadas, como as do segundo grau

Podem apparecer as raizes imaginarias em duas hypotheses: radicaes, de indice par, affectando quantidades negativas — radicaes quaesquer, affectando quantidades positivas, quando n for maior que 2; por causa das raizes imaginarias da unidade, coefficientes dos radicaes.

As raizes da unidade são conjugadas, como as do segundo grau; os productos d'ellas pelos radicaes egualmente serão conjugados e é assim, portanto, que no segundo caso apparecem todas as raizes, grupadas, duas a duas. No primeiro caso ha, além d'estas, as resultantes da multiplicação dos radicaes imaginarios pelas raizes commensuraveis ± 1, mas estas são egualmente conjugadas.

Na equação $F(x)=0$ *não pode entrar nas raizes quantidade alguma, que não seja raiz de uma quantidade commensuravel.*

Se a equação admittir como raiz a quantidade $a+i$, em que a é commensuravel e i incommensuravel tal, que nenhuma das suas potencias seja commensuravel, virá

$$F(x)=(x-a-i)(x^{m-2}+Ax^{m-1}+Bx^{m-3}+\ldots$$

$$+Sx+V)=0\;;$$

i entra em A no primeiro grau, em B no segundo e assim successivamente, sendo em S o grau $m-2$ e em V $m-1$. Todos estes coefficientes: A, B,... S, assim como V, são funcções de x.

Podemos escrever, sendo α, β... ω, funcções commensuraveis de x,

$$F(x)=(x-a)X+\alpha i+\beta i^2+\ldots+\omega i^m=0.$$

Constituindo as potencias de i incommensuraveis distinctos não sujeitos a reducção, será $\alpha i=\beta i^2=\omega i^m=0$, o que só se pode realizar em dois casos distinctos:

1.° caso — *i differente de zéro* — vem: $\alpha=\beta i=\ldots=\omega.i^{m-1}=0$ — todos os coefficientes α, β... ω, serão nullos, mas não sendo a raiz de $F(x)=0$, não pode vir $F(x)=(x-a)X$, em que X é um polynomio inteiro.

2.° caso — $i=0$ — a raiz ficará reduzida a a e a equação precedente subsiste.

Do exposto conclue-se que $a+b\sqrt[n]{c}+d\sqrt[n]{e}+\ldots$, ou simplesmente

$$a+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}+\ldots;$$

é a expressão geral das raizes incommensuraveis de uma equação algebrica, como tem sido considerada.

Nas equações de grau par, com m *radicaes, não imaginarios, em cada raiz, o numero de raizes reaes, incommensuraveis, será tambem par, egual a* 2^m.

As raizes reaes só podem resultar da multiplicação dos radicaes pelas raizes não imaginarias da unidade, ora, quando em $x^n = 1$ o expoente é par, ha sempre as duas raizes commensuraveis d'esta equação ± 1; resultando, portanto, para $F(x) = 0$ o seguinte grupo de raizes reaes e incommensuraveis:

$$\sqrt[n]{b} \pm \sqrt[n]{c} \pm \ldots,$$

cujo numero é 2^m, por causa das duas determinações de cada radical.

Se as raizes da equação, ao contrario do que se tem supposto, não forem todas conjugadas, constituindo um systema unico, pode ella, como adeante se verá, ser de grau par e admittir, todavia, um numero impar de raizes reaes e incommensuraveis.

Reciprocamente: se o numero de raizes reaes e incommensuraveis fôr par, o grau da equação será tambem par.

Para haver um numero par de raizes reaes e incommensuraveis é indispensavel que $x^n = 1$, cujas raizes servem de coefficientes dos radicaes, admitta as soluções ± 1, o que só pode succeder, quando o grau da equação for par.

Se o grau da equação for impar, haverá uma unica raiz real e incommensuravel e todas as outras vêem imaginarias.

N'este caso os radicaes têem, apenas, uma determinação, porque só haverá uma raiz da unidade, d'aquelle indice, que seja real e a somma algebrica d'elles com a determinação, que lhes compete, é a unica raiz incommensuravel e real.

Reciprocamente: se a equação admittir uma unica raiz, real e incommensuravel, o grau será impar.

Esta proposição resulta immediatamente do que fica exposto.

N'uma equação algebrica, de raizes reaes, o numero das incommensuraveis é sempre par.

As raizes incommensuraveis, n'este caso, só podem provir de radicaes, que nunca admittam coefficientes imaginarios e os unicos em taes condições são os do segundo grau.

N'uma equação algebrica, de raizes reaes, grau impar, uma das raizes, pelo menos, será commensuravel.

É uma consequencia immediata de virem as incommensuraveis aos pares.

As duas ultimas proposições referem-se tambem, por excepção, a equações, cujas raizes não constituem um systema conjugado. Esta hypothese não continua a subsistir no que segue.

Grau e composição da equação. — Havendo m radicaes em cada raiz, e sendo n o indice commum d'elles, o numero de raizes, ou o grau da equação, é dado pelo numero $n^m = N$.

Se designarmos por $a + K_1$ uma d'ellas, na totalidade deve entrar o seguinte grupo:

$$a + K_1 . r; \; a + K_1 . r^2, \ldots . \; a + K_1 r^n$$

composto de n raizes, cujos segundos termos não derivam dos das aqui não incluidas, pela simples multiplicação por qualquer potencia de r.

Com nova raiz $a + K_2$, fóra d'aquelle grupo, formaremos um outro:

$$a + K_2 . r, \; a + K_2 . r^2, \ldots . \; a + K_2 . r^n$$

e assim successivamente, o que perfaz o numero $\lambda = n^{m-1}$ de grupos, distinctos pelos segundos termos de cada raiz.

Ora

$$\pi_{i=1}^{i=n} (x - a - K_i . r^i) = (x - a)^n - K_i^n$$

e

$$F(x) = \pi_{j=1}^{j=\lambda} \left\{ (x - a)^n - K_j^n \right\}.$$

Para a raiz $x = a + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} + \ldots$. serão valores diversos de K^n_j

$$K^n_1 = \{\sqrt[n]{b} + r\sqrt[n]{c} + \ldots\}^n = \alpha + \beta r + \gamma r^2 + \ldots = \alpha + S_1$$

$$K^n_2 = \{\sqrt[n]{b} + r^2\sqrt[n]{c} + \ldots\}^n = \alpha + \beta r^2 + \chi r^4 + \ldots = \alpha + S_2$$

$$K^n_3 = \{\sqrt[n]{b} + r^3\sqrt[n]{c} + \ldots\}^n = \alpha + \beta r^3 + \gamma r^6 + \ldots = \alpha + S^3$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

$$\alpha = b + c + d + \ldots;$$

comprehende-se facilmente como em cada caso se obtêem valores de K, distinctos uns dos outros.

Determinação de a. — A equação pode escrever-se:

$$F(x) = (x-a)^N - \Sigma K^n_j (x-a)^{N-n} + \Sigma K^n_j K^n_l (x-a)^{N-2n} - \ldots$$

$$= x^N - Ax^{N-1} + A' x^{N-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

seguindo os coefficientes de todos os termos, comprehendidos entre aquelles, cujos expoentes são N e $N-n$, a lei do desenvolvimento da potencia $(x-A)^N$, virá: $A = Na$ e $a = A:N$. Será, portanto, a quantidade a a parte commensuravel da raiz, e, fafazendo desapparecer o segundo termo da equação, esta ficará reduzida aos termos, em que o expoente de x for multiplo de n.

N'uma equação desprovida de segundo termo, claro está que as raizes não têem essa parte commensuravel.

Transformadas. Abaixamento do grau da equação.— Mudando $(x-a)^n$ em y, resulta a seguinte transformada, que é do grau n^{m-1}

$$\left(y-K_1^n\right)\left(y-K_2^n\right)\ldots\ldots\left(y-K_i^n\right)\ldots\ldots=0,$$

na qual o coefficiente do segundo termo é a somma $b+c+d+\ldots\ldots$

Por commodidade convém fazer desapparecer este termo e simplificam-se por esse facto os coefficientes dos outros, passando immediatamente da equação dada, por meio da hypothese

$$y=(x-a)^n+\alpha,$$

á transformada

$$(y-S_1)(y-S_2)\ldots\ldots(y-S_i)\ldots\ldots=0$$

do mesmo grau que a precedente.

Em ambas as transformadas não entra a quantidade commensuravel a e os seus coefficientes são funcções de m incognitas, que entram em K_i^n.

Nas equações indecomponiveis e, em geral, em todas aquellas cujas raizes são todas conjugadas, o grau, ou é numero primo, ou potencia de numero primo.

Para que da segunda transformada possa resultar uma equação algebrica de coefficientes reaes e commensuraveis, é condição necessaria, que o coefficiente ΣS, do segundo termo seja nullo, visto ser formado por uma somma de incommensuraveis; ora, esta somma será, como precedentemente se viu,

$$\beta(r+r^2+r^3+\ldots)+\gamma(r^2+r^4\ldots)+\delta(r^3+r^6$$

$$+\ldots)+\ldots;$$

e para tal fim requer-se, que as potencias successivas de qualquer das raizes

$$r,\ r^2,\ r^3,\ldots;\ r^2,\ r^4,\ r^6\ldots;\ r^3,\ r^6,\ r^9\ldots$$

da unidade sejam differentes, de modo que em cada um d'aquelles parenthesis existam todas, porque será esta a unica maneira de obtermos uma somma nulla. É indispensavel, por conseguinte, que as n raizes da unidade, excepto 1, sejam primitivas, o que só succede, quando *n fôr primo,* e, como o grau da equação é n, ou uma potencia de n, fica assim demonstrado o principio.

O numero de termos de qualquer das quantidades S_1, S_2, $S_3\ldots$ é o dos da potencia n de um polynomio, composto de m termos, diminuido de m, ou

$$P=\frac{(n+m-1)\,(n+m-2)\ldots m}{1.2.3\ldots n}-m$$

e o d'aquellas quantidades é de n^{m-1}; quando estes dois numeros forem iguaes, *a indecomponibilidade da equação, ou a propriedade de ella ter todas as suas raizes conjugadas, exige que os expoentes de* r *formem um quadrado magico*, substituindo-se nos expoentes r^{n+k} por r^k, sendo $k<n$.

Em qualquer das linhas, ou das columnas, precedentemente feitas para os valores de K, repetem-se, ou podem repetir-se, os valores dos expoentes; é preciso, porém, que na mesma columna cada um d'elles se repita o mesmo numero de vezes, e d'este modo teremos, sendo q um coefficiente inteiro:

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda} S_i = .Bq.\sum_{1}^{n} r^i + \gamma.q.\sum_{1}^{n}.r^j + \ldots = 0.$$

As unicas equações, que téem sempre as raizes expressas por meio de radicaes, são as de segundo, terceiro e quarto grau; quer sejam indecomponiveis, quer não, ou aquellas, que se podem reduzir a estas, ou ao primeiro grau, fazendo $(x - a)^{kn} = y$.

Sendo qualquer das transformadas de grau n^{m-1}, o numero de seus coefficientes é $n^{m-1} + 1$; o do primeiro termo é a unidade e nos seguintes ha n^{m-1} coefficientes em funcção dos quaes se podem exprimir as quantidades $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}, \ldots$, e, como estas são em numero de m, o systema será determinado, podendo as raizes ser sempre expressas por meio de radicaes, quando se verificar a equação $n^{m-1} = m$, cujas soluções, em numeros inteiros são: $m = 1$, n qualquer; $m = n = 2$.

No caso de não existir o segundo termo, as raizes só podem ser expressas em funcção de $n^{m-1} - 1$ coefficientes e para ser determinado o systema é preciso que se dê a equação:

$$n^{m-1} - 1 = m,$$

cujas soluções inteiras são:

$$m = 2, \quad n = 3; \quad m = 3, \quad n = 2.$$

Já se viu, que nas duas transformadas não entra a quantidade commensuravel a; de sorte que, quer n'ellas haja segundo termo, quer não, os seus coefficientes são sempre funcções das m quantidades, que entram debaixo dos radicaes.

Grupos de equações, cujas raizes são sempre expressas por meio de radicaes.

1.° Grupo. — Caracterisado por $m=1$, n qualquer, é o das equações do typo $(x-a)^{kn}-K^n=0$, tendo por transformada a equação do primeiro grau: $y-K^n=0$, com um só coefficiente (além da unidade no primeiro termo) e um unico radical em cada uma das raizes. Reduzem-se sempre a este typo as equações do segundo grau.

2.° Grupo. — Caracterisado por $m=n=2$, é o das equações do typo

$$\left[(x-a)^{kn}-K_1^n\right]\left[(x-a)^{kn}-K_2^n\right]=0,$$

que têem por transformada a equação do segundo grau:

$$y^2-\left(K_1^n+K_2^n\right)y+K_1^n.K_2^n=0.$$

Ha dois radicaes em K_1 e K_2, ou na formula da raiz, dois coefficientes na transformada, e, como podemos identificar com esta qualquer equação completa de segundo grau, segue-se que *todas as equações d'este grau se podem considerar como transformadas da equação do grau* $n^m=2^2=4$, as quaes por seu turno, se reduzem ao primeiro.

3.° Grupo. — Caracterisado por $m=2$, $n=3$, é o das equações do typo:

$$\left[(x-a)^{kn}-K_1^n\right]\left[(x-a)^{kn}-K_2^n\right]\left[(x-a)^{kn}-K_3^n\right]=0,$$

cuja transformada, sem segundo termo, é a equação de terceiro grau:

$$y^3+\Sigma K_i^n\,K_j^n.\;y-K_1^nK_2^nK_3^n=0.$$

Todas as equações de terceiro grau se podem considerar, pois, como transformadas de outras, do grau $n^m = 3^2 = 9$.

4.° Grupo.— Caracterisado por $m = 3$, $n = 2$, é o das equações d'este typo:

$$\left[(x-a)^{kn} - K_1^n\right]\left[(x-a)^{kn} - K_2^n\right]\left[(x-a)^{kn} - K_3^n\right]$$
$$\times\left[(x-a)^{kn} - K_4^n\right] = 0,$$

cuja transformada é:

$$y^4 + \Sigma K_i^n K_j^n \cdot y^2 - \Sigma K_i^n K_j^n K_\lambda^n \cdot y + K_1^n K_2^n K_3^n K_4^n = 0$$

Todas as equações de quarto grau se podem considerar como transformadas de outras do grau $n^m = 2^3 = 8$.

Em todas as equações indecomponiveis, de grau superior ao quarto, $n^{m-1} - (m+1)$ *coefficientes são funcções dos restantes.*

Nas equações indecomponiveis todas as raizes são conjugadas e n'esse caso podemos formar $n^{m-1} - 1$ equações (numero de coefficientes da transformada), sendo as incognitas, os m radicaes de cada raiz. O numero, do enunciado, representa o das equações de condição, ou o de coefficientes, que podemos exprimir em funcção dos restantes; d'elles dependentes portanto.

Resolução das equações, cujas raizes são conjugadas.

Abstrahindo nas raizes da parte commensuravel — e para isso tira-se o segundo termo á equação proposta — obtêem-se as expressões de K_1^n, K_2^n,... multiplicam-se os factores da equação, formados com estes numeros, e egualam-se os coefficientes da equação final, expressos nas quantidades b, c, d..., aos coefficientes da equação dada. Obtendo d'esta sorte os typos das transformadas, que ficam para sempre, facil é, logo que se queira, fazer o confronto. Melhor seria o ter as formulas das raizes, expressas nos coefficientes, mas, além do quarto grau (da transformada) é muito laborioso, pelo menos, o obtel-os. Adeante deduzo as expressões da transformada e das raizes para os quatro primeiros graus.

A resolução faz-se ainda, introduzindo na equação — privada do segundo termo — a raiz K_1^n, ou qualquer das outras, e depois annullando os termos, que se podem reduzir a productos de incommensuravel por diversos polynomios.

Como o processo anterior este será tambem mais adiante applicado.

Equações de graus superiores ao quarto. — Só podemos exprimir as raizes em funcções dos coefficientes nas indecomponiveis, e estas só podem ser, como foi visto, aquellas cujo grau for numero primo, ou potencia de numero primo. A indecomponibilidade deve, satisfeita aquella condição, reconhecer-se pelo facto de serem $n^{m-1} - (m+1)$ coefficientes funcções dos outros, o que é difficil de averiguar pelas complicadas equações, que resultam da eliminação.

Em geral: a equação de grau n^{m-1}, n primo, sendo indecomponivel, será transformada de outra, de grau n^m, d'onde resulta que as equações de graus 5, 7, 8, 9, 11, 13..., quando indecomponiveis, são respectivamente transformadas de equações de graus 5^2, 7^2, 2^4, 3^3, 11^2, 13^2... Muitas equações ha de qualquer d'aquelles graus, decomponiveis, visto que as suas raizes só em casos particulares se subordinam á fórma de conjugadas.

Os quadrados magicos nos valores de K. — Nas equações, cujas raizes formam systema conjugado, devem as potencias de r, em todos os termos de cada columna de valores de K, serem diversas, ou produzirem raizes differentes, como se viu; resulta d'ahi, que os expoentes, substituindo r^{n+k}, $(k < n)$ por r^k têem de formar os seguintes quadrados magicos:

3.° grau

1	2
2	1

5.° grau

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

7.° grau

1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1