JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo Professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME X

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1891

REMARQUE SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. AUGUSTE GUTZMER

(à Berlin)

... Permettez-moi de vous communiquer une *remarque sur certaines équations différentielles* que j'ai considérées dans une note insérée au Journal de Mathématiques (*). J'y ai formé les équations qui proviennent de l'équation de Laplace $\Delta u = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{d^2u}{dx_i^2} = 0$ par la reitération de l'opération Δ, et j'ai déterminé celles des intégrales de ces équations qui ne dépendent que de r, où $r^2 = \sum_{i=1}^{\rho} (x_i - a_i)^2$. Il est aisé de voir qu'on peut généraliser ces résultats.

En effet, si nous supposons que u est fonction de v seulement, où v est une fonction de $x_1, \ldots, x_\rho$, l'équation $\Delta u = 0$ prendra cette forme

$$\nabla v . \frac{d^2u}{dv^2} + \Delta v . \frac{du}{dv} = 0,$$

où

$$\nabla v = \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{dv}{dx_i}\right)^2, \quad \Delta v = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{d^2v}{dx_i^2}.$$

(*) 4e série, tome VI, pag. 405-422, 1890.

Si maintenant v est déterminé de telle façon que ∇v et Δv dépendent, à un facteur commun près, seulement de v, l'équation de Laplace se change en une équation linéaire et homogène:

$$\varphi_1(v) \cdot \frac{d^2u}{dv^2} + \psi_1(v)\frac{du}{dv} = 0.$$

Cette détermination de v, dans sa généralité, semble offrir de grandes difficultés; je n'y ai pas réussi. Mais si nous nous bornons au cas spécial que v est fonction de r, nous aurons

$$\nabla v = \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \varphi_1(v) = \varphi(r); \quad v = \int \sqrt{\varphi(r)} \, . \, dr.$$

$$\Delta v = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{\rho - 1}{r}\frac{dv}{dr} = \psi_1(v) = \psi(r).$$

On peut donc prendre v arbitrairement, $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ seront alors déterminés. Ensuite on pourrait procéder à la réitération de cette équation et en déterminer les intégrales. N'entrons pas ici dans ce calcul.

Vous voyez, Monsieur, quel grand avantage, pour la réitération, offre la remarque de M. P. Günther (*), parce qu'on trouve directement et presque sans calcul l'équation réitérée et ses intégrales. On peut donc se demander pour quelles fonctions v de r l'équation

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} \cdot \frac{du}{dv} = 0,$$

où l'on a

$$v = \int \sqrt{\varphi(r)} \, dr,$$

(*) L. c. p. 418; voir aussi: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 107, pag. 298.

peut-elle être transformée dans la forme:

$$v^{\mu}\frac{d}{dv}v^{\lambda}\frac{d}{dv}u=0.$$

Vous verrez aisément qu'on doit avoir $\lambda+\mu=0$ et

$$\frac{\lambda}{v}=\frac{\psi(r)}{\varphi(r)}=\frac{\dfrac{d^2v}{dr^2}+\dfrac{\rho-1}{r}\dfrac{dv}{dr}}{\left(\dfrac{dv}{dr}\right)^2},$$

d'où vous conclurez par un calcul élémentaire que, pour $\rho>2$, il faut que v soit de la forme

$$v=A\left(\frac{1}{r^{\rho-2}}+B\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}\quad,\quad \text{si}\ \lambda \gtrless 1$$

ou

$$v=A\,.\,e^{B\,.\,r^{2-\rho}}\quad,\quad \text{si}\ \lambda=1;$$

pour $\rho=2$ on doit avoir:

$$v=A\,(\log r+B)^{\frac{1}{1-\lambda}}\quad,\quad \text{si}\ \lambda \gtrless 1$$

ou

$$v=A\,.\,r^{B}\quad,\quad \text{si}\ \lambda=1,$$

A et B désignant des constantes. En prenant pour v une de ces fonctions, on peut donc aisément former les réitérations et en déterminer les intégrales, et comme on est toujours conduit à une équation linéaire et homogène ne possédant que les deux points singuliers 0 e ∞, la détermination de ces intégrales n'offre pas de difficultés sérieuses.

Prenons un exemple. Soit $v = r^p$; on trouve aisément de la première forme $\lambda = \frac{p+\rho-2}{p}$, et l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{p+\rho-2}{pv}\frac{du}{dv} = 0$$

peut être écrite de cette manière

$$v^{-\frac{(p+\rho-2)}{p}} \frac{d}{dv} v^{\frac{p+\rho-2}{p}} \frac{d}{dv} u = 0.$$

En faisant n fois cette opération, on aura l'équation réiterée

$$v^{-\frac{(p+\rho-2)}{p}} \frac{d}{dv} v^{\frac{p+\rho-2}{p}} \frac{d}{dv} \cdots$$

$$v^{-\frac{(p+\rho-2)}{p}} \frac{d}{dv} v^{\frac{p+\rho-2}{p}} \frac{d}{dv} v^{-\frac{(p+\rho-2)}{p}} \frac{d}{dv} v^{\frac{p+\rho-2}{p}} \frac{d}{dv} u = 0,$$

qui fournira une équation linéaire homogène, dont les intégrales ne deviennent pas indéterminées et ne possèdent que les deux points singuliers $v = 0$ et $v = \infty$.

Les racines de l'équation déterminante (*) deviennent dans le cas présent:

$$p_{2i} = 2n - 2i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$p_{2i+1} = 2n - 2i - 2 - \frac{\rho-2}{p} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Si maintenant $\frac{\rho-2}{p}$ n'est pas un entier ou que $\frac{\rho-2}{p}$ soit un

(*) Voir les équations (5), l. c. p. 419.

nombre impair ou un nombre pair tel que $2n < 2 + \frac{\rho-2}{p}$, il n'y a pas d'égalités entre ces racines; l'équation réitérée aura donc dans ces cas les intégrales linéairement indépendantes:

$$v^{p_\alpha} \quad \text{ou} \quad r^{p \cdot p_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Mais si $\frac{\rho-2}{p}$ est un nombre pair (ce qui n'est possible que quand ρ est un nombre pair), tel que $2n \geqq 2 + \frac{\rho-2}{p}$, soit alors $2n = 2 + \frac{\rho-2}{p} + 2h$, les intégrales

$$v^{p_{2n-2\lambda}} \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, h)$$

doivent être remplacées par celles-ci:

$$v^{p_{2\lambda+1}} . \log v \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, h)$$

ou, ce qui revient au même, par celles-ci:

$$r^{p \cdot p_{2\lambda+1}} \log r \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, h).$$

Il est évident que, pour $p = 1$, ce résultat est d'accord avec celui de mon mémoire cité.

La même méthode peut servir à trouver les intégrales dans les autres cas et à déterminer les intégrales logarithmiques.

Vous voyez, Monsieur, que, dans cette chaîne d'idées, on est conduit à se proposer l'étude de la réitération des équations différentielles linéaires et homogènes. Malgré que je n'aie pas encore réussi à obtenir des résultats de quelque portée, je prends la liberté de vous communiquer quelques résultats très élémentaires.

Si vous désignez par D l'opération

$$\frac{d^n}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}\frac{d}{dx}+p_n,$$

vous pouvez écrire l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n de cette manière :

$$(1) \qquad \mathrm{D}y=0,$$

et en appliquant ν fois cette opération D, vous aurez évidemment une équation linéaire et homogène d'ordre $n.\nu$

$$(2) \qquad \mathrm{D}^\nu y=0\,;$$

il est clair que ces équations réitérées appartiennent à la classe des équations différentielles réductibles. L'équation (2) est évidemment satisfaite par

$$\mathrm{D}^{\nu-1}y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n,$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ désignant un système fondamental d'intégrales de (1) et $c_1, c_2, \ldots c_n$ étant des constantes arbitraires. On est donc conduit à l'intégration d'équations différentielles linéaires et non homogènes. Au lieu de chercher les intégrales de $\mathrm{D}^2y=0$, nous avons donc à intégrer l'équation

$$\mathrm{D}y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n,$$

ce qui se fait d'après des méthodes connues. Pour trouver alors les intégrales de $D^3y=0$, on détermine celles de $D^2y=c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, et ainsi de suite. Mais il semble qu'on ne peut pas tirer grand profit des expressions compliquées qu'on obtient ainsi. Voici quelques résultats élémentaires, qui se prêtent prèsque immadiatement :

En appliquant la réitération m fois à l'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx}+py=0,$$

ou obtient une équation linéaire d'ordre m, possédant les intégrales :

$$e^{-\int pdx}, \quad x.e^{-\int pdx}, \quad x^2 e^{-\int pdx}, \quad \ldots, \quad x^{m-1} e^{-\int pdx},$$

ou l'intégral générale

$$g_{m-1}(x).e^{-\int pdx},$$

où $g_{m-1}(x)$ désigne une fonction entière, à coefficients constants arbitraires, du degré $(m-1)$.

Si l'équation caractéristique d'une équation linéaire homogène d'ordre m, à coefficients constants, admet m racines égales, l'équation différentielle est une $(m-1)^{\text{ième}}$ réitération d'une équation linéaire à coefficient constant d'ordre premier.

Si l'on fait $\nu-1$ fois la réitération d'une équation linéaire et homogène, à coefficients constants et d'ordre m, l'équation caractéristique de l'équation différentielle, obtenue ainsi, sera la $\nu^{\text{ième}}$ puissance de l'équation caractéristique de l'équation différentielle proposée. Si donc cette dernière équation admet l'intégrale générale

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m,$$

celle de l'équation réitérée sera :

$$h_1(x).y_1 + h_2(x)y_2 + \ldots + h_m(x).y_m,$$

les $h_i(x)$ désignant des fonctions entières de degré $(\nu-1)$ et à coefficients constants arbitraires.

Sans augmenter ces théorèmes élémentaires, considérons un exemple, en déterminant les cas où l'équation de Gauss :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(\alpha+\beta+1)x-\gamma}{x^2-x}\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x^2-x}y = 0$$

est la réitération d'une équation de premier ordre :

$$\frac{dy}{dx} + py = 0,$$

ou, ce qui revient au même, en déterminant les cas où l'équation de Gauss admet des intégrales de la forme $e^{-\int pdx}$ et $xe^{-\int pdx}$.

En réiterant la dernière équation, on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2p\frac{dy}{dx} + (p^2+p')y = 0,$$

de sorte qu'on a les relations

$$2p = \frac{(\alpha+\beta+1)x-\gamma}{x^2-x}$$

$$p^2 + p' = \frac{\alpha\beta}{x^2-x},$$

qui fournissent les conditions

$$(\alpha-\beta)^2=1;$$

$$2\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma=0;$$

$$\gamma(\gamma-2)=0.$$

On en calcule aisément 8 systèmes de valeurs de α, β, γ:

1) $\gamma=0,\quad \alpha=0,\quad \beta=-1$

2) $\gamma=0,\quad \alpha=0,\quad \beta=+1$

3) $\gamma=2,\quad \alpha=1,\quad \beta=\ \ 0$

4) $\gamma=2,\quad \alpha=2,\quad \beta=\ \ 1$

et encore quatre autres systèmes qu'on obtient des précédents en échangeant α et β. On trouve donc pour p les valeurs:

1) 0;

2) $\dfrac{1}{x-1}$;

3) $\dfrac{1}{x}$;

4) $\dfrac{2x-1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$,

et les intégrales correspondantes deviennent donc :

$$1)\ A,\ A_1 x;$$

$$2)\ B\frac{1}{x-1},\ B_1\frac{x}{x-1};$$

$$3)\ C.\frac{1}{x},\ C_1;$$

$$4)\ D.\frac{1}{x},\ D_1.\frac{1}{x-1}.$$

Ces cas, où l'équation de Gauss est la réitération d'une équation de premier ordre, se présentent naturellement comme cas spéciaux de ceux où l'équation de Gauss est reductible (*).

Je finis pour remarquer que les équations différentielles obtenues par la réitération d'une équation différentielle de premier ordre, forment un cas spécial des équations différentielles linéaires à solutions conjuguées étudiées par M. E. Brassinne dans une note insérée an t. II du *Cours d'Analyse* de Sturm.

(*) Voir le mémoire de M. Frobenius, *Journal füz die reine und angewandte Mathematite,* t. 76, p. 250.

SOBRE O RESTO DA FORMULA DE TAYLOR

POR

JOSÉ BRUNO DE CABEDO

(Professor na Universidade de Coimbra)

Suppondo sómente que $f(x)$, $f'(x), \ldots f^{n-1}(x)$ são funcções finitas e determinadas no intervallo de a a x e que $f^{n-1}(x)$ tem uma derivada no ponto a, demonstrou o sr. Peano a fórmula (*)

$$f(x)=f(a)+\sum_{1}^{n}\frac{(x-a)^i}{i!}f^i(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}\left[\frac{f^{n-1}(x_1)-f^{n-1}(a)}{x_1-a}-f^n(a)\right],$$

cuja extensão ás funcções de variavel imaginaria constitue o objecto d'este artigo.

Quando a variavel imaginaria z descreve uma recta entre os pontos a e z, mostra a mesma analyse do distincto professor da Universidade de Turim que

$$f(z)=f(a)+\sum_{1}^{n}\frac{(z-a)^i}{i!}f^i(a)+\lambda\frac{(z-a)^n}{n!}\left[\frac{f^{n-1}(z_1)-f^{n-1}(a)}{z_1-a}-f^n(a)\right]\ldots(1),$$

(*) Designaremos por y_{i+1} um valor da variavel y_i tomado entre os valores que constituem o seu dominio e por λ ou λ_i uma quantidade de modulo inferior á unidade.

applicando á fracção

$$\frac{f(z)-f(a)-\sum_{1}^{n}\frac{(z-a)^i}{i!}f^i(a)}{\frac{(z-a)^n}{n!}}$$

a fórmula

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{(z-a)^p}=\lambda\frac{\varphi'(z_1)}{p(z_1-a)^{p-1}}.$$

Pelo contrario, se o contorno L descripto por z é uma curva qualquer, a fórmula fundamental do sr. Darboux deixa de ser exacta; mas a expressão

$$R_n=\int_L dz\int_L dz\ldots\int_L\left[f^{n-1}(z)-f^{n-1}(a)-(z-a)M\right]dz,$$

onde M designa uma constante qualquer e o numero das integrações indicadas é $n-1$, dá

$$R_n=f(z)-f(a)-(z-a)f'(a)-\ldots-\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)-\frac{(z-a)^n}{n!}M$$

ou

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\ldots$$

$$+\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{(z-a)^n}{n!}M+R_n.$$

A fórmula que acabamos de achar dá a variação de uma funcção uniforme ou não uniforme ao longo de uma linha qualquer, suppondo que as funcções $f(z)$, $f'(z)\ldots f^{n-1}(z)$ são determinadas em toda a sua extensão.

Admittindo que $f^{n-1}(z)$ tem no ponto a uma derivada finita $f^n(a)$, poderemos pôr $M=f^n(a)$ e a fórmula anterior transforma-se na seguinte:

$$f(z)=f(a)+\sum_1^n \frac{(z-a)^i}{i!}f^i(a)$$

$$+\int_L dz\int_L dz\ldots\int_L\left[f^{n-1}(z)-f^{n-1}(a)-(z-a)f^n(a)\right]dz,$$

de que se deduz a fórmula (1), suppondo rectilineo o caminho L. Com effeito,

$$R_n=\int_L dz\int_L dz\ldots\int_L\left[\frac{f^{n-1}(z)-f^{n-1}(a)}{z-a}-f^n(a)\right](z-a)\,dz$$

$$=\lambda\left[\frac{f^{n-1}(z_1)-f^{n-1}(a)}{z_1-a}-f^n(a)\right]\int_L dz\int_L dz\ldots\int_L(z-a)\,dz$$

$$=\lambda\frac{(z-a)^n}{n!}\left[\frac{f^{n-1}(z_1)-f^{n-1}(a)}{z_1-a}-f^n(a)\right].$$

No caso mais geral em que o argumento de z é qualquer, a fórmula

$$\int_L \varphi(z)(z-a)\,dz=\lambda\varphi(z_1)\int_L(z-a)\,dz,$$

empregada precedentemente, deve ser substituida por

$$\int_L \varphi(z)\,dz = \lambda \operatorname{arc} L\,\varphi(z_1) = \lambda\, S\, \varphi(z_1).$$

Teremos pois

$$R_n = \int_L dz \int_L dz \ldots \int_L \Big[f^{n-1}(z) - f^{n-1}(a) - (z-a) f^n(a) \Big] dz$$

$$= \lambda S \int_{L_1} dz \int_{L_1} dz \ldots \int_{L_1} \Big[f^{n-1}(z) - f^{n-1}(a) - (z-a) f^n(a) \Big] dz$$

$$= \lambda\lambda_1 SS_1 \int_{L_2} dz \int_{L_2} dz \ldots \int_{L_2} \Big[f^{n-1}(z) - f^{n-1}(a) - (z-a) f^n(a) \Big] dz$$

....

$$= \lambda\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2} SS_1 \ldots S_{n-2} \left[\frac{f^{n-1}(z_1) - f^{n-1}(a)}{z_1 - a} - f^n(a) \right] (z_1 - a)$$

ou

$$R_n = \lambda S^n \left[\frac{f^{n-1}(z_1) - f^{n-1}(a)}{z_1 - a} - f^n(a) \right],$$

fazendo entrar em λ o factor

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-2} \frac{S}{S} \frac{S_1}{S} \cdots \frac{S_{n-2}}{S} \frac{|z_1 - a|}{S} e^{i\alpha},$$

onde α representa o argumento de $z_1 - a$.

Finalmente, fazendo convergir z para a ao longo de L, vê-se que

$$\lim \frac{R_n}{(z-a)^n} = 0,$$

attendendo a que é

$$\lim \frac{S}{|z-a|} = 1 \quad \text{e} \quad \lim \frac{f^{n-1}(z_1) - f^{n-1}(a)}{z_1 - a} = f^n(a).$$

BIBLIOGRAPHIA

F. Casorati. — Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. (*Acta Mathematica*, t. XIV).

Este trabalho é, na sua parte essencial, uma traducção de outro publicado pelo mesmo sabio geometra nos *Rendiconti* do Instituto Lombardo, do qual se deu noticia nas paginas 95 e 96 d'este volume.

G. Peano. — Les propositions du cinquième livre d'Euclides réduites en formules (*Mathesis*, t. X).

Esta Nota refere-se ao assumpto de que o auctor se occupou no livro de que se deu noticia nas paginas 119 e 120. O auctor mostra como, com um numero limitadissimo de signaes, se póde reduzir a fórmulas as 25 proposições do Livro V dos *Elementos d'Euclides.*

H. Vuibert. — Annuaire de la jeunesse pour l'année 1890. — Paris.

N'este livro muito interessante e muito util para todos os que querem conhecer a organisação das escholas francezas, o auctor dá amplas informações sobre todas as escholas primarias, secundarias, superiores e especiaes da França, sem excepção alguma. Encontram-se n'elle noticias sobre as condições necessarias para ser admittido em cada eschola, sobre as despezas a que isto obriga, sobre a organisação dos cursos, sobre as carreiras para que preparam, etc.

Ed. Weyr. — *Zur Theorie der bilinearen Formen* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. I).

Esta memoria importante é extrahida d'outra sobre a theoria das formas bilineares, escripta pelo mesmo auctor em lingua bohemia; e tem por objecto o estudo de novos methodos auxiliares, baseados na consideração de certos systemas coordenados de valores das matrizes d'aquellas fórmas, por meio dos quaes se torna possivel a solução de muitas questões, entre as quaes citaremos especialmente o problema, resolvido por Weierstrass, da transformação simultanea de duas fórmas bilineares.

O sr. Weyr substitue a estas a noção mais abstracta das matrizes, taes como as define Cayley; as regras dadas por este geometra para o seu calculo são expostas e muito desenvolvidas nos primeiros capitulos, ao passo que os ultimos são consagrados a applicações, taes como ao problema já citado de Weierstrass, ao theorema de Sylvester sobre a inercia das fórmas quadraticas e ao theorema fundamental de Fuchs na theoria das equações differenciaes lineares de coefficientes variaveis, publicada no volume 66.º do *Jornal de Crelle*.

D. L.

H. Burkhardt. — *Untersuchungen aus dern Gebiete der hyper elliptischen Modulfunctionem. Erster Theil* (*Mathematische Annalen*, t. XXXVI).

É a primeira parte d'uma memoria em que se desenvolvem as idéas originaes expostas nas lições de F. Klein, redigidas pelo sr. Burkhardt sob o titulo *Bases d'uma systematica geral das funcções hyperellipticas de 1.ª ordem.*

Torna-se n'estas muito sensivel a clareza que dão á theoria aquelles novos pontos de vista, mas o auctor propõe-se fazer sentir a sua fecundidade mesmo nas applicações a problemas especiaes em que até aqui tem representado o papel mais importante as relações *thetas*. O exemplo escolhido para este fim é, o problema das *equações de multiplicadores*, que occorrem no problema das transformações dos integraes hyperellipticos; demonstram-se uma serie de propriedades dos coefficientes d'estas equações, sem que todavia o assumpto fique esgotado; visto que o auctor annuncia, para a segunda parte, algumas novas proposições.

D. L.

F. da Ponte Horta.—Nota sobre os determinantes (Jornal da Academia das sciencias de Lisboa, 1890).

Contém este interessante artigo algumas notas a respeito de certos pontos do excellente livro do mesmo auctor, de que se deu noticia na pag. 51 do tomo IX d'este jornal. São estudadas primeiramente as alterações que soffre o determinante por meio de movimentos de rotação á roda das diagonaes ou á roda do centro. São consideradas em seguida diversas especies de symetria dos determinantes, e demonstradas algumas propriedades d'estas diversas especies de determinantes symetricos.

Abel Suchon.—Traité d'Astronomie theorique.—Paris, 1891.

Quem quizer estudar a parte da Mecanica celeste que se refere ao calculo das perturbações planetarias e lunares, tem na bella obra do sr. A. Suchon um guia excellente.

Principia a obra por uma introducção historica, em que o auctor expõe primeiramente, de um modo rapido mas completo, o desenvolvimento das ideias sobre a attracção dos corpos até á grande descoberta de Newton; e em seguida dá noticia dos trabalhos feitos pelos geometras para resolver o problema conhecido pelo nome de *problema dos tres corpos*, referindo-se successivamente aos trabalhos de Newton, Clairaut, Lagrange, Jacobi, etc.

Á introducção segue a *Primeira parte* da obra, em que é exposta, pelo methodo da variação das constantes arbitrarias, a theoria analytica dos movimentos planetarios. Esta parte é dividida em seis livros, em que o auctor se occupa respectivamente: do movimento elliptico, da theoria geral do movimento perturbado, do desenvolvimento em serie da funcção das forças perturbadoras, das perturbações de primeira ordem relativamente ás massas e da theoria geral das desigualdades seculares e periodicas, das perturbações de segunda ordem relativamente ás massas, e da theoria da lua.

Na *Segunda parte* da sua obra occupa-se o sr. A. Suchon da applicação dos principios expostos na primeira parte á explicação e formação das taboas dos movimentos planetarios. É dividida em tres livros respectivamente dedicados ás partes seculares e ás partes periodicas dos elementos das orbitas planetarias, á construcção das taboas de Jupiter, e á applicação das taboas planetarias ao calculo das posições heliocentricas dos diversos planetas.

Pela riqueza do assumpto e pela clareza, bom methodo e feição pratica com que está escripta, devemos vivamente recommendar esta obra aos nossos astronomos.

J. A. Serrasqueiro.—Tratado elementar de Arithmetica, 9.ª edicção.—Coimbra, 1890.

—— Tratado de Geometria elementar, 7.ª edicção.—Coimbra, 1890.

Veja-se o que se disse a respeito das edicções anteriores d'estas obras nos tomos V e VIII d'este jornal.

E. Mosnat.—Problèmes de Géométrie analytique, t. I.—*Paris, 1891.*

Contém este livro 129 problemas com as respectivas soluções, e além d'isso 428 problemas simplesmente enunciados. Todos estes problemas são relativos á parte elementar da Geometria analytica plana e dizem respeito á theoria da linha recta, do circulo, das secções conicas, d'alguns logares geometricos, das tangentes, normaes, fócos, centros, diametros. etc. Cada capitulo é precedido de um resumo contendo as formulas e os theoremas necessarios para resolver os problemas ahi contidos.

Os problemas considerados são, na sua maior parte, interessantes. Muitos d'elles foram propostos nos concursos de admissão ás escolas central, naval, de pontes e estradas, etc., de Paris.

Terminaremos aconselhando o livro do sr. Mosnat aos alumnos das nossas escolas para se desenvolverem nos principios da Geometria analytica.

E. Dessenon.—Cours de Trigonometria rectiligne.—Paris, 1891.

Na maior parte dos manuaes de Trigonometria os auctores, depois de demonstrar as formulas trigonometricas para as linhas correspondentes ao primeiro quadrante, ou admittem sem demonstração que ellas têm logar para todos os quadrantes, ou empregam para esta generalisação um processo longo e fastidioso. O meio de evitar estes inconvenientes é o emprego da theoria das projecções. O sr. Dessenon emprega este methodo, e não só, como muitos auctores, para estabelecer os theoremas de addição das funcções trigonometricas, mas ainda para demonstrar todas as formulas geraes que não são consequencia immediata de outras anteriormente estabelecidas. A theoria das projecções é exposta n'um capitulo preliminar.

Eis uma rapida indicação das materias consideradas nos differentes capitulos. I. Arcos e angulos. Formulas relativas nos arcos e aos angulos. II. Linhas trigonometricas. III. Relações entre as linhas trigonometricas d'um angulo qualquer e applicações. IV. Addição, subtracção, multiplicação e divisão dos arcos. V. Formulas de transformação. VI. Taboas trigonometricas. VII. Derivados das funcções circulares. VIII. Equações e funcções trigonometricas. IX. Resolução dos triangulos. X. Applicações e problemas.

Para mostrar o valor d'este livro excellente transcreveremos as palavras seguintes que a respeito d'elle escreveu o sr. J. Tannery: «Em todo o livro se reconhece a mão de um homem muito habituado ao ensino, conhecendo a fundo as necessidades dos alumnos, as occasiões mais ou menos proximas dos seus erros, e os meios de a isso dar remedio».

Motta Pegado.—Dos circulos focaes nas conicas.

O auctor expõe neste trabalho, com a maior clareza e com todo o desenvolvimento, a theoria dos circulos focaes das conicas.

Cada uma das tres conicas ellipse, parabola e hyperbole é separadamente considerada.

John Casey.—Géométrie élémentaire récente.—Gand, 1890.

Na sua obra intitulada — *A Sequel to Euclides* publicou J. Casey um capitulo supplementar contendo uma exposição systematica da moderna Geometria do triangulo. Não existindo um livro escripto em francez destinado a pôr este capitulo da Geometria ao alcance dos principiantes, foi a obra do sabio professor de Dublin traduzida em francez pelo sr. Falisse, e esta traducção publicada primeiramente no *Mathesis* (t. IX e X), e em seguida em livro separado.

V. Retali.—Sopra due particolari trasformazioni piane quadratiche (Memoria della R. Academia della Scienze de Bologna, serie 4.ª t. X*).*

O auctor expõe duas transformações quadraticas, que o levam a resolver com toda a simplicidade os dois problemas seguintes:

1.° Determinar o logar geometrico dos pólos de contacto para as conicas conjugadas a uma conica dada quando os pólos respectivos de uma recta dada estão sobre uma curva algebrica de ordem e classe dadas.

2.° Determinar o logar geometrico dos pólos de uma recta que dizem respeito ás conicas conjugadas a uma conica dada em relação aos pontos de uma curva algebrica de ordem e classe dadas.

H. A. Newton.—Elias Loomis.—New-Haven, 1890.

Contém este opusculo um bello discurso pronunciado pelo illustre professor americano H. A. Newton para fazer conhecer os serviços scientificos de Elias Loomis, professor de astronomia em Yale College, nascido em 1811 e morto em 1889. O auctor tracta desenvolvidamente da vida d'este sabio, dos trabalhos de que se occupou, dos livros e memorias que escreveu, etc.

Termina o opusculo por uma lista composta de 164 artigos, que contém todos os trabalhos publicados por E. Loomis. Entre estes trabalhos figuram alguns livros de texto para o estudo da parte elementar das mathematicas, muito considerados nos Estados Unidos.

G. Peano.—Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires (Matematische Annalen, t. XXXVII).

N'esta memoria demonstra o sr. Peano que, sendo dadas as equações differenciaes

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n)$$

onde $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ são funcções continuas na visinhança de $t=b$, $x=a_0, \ldots, x_n=a_n$, póde-se determinar um intervallo $(b, b_,)$, e, n'este intervallo, n funcções $x_1, \ldots, x_n$ de t, que satisfassam ás equações dadas, e que, para $t=b$, tomem os valores $a_1, \ldots, a_n$.

Na sua demonstração emprega o illustre geometra as formúlas de Logica, já usadas em outros trabalhos de que temos dado noticia n'este jornal.

F. Gerbaldi.—Sul sistema di due coniche (Annali di Matematica pura ed applicata, 1890).

N'esta importante memoria o auctor estuda principalmente as conicas ligadas com duas conicas dadas por meio de relações expressas por invariantes.

F. Engel.—Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaffschen Gleichung (Berichte der K. Süchs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1890).

M. d'Ocagne.—Note sur les systèmes de péninvariants principaux *des formes binaires* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XII).

—— *Une application des coordonées parallèles* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ᵉ série, t. VIII).

—— *Quelques propriétés générales des courbes algébriques obtenues au moyen des coordonées parallèles* (*Item*. t. IX).

—— *Deux théorèmes géneraux sur les trajectoires de points et les enveloppes de droites dans le plan* (*Item*).

—— *Sur les trajectoires des points marqués sur une droite qui se deplace en touchant constamment par l'un d'eux une courbe donnée* (*Association française pour l'avancement des sciences*, *1889*).

Gino Loria.—*Sull'applicazione delle funzioni jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lyncei*, *1890*).

—— *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali delle spazio, in particulare sulle trasformazioni di genere zero* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, *1890*).

G. Pirondini. — *Di una particolare trasformazione geometrica* (*Rendiconti della R. Academia di Napoli*, *1890*).

H. Burkhardt.—*Zur theorie de Jacobi'schen Gleichung 40. Grades, welche bei der Transformation 3. Ordnung der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen auftreten* (*Nachrichten von K. Gesellschaft der Wis. zu Göttingen*, *1890*).

F. Rogel. — *Darstellung der harmonischen Reihen durch Factoren folgen* (*Arch. de Math. und Phys. 2. Reihe*, t. IX).

—— *Die Entwicklung der Exponentiellen in eine unendliche Factorenfolge* (*Item*).

Lerch. — *Bemerkung zur Reihenthéorie* (*Sitzungsberichten der K. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1890*).

—— *Mitteilungen aus der Integralrechung* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. I).

R. Marcolongo. — *Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per speciali condizioni ai limiti* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1889*).

—— *Sull'accelerazione nel moto di uno solido intorno ad un punto fisso* (*Giornale di Mathematiche*, t. XXVII).

—— *Sul theorema di Poisson* (*Rendiconti della R. Accademia de Napoli, 1888*).

—— *Sulla variazione di un integrale definito e sulla theoria delle equazioni alle derivate del primo ordine* (*Item*).

—— *Sull'equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile* (*Item*).

—— *Sulla reprezentazione conforme della Pseudosfera e sue applicazioni* (*Item*).

S. Pincherle. — *Su alcuni integrali particolari delle equazioni differenziali lineari non omogenee* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890*).

—— *Sulla reprezentazione approssimata di una funzione mediante irrazionali quadratici* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1890*).

G. T.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS A ESPACE LACUNAIRE

PAR

M. LERCH

(à Prague — Vinohrady)

Considérons une série de la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi([n])\, x^n = f(x),$$

convergente à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, où $[n]$ représente le nombre des chiffres de n. Je dis que cette fonction ne pourra pas être continuée au delà du dit cercle, si la partie réelle ou la partie imaginaire de la fonction $\varphi(\nu)$ croît indéfiniment avec ν en conservant son signe.

La série (1) se compose en effet de groupes de la forme

$$\varphi(\nu)\Big[x^{10^{\nu-1}} + x^{10^{\nu-1}+1} + x^{10^{\nu-1}+2} + x^{10^{\nu-1}+3} + \ldots$$

$$+ x^{10^{\nu}-1}\Big] = \varphi(\nu)\,\frac{x^{10^{\nu-1}} - x^{10^{\nu}}}{1-x},$$

d'où il résulte que nous aurons:

$$(1-x)\, f(x) = \varphi(1)\, x + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)]\, x^{10^{\nu}}.$$

D'après un théorème que j'ai démontré dans les *Acta mathematica*, t. 10, et plus tard dans une note sur les fonctions à espace lacunaire (*) la série qui figure au second membre définit une fonction n'existant que á l'intérieur du cercle $|x| = 1$, ce qui démontre l'énoncé.

Ici la fonction $\varphi(\nu)$ peut même dépendre de la variable x, si elle remplit la condition dite plus haut pour chaque valeur de cette variable.

Á cette classe de séries (1) appartient l'exemple que j'ai considéré, sous un autre point de vue, dans le t. VII de ce journal et auquel M. Alfred Pringsheim de Munich a consacré recemment une remarque critique (**) dans laquelle il l'appelle *geradezu monströs!* De gustibus non est disputandum.

(*) Ueber fonctionen mit beschränktem Existenzbereiche. Abhandlungen der Königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, VII. Folge, 2. Band. Math. — naturvissenschaftliche Classe Nr. 9. Prag. 1888.

(**) *Mathematische Annalen*, t. XXXV, p. 308.

SOBRE O THEOREMA D'EULER-LAMBERT

POR

DUARTE LEITE

(Professor na Academia Polytechnica do Porto)

1. O bello theorema que em mecanica celeste exprime o tempo em funcção do eixo, da corda do arco descripto, e da semisomma dos raios vectores extremos, foi pela primeira vez demonstrado analyticamente pelo illustre Euler para as orbitas parabolicas (*), e só dezesete annos depois o generalisou Lambert, por subtís considerações geometricas, ás orbitas ellipticas e hyperbolicas,

Dá-se de ordinario nos tratados a demonstração de Lagrange (**), baseada na fórmula que exprime o tempo em funcção da anômalia excentrica; mas conserva-se-lhe o defeito, já indicado por Bertrand, de que as variaveis finaes apparecem pouco naturalmente, sendo mister para justificar o artificio que se conheça d'antemão o resultado.

A geometria fornece-nos recursos com que vencer esta difficuldade; e como se verá n'esta nota, basta uma simples transformação de áreas para nos levar directamente ao theorema.

2. Para avaliarmos o sector elliptico FNM (fig. 1), tiremos IFE, parallela a MN, e tracemos os diametros conjugados OE, OE'.

Então
$$\text{sect FMN} = \text{sect NEN}$$
$$= \text{seg}\, m\,\text{NE} - \text{seg ME}$$
$$\text{seg}\, m\,\text{NE} = \text{sect ONE} - \overset{\Delta}{\text{ONE}}$$
$$\text{seg}\, m\,\text{ME} = \text{sect OME} - \overset{\Delta}{\text{OME}}$$

(*) *Theoria motus Planetarum et Cometarum*, 1744.
(**) *Mécanique analytique*, II vol., note V.

e tirando MM′, NN′ parallelas a OE′, virá

$$\text{sect ONE} = \frac{ab}{2} \text{ arc sen} \frac{NN'}{OE'}$$

$$\text{sect OME} = \frac{ab}{2} \text{ arc sen} \frac{MN'}{OE'}.$$

Além d'isso, por ser $\overset{\Delta}{OEE'} = \frac{ab}{2}$, serão

$$\overset{\Delta}{ONE} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{NN'}{OE'}, \quad OME = \frac{ab}{2} \cdot \frac{MM'}{OE'};$$

e é uma propriedade conhecida da ellipse que

$$\frac{MM'}{OE'} = \sqrt{\frac{E_1M' \cdot EM'}{OE^2}} = \sqrt{\frac{EM'}{OE}\left(2 - \frac{EM'}{OE}\right)};$$

$$\frac{NN'}{OE'} = \sqrt{\frac{E_1N' \cdot EN'}{OE^2}} = \sqrt{\frac{EN'}{OE}\left(2 - \frac{EN'}{OE}\right)}.$$

Ora, se tirarmos a tangente EP, ella encontrará em Q a corda MN e o diametro OSK conjugado com a corda n'um ponto P, que por ser polo de FE, está na directriz.

O comprimento de IE sendo o semi-eixo maior (*), teremos

$$\frac{EM'}{OE} = \frac{MQ}{IE} = \frac{SQ - SM}{a}; \quad \frac{EN'}{OE} = \frac{NQ}{IE} = \frac{SQ + SM}{a}$$

(*) Tire-se EF′ para o outro fóco F′, prolongue-se OE′ até J e por F tire-se FJ′ parallela a OE′; então visto serem EF e EF′ egualmente inclinadas á tangente EP, será

$$2a = EF + EF' = EJ' + EJ' + J'J + F'J = 2(EJ' + J'J) = 2EJ = 2EI.$$

e por outro lado, tirando MM_1, SS_1, NN_1, perpendicularmente á directriz PD,

$$\frac{SQ}{IE}=\frac{SP}{OP}=\frac{SS_1}{OD}=\frac{MM_1+NN_1}{2OD}=\frac{FM+FN}{2a}.$$

Se portanto fizermos

$$FM+FN+MN=2p,\quad FM+FN-MN=2q$$

teremos

$$\frac{EM'}{OE}=\frac{q}{a},\quad \frac{EN'}{OE}=\frac{p}{a}$$

e d'ahi

$$\text{sect FMN}=\frac{ab}{2}\left[\text{arc sen}\sqrt{\frac{p}{a}\left(2-\frac{p}{a}\right)}-\text{arc sen}\sqrt{\frac{q}{a}\left(2-\frac{q}{a}\right)}\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{p}{a}\left(2-\frac{p}{a}\right)}+\sqrt{\frac{q}{a}\left(2-\frac{q}{a}\right)}\right].$$

Simplifica-se esta expressão, suppondo

$$\cos z'=\frac{a-p}{a},\quad \cos z=\frac{a-q}{a};$$

e recorrendo agora á segunda lei de Kepler, virá finalmente o theorema d'Euler-Lambert

$$nt=z'-z-(\text{sen}\, z'-\text{sen}\, z),$$

em que nt é a anomalia media; os angulos z' e z são os excentricos que correspondem a NOE, MOE como facilmente se póde verificar.

Analogamente se concluia para o caso da orbita hyperbolica; no movimento parabolico, as cousas passam-se mais simplesmente.

Na fig. 2, será

$$\text{sect FMN} = \text{sect EMN}$$

$$= \text{segm NE} - \text{seg ME}.$$

Mas

$$\text{seg EM} = \frac{2}{3}\,\text{E}\hat{\text{M}}\text{M}_2 = \frac{1}{3}\,\text{E}\hat{\text{M}}\text{M}_1 = \frac{1}{3}\,\text{E}\hat{\text{M}}\text{M}'$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\text{D}}(\text{EM}^1)^{\frac{3}{2}},$$

e analogamente

$$\text{EN} = \frac{1}{6}\sqrt{\text{D}}\,(\text{EN}')^{\frac{3}{2}}$$

sendo D o parametro ou corda focal normal ao eixo.

Mas porque PE é bissectriz do angulo FEN, será

$$\text{EM}' = \text{QM}; \quad \text{EN}' = \text{QN}$$

$$\text{SQ} = \text{SP} = \frac{\text{FM} + \text{FN}}{2}.$$

Pondo pois

$$\text{FM} + \text{FN} + \text{MN} = 2p, \quad \text{FM} + \text{FN} - \text{MN} = 2q$$

teremos

$$\text{EM}' = q, \quad \text{EN}' = p.$$

e

$$\text{sect FMN} = \frac{\sqrt{D}}{6}\left[p^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}\right].$$

A mechanica celeste dá em seguida

$$\sqrt{\mu}\,.\,t = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{D}}\,\text{sect FMN}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2p)^{\frac{3}{2}} - (2q)^{\frac{3}{2}}\right].$$

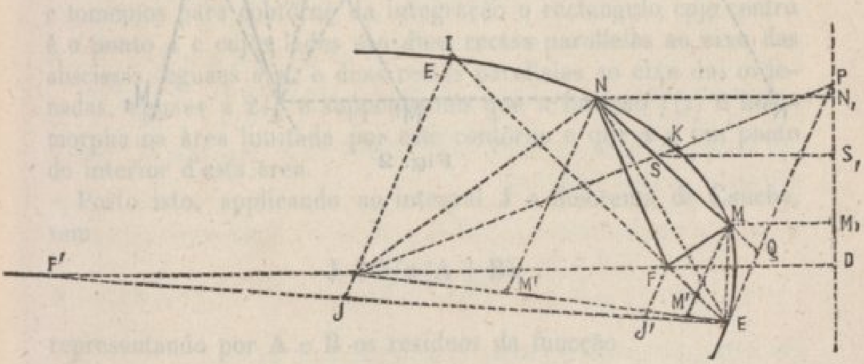

Fig. 1

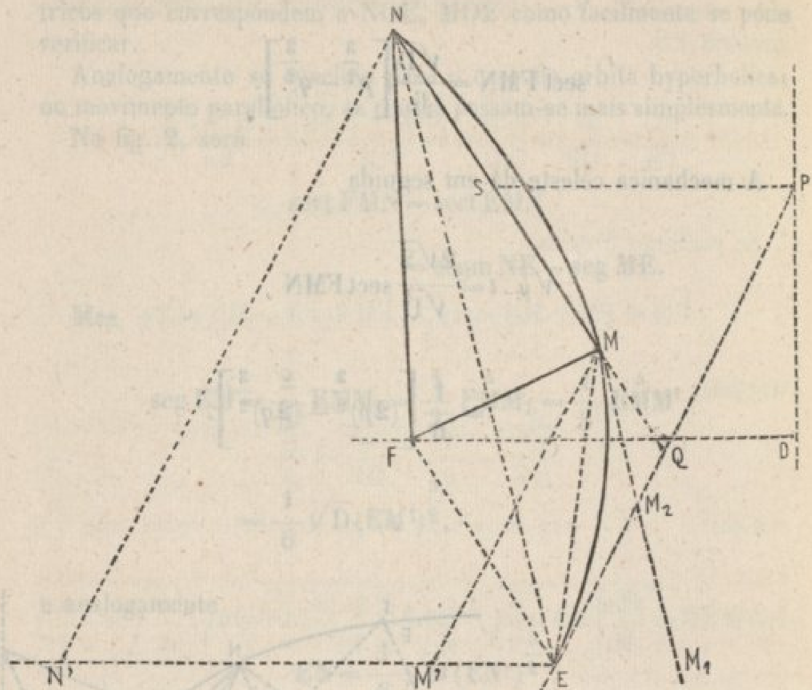

Fig. 2

SOBRE O DESENVOIVIMENTO DAS FUNCÇÕES EM SERIE ORDENADA SEGUNDO AS POTENCIAS DOS SENOS E COSENOS (*)

POR

F. Gomes Teixeira

1. Consideremos o integral

$$J = \int_S \frac{f(z) \operatorname{sen}^m (x-a)\, dz}{\operatorname{sen}(z-x) \operatorname{sen}^m (z-a)},$$

e tomemos para contôrno da integração o rectangulo cujo centro é o ponto a e cujos lados são duas rectas parallelas ao eixo das abscissas, eguaes a π, e duas rectas parallelas ao eixo das ordenadas, eguaes a $2l$; e supponhamos que a funcção $f(z)$ é holomorpha na área limitada por este contôrno e que x é um ponto do interior d'esta área.

Posto isto, applicando ao integral J o theorema de Cauchy, vem

$$J = 2i\pi (A + B),$$

representando por A e B os residuos da funcção

$$F(z) = \frac{f(z) \operatorname{sen}^m (x-a)}{\operatorname{sen}(z-x) \operatorname{sen}^m (z-a)}$$

relativamente a x e a, que são as unicas raizes de $\operatorname{sen}(z-x)=0$

(*) O assumpto d'este artigo foi por nós communicado ao sr. Hermite em uma carta que foi publicada no *Bulletin des Sciences mathématiques* (2.ª série, t. XIV, 1890).

e $\operatorname{sen}(z-a)=0$ que são representadas por pontos do interior da área considerada.

O residuo de $F(z)$ relativamente a x é o coefficiente de $\frac{1}{h}$ no desenvolvimento de

$$F(x+h)=\frac{f(x+h)\operatorname{sen}^m(x-a)}{\operatorname{sen} h \operatorname{sen}^m(x-a+h)}$$

em série ordenada segundo as potencias de h; e temos portanto

$$A=f(x).$$

O residuo B de $F(z)$, relativamente a a, é o coefficiente de $\frac{1}{h}$ no desenvolvimento

$$F(a+h)=\frac{f(a+h)\operatorname{sen}^m(x-a)}{\operatorname{sen}(a-x+h)\operatorname{sen}^m h}=\frac{f(a+h)\operatorname{sen}^m(x-a)}{h^m\operatorname{sen}(a-x+h)\frac{\operatorname{sen}^m h}{h^m}}$$

em série ordenada segundo as potencias de h. Mas temos, desenvolvendo as tres funcções

$$f(a+h),\quad \frac{1}{\operatorname{sen}(a-x+h)},\quad \frac{h^m}{\operatorname{sen}^m h}$$

em série ordenada segundo as potencias de h,

$$F(a+h)=\frac{1}{h^m}\Sigma\frac{h^u}{u!}f^u(a)\operatorname{sen}^m(x-a)$$

$$\times\Sigma\frac{h^v}{v!}\left[\frac{d^v\operatorname{sen}^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_o\times\Sigma\frac{h^w}{w!}\left[\frac{d^w(h\operatorname{cosec} h)^m}{dh^w}\right]_o$$

onde a somma representada por Σ se refere a todas as soluções inteiras positivas ou nullas da equação

$$u+v+w=m-1.$$

Formando as derivadas successivas de $\operatorname{sen}^{-1}(x-a)$, vem um resultado da fórma

$$\left[\frac{d^v \operatorname{sen}^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0$$

$$=-\frac{d^v \operatorname{sen}^{-1}(x-a)}{dx^v}=\frac{B_0+B_1\operatorname{sen}^2(x-a)+\ldots+B_{\frac{1}{2}v}\operatorname{sen}^v(z-a)}{\operatorname{sen}^{v+1}(x-a)},$$

se v é par; e um resultado da fórma

$$\left[\frac{d^v \operatorname{sen}^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0$$

$$=\frac{\cos(x-a)\left[B'_0+B'_1\operatorname{sen}^2(x-a)+\ldots+B'_{\frac{1}{2}(v-1)}\operatorname{sen}^{v-1}(x-a)\right]}{\operatorname{sen}^{v+1}(x-a)},$$

se v é impar.

Logo a expressão do residuo B tem a forma seguinte:

$$B=-\left[K_1\operatorname{sen}(x-a)+K_3\operatorname{sen}^3(x-a)+\ldots+K_{m-1}\operatorname{sen}^{m-1}(x-a)\right]$$

$$-\left[L_0+L_2\operatorname{sen}^2(x-a)+\ldots+L_{m-2}\operatorname{sen}^{m-2}(x-a)\right]\cos(x-a),$$

se m é par, e a fórma seguinte:

$$B=-\left[K'_0+K'_2\operatorname{sen}^2(x-a)+\ldots+K'_{m-1}\operatorname{sen}^{m-1}(x-a)\right]$$

$$-\left[L'_1\operatorname{sen}(x-a)+L'_3\operatorname{sen}^3(x-a)+\ldots\right.$$

$$\left.+L'_{m-2}\operatorname{sen}^{m-2}(x-a)\right]\cos(x-a),$$

se m é impar.

Temos pois as formulas seguintes:

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} K_{2n+1} \operatorname{sen}^{2n+1}(x-a) \\ \qquad + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} L_{2n} \operatorname{sen}^{2n}(x-a) \\ \qquad + \int_S \frac{f(z) \operatorname{sen}^m(x-a)\, dz}{\operatorname{sen}(z-x) \operatorname{sen}^m(z-a)}, \end{cases}$$

se m é par;

$$(2)\quad \begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-1)} K'_{2n} \operatorname{sen}(x-a) \\ \qquad + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-3)} L'_{2n+1} \operatorname{sen}^{2n+1}(x-a) \\ \qquad + \int_S \frac{f(z) \operatorname{sen}^m(x-a)\, dz}{\operatorname{sen}(z-x) \operatorname{sen}^m(z-a)}, \end{cases}$$

se m é impar.

2. O methodo que vimos de empregar para obter as formulas (1) e (2) não dá facilmente os coefficientes K e L, e não faz ver que estes coefficientes são independentes de m. Vamos pois obtêr estes coefficientes d'outro modo que faz vêr esta circumstancia importante.

Para isso, notemos primeiramente que a funcção $\operatorname{sen}^m(x-a)$ e suas derivadas relativamente a x, até á ordem $m-1$, são nullas para $x=a$; e, portanto, que as funcções

$$\Theta(x)=\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} K_{2n+1}\,\mathrm{sen}^{2n+1}(x-a)$$

$$+\cos(x-a)\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} L_{2n}\,\mathrm{sen}^{2n}(x-a),$$

$$\Theta_1(x)=\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-1)} K'_{2n}\,\mathrm{sen}^{2n}(x-a)$$

$$+\cos(x-a)\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-3)} L'_{2n+1}\,\mathrm{sen}^{2n+1}(x-a)$$

devem satisfazer ás condições

$$\Theta(a)=f(a),\quad \Theta'(a)=f'(a),\quad \ldots,\quad \Theta^{m-1}(a)=f^{m-1}(a)$$

$$\Theta_1(a)=f(a),\quad \Theta'_1(a)=f'(a),\quad \ldots,\quad \Theta_1^{m-1}(a)=f^{m-1}(a).$$

Póde-se obter, por meio d'estas equações, os coefficientes K e L, e acha-se assim os coefficientes da primeira formula

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &L_0=f(a),\\ &K_1=f'(a),\\ &L_2=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f''(a),\\ &K_2=\frac{1}{6}[f'(a)+f'''(a)],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

e os coefficientes da segunda

$$K'_0 = f(a)$$

$$L'_1 = f'(a)$$

$$K'_2 = \frac{1}{2} f''(a)$$

$$L'_3 = \frac{1}{6}[f'''(a) + 4f'(a)]$$

. . . .

3. As formulas (1) e (2) dão dois desenvolvimentos de $f(x)$ em serie ordenada segundo as potencias de $\operatorname{sen}(x-a)$, se o integral curvilineo J tende para zero quanto m tende para o infinito. Mas temos, por um theorema de Darboux,

$$J = \frac{\lambda s f(z_1) \operatorname{sen}^m (x-a)}{\operatorname{sen}(z_1 - x) \operatorname{sen}^m (z_1 - a)}.$$

Logo, se fôr

$$\text{(A)} \qquad |\operatorname{sen}(x-a)| < |\operatorname{sen}(z-a)|$$

em todos os pontos do contôrno S da integração, o integral J tende para zero quando m tende para o infinito, e as formulas (1) e (2) levam a dois desenvolvimentos de $f(x)$ em serie ordenada segundo as potencias de $\operatorname{sen}(x-a)$.

Vamos estudar a condição (A). Se fizermos $z = x_1 + iy_1$ e $a = \alpha + i\beta$, temos

$$\operatorname{sen}(z-a) = \operatorname{sen}(x_1 - \alpha)\cos i(y_1 - \beta) + i\cos(x_1 - \alpha)\frac{\operatorname{sen} i(y_1 - \beta)}{i}$$

e portanto, representando por M o modulo de sen $(z-a)$,

$$M^2 = \text{sen}^2(x_1-\alpha)\cos^2 i(y_1-\beta) - \cos^2(x_1-\alpha)\,\text{sen}^2 i(y_1-\beta).$$

Vamos agora procurar o menor valor que póde tomar M^2 quando z descreve o rectangulo que constitue o contôrno da integracão, isto é, o rectangulo formado pelas rectas cujas equações são

$$x_1=\alpha-\frac{1}{2}\pi,\quad x_1=\alpha+\frac{1}{2}\pi,\quad y_1=\beta-l,\quad y_1=\beta+l.$$

Para achar o minimo dos valores que toma M^2 quando z descreve a recta $x_1=\alpha-\frac{1}{2}\pi$, devemos procurar o valor de y, que torna minima a expressão em que se transforma a expressão de M^2 quando se ahi põe $x_1=\alpha-\frac{1}{2}\pi$, isto é a expressão

$$\cos^2 i(y_1-\beta).$$

Acha-se, d'este modo, representando por $m^2{}_1$ este minimo, $m^2{}_1=1$, e que o minimo corresponde a $y_1=\beta$, isto é a um ponto do rectangulo considerado.

Acha-se do mesmo modo que o minimo dos valores que toma M^2 quando z descreve a recta $x_1=\alpha+\frac{1}{2}\pi$ é egual á unidade e corresponde a $y_1=\beta$.

Para achar o valor minimo de M^2 quando z descreve a recta $y_1=\beta-l$, deve-se transformar a expressão de M^2, pondo n'ella $y_1=\beta-l$, o que dá

$$M^2=\text{sen}^2(x_1-\alpha)\left(\frac{e^l+e^{-l}}{2}\right)^2+\cos^2(x_1-\alpha)\left(\frac{e^l-e^{-l}}{2}\right)^2,$$

e, depois, procurar o valor minimo d'esta expressão. Acha-se assim que este minimo corresponde a $x_1 = \alpha$, e que é, representando-o por m^2_2.

$$m^2_2 = \left(\frac{e^l - e^{-l}}{2}\right)^2.$$

Acha-se do mesmo modo que o minimo dos valores que toma M^2 quando z descreve a recta $y_1 = \beta + l$ corresponde a $x_1 = \alpha$ e é egual a m^2_2.

De tudo o que vem de ser demonstrado resulta que o minimo dos valores que toma M^2 quando z descreve o contôrno da integração é egual á menor das quantidades

$$1, \quad \left(\frac{e^l - e^{-l}}{2}\right)^2.$$

Ora vê-se facilmente que é

$$\frac{e^l - e^{-l}}{2} > 1,$$

se $l > \log(1 + \sqrt{2})$; e que é

$$\frac{e^l - e^{-l}}{2} < 1,$$

se é $l < \log(1 + \sqrt{2})$.

Temos pois o theorema seguinte:

Se fôr $l \gtreqless \log(1 + \sqrt{2})$, *o integral* J *tende para zero quando* m *tende para o infinito, se* x *satisfaz á condição*

$$|\operatorname{sen}(x - a)| < 1.$$

Se fôr $l < \log(1+\sqrt{2})$, *o integral* J *tende para zero quando* m *tende para o infinito, se* x *satisfaz á condição*

$$|\,\mathrm{sen}\,(x-a)\,| < \frac{e^l - e^{-l}}{2}.$$

Nos dois casos, póde-se desenvolver f(x) *em serie convergente por meio das formulas*

$$(5)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1}\,\mathrm{sen}^{2n+1}(x-a) + \cos(x-a)\sum_{n=0}^{\infty} L_{2n}\,\mathrm{sen}^{2n}(x-a)$$

$$(6)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K'_{2n}\,\mathrm{sen}^{2n}(x-a) + \cos(x-a)\sum_{n=0}^{\infty} L'_{2n+1}\,\mathrm{sen}^{2n+1}(x-a).$$

4. Para fazer uma applicação d'este theorema, vou considerar a funcção $f(x) = \cos kx$, k representando um numero qualquer. As formulas (3) dão

$$L_0 = 1,\quad K_1 = 0,\quad L_2 = -\frac{k^2-1}{2},\quad K_2 = 0,\quad \text{etc.},$$

e, portanto, a formula (5) dá a formula d'Euler

$$\cos kx = \cos x\left[1 - \frac{k^2-1}{1.2}\,\mathrm{sen}^2 x + \frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)}{1.2.3.4}\,\mathrm{sen}^4 x + \ldots\right],$$

e vê-se que esta formula tem logar quando é

$$|\,\mathrm{sen}\,x\,| < 1,\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Applicando as formulas (4) á mesma funcção, vem

$$K'_0 = 1, \quad L'_1 = 0, \quad K'_2 = -\frac{k^2}{2}, \quad L'_3 = 0, \quad \text{etc.,}$$

e, portanto, a formula (6) dá

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2}{2}\operatorname{sen}^2 x + \frac{k^2(k^2-2^2)}{2.3.4}\operatorname{sen}^4 x + \ldots$$

quando

$$|\operatorname{sen} x| < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Acha-se do mesmo modo os desenvolvimentos seguintes:

$$\operatorname{sen} kx = k \operatorname{sen} x - \frac{k(k^2-1)}{1.2.3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{k(k^2-1^2)(k^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{sen}^5 x - \ldots$$

$$\operatorname{sen} kx = \cos x \left[k \operatorname{sen} x - \frac{k(k^2-2^2)}{2.3}\operatorname{sen}^2 x + \ldots \right]$$

quando

$$|\operatorname{sen} x| < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

O methodo que vimos de empregar para obter os coefficientes que entram nos desenvolvimentos de $\cos kx$ e $\operatorname{sen} kx$ dá os coefficientes successivos até á ordem que se queira, mas não dá a lei que seguem estes coefficientes. Esta lei porém é sempre a mesma qualquer que seja k, e no caso de k ser inteiro positivo, obtem-se por meios elementares.

5. Consideremos agora o integral

$$M = \int \frac{f(z)\operatorname{sen}(x-\alpha)\operatorname{sen}(x-\beta)\ldots\operatorname{sen}(x-\lambda)\,dz}{s \operatorname{sen}(z-x)\operatorname{sen}(z-a)\operatorname{sen}(z-\beta)\ldots\operatorname{sen}(z-\lambda)}$$

do qual vamos deduzia as condições de consequencia da formula seguinte demonstrada pelo sr. Hermite no seu notavel *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (p. 331):

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x-\beta)\operatorname{sen}(x-\gamma)\ldots\operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\gamma)\ldots\operatorname{sen}(\alpha-\lambda)}f(\alpha)$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(x-\alpha)\operatorname{sen}(x-\gamma)\ldots\operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)\operatorname{sen}(\beta-\gamma)\ldots\operatorname{sen}(\beta-\lambda)}f(\beta)$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(x-\alpha)\operatorname{sen}(x-\beta)\ldots\operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)\operatorname{sen}(\gamma-\beta)\ldots\operatorname{sen}(\gamma-\lambda)}f(\gamma)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

quando o numero das quantidades α, β, γ, etc., tende para o infinito. Supponho a parte real de x comprehendida entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Tomando para contôrno da integração o rectangulo considerado no caso anterior, vem

$$M=2i\pi(A+B+C+\ldots),$$

onde A, B, C, etc., representam os residuos da funcção

$$F(z)=\frac{f(z)\operatorname{sen}(x-\alpha)\operatorname{sen}(x-\beta)\ldots\operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(z-x)\operatorname{sen}(z-\alpha)\operatorname{sen}(z-\beta)\ldots\operatorname{sen}(z-\lambda)}$$

relativamente a x, α, β, γ, etc.

Mas o residuo d'esta funcção relativamente a x é egual e o coefficiente de $\frac{1}{h}$ no desenvolvimento de

$$\frac{f(x+h)\operatorname{sen}(x-\alpha)\operatorname{sen}(x+\beta)\ldots}{\operatorname{sen}h\operatorname{sen}(x-\alpha)\operatorname{sen}(x+h-\beta)\ldots}$$

em serie ordenada segundo as potencias de h, isto é

$$A = f(x).$$

O residuo B da mesma funcção é egual ao coefficiente do $\frac{1}{h}$ no desenvolvimento de

$$\frac{f(\alpha+h) \operatorname{sen}(x-a) \operatorname{sen}(x-\beta) \ldots}{\operatorname{sen}(\alpha+h-x) \operatorname{sen} h \operatorname{sen}(\alpha+h-\beta) \ldots}$$

em serie ordenada segundo as potencias de h, e portanto

$$B = -\frac{\operatorname{sen}(x-\beta) \operatorname{sen}(x-\gamma) \ldots \operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \operatorname{sen}(\alpha-\gamma) \ldots \operatorname{sen}(\alpha-\lambda)} f(\alpha).$$

Acha-se do mesmo modo os outros residuos.

Temos pois

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-\beta) \operatorname{sen}(x-\gamma) \ldots \operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \operatorname{sen}(\alpha-\gamma) \ldots \operatorname{sen}(\alpha-\lambda)} f(\alpha)$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}(x-\alpha) \operatorname{sen}(x-\gamma) \ldots \operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha) \operatorname{sen}(\beta-\gamma) \ldots \operatorname{sen}(\beta-\lambda)} f(\beta)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int_S \frac{f(z) \operatorname{sen}(x-\alpha) \operatorname{sen}(x-\beta) \ldots \operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(z-x) \operatorname{sen}(z-\alpha) \operatorname{sen}(z-\beta) \ldots \operatorname{sen}(z-\lambda)} dz.$$

Mas temos, em virtude de um theorema de Darboux já empregado no caso anterior,

$$M = \lambda s \frac{f(z_1) \operatorname{sen}(x-\alpha) \ldots \operatorname{sen}(x-\lambda)}{\operatorname{sen}(z_1-x) \operatorname{sen}(z_1-\alpha) \ldots \operatorname{sen}(z_1-\lambda)},$$

onde λ representa uma quantidade de modulo inferior á unidade,

s o cumprimento do contôrno S, e z_1 um valor de z correspondente a um ponto do contôrno considerado. Esta egualdade mostra que o integral M tende para zero quando o numero das quantidades α, β, etc., tende para o infinito, quando têm logar as condições

$$|\operatorname{sen}(x-\alpha)|<|\operatorname{sen}(z-\alpha)|$$

$$|\operatorname{sen}(x-\beta)|<|\operatorname{sen}(z-\beta)|$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

em todo o contôrno, isto é, quando

$$|\operatorname{sen}(x-\alpha)|<1,\quad |\operatorname{sen}(x-\beta)|<1,\dots$$

se $l>\log(1+\sqrt{2})$, e quando

$$|\operatorname{sen}(z-a)|<\frac{e^l-e^{-l}}{2},\quad |\operatorname{sen}(z-\beta)|<\frac{e^l-e^{-l}}{2},\dots$$

se $l<\log(z+\sqrt{2})$. Logo quando têm logar estas condições, a expressão

$$\frac{\operatorname{sen}(x-\beta)\operatorname{sen}(x-\gamma)\dots}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\gamma)\dots}f(\alpha)$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(x-\alpha)\operatorname{sen}(x-\gamma)\dots}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)\operatorname{sen}(\beta-\gamma)\dots}f(\beta)$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

representa $f(x)$ com tanta maior approximação quanto maior é o numero das quantidades α, β, γ, etc.

BIBLIOGRAPHIA

D. Z. Galdeano. — Tratado de Algebra com arreglo á las teorias modernas. — Toledo, 1884.
——— Geometria elemental, 2.ª edicion. — Toledo, 1888.

As noticias sobre os livros de texto, para o ensino das mathematicas nas Escholas hespanholas, devendo certamente interessar os leitores d'este jornal, vamos dar noticia dos manuaes de Algebra e Geometria publicados pelo sr. D. Z. G. de Galdeano, antigo professor no Instituto de Toledo e hoje professor cathedratico na Universidade de Saragoça. Tanto mais que estes livros, estão escriptos com a maior clareza e dão conta do que de mais moderno se conhece sobre as sciencias a que são consagrados.

O tratado de Algebra, destinado a preparar os alumnos para as escholas de Engenharia, consta de dois volumes, sendo um destinado á parte elementar d'esta sciencia, e o outro á parte superior. Tanto a primeira como a segunda parte estão elaboradas de modo a dar aos alumnos conhecimento do que de mais importante se conhece n'esta parte da Analyse mathematica.

O primeiro volume contém as noções e principios fundamentaes do calculo algebrico, a theoria das combinações, os principios da theoria dos determinantes, algumas noções sobre a theoria das series e das fracções continuas, a theoria das funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares, a theoria geral das operações segundo Hankel e sua applicação á theoria dos quaterniões, a resolução das equações do primeiro e segundo gráu, a resolução das equações binomias, a resolução das congruencias do primeiro gráu e das congruencias binomias, etc.

Na segunda parte estuda o auctor a noção de continuidade e a noção de derivada das funcções, estuda a convergencia das séries e dos productos infinitos, tracta do desenvolvimento das funcções em série, estuda os principios geraes das funcções de variaveis imaginarias e a sua applicação a algumas funcções elementares, estuda a theoria das differenças e a theoria das faculdades algorithmicas, resolve as equações numericas de qualquer gráu, completa a theoria das substituições e a das determinantes, expõe a theoria da eliminação entre equações de qualquer gráu, apresenta com todo o desenvolvimento a theoria das funcções symetricas, estuda a theoria das fórmas, etc. Todos estes assumptos são estudados com bastante desenvolvimento, sendo expostas ou pelo menos indicadas as principaes descobertas modernas que dizem respeito a cada um d'elles.

A obra que o sr. Galdeano dedicou á Geometria elementar contém não só as doutrinas que se encontram habitualmente nos tratados d'esta natureza, mas ainda muitas de ordem mais elevada que se não encontram geralmente n'estes livros. Umas e outras são dispostas por uma ordem original e tratadas com profundeza em dois volumes, contendo um a theoria da egualdade geometrica, e o outro a theoria da proporcionalidade.

No primeiro volume encontra-se, depois das definições e principios geraes, a theoria das figuras rectilineas contidas no plano, a theoria das figuras rectilineas no espaço, a theoria das figuras circulares planas, e finalmente a theoria dos corpos redondos.

A segunda parte contém primeiramente a theoria geral da proporcionalidade, e a sua applicação á medida das grandezas (arcos, angulos, áreas, volumes, etc.). Segue-se o estudo das relações de proporcionalidade entre os elementos das figuras contidas n'um plano. Termina pelo estudo das relações de proporcionalidade entre os elementos das figuras existentes no espaço.

Em toda esta obra nota-se que o auctor não separou completamente a Geometria plana da Geometria no espaço, como se faz ordinariamente, mas antes fez seguir cada secção da primeira pela secção correspondente da segunda, o que tem a vantagem de approximar theoremas e questões analogas. Nota-se ainda, em cada secção do livro, a nitida separação das propriedades metricas e das propriedades de posição das figuras.

Para se avaliar o ponto de vista moderno com que foi concebida esta obra, basta attender a que n'ella se considera a distincção entre os systemas euclideanos e os systemas não euclideanos, e a que n'ella são estudadas as theorias da homographia, da homologia, da involução, das polares reciprocas, e outras tão importantes na sciencia da nossa epocha.

4

Don Z. G. Galdeano. — El Progresso matematico, periodico de matematicas puras y aplicadas. — Zaragoza.

Possue a Hespanha ha muitos annos publicações scientificas importantes, em que, conjunctamente com outros assumptos, têm cabimento as sciencias mathematicas. Não tinha porém até agora um jornal unico e exclusivamente destinado a estas sciencias. Esta lacuna vem de ser preenchida pelo illustre professor da Universidade de Saragoça, sr. D. Z. G. de Galdeano, que, com o fim de chamar para as sciencias mathematicas, a attenção dos seus compatriotas, vem de fundar um jornal a que deu o titulo de *El Progresso mathematico*, e que é publicado em Saragoça em cadernos mensaes. O objecto d'este jornal é ao mesmo tempo didactico e scientifico. N'elle se farão conhecer, como diz o auctor, as mais importantes descobertas e as obras mais uteis para o ensino e para a comprehensão da sciencia. O nome do director do novo jornal, auctor de numerosos trabalhos destinados uns a divulgar em Hespanha os methodos e as descobertas mais modernas na Analyse e na Geometria, outros relativos á critica e philosophia d'estas sciencias, é seguro penhor do cuidado e intelligencia com que será dirigida esta publicação periodica.

José Pedro Teixeira. — Estudo sobre as funcções duplamente periodicas de terceira especie. — Coimbra, 1890.

N'um opusculo de que se deu noticia na pag. 12 do tomo IX d'este jornal, occupou-se o auctor das funcções duplamente periodicas de segunda especie, tratando principalmente da representação analytica d'estas fuucções. No presente opusculo occupa-se o auctor da representação analytica das funcções duplamente periodicas de terceira especie. Principia pela representação d'estas funcções pelo quociente de duas funcções holomorphas, e em seguida passa á representação das mesmas funcções por series de elementos simples periodicos, considerando separadamente as funcções holomorphas, as funcções meromorphas que têm mais zeros do que pólos e as funcções meromorphas que têm mais pólos do que zeros.

José Alves Bonifacio. — Theoria da funcção potencial e do potencial. — Porto, 1890.

N'este opusculo, escripto para o concurso a uma cadeira da Academia Polytechnica do Porto, o auctor expõe a parte mais importante da theoria do potencial e da funcção potencial. Eis o objecto dos diversos artigos:

I Funcção de força. II Forças centraes. III Funcção potencial. IV Continuidade da funcção potencial de um corpo e de suas derivadas primeiras. V Transformação da funcção $\Delta^2 v$ em coordenadas curvilineas. VI Funcção potencial de uma camada espherica. VII Derivadas de segunda ordem da funcção v de um corpo no interior do espaço agente. VIII Funcção potencial de uma superficie. IX Funcção potencial de uma superficie espherica homogenea. X Derivadas primeiras da funcção potencial d'uma superficie. XI Funcção potencial de uma recta homogenea. XII Caractéres da funcção potencial. XIII Sobre uma integração por partes. XV Theoremas de Green e Gauss. XVI Potencial. XVII Theoremas sobre a funcção potencial. XVIII Algumas applicações da formula de Green. XIX Theoremas de Gauss.

A. Macé de Lépinay. — Compléments d'Algèbre et notions de Géométrie analytique. — Paris, 1891.

É destinado este livro aos alumnos dos cursos de mathematica dos Lyceus francezes. As doutrinas que n'elle estão escriptas pertencem todavia entre nós ao primeiro anno dos cursos superiores e algumas mesmo ao segundo anno. Pela clareza e rigor com que está escripto póde-se recommendar aos alumnos d'estes cursos.

O auctor occupa-se primeiramente da Algebra. Na parte destinada a esta sciencia é estudada a noção de continuidade, define-se derivada e determinam-se as derivadas das funcções algebricas e das funcções circulares directas, applicam-se as derivadas ao estudo da variação das funcções, discute-se com todo o desenvolvimento as variações dos trinomios do segundo gráu e das fracções racionaes do primeiro e segundo gráu, quando o campo da variavel independente é illimitado, discutem-se as variações de algumas funcções quando o campo de variação da variavel independente é limitado por algumas condições, etc. O capitulo sobre a variação das funcções é especialmente util aos alumnos pelo desenvolvimento e modo completo como são discutidos os casos simples ahi considerados, preparando-os assim para o estudo dos casos mais complexos e difficeis que têm de considerar no resto dos seus cursos.

A parte destinada á Geometria analytica abre por um capitulo onde são estudos os principios geraes da theoria das projecções. Em seguida são estudados os principios geraes da Geometria analytica e a theoria das linhas de primeira e segunda ordem.

Ch. Hermite. — Sur les polynômes de Legendre (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 107).

N'este importante artigo deduz o grande geometra da formula elementar

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{A+B-(A-B)\cos\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{AB}},$$

as formulas de M. Mehler

$$P^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\arccos x} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - x)}},$$

$$P^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_{\arccos x}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(x-\cos\varphi)}},$$

onde $P^n(x)$ representa o polynomio de Legendre de gráu n.

Ch. Hermite. — *Sur les racines de la fonction sphèrique de seconde espèce* (*Mémoires de la Société R. des Sciences de Prague*, 7.ª série, t. 4).

N'esta memoria procura o sr. Hermite, por meio do theorema de Cauchy que dá o numero de raizes contidas no interior de um contôrno, as raizes da equação que resulta de egualar a zero a funcção espherica de segunda especie.

G. Peano. — *Gli elementi di calcolo geometrico.* — *Torino, 1890.*

O objecto do calculo geometrico é estudar as questões de Geometria executando as operações analyticas directamente sobre as entidades geometricas, sem intervenção de coordenadas. No presente opusculo o sr. Peano expõe com a maior clareza os elementos d'este calculo, de modo a poder ser estudado por quem só conhece os Elementos de Geometria, e, em seguida, faz d'elle applicação a algumas questões de geometria infinitesimal.

S. Pincherle. — *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, serie 2.ª, t. XIX).

Na pag. 180 do t. IX d'este jornal deu-se noticia de uma generalisação importante da theoria das fracções continuas algebricas devida ao sr. Pincherle. Na presente memoria o auctor expõe algumas novas propriedades d'estas fracções continuas, e faz d'ellas applicação a algumas questões importantes relativas á determinação approximada dos integraes definidos.

P. Appell. — *Sur une classe de polynômes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles* (*Annales de la Faculté de Toulouse.* — *1890*).

N'esta bella memoria o auctor estuda as propriedades dos polynomios de Hermite e Didon, isto é dos polynomios de duas variaveis $U_{m,n}(x, y)$, de gráu $m+n$, que satisfazem á equação

$$\iint K(x, y)\, U_{m,n}\, U_{n,v}(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

quando não é $m=n$ nem $u=v$, $K(x, y)$ representando uma funcção dada e o campo da integração tendo uma fórma determinada.

Depois applica estes polynomios ao calculo approximado dos integraes definidos duplos da fórma

$$\iint K(x, y) f(x, y)\, dx\, dy.$$

August Gützmer. — *Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur* (*Journal des mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VI).

As equações consideradas n'este importante trabalho são as equações da fórma $\Delta^n u = 0$, que resultam de applicar $n-1$ vezes a operação indicada pela caracteristica Δ á expressão

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2},$$

e as equações da fórma

$$\Delta^n u = -4\pi \sum_{\lambda=1}^{n} (2\lambda - 2)!\, \Delta^{n-\lambda} \varphi_{\lambda-1}(x, y, z),$$

onde $\varphi_{\lambda-1}(x, y, z)$ representam funcções dos pontos (x, y, z) situados no interior de um volume ω do espaço, as quaes se annullam fóra de ω. D'este modo é o auctor levado a considerar potenciaes de ordem qualquer.

O ponto de partida do auctor são os trabalhos de G. Mathieu sobre o potencial de segunda ordem, o qual corresponde a $n=2$.

Termina o bello trabalho do sr. Gützmer uma generalisação do bem conhecido theorema de G. Green.

E Cesàro. — *Sur la multiplication des séries* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIV).

—— *Considerazioni sul concetto di probabilità* (*Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario.* — *Roma*, t. VI).

—— *Sulla curva rapprezentativa dei fenomeni di diffrazione* (*Nuovo Cimento*, t. XXVIII).

—— *Sur l'emploi des coordonnées barycentriques* (*Mathesis*, t. X).

—— *Sur les démonstrations du théorème de Staudt et Clausen* (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, *1890*).

—— *Sui Canoni del calcolo degli addensamenti e su alcuna loro applicazioni* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, *1891*).

S. Pincherle. — *Un sistema d'integrali ellittici considerati come funzioni dell'invariante assoluto* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lyncei*, *1891*).

Gino Loria. — *Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine* (*Atti della R. Accademia di Torino*, *1890*).

Williot. — *Sur une genéralisation de la formule d'interpolation de Lagrange* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIV, 1890).

G. de Longchamps. — *Sur les paraboles de Artzt* (*Journal des mathématiques speciales*, *1890*).

—— *Les fonctions Hyper-Bernoulliennes* (*Revue générale des Sciences*, *1890*).

G. Vivanti. — *Alcune formole relative all'operazione* Ω (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. IV, 1890).

—— *Sugl'integrali polidromi delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, serie 2.ª, t. XIX).

G. Peano. — *Valori approximati per l'area di un ellissoide* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lyncei, 1890*).

H. G. Zeuthen. — *Sur la révision de la théorie des caracteristiques de M. Study* (*Mathematische Annalen*, t. XXXVII).

Studnicka. — *Joannes Marcus Marci a Cronland, sein leben und gelehartes wirken.* — *Prag, 1891.*

F. Engel. — *Der geschmack in der neueren Mathematik.* — *Leipzig, 1890.*

Schoute. — *Sur les figures planes directement semblables* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1890*).

G. T.

NOUVELLES REMARQUES SUR DIVERS ARTICLES CONCERNANT LA THÉORIE DES SÉRIES (*)

PAR

M. E. Cesàro

1. Dans mes précédentes remarques (**), je me suis occupé de la *série de Lerch*

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} q^{n-(\log n)} x^{\frac{1}{2}(\log n)[(\log n+1)]},$$

convergente pour $0 < q < 1 < x$, bien que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt une succession convenable de valeurs entières. Ces valeurs sont *infiniment rares* parmi les nombres entiers, ce qui n'a pas lieu pour d'autres séries de Lerch, et, á ce point de vue, ont peut dire que la série (1) est *moins* remarquable que les autres, car *on doit être d'autant moins surpris de la convergenee d'une série que les symptômes de divergence s'y manifestent plus rarement*. M. Auguste Gutzmer affirme, au contraire, que la série (1) est la *plus* remarquable de toutes, *parce que les termes où le quotient* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *cesse d'être inférieur à l'unité deviennent par degrés plus rares* (***)!

2. Il est vrai que M. Gutzmer, dans une article récent (****), explique mieux son argumentation en faveur de la série (1);

(*) Extrahimos este artigo dos *Nouvelles Annales*, 3.ª série, t. IX, 1890.
G. T.

(**) *Nouvelles Annalles*, 1888, p. 401.
(***) *Journal de Teixeira*, 1887, p. 36.
(****) *Nouvelles Annales*, 1889, p. 26.

mais je n'ai pas à m'occuper de ces raisons *nouvelles*, mon intention n'ayant jamais été, évidemment, de donner la mesure de l'intérêt plus ou moins grand qu'on peut attacher à la série (1), que je trouve du reste fort intéressante, mais seulement de faire observer que, si la série en question pouvait être appelée *peu remarquable*, elle le serait justement pour la raison que M. Gutzmer invoque dans un but contraire.

3. Il est encore vrai que, si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut, dans la série (1), surpasser toute limite, il ne devient pas, par compensation, arbitrairement petit pour d'autres valeurs de n, comme dans les séries que j'ai proposées. Mais cela tient à ce que la *compensation*, dans la série de Lerch, se fait par une autre voie: elle consiste précisément dans la rareté des valeurs de n, qui rendent le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ supérieur à tout nombre. C'est là un fait général, qu'on pourrait démontrer avec rigueur, mais dont on se rend compte immédiatement comme il suit. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers λ ou vers μ, suivant que n parcourt une succession de fréquence ω ou la succession complémentaire, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\lambda^{\omega}\mu^{1-\omega}$. Si λ est infini, cette limite ne peut être finie, à moins que $\omega=0$ ou $\mu=0$. La série (1) est dans le premier cas, les autres dans le second.

4. En poursuivant les recherches initiées par M. Lerch, j'ai pu construire des séries *convergentes*, telles que, en excluant certaines valeurs de n, *infiniment rares* parmi les nombres entiers, *le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *se maintient supérieur à un nombre plus grand que l'unité.* Voici un exemple fort simple. La série

$$q_1+q_1^2+q_2^3+q_1^4+q_2^5+q_3^6+q_1^7+\ldots,$$

où

$$q_n=q^{1+\frac{1}{n}},\quad (0<q<1),$$

est convergente, parce que ses termes sont positifs et inférieurs aux termes correspondants de la série convergente $q+q^2+q^3+\ldots.$ Si n est un nombre triangulaire,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{q_1^{n+1}}{q_2^n}, \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

Dans le cas contraire, soit ν le plus grand nombre triangulaire inférieur à n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q_{n-\nu+1}^{n+1}}{q_{n-\nu}^{n}} = q^{1-\frac{4\nu}{(n-\nu)(n-\nu+1)}};$$

puis, en observant que $(n-\nu)(n-\nu+1)$ ne surpasse pas 2ν,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{q} > 1.$$

C'est ce qu'il fallait montrer.

5. Quant au *théorème de Weyr*, je ne puis croire que le dernier article de M. Gutzmer tende à lui ôter une partie de l'intérêt qu'il mérite; car c'est M. Gutzmer lui-même qui a posé la question en ces termes: *Il serait très intéressant d'avoir une série convergente à termes positifs, telle que, pour un nombre infini de valeurs de* n *le quotient* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *surpasse l'unité, et que cette propriété ne se perde pas par une transformation quelconque* (*). M. Édouard Weyr a immédiatement répondu (**) que de telles séries ne peuvent exister, et l'on appréciera d'autant mieux ce petit résultat lorsqu'on saura que, malgré l'extrême facilité qu'il y avait de l'obtenir, les efforts des géomètres cités par M. Gutzmer et connus de tout le monde sont restés longtemps infructueux. Il suffit de dire que M. Gutzmer n'était pas même parvenu à démontrer le théorème de Weyr pour la seule série (1), car il avait

(*) *Journal de Teixeira,* 1887, janvier-février.
(**) *Loc. cit.*, 1887, mars-avril.

eu besoin de s'imposer la restriction *inutile* $q\sqrt{x}<1$. Il était pourtant facile de s'en passer.

6. Je me suis occupé, à plusieurs reprises, du théorème de convergence, relatif à la limite de nu_n. Il n'y a rien de plus simple, pour établir ce théorème indépendamment de la considération de séries particulières, que d'écrire, en appliquant un théorème de Cauchy,

$$\lim \frac{nS_n}{n} = \lim \left[nS_n - (n-1)S_{n-1}\right] = \lim (nu_n + S_{n-1}).$$

Si la série est convergente, le premier membre est la somme S de la série. Si la limite λ de nu_n existe, le dernier membre est $\lambda + S$, donc $\lambda = 0$. Il est regrettable que le *théorème de Cauchy*, auquel je fais allusion ici, ne figure pas dans la plupart des Traités, alors qu'il devrait y jouer un rôle prépondérant. Il constitue une féconde règle de calcul: c'est la *règle de L'Hospital* pour les fonctions de variable entière. En l'introduisant dans mon *Cours* j'ai pu obtenir de remarquables simplifications dans diverses théories d'Analyse algébrique.

7. On pourrait imiter la démonstration précédente pour le théorème plus général, relatif à la limite de $a_n u_n$, la fonction positive a_n étant choisie de manière que la série

$$(2) \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$$

soit divergente. Dans ce cas la fonction

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\left(1 + \frac{1}{a_3}\right)\ldots$$

croit indéfiniment avec n, et le théorème de Cauchy donne

$$\lim \frac{p_n S_n}{p_n} = \lim \frac{p_n S_n - p_{n-1} S_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \lim \left(S_n + \frac{p_{n-1} u_n}{p_n - p_{n-1}}\right),$$

c'est-à-dire

$$S = \lim (S_n + a_n u_n) = S + \lambda,$$

d'où $\lambda = 0$. Mais cette démonstration n'a pas de raison d'être, du moment qu'on suppose connue la divergence de la série (2).

8. Soit σ_n la somme des n premiers termes de la série (2). C'est encore le théorème de Cauchy qui permet de constater rapidement la divergence de

$$(3) \qquad \frac{1}{a_1\sigma_1} + \frac{1}{a_2\sigma_2} + \frac{1}{a_3\sigma_3} + \ldots,$$

établie la première fois par Abel, au moyen du principe général de convergence. Si τ_n est la somme des n premiers termes de la série (3), on a

$$\lim \frac{\tau_n}{\log \sigma_n} = \lim \frac{1}{a_n\sigma_n \log \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}} = \frac{1}{\lim \log \left(1 - \dfrac{1}{a_n\sigma_n}\right)^{-a_n\sigma_n}};$$

d'où, en observant que $a_n\sigma_n$ croit indéfiniment avec n,

$$\lim \frac{\tau_n}{\log \sigma_n} = 1.$$

Donc τ_n croît sans limite, comme le logarithme de σ_n.

9. Si les termes de (2) vont en décroissant on peut écrire

$$\frac{1}{a_{n+1}\sigma_{n+1}} < \log \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} < \frac{1}{a_n\sigma_n},$$

et, par suite, la série

$$\frac{1}{a_1\sigma_1} - \log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{1}{a_2\sigma_2} - \log\frac{\sigma_3}{\sigma_2} + \frac{1}{a_3\sigma_3} - \ldots$$

est convergente. Soit C sa somme. On trouve sans peine

$$\lim(\tau_n - \log\sigma_n) = C. \tag{4}$$

Lorsque $a_n = 1$, C est la *constante d'Euler*. Pour $a_n = n$, $n\log n$, ..., on obtient une infinité d'autres constantes, qui ont été considérées par M. F. Giudice (*).

10. Si les carrés des termes de la série (3) forment une série convergente, l'égalité (4) permet de définir une fonction analogue à la fonction Γ, comme il suit:

$$G(1+x) = \lim \frac{\sigma_n^x}{\left(1+\frac{x}{a_1\sigma_1}\right)\left(1+\frac{x}{a_2\sigma_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n\sigma_n}\right)}.$$

Elle permet ensuite de mettre $\frac{1}{G(1+x)}$ sous la forme caractéristique des fonctions holomorphes du premier genre

$$\frac{1}{G(1+x)} = e^{Cx}\prod_1^\infty\left[\left(1+\frac{x}{a_n\sigma_n}\right)e^{-\frac{x}{a_n\sigma_n}}\right].$$

En particulier, pour $a_n = 1$, on retrouve la *formule de Weierstrass*, relative à la fonction Γ.

11. Supposons que, à partir d'une certaine valeur de n, on ait constamment

$$\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n < 1. \tag{5}$$

(*) *Journal de Battaglini*, 1889.

Si v_n est le terme général de la série (3), on a identiquement

$$\left(a_n \frac{v_n}{v_{n+1}} - a_{n+1}\right) \sigma_n = 1,$$

et, par suite, l'inégalité (5) devient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Donc la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est *plus divergente* que la série (3). On voit, par exemple, pour $a_n = n$, que, dans une série convergente à termes positifs, l'expression

$$\left[n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\right] \log n$$

ne peut finir par être constamment inférieure à l'unité, et, par suite, l'expression

$$n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$$

doit croître à l'infini avec n. C'est le *théorème de Cahen* (*).

12. Si, au contraire, l'expression considérée finit par surpasser quelque nombre $1 + k$, supérieur à l'unité, on peut toujours construire une série *moins convergente* que la série proposée. Soit

$$w_n = \frac{v_n}{(1 + kv_1)(1 + kv_2) \ldots (1 + kv_n)}.$$

On a identiquement

$$a_n \frac{w_n}{w_{n+1}} - a_{n+1} = a_n \frac{v_n}{v_{n+1}} - a_{n+1} + k a_n v_n = \frac{1 + k}{\sigma_n}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, novembre 1886.

Conséquemment l'inégalité

$$(6) \qquad \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n > 1 + k$$

revient à celle-ci:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{w_{n+1}}{w_n}.$$

Il reste donc à prouver que la série $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ est convergente. Cela résulte immédiatement de l'identité

$$k(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = 1 - \frac{1}{(1 + kv_1)(1 + kv_2)\ldots(1 + kv_n)}.$$

Si k est positif, l'expression

$$(1 + kv_1)(1 + kv_2)\ldots(1 + kv_n) > 1 + k(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$$

surpasse toute limite, lorsque n croît à l'infini. Conséquemment

$$\lim(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = \frac{1}{k}.$$

13. Les moyens de démonstration employés dans les remarques précédentes servent seulement à mettre en évidence la possibilité de construire une série moins divergente ou moins convergente que la série proposée. Mais le *théorème de Kummer* suffit à tout. Lorsqu'on remplace, dans l'expression considérée par ce théorème, la fonction a_n par $a_n \sigma_n$, on peut écrire

$$a_n \sigma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\sigma_{n+1} = \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n - 1,$$

et l'on voit que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est divergente ou convergente, suivant qu'on finit par avoir l'une ou l'autre des inégalités (5), (6), respectivement. On appliquera habituellement ce théorème en cherchant d'abord la limite de l'expression

$$\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n,$$

puis, si on la trouve égale à l'unité, celle des expressions

$$\left[\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n - 1\right]\log\sigma_n,$$

$$\left\{\left[\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n - 1\right]\log\sigma_n - 1\right\}\log\log\sigma_n,$$

...................................,

successivement. A la première limite qu'on trouvera différente de 1, on saura que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est convergente ou divergente, suivant que la limite trouvée est supérieure ou inférieure à l'unité. L'introduction des fonctions $\log\sigma_n$, $\log\log\sigma_n, \ldots$ est justifiée par une remarque précédente.

11. Le théorème de Cauchy permet d'étudier aisément les relations qui existent entre les tendances de $a_n u_n$ et de l'expression envisagée par le théorème de Kummer. Si la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est divergente, on a

$$(7)\quad \begin{cases} \lim \dfrac{a_n u_n}{S_n} = \lim \dfrac{a_{n+1} u_{n+1} - a_n u_n}{u_{n+1}} \\[2ex] \qquad = -\lim\left(a_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right). \end{cases}$$

Si $a_n u_n$ admet une limite différente de zéro, ce qui permet d'affirmer immédiatement la divergence de la série, le théorème de Kummer ne dit rien, parce que, d'après (7), la limite considérée par ce théorème est nulle, si elle existe. Si cette limite existe pour une série convergente, et qu'elle soit $\lambda > 0$, prenons $0 < k < \lambda$. Il existe aussi un nombre ν, tel que, pour $n > \nu$,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > k,$$

c'est-à-dire

$$k_n a_n u_n < k_\nu a_\nu u_\nu.$$

ou

$$k_n = \left(1 + \frac{k}{a_1}\right)\left(1 + \frac{k}{a_2}\right)\dots\left(1 + \frac{k}{a_n}\right).$$

Si l'on observe que, d'après le théorème de Cauchy, on a

$$\lim \frac{\sigma_n}{k_n} = \frac{1}{k} \lim \frac{1}{k_n} = 0,$$

on voit que $a_n \sigma_n u_n$ tend nécessairement ver zéro.

15. Dans les mêmes conditions où l'on a pu définir la fonction G, on peut dire que, pour n croissant à l'infini, l'expression

$$\frac{\sigma_n^h}{\left(1 + \frac{x}{a_1 \sigma_1}\right)\left(1 + \frac{x}{a_2 \sigma_2}\right)\dots\left(1 + \frac{x}{a_n \sigma_n}\right)}$$

tend vers zéro ou surpasse toute limite suivant que $h < x$ ou $h > x$. Cela étant, supposons que l'on ait trouvé

$$(8) \qquad \lim \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) \sigma_n = \lambda.$$

Si $\lambda > 1$, la série est convergente, et l'on pourra fixer deux nombres $1 + \alpha$, $1 + \beta$, supérieurs à l'unité et comprenant entre eux le nombre λ. Dés lors on aura, pour n surpassant un certain nombre ν,

$$\alpha < a_n \sigma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \sigma_{n+1} < \beta.$$

Donc, A et B étant deux nombres indépendants de n,

$$a_n \sigma_n^r u_n < \frac{A \sigma_n^{r-1}}{\left(1 + \frac{\alpha}{a_1 \sigma_1}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{a_2 \sigma_2}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha}{a_n \sigma_n}\right)},$$

$$a_n \sigma_n^r u_n > \frac{B \sigma_n^{r-1}}{\left(1 + \frac{\beta}{a_1 \sigma_1}\right)\left(1 + \frac{\beta}{a_2 \sigma_2}\right) \dots \left(1 + \frac{\beta}{a_n \sigma_n}\right)}.$$

Il en résulte

$$\lim a_n \sigma_n^r u_n = 0,$$

si $r < 1 + \alpha < \lambda$, et

$$\lim a_n \sigma_n^r u_n = \infty,$$

si $r > 1 + \beta > \lambda$. Ainsi, lorsqu'on a pu constater la convergence de la série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ au moyen de (8), non seulement $a_n u_n$ tend vers zéro, mais encore le produit de cette fonction par toute puissance de σ_n, dont l'exposant, inférieur à λ, est aussi voisin de λ qu'on veut. Par exemple, si λ est la limite considérée par la règle de Raabe et Duhamel, on a $\lim n^r u_n = 0$ pour $r < \lambda$. Lorsque $\lambda = 1$, on cherche

$$\lim \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \log n = \mu.$$

Si $\mu > 1$, la série est convergente, et l'on a

$$\lim n (\log n)^r u_n = 0$$

pour $r < \mu, \dots$

16. Il serait trés intéressant de pouvoir assigner quelque condition *suffisante* pour l'existence de la limite de

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n), \tag{9}$$

pour n infini. On connaît une condition: c'est l'existence de la limite de a_n; mais il faudrait la remplacer par une condition plus générale, pouvant servir dans les cas où a_n n'a pas de limite. J'ai cherché en vain une telle condition en la restreignant même aux fonctions a_n finies. Les n premiers nombres de la succession a_1, a_2, a_3 ... étant représentés sur une droite, le nombre (9) est représenté par leur centre de gravité, qui se déplace, lors de l'adjonction de a_{n+1} aux nombres précédents, vers la droite ou vers la gauche suivant que

$$a_{n-1}-\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$$

est positif ou négatif. Ce déplacement tend vers zéro lorsque n croît. Toute oscillation de (9), qui s'effectue constamment dans un sens déterminé, tend aussi vers zéro, si

$$\lim\frac{p_n}{n}=0, \tag{10}$$

p_n étant le nombre de termes consécutifs de la succession

$$\left\{\begin{array}{l} a_1,\ a_2-a_1,\ a_3-\dfrac{1}{2}(a_1+a_2), \\ \qquad a_4-\dfrac{1}{3}(a_1+a_2+a_3),\ \ldots, \end{array}\right. \tag{1}$$

qui ont même signe que le premier d'entre eux, $n^{\text{ième}}$ de la suite.

On conçoit par là qu'en introduisant d'autres conditions simples, on pourrait en constituer, avec (10), un système suffisant pour l'existence de la limite de (9). Mais il est de la dernière évidence que la condition (10) ne saurait suffire à elle seule pour affirmer, d'une manière générale, l'existence dont il s'agit. Il peut se faire, en effet, que par une infinité d'oscillations dans les deux sens le nombre (9) parvienne, quelque grand que soit n, à se déplacer d'un intervalle fini. Appelons $b_1, b_2, b_3 \ldots$ les termes de (11). On trouve sans peine

$$a_n = b_1 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{3} b_3 + \ldots + \frac{1}{n-1} b_{n+1} + b_n,$$

et l'on voit que la convergence de la série

$$(12) \qquad b_1 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{3} b_3 + \ldots$$

est suffisante et nécessaire pour l'existence de la limite (9).

En conséquence, afin de construire une fonction a_n, telle que la limite de (9) n'existe pas, bien que la condition (10) soit remplie, nous tâcherons de construire une série (12) indéterminée. Considérons d'abord la série

$$(13) \qquad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \ldots$$

Si n est une puissance de 2, la somme des n termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tend, pour n croissant à l'infini, vers $\log 2$. Donc la série (13) n'est pas convergente. Elle n'est pas divergente; car on trouve, par un calcul élémentaire, que la somme de ses n premiers termes est comprise entre $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3} + \log 2$. Donc la série (13) est indéterminée; mais elle ne remplit pas la condition (10). En effet, $p_n = n$, si n est une puissance de 2. Ajoutons aux termes de (13) les termes correspondants de la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, multipliés par des nombres supérieurs à l'unité. Il vient une série indéterminée, à termes alternativement positifs et négatifs. C'est une des séries (12) cherchées; car, à cause de $p_n = 1$, la condition (10) est remplie. Voici une de ces séries:

$$2 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{1}{9} - \frac{2}{10} + \ldots$$

La somme des n premiers termes est toujours comprise entre 0,87 et 1,72. C'est pourquoi la fonction correspondante a_n est finie.

17. La question posée en dernier lieu permettrait de résoudre plusieurs questions d'arithmétique asymptotique, que j'ai traitées autrefois par des méthodes peu rigoureuses. Ainsi, $\lambda(n)$ étant la *fonction de Liouville*, égale à $+1$ ou à -1, suivant que n est composé d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux, il importerait de savoir si la limite de

$$(14) \qquad \frac{1}{n}[\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \ldots + \lambda(n)]$$

existe. Fixons q de manière que $\lambda(q) = -\lambda(n)$. Évidemment $\frac{n}{q}$ ne peut être un carré parfait. Soit α^2 le plus petit carré surpassant $\frac{n}{q}$. On a

$$\lambda(q\alpha^2) = \lambda(q) = -\lambda(n).$$

D'autre part, le signe de

$$\lambda(n+1) - \frac{1}{n}[\lambda(1) + \lambda(2) + \ldots + \lambda(n)]$$

étant le même que celui de $\lambda(n+1)$, la fonction p_n est définie par les conditions

$$\lambda(n) = \lambda(n+1) = \ldots = \lambda(n + p_n - 1) = -\lambda(n + p_n).$$

Or il est clair que $q\alpha^2$, supérieur à n, ne peut être inférieur à $n+p_n$. Donc

$$p_n \leqq q\alpha^2 - n < q\left(1+\sqrt{\frac{n}{q}}\right)^2 - n;$$

$$\lim \frac{p_n}{n} \leqq \lim\left(\frac{q}{n} + 2\sqrt{\frac{q}{n}}\right) = 0.$$

La condition (10) est remplie; mais on a vu que cela ne suffit pas pour affirmer l'existence de la limite du nombre (14). Cependant tout porte à croire que cette limite existe et que sa valeur est zéro.

BIBLIOGRAPHIA

B. Niewenglowski. — Cours d'Algèbre, Paris, 1891.

A obra de que vamos dar noticia é um guia excellente para aquelles que quizerem preparar-se para o estudo da theoria geral das funcções, pela elegancia da exposição, pela clareza e rigor das demonstrações, e pela boa escolha dos assumptos considerados. N'ella são estudadas a parte da analyse conhecida pelo nome de analyse algebrica, a theoria das equações, os principios do Calculo differencial e do Calculo integral, etc.

Consta a obra de dois volumes, cada um dos quaes é dividido em dois livros.

O primeiro livro abre por um capitulo dedicado á theoria dos numeros irracionaes em que é seguido o methodo, hoje classico, de Dedekind. N'este mesmo capitulo é estudada a noção de limite. A exposição, bastante difficil, da theoria dos numeros irracionaes consegue o auctor fazel-a com simplicidade e clareza.

Vem depois a theoria dos radicaes arithmeticos e a theoria dos expoentes fraccionarios, negativos e irracionaes. Esta doutrina constitue o assumpto dos capitulos II e III.

Nos capitulos IV a VI vêem algumas propriedades das funcções inteiras, a theoria da divisão d'estas funcções, o desenvolvimento em série das funcções racionaes, a theoria do maior divisor commum das funcções inteiras. Todos estes assumptos são estudados com grande desenvolvimento, sendo expostos os methodos geraes de calculo, sendo considerados os casos particulares importantes, sendo feitas applicações bem escolhidas e sendo demonstrados muitos theoremas interessantes.

No capitulo VII é estudada a analyse combinatoria, sendo considerados os arranjos, permutações e combinações com repetição e sem repetição.

Nos capitulos VIII e IX vêem as formulas para o desenvolvimento do binomio e dos polynomios com muitas applicações interessantes, entre as quaes citaremos a que se refere á determinação da somma das potencias semelhantes dos termos de uma progressão arithmetica.

No capitulo X é demonstrada a formula de Taylor no caso das funcções inteiras de uma ou mais variaveis.

No capitulo XI são expostos os processos para a extracção das raizes das funcções inteiras, e o modo de desenvolver estas raizes segundo as potencias da variavel.

No capitulo XII são determinados os verdadeiros valores de algumas expressões irracionaes indeterminadas.

Nos capitulos XIII a XV é exposta a parte algebrica da theoria dos determinantes, e faz-se applicação d'esta theoria á resolução e discussão das equações do primeiro gráu, e á theoria das fórmas lineares e das substituições lineares.

No capitulo XVI é estudada a theoria dos numeros imaginarios, são dadas as regras para o calculo com estes numeros e são consideradas a sua representação geometrica e as construcções geometricas correspondentes ás operações executadas sobre elles.

O livro segundo contém quatro capitulos, sendo no primeiro estudados os principios geraes da theoria das séries, a theoria das operações sobre séries, as regras de convergencia, etc.; sendo no segundo estudada a theoria das fracções continuas numericas; sendo no terceiro estudadas a noção de continuidade das funcções e as propriedades geraes das funcções continuas; e sendo no ultimo estudadas as propriedades das funcções e^x e $\log x$.

O livro terceiro consta de oito capitulos.

No capitulo I é estudada a noção de *infinitamente pequeno* e são expostos os principios geraes do methodo infinitesimal. No capitulo II são definidas as noções de derivada e differencial, são dadas as regras geraes para o calculo das derivadas das funcções elementares, é demonstrado o theorema dos incrementos finitos, é demonstrado o theorema relativo á existencia de derivada das funcções implicitas e é obtida esta derivada, são dadas as expressões analyticas de algumas derivadas de ordem n, etc. No capitulo III são applicadas as derivadas ao estudo da variação das funcções e á determinação dos maximos e minimos. No capitulo IV é demonstrada a formula de Taylor, e é applicada ao desenvolvimento das funcções que habitualmente se encontram nos manuaes de Calculo differencial. No capitulo V são applicadas as derivadas á determinação do verdadeiro valor de algumas expressões indeterminadas. No capitulo VI é definida a noção de integral, é demonstrada a integrabilidade das funcções continuas, são apresentadas as propriedades fundamentaes dos integraes definidos, e são applicados os integraes definidos ao calculo de algumas áreas, ao calculo de alguns volumes e ao desenvolvimento de algumas funcções em série. No capitulo VII são extendidos ás funcções de muitas variaveis os principios e as formulas demonstradas no capitulo II, e é resumidamente estudada a theoria dos determinantes funccionaes. Finalmente o capitulo VIII é dedicado á parte elementar da theoria das fórmas quadraticas.

No livro quarto occuppa-se o auctor da theoria das equações, e contém os mais importantes methodos e theoremas relativos a esta theoria, distribuidos por sete capitulos onde são estudados os principios e theoremas fundamentaes, a theoria das funcções symetricas das raizes das equações, a theoria da eleminação entre equações algebricas, os theoremas de Descartes, Rolle, Budan, Fourier e Sturm sobre a determinação do numero de raizes, os methodos para a resolução numerica das equações, a resolução algebrica das equações do terceiro e quarto gráu, etc. Terminam este livro dois capitulos, um dedicado á decomposição das funcções racionaes em fracções simples, e o outro á theoria das differenças.

Pela noticia, que vimos de dar, pode-se fazer uma ideia approximada do que de mais essencial contém a excellente obra do sr. Niewenglowski, não sendo possivel, em pequeno espaço, dar ideia completa de todos os assumptos considerados nos dois bellos volumes de que é composta.

Devemos ainda accrescentar que cada capitulo é acompanhado por uma lista de questões propostas, que pela maior parte constituem theoremas interessantes.

S. Pincherle. — *Una nuova estensione delle funzioni sferiche* (*Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna*, série 5.ª, t. 1).

Na nova e importante generalisação, que o sr. Pincherle apresenta na sua bella memoria, dos polynomios de Legendre, parte do desenvolvimento

$$\frac{1}{\sqrt{t^3-3tx+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n;$$

mostra que os coefficientes P_n satisfazem á equação recorrente

$$2(n+1)P_{n+1} - 3(2n+1)xP_n + (2n-1)P_{n-2} = 0,$$

e portanto são soluções da equação ás differenças finitas

$$2(n+1)F(n+1) - 3(2n+1)xF(n) + (2n-1)F(n-2) = 0;$$

e estuda os polynomios P_n e os outros polynomios que são integraes d'esta equação, assim como os polynomios que são integraes da equação

$$(2n+1)F(n+1) - 3x(2n-1)F(n-1) + 2(n-1)F(n-2) = 0.$$

O auctor acha diversas relações entre estes polynomios, exprime alguns d'elles por integraes definidos, relaciona a sua theoria com a theoria dos integraes ellipticos, tracta do desenvolvimento das funcções em série formada por elles, mostra que as funcções P_n são integraes de equações differenciaes lineares pertencentes ao typo hypergeometrico generalisado de Coursat, etc.

G. Juel. — Elementerne af Infinitesimalregningen, Kjobenhavn, 1890.

Em 120 paginas, que contém este livro, estão resumidas as theorias elementares mais importantes do Calculo differencial e da parte do Calculo integral que se refere á integração das funcções. Assim contém elle a determinação das derivadas das funcções elementares e a applicação das derivadas á determinação dos maximos e minimos das funcções de um variavel e á determinação dos verdadeiros valores das expressões indeterminadas; contém a theoria das tangentes e a theoria de curvatura das curvas planas; contém os principios geraes de Calculo integral e a integração dos grupos de funcções que se encontram habitualmente nos livros de Calculo integral; contém os principios da theoria das séries, a formula de Taylor e as applicações que ordinariamente se fazem d'esta formula. Devemos accrescentar que o auctor deu ao seu livro uma fórma muito adequada a tornal-o util aos alumnos que pela primeira vez estudam a analyse infinitesimal, considerando só as theorias mais importantes, expondo-as com a maior clareza e fazendo acompanhar cada questão considerada de numerosos exemplos e exercicios convenientemente graduados.

Gino Loria. — *Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati* (*Bibliotheca mathematica, 1891*).

F. Casorati nasceu em Pavia a 17 de dezembro de 1835 e morreu n'esta mesma cidade a 11 de setembro de 1890. Cultivou a analyse mathematica com grande successo, escrevendo sobre ella trabalhos importantes, que vêem mencionados na noticia interessante que sobre a sua vida e as suas obras acaba de publicar o sr. G. Loria.

G. Peano. — *Sopra alcune curve singolari* (*Atti della R. Academia delle Scienze di Torino, 1890*).

O auctor mostra que algumas proposições sobre tangentes e planos osculadores ás curvas, que se encontram na Geometria de posição de Staudt, são por este geometra enunciadas de um modo muito absoluto, e que é necessario impôr ás curvas algumas condições restrictivas para tornar estas proposições verdadeiras.

A. del Re. — *Sui sistemi polari reali bitangenti a sistemi polari* *reali dati (Rendiconti della R. Academia delle Scienze di Napoli, 1888).*

N'este bello artigo o auctor estuda a theoria geometrica das conicas bitangentes a duas conicas dadas (considerando as conicas, reaes ou imaginarias, relativamente ás quaes é real a polar de um ponto real e é real o pólo de uma recta real) representando as relações imaginarias no campo dos elementos reaes.

Para esta representação é adoptada a theoria de Staudt sobre os imaginarios, e por isso o auctor, em logar de raciocinar directamente sobre conicas, raciocina sobre systemas polares, considerando como bitangentes dous systemas polares quando a homographia resultante do seu producto é uma homologia.

Os casos de os systemas polares dados serem ou não bitangentes são separadamente considerados. Em cada um d'estes casos é apresentada a construcção dos systemas polares bitangentes aos systemas dados, e algumas proposições interessantes relativas aos mesmos systemas.

A. del Re. — Sulle coppie di forme bilineari (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890).

O auctor deduz, pelos processos da Geometria pura de posição, as condições necessarias e sufficientes para que um par de fórmas bilineares symetricas se possa mudar linearmente n'um outro par semelhante, e construe a transformação que permitte a passagem de um para o outro.

H. Bentabol y Ureta. — Programa de la asignatura de Calculo infinitesimal, etc., Barcelona — 1891.

Contém este opusculo o programma do curso de Calculo infinitesimal, professado pelo sr. Bentabol na escola preparatoria de engenheiros e architectos de Madrid. Vê-se por este programma que o ensino do Calculo infinitesimal é feito pelo professor com o desenvolvimento que o estado actual da sciencia exige e de modo a preparar os alumnos para a leitura das memorias classicas com que a sciencia tem sido enriquecida. O auctor divide o seu programma em cinco partes, que são: 1.ª Introducção, 2.ª Calculo differencial, 3.ª Theoria das séries, 4.ª Calculo integral, 5.ª Applicações geometricas. Como se vê, o sr. Bentabol separa completamente as applicações geometricas das theorias analyticas, com o fim de dar unidade a estas theorias e formar com ellas um corpo de doutrina contendo os elementos de Geometria infinitesimal.

E. de Kerbedz. — Sophie de Kowalevski (Rendiconti del Cicolo matematico di Palermo, 1891).

Contém este artigo uma noticia muito interessante sobre a eminente professora de mathematica na Universidade de Stockolm Sophia de Kowalevski, que a sciencia perdeu a 10 de fevereiro de 1891, tendo apenas 37 annos de idade, e quando o seu grande talento estava em pleno brilho.

Sophia de Kowalevski, cujo nome occupa um dos primeiros logares na lista das mulheres celebres que têem cultivado as sciencias, nasceu em Moscou a 27 de dezembro de 1853, e descendia, por parte do pae, de Matthias Corvin, rei da Hungria, e, por parte da mãe, do mathematico russo Schubert e do astronomo do mesmo nome. Tendo uma decidida vocação para as sciencias mathematicas, obteve de seus paes auctorisação para estudar estas sciencias, partindo em 1852 para S. Petersbourg, e depois em 1853 para Heidelberg, cuja Universidade frequentou até 1870. Desde 1871 até 1874 estudou mathematica em Berlin debaixo da direcção de Weierstrass, do qual recebeu lições particulares. Em 1874 tomou o gráu de doutor na Universidade de Göttingen, apresentando n'essa occasião uma dissertação inaugural, na qual eram estudados de um modo profundo os principios fundamentaes da theoria das equações ás derivadas parciaes, e cujos resultados se tornaram classicos. Em 1884 foi convidada para reger a cadeira de analyse superior na Universidade de Stockholm, cadeira que regeu com o maior successo até á sua morte. Deixou trabalhos mathematicos importantes, publicados no *Jornal de Crelle*, nas *Acta mathematica*, nas publicações da Academia de Paris, etc. Um d'estes trabalhos, relativo ao movimento de rotação de um corpo pesado á roda de um ponto fixo, foi premiado pela Academia das Sciencias de Paris em 1888.

C. Juel. — *Bidrag til den imaginaere Linies og den imaginaere Plans Geometri, Kjobenhavn* — *1885*.

—— *Uber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie* (*Acta mathematica*, t. XIV).

S. Pincherle. — *Sopra certe superficie razionali che s'incontrano in questioni d'analysi* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1891*).

E. Cesàro. — *Sul calcolo della dilatazione e della rotazione nei mezzi elastici* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1891*).

—— *Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes* (*Mathesis*, 2.e série, t. I).

G. de Longchamps. — *Intégration de l'équation de Brassine au mayen des fonctions Hyper-Bernoulliennes* (*Association Française pour l'Avancement des Sciences, 1890*).

P. Mansion. — *Notes sur la Géométrie euclidienne et sur la Géométrie non euclidienne* (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, t. XV).

A. Favaro. — *Sopra la parte fatta ala storia in un disegno di Bibliografia delle Matematiche* (*Rivista di Matematica, 1891*).

A. del Re. — Su alcuni gruppi completi contenuti nel gruppo Cremona ad un numero qualunque di variabli (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890*).

—— *Sulla superficie del 5.° ordine dotata de curva doppia del 5.° ordine* (*Item*).

—— *Sui gruppi completi di trasformazioni lineari involutorie negli spazi ad* n *dimenzioni* (*Item*).

—— *Le superficie polari congiunte rispetto ad un connesso di piani e di rette* (*Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, 1888*).

—— *A propos d'un problème sur le billard circulaire* (*Mathesis, 1890*).

G. T.

SUR L'APPLICATION D'UN DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS IMPLICITES A UNE EXTENSION DU PROBLÈME UNIVERSEL DE WRONSKI

PAR

M. A. BASSANI

(Professeur à l'Ecole Navale de Livourne)

---

1. Dans une Note, publiée dans les Comptes-rendus du R. *Istituto Veneto*, T. V, série VI, nous avons démontré une formule, qui résout le problème, donné pour la première fois par M. Gomes Teixeira (*), permettant de développer en série, ordonnée suivant les puissances croissantes de x, une fonction $F(z)$ de la variable z, en supposant que l'on ait

$$z = a + x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^n\varphi_n(z).$$

Nous avons trouvé, à ce propos, la formule symbolique

$$F(z) = F(a) + \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{x^\mu}{(\nu+1)!} D_a^\nu [F'(a)\varphi_{\nu+1,\mu}(a)],$$

avec la condition de convergence

$$\text{mod.} \left| \frac{x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^n\varphi_n(z)}{z-a} \right| < 1.$$

(*) M. Gomes Teixeira, Sur le développement des fonctions implicites; *Journal de Mathém. pures et appliquées* (3.e série, T. VII et 4.e série, t. III) et *Curso de Analyse Infinitesimal* (*Calculo Differencial*). — M. E. Cesàro, *Nouv. An. de Mathém.* 3.e série, T. IV. — M. David, *Journal de l'École Polytechnique*, LVII.e Cahier.

Revenant aujourd'hui sur le même sujet, nous allons étendre notre étude à la détermination du développement en série, ordonnée suivant les puissances des variables x, y et leurs produits, d'une fonction quelconque $z = F(u, v)$ de deux variables u, u, en supposant l'on ait

$$(1) \quad \begin{cases} u = a + x\varphi_1(u, v) + x^2\varphi_2(u, v) + \ldots + x^n\varphi_n(u, v), \\ v = b + y\psi_1(u, v) + y^2\psi_2(u, v) + \ldots + y^m\psi_m(u, v). \end{cases}$$

On suppose d'abord que la fonction z et ses dérivées partielles de premier, second, ..., $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre sont continues pour les valeurs de u, v telles que

$$0 \leq u \leq x, \quad 0 \leq v \leq y,$$

et que les dérivées partielles de $n^{\text{ième}}$ ordre sont continues pour

$$0 < u < x, \quad 0 < v < y.$$

Lorsque ces conditions sont remplies, en indiquant par z_0, $\frac{dz_0}{dx}$, $\frac{dz_0}{dy}$, $\frac{d^2z_0}{dxdy}$, ... les dérivées partielles de la fonction z dans les hypothèses $x = 0$, $y = 0$, on aura, en vertu du théorème de Maclaurin,

$$(2) \quad \begin{cases} z = z_0 + \left[\frac{dz_0}{dx}x + \frac{dz_0}{dy}y\right] \\ \quad + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2z_0}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2z_0}{dxdy}xy + \frac{d^2z_0}{dy^2}y^2\right] + \ldots + R, \end{cases}$$

laquelle formule peut se représenter symboliquement sous la forme très-simple

$$(3) \qquad z = z_0 + \Sigma \frac{1}{p!\,q!} \frac{d^{p+q} z_0}{dx^p dy^q} x^p y^q + \mathrm{R}$$

où la somme Σ se rapporte à toutes les solutions entières positives ou nulles de l'équation

$$p+q=n, \quad [n=1, 2, 3, 4, \ldots\ldots].$$

Le terme complémentaire R, lorsqu'on s'arrête après le $n^{\text{ième}}$ terme, est ce que devient l'expression

$$(4) \qquad \mathrm{R} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} \frac{d^n z}{dx^{n-p} dy^p} x^{n-p} y^p$$

lorsqu'on remplace dans les dérivées, qui y figurent, x par θx et y par θy, θ étant un nombre inconnu compris entre 0 et 1.

Il en résulte que, pour trouver le développement représenté par z, il suffit de calculer les valeurs des successives dérivées partielles de z par rapport à x et à y, et supposer ensuite $x=0$, $y=0$. Mais, dans le but de simplifier le calcul, on exprimera d'abord ces dérivées en fonction des dérivées partielles par rapport aux variables a, b, parce qu'alors les hypothèses $x=0$, $y=0$ équivalent à poser dans les formules $u=a$, $v=b$, ce qu'on peut faire avant d'effectuer les différentiations mêmes.

Supposons qu'on ait

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = x\varphi_1(u, v) + x^2\varphi_2(u, v) + \ldots + x^n\varphi_n(u, v) \\ \eta = y\psi_1(u, v) + y^2\psi_2(u, v) + \ldots + y^m\psi_m(u, v), \end{cases}$$

et par cela

$$u = a + \xi, \quad v = b + \eta,$$

et représentons par ξ', η' les dérivées des fonctions ξ, η par rapport à x et à y. Il est aisé de voir qu'on a

$$\frac{du}{dx}=\xi'+\frac{d\xi}{du}\frac{du}{dx}+\frac{d\xi}{dv}\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{du}{da}=1+\frac{d\xi}{du}\frac{du}{da}+\frac{d\xi}{dv}\frac{dv}{da},$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d\eta}{du}\frac{du}{dx}+\frac{d\eta}{dv}\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{dv}{da}=\frac{d\eta}{du}\frac{du}{da}+\frac{d\eta}{dv}\frac{dv}{da},$$

d'où l'on tire

$$\frac{du}{dx}=\xi'\frac{du}{da},\quad \frac{dv}{dx}=\xi'\frac{dv}{da},$$

et puisqu'on a

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{dz}{da}=\frac{dz}{du}\frac{du}{da}+\frac{dz}{dv}\frac{dv}{da},$$

il en résulte

$$\frac{dz}{dx}=\xi'\frac{dz}{da}. \tag{6}$$

De la même manière on trouve

$$\frac{dz}{dy}=\eta'\frac{dz}{db}. \tag{7}$$

Si maintenant dans les formules (6) et (7) on fait $x=0$, $y=0$, on obtient les coefficients des premières puissances de x et y dans le développement cherché. Pour avoir les coefficients des puissances supérieures, il suffit de calculer les dérivées successives de (6) et (7); on trouve

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\xi'\frac{dz}{da}\right]=\frac{d}{da}\left[\xi'\frac{dz}{dx}\right]+\xi''\frac{dz}{da}=\frac{d}{da}\left[\xi'^2\frac{dz}{da}\right]+\xi''\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d^3z}{d^3x}=\frac{d}{dx}\,\frac{d}{da}\left[\xi'^2\frac{dz}{da}\right]+\frac{d}{dx}\left[\xi''\frac{dz}{da}\right]$$

$$=\frac{d^2}{da^2}\left[\xi'^3\frac{dz}{da}\right]+3\frac{d}{da}\left[\xi'\xi''\frac{dz}{da}\right]+\xi'''\frac{dz}{da},$$

. . . .

On voit donc que la valeur de la dérivée d'ordre $p^{\text{ième}}$ de z sera donnée par la formule

$$(8)\qquad \frac{1}{p!}\,\frac{d^pz}{dx^p}=\sum_{i=1}^{i=p}\left[\frac{1}{i!}\,\frac{d^{i-1}}{da^{i-1}}\left(U_{pi}\frac{dz}{da}\right)\right]$$

où l'on a posé

$$(9)\qquad U_{pi}=\Sigma\,\frac{\xi^{(r_1)}\xi^{(r_2)}\ldots\xi^{(r_i)}}{r_1!\,r_2!\ldots r_i!},\quad (*)$$

la somme Σ se rapportant à toutes les solutions entières et posi-

(*) Cet algorithme isobarique a été le sujet de plusieurs travaux de savants professeurs, parmi lesquels nous signalons les intéressantes Notes publiées par M. Cesáro dans les *Nouvelles Annales* et dans le *Journal de Battaglini*.

sitives de l'équation

$$r_1+r_2+r_3+\ldots+r_i=p,$$

de sorte que $U_{pi}=0$ pour $i>p$.

De la même manière on trouverait

$$(10)\qquad \frac{1}{q!}\,\frac{d^q z}{dy^q}=\sum_{i=1}^{i=q}\left[\frac{1}{i!}\,\frac{d^{i-1}}{db^{i-1}}\left(V_{qi}\frac{dz}{db}\right)\right]$$

où l'on a posé

$$(11)\qquad V_{qi}=\Sigma\,\frac{\eta^{(s_1)}\eta^{(s_2)}\ldots\eta^{(s_i)}}{s_1!\,s_2!\ldots s_i!}$$

avec la condition

$$s_1+s_2+\ldots+s_i=q.$$

Les formules (8) et (10) sont démontrées dans les cas particuliers de $p=q=1$, 2, 3; mais elles seront généralement établies, si, en les supposant vraies pour une valeur quelconque p, on démontrera qu'elles subsistent aussi pour la valeur $p+1$.

Or, si l'on prend les dérivées par rapport à x des deux membres de (8) on a

$$\frac{1}{p!}\,\frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}}=\sum_{i=1}^{i=p}\frac{1}{i!}\,\frac{d^{i-1}}{da^{i-1}}\left[\frac{d}{dx}\left(U_{pi}\frac{dz}{da}\right)\right],$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{1}{p!}\,\frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}}=\sum_{i=1}^{i=p}\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{da^i}\left(\xi' U_{pi}\frac{dz}{da}\right)+\frac{d^{i-1}}{da^{i-1}}\left(U'_{pi}\frac{dz}{da}\right)\right],$$

ou, en isolant le dernier terme de la première partie, correspondant à $i=p$,

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{p!}\dfrac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}}=\dfrac{1}{p!}\dfrac{d^p}{da^p}\left(\xi' \mathrm{U}_{pp}\dfrac{dz}{da}\right) \\ \qquad\qquad +\displaystyle\sum_{i=1}^{i=p}\dfrac{1}{i!}\dfrac{d^{i-1}}{da^{i-1}}\left[(i\xi' \mathrm{U}_{pi}+\mathrm{U}'_{pi})\dfrac{dz}{da}\right]. \end{cases}$$

En dérivant (9) par rapport à x, on obtient

$$\mathrm{U}'_{pi}=\sum\sum_{\nu=1}^{\nu=i}(r_\nu+1)\frac{\xi^{(r_1)}\xi^{(r_2)}\ldots\xi^{(r_{\nu-1})}\xi^{(r_\nu+1)}\xi^{(r_{\nu+1})}\ldots\xi^{(r_i)}}{r_1!\,r_2!\ldots r_{\nu-1}!\,(r_\nu+1)!\,r_{\nu+1}!\ldots r_i!}$$

pour toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$r_1+r_2+\ldots+r_i=p.$$

En écrivant cette dernière équation sous la forme

$$r_1+r_2+\ldots+r_{\nu+1}+(r_\nu+1)+r_{\nu+1}+\ldots+r_i=p+1,$$

$$(\nu=1,\,2,\,3,\ldots,\,i)$$

et en la comparant avec la suivante

$$r_1+r_2+\ldots+r_{\nu-1}+r_\nu+r_{\nu+1}+\ldots+r_i=p+1,\ (\nu=1,2,3,\ldots,i)$$

on voit très-aisément que dans la seconde sont comprises toutes les solutions entières correspondantes aux valeurs $r_\nu=1$ ($\nu=1$, $2, 3,\ldots,i$), qui manquent nécessairement dans la première, car le terme $(r_\nu + 1)$ correspondant à r_ν ne peut être jamais égal à l'unité. Il s'en suit que l'expression précédente peut se mettre sous la forme

$$U'_{pi} = \Sigma \sum_{\nu=1}^{\nu=i} \left(r_\nu \frac{\xi^{(r_1)} \xi^{(r_2)} \ldots \xi^{(r_i)}}{r_1!\, r_2! \ldots r_i!} - \frac{\xi^{(r_1)} \xi^{(r_2)} \ldots \xi^{(r_{\nu-1})} \xi' \xi^{(r_{\nu+1})} \ldots \xi^{(r_i)}}{r_1!\, r_2 \ldots r_{\nu-1}!\, 1!\, r_{\nu+1}! \ldots r_i!} \right)$$

pour toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_i = p + 1.$$

Or la même relation, écrite sous forme symbolique, devient

$$U'_{pi} = (p+1)\, U_{p+1,i} - i\, \xi'\, U_{p,i-1},$$

qui, substituée dans la formule (12), nous donne l'égalité

$$\frac{1}{p!} \frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}} = \frac{1}{p!} \frac{d^p}{da^p} \left(\xi' U_{pp} \frac{dz}{da} \right)$$
$$+ (p+1) \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{i!} \frac{d^{i-1}}{da^{i-1}} \left(U_{p+1,i} \frac{dz}{da} \right),$$

qui, en posant $U_{pp} = \xi'^p$ et par là $\xi' U_{pp} = \xi'^{p+1} = U_{p+1,p+1}$, et

en divisant pour $p+1$, devient

$$\frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}} = \sum_{i=1}^{i=p+1} \frac{1}{i!} \frac{d^{i-1}}{da^{i-1}} \left(U_{p+1,i} \frac{dz}{da} \right).$$

De la même manière on démontrerait l'égalité

$$\frac{1}{(q+1)!} \frac{d^{q+1}z}{dy^{q+1}} = \sum_{i=1}^{i=q+1} \frac{1}{i!} \frac{d^{i-1}}{db^{i-1}} \left(V_{q+1,i} \frac{dz}{db} \right).$$

Cela posé, passons à la détermination des dérivées successives de z par rapport à x et à y. On a évidemment

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{d}{dy}\left(\xi'\frac{dz}{da}\right)=\frac{d}{da}\left(\xi'\frac{dz}{dy}\right)=\frac{d}{da}\left(\xi'\eta'\frac{dz}{db}\right)$$

$$=\xi'\frac{d\eta'}{da}\,\frac{dz}{db}+\eta'\frac{d\xi'}{da}\,\frac{dz}{db}+\xi'\eta'\frac{d^2z}{dadb}.$$

Considérons maintenant la dérivée $\dfrac{d^{p+q}}{dx^p dy^q}$. On a

$$(13)\quad \frac{1}{p!}\,\frac{d^q}{dy^q}\cdot\frac{d^pz}{dx^p}=\sum_{i=1}^{i=p}\frac{1}{i!}\,\frac{d^{i-1}}{da^{i-1}}\,\frac{d^q}{dy^q}\left(\mathrm{U}_{pi}\frac{dz}{da}\right).$$

Mais il est

$$\frac{d^q}{dy^q}\left(\mathrm{U}_{pi}\frac{dz}{da}\right)=\frac{d^{q-1}}{dy^{q-1}}\,\frac{d}{da}\left(\mathrm{U}_{pi}\frac{dz}{dy}\right)=\frac{d}{da}\,\frac{d^{q-1}}{dy^{q-1}}\left(\mathrm{U}_{pi}\eta'\frac{dz}{db}\right)$$

$$=\frac{d}{da}\,\frac{d^{q-2}}{dy^{q-2}}\left[\frac{d}{db}\left(\mathrm{U}_{pi}\eta'^2\frac{dz}{db}\right)+\mathrm{U}_{pi}\eta''\frac{dz}{db}\right]$$

$$=\frac{d}{da}\,\frac{d^{q-3}}{dy^{q-3}}\left[\frac{d^2}{db^2}\left(\mathrm{U}_{pi}\eta'^3\frac{dz}{db}\right)+3\,\frac{d}{db}\left(\mathrm{U}_{pi}\eta'\eta''\frac{dz}{db}\right)+\mathrm{U}_{pi}\eta'''\frac{dz}{db}\right]$$

. . . .

et, sans poursuivre plus loin ces transformations, il suffit d'observer la quantité entre parenthèses pour se convaincre que nous sommes dans le cas des réductions, qui précèdent la formule (8); en conséquence on peut écrire le résultat final, c'est à dire

$$\frac{1}{q!}\,\frac{d^q}{dy^q}\left(\mathrm{U}_{pi}\frac{dz}{da}\right)=\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{1}{\nu!}\,\frac{d^{\nu-1}}{db^{\nu-1}}\,\frac{d}{da}\left(\mathrm{U}_{pi}\mathrm{V}_{p\nu}\frac{dz}{db}\right),$$

qui, substitué dans l'expression (13), nous donne

$$(14)\quad \frac{1}{p!\,q!}\frac{d^{p+q}z}{dx^p dy^q}=\sum_{i=1}^{i=p}\frac{1}{i!}\frac{d^{i-1}}{da^{i-1}}\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{db^{\nu-1}}\frac{d}{da}\left(U_{pi}V_{q\nu}\frac{dz}{db}\right).$$

Or, si dans les formules (1) et (5) on fait $x=0$, $y=0$, on obtient

$$u=a,\ v=b,$$

$$\frac{dz}{da}=\frac{dF(a,b)}{da},\ \frac{dz}{db}=\frac{dF(a,b)}{db},$$

$$\xi^{(r)}=r!\,\varphi_r(a,b),\quad \eta^{(s)}=s!\,\psi_s(a,b),$$

et par conséquent, en écrivant F, φ, ψ au lieu de $F(a,b)$, $\varphi(a,b)$, $\psi(a,b)$,

$$\frac{1}{p!}\frac{d^p z_0}{dx^p}=\sum_{i=1}^{i=p}\frac{1}{i!}\frac{d^{i-1}}{da^{i-1}}\left(\Sigma\varphi_{r_1}\varphi_{r_2}\dots\varphi_{r_i}\cdot\frac{dF}{da}\right)$$

$$\frac{1}{q!}\frac{d^q z_0}{dy^q}=\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{db^{\nu-1}}\left(\Sigma\psi_{s_1}\psi_{s_2}\dots\psi_{s_\nu}\cdot\frac{dF}{db}\right)$$

$$\frac{1}{p!\,q!}\frac{d^{p+q}z_0}{dx^p dy^q}=\sum_{i=1}^{i=p}\frac{1}{i!}\frac{d^{i-1}}{da^{i-1}}\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{1}{i!}\frac{d^{\nu+1}}{db^{\nu-1}}$$

$$\cdot\frac{d}{da}\left(\Sigma\varphi_{\nu_1}\varphi_{\nu_2}\dots\varphi_{\nu_i}\cdot\Sigma\psi_{s_1}\psi_{s_2}\dots\psi_{s_\nu}\cdot\frac{dF}{db}\right).$$

où les sommes Σ se rapportent à toutes les solutions entières et positives des équations

$$r_1+r_2+\dots+r_i=p$$

$$z_1+s_2+\dots+s_\nu=q.$$

En remplaçant les valeurs trouvées dans la (2) on a le développement cherché, avec le terme complémentaire R. Remarquons que, si les conditions relatives à la continuité de la fonction $z = F(u, v)$ et des dérivées successives sont remplies et nous avons en outre, pour $n = \infty$, $\lim R = 0$, la fonction z est développée en série convergente (*).

Le développement, que nous venons de démontrer, comprend comme cas très-particulier l'extension donnée par Laplace et

---

(*) La discussion du reste R, mis sous la forme, que nous venons d'indiquer, présente des difficultés souvent insurmontables, parce qu'elle exige qu'on connaisse l'expression d'une dérivée quelconque de la fonction. Par cela nous allons donner, par le moyen de la théorie des résidus, une forme différente au reste, dans le but de pouvoir préciser les conditions de convergence du développement en série, dont il est question dans cet écrit.

Posons d'abord

$$A(u, v) = u - a - \xi = 0$$

$$B(u, v) = v - b - \eta = 0,$$

en supposant que a soit l'affixe d'un point situé à l'intérieur d'un contour C et b l'affixe d'un point situé à l'intérieur d'un contour C'.

Nons emploierons l'identité

$$\frac{1}{A(u, v)\,B(u, v)} = \left[\frac{1}{u-a} + \frac{\xi}{(u-a)^2} + \frac{\xi^2}{(u-a)^3} + \cdots + \frac{\xi^{n+1}}{(u-a)^{n+1}(u-a-\xi)}\right]\left[\frac{1}{v-b} + \frac{\eta}{(v-b)^2} + \frac{\eta^2}{(v-b)^3} + \cdots + \frac{\eta^{n+1}}{(v-b)^{n+1}(v-b-\eta)}\right]$$

d'où l'on tire

$$(\alpha)\quad \frac{1}{A(u, v)B(u, v)} = \frac{1}{(u-a)(v-b)} + \frac{\xi}{(u-a)^2(v-b)} + \frac{\eta}{(u-a)(v-b)^2} + \ldots + \Omega,$$

ayant posé

$$\Omega = \frac{\left(\frac{\xi}{u-a}\right)^{n+1} + \left(\frac{\eta}{v-b}\right)^{n+1}}{(u-a-\xi)(v-b-\eta)}.$$

Maintenant soit $\phi(u, v)$ une fonction qui reste monodrome et continue

Jacobi à la formule de Lagrange pour les cas de deux variables indépendantes.

En effet il suffit poser dans nos formules

$$u = a + x\varphi(x, v)$$

$$v = b + y\psi(u, v)$$

---

tant que u, v ne sortent pas respectivemente des contours fermés C et C′, et posons, en particulier, ce qui est évidemment permis,

$$F(u, v) = \frac{\theta(u, v)}{\frac{dA}{dv}\frac{dB}{du} - \frac{dA}{du}\frac{dB}{dv}}.$$

Si l'on introduie dans le second membre de (d) au lieu de ξ et η leurs valeurs données par les formules (5), on obtient un polynôme entier en x et y avec le terme complémentaire Ω. En multipliant ensuite les deux membres de l'expression par $\frac{1}{(2i\pi)^2}\theta(u, v)\,du\,dv$, et intégrant le long des contours C et C′, en vertu de la théorie des résidus, on aura

$$F(u, v) = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_c\int_{c'} \frac{\theta(u, v)\,du\,dv}{A(u, v)B(u, v)} = J_{00} + J_{01}\,x + J_{10}\,y + J_{11}\,xy + \ldots + R,$$

où l'on a mis $J_{h,k}$ pour représenter le coefficient de $x^h y^k$ et on a posé

$$R = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_c\int_{c'} \frac{\theta(u, v)\,du\,dv}{(u-a-\xi)(v-b-\eta)}\left[\left(\frac{\xi}{u-a}\right)^{n+1} + \left(\frac{\eta}{v-b}\right)^{n+1}\right],$$

qui est précisément la forme du reste qu'on voulait discuter. Or il est aisé de voir que le reste R tend vers zéro, quand n augmente an delà de toute limite, pourvu qu'on ait

$$\text{mod.}\left|\frac{\xi}{u-a}\right| < 1, \quad \text{mod.}\left|\frac{\eta}{v-b}\right| < 1,$$

et dans ce cas la fonction $F(u, v)$, dont il était question, sera développée en série convergente.

pour avoir évidemment

$$U_{pi} = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ en général} \\ \varphi^p(a, b) \text{ pour } i = p, \end{array} \right.$$

$$V_{q\nu} = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ en général} \\ \psi_q(a, b) \text{ pour } \nu = q; \end{array} \right.$$

et par cela

$$\frac{1}{p!}\frac{d^p z_0}{dx^p} = \frac{1}{p!}\frac{d^{p-1}}{da^{p-1}}\left(\varphi^p \frac{dF}{da}\right)$$

$$\frac{1}{q!}\frac{d^q z_0}{dy^q} = \frac{1}{q!}\frac{d^{q-1}}{db^{q-1}}\left(\psi^q \frac{dF}{db}\right)$$

$$\frac{1}{p!\,q!}\frac{d^{p+q} z_0}{dx^p dy^q} = \frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\frac{d^{p+q-1}}{da^{p-1} db^{q-1}}\left[\frac{1}{p}\varphi^p \psi^{q-1}\frac{d\psi}{da}\frac{dF}{db}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{q}\varphi^{p-1}\psi^q \frac{d\varphi}{da}\frac{dF}{db} + \frac{1}{pq}\varphi^p \psi^q \frac{d^2 F}{da\,db}\right],$$

conformément au résultat de Jacobi (*).

2. Appliquons les résultats, qui précèdent, à la solution du problème suivant.

Étant données les relations

$$f(z, t) = x_1 f_1(z, t) + x_2 f_2(z, t) + \ldots + x_n f_n(z, t),$$

$$F(z, t) = y_1 F_1(z, t) + y_2 F_2(z, t) + \ldots + y_m F_m(z, t),$$

développer une fonction quelconque $\theta(z, t)$ des variables indépen-

(*) M. Bertrand, *Calcul différentiel*, pag. 408.

dentes z, t suivant les puissances et les produits des variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ Posons pour cela

$$(15) \qquad f(z, t) = u - a, \quad F(z, t) = v - b,$$

dont il résulte que z et t sont des fonction de u, v; par conséquent en exprimant z et t par le moyen de ces nouvelles variables, et en substituant les valeurs dans les (15), on a

$$u = a + x_1 \varphi_1(u, v) + x_2 \varphi_2(u, v) + \ldots + x_n \varphi_n(u, v)$$

$$v = b + y_1 \psi_1(u, v) + y_2 \psi_2(u, v) + \ldots + y_m \psi_m(u, v).$$

Cela posé, nous sommes conduits à chercher le développement d'une fonction $Z(u, v) = \theta(z, t)$ suivant les puissances et les produits des variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$, problème qu'on peut faire dépendre immédiatement du problème, dont nous venons de nous occuper, en supposant

$$u_1 = a + x_1 \alpha \varphi_1(u, v) + x_2 \alpha^2 \varphi_2(u, v) + \ldots$$

$$v_1 = b + y_1 \beta \psi_1(u, v) + y_2 \beta^2 \psi_2(u, v) + \ldots$$

où α et β sont des quantités tout à l'heure indéterminées. Or il est aisé de voir que, si l'on fait $\alpha = \beta = 1$, les fonctions u_1, v_1 se réduisent à u, v; par conséquent si l'on développe d'abord, comme nous venons de montrer, la fonction $Z(u_1, v_1)$ suivant les produits des variables α et β, et ensuite on fait dans ce développement $\alpha = \beta = 1$, la série qu'en résulte sera celle demandée, pourvu qu'on y arrange convenablement les termes en calculant les coefficients.

A cause de l'expression (3), en gardant les notations employées plus haut, on trouve

$$Z(u, v) = Z(a, b) + \Sigma \frac{1}{p!\,q!} \frac{d^{p+q} Z_0}{d\alpha^p \, d\beta^p},$$

où la somme Σ se rapporte à toutes les solutions entières positives, on nulles, de l'équation

$$p+q=n, \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Mais nous avons démontré que, en général,

$$\frac{1}{p!}\frac{d^pZ_0}{d\alpha^p}=\sum_{i=p}^{i=p}\frac{1}{i!}\frac{d^{i+1}}{da^{i-1}}\Sigma\left(\frac{dZ}{da}\varphi_{r_1}\varphi_{r_2}\ldots\varphi_{r_i}\right)x_{r_1}x_{r_2}\ldots x_{r_i}.$$

avec la condition

$$r_1+r_2+\ldots+r_i=p,$$

donc on peut écrire

$$\frac{1}{p!}\frac{d^pZ_0}{d\alpha^p}=\left(\frac{dZ}{da}\varphi^p\right)x_p+\frac{1}{2!}\frac{d}{da}\Sigma\left(\frac{dZ}{da}\varphi_{r_1}\varphi_{r_2}\right)x_{r_1}x_{r_2}+\ldots$$

ou

$$r_1+r_2+r_3+\ldots+r_i=p \quad (i=1, 2, 3, \ldots p)$$

De même on a

$$\frac{1}{q!}\frac{d^qZ_0}{d\beta^q}=\left(\frac{dZ}{db}\psi_q\right)y_q+\frac{1}{2!}\frac{d}{db}\Sigma\left(\frac{dZ}{db}\psi_{s_1}\psi_{s_2}\right)y_{s_1}y_{s_2}+\ldots,$$

ou $\quad s_1+s_2+s_3+\ldots+s_\nu=q \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots q),$

et encore

$$\frac{1}{p!\,q!}\frac{d^{p+q}Z_0}{d\alpha^p d\beta^q}=\frac{d}{da}\left(\frac{dZ}{db}\varphi_p\psi_q\right)x_py_q$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{da\,db}\cdot\Sigma\left(\frac{dZ}{db}\varphi_p\psi_{s_1}\psi_{s_2}\right)x_py_{s_1}y_{s_2}\right.$$

$$\left.+\frac{d^2}{da\,db}\cdot\Sigma\left(\frac{dZ}{da}\psi_q\varphi_{r_1}\varphi_{r_2}\right)y_qx_{r_1}x_{r_2}\right]+\ldots$$

De tout cela on déduit

$$Z(u,v)=Z(a,b)+\sum_{p=1}^{p=\infty}\sum_{q=1}^{q=\infty}\left\{\left[\left(\frac{dZ}{da}\varphi_p\right)x_p+\left(\frac{dZ}{db}\psi_q\right)y_q\right]\right.$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{d}{da}\Sigma\left(\frac{dZ}{da}\varphi_{r_1}\varphi_{r_2}\right)x_{r_1}x_{r_2}+2\frac{d}{da}\left(\frac{dZ}{db}\varphi_p\psi_q\right)x_py_p\right.$$

$$\left.\left.+\frac{d}{db}\Sigma\left(\frac{dZ}{db}\psi_{s_1}\psi_{s_2}\right)y_{s_1}y_{s_2}\right]+\ldots\right\}$$

où les sommes Σ se rapportent respectivement à toutes les solutions entières et positives des équations

$$r_1+r_2+r_3+\ldots+r_i=p \quad (i=1,\,2,\,3,\ldots p)$$

$$s_1+s_2+s_3+\ldots+s_\nu=q \quad (\nu=1,\,2,\,3,\ldots q).$$

Tel est le développement cherché, qui généralise le problème universel de Wronski.

QUELQUES PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES D'UN SYSTÈME DE DEUX MOUVEMENTS SIMULTANÉS

PAR

C. A. Laisant

(Docteur à sciences)

1. Les propriétés qui suivent ont fait l'object, pour quelques unes d'entre elles, de communications à la Société Mathématique de France ou à la Société Philomatique de Paris; mais pour ainsi dire sans aucun développement. Une partie des résultats a seulement été indiquée sous forme sommaire. Il peut donc être intéressant de reprendre ici le sujet, en coordonnant entre elles les propriétés dont il s'agit, lesquelles sont d'ailleurs, ainsi qu'on le verra, extrêmement faciles á démontrer.

2. Si deux points mobiles M, M′ se déplacent simultanément dans l'espace d'une manière quelconque, et si O est un point fixe donné, considérons la perpendiculaire élevée par O sur le plan OMM′ et portons sur cette droite une longueur OX proportionnelle à l'aire du triangle OMM′, de telle sorte que pour un observateur placé suivant OX, les pieds vers O, le sens de rotation de OM vers OM′ soit direct. En d'autres termes, OX représentera à chaque instant l'aire du triangle OMM′ en grandeur et orientation, suivant la même méthode qui fournit la représentation des moments et des couples.

Lorsque les points M, M′ se déplaceront, il est clair que le point X se déplacera lui-même; et son mouvement pourra être appelé le *composé-aréolaire* des deux mouvements considérés, par rapport au point O.

C'est l'étude des mouvements composés aréolaires que nous voulons indiquer ici, en nous bornant à quelques cas simples.

3. D'après les notations du calcul des quaternions, nous pourrons écrire

$$\text{(1)} \qquad OX = \mathfrak{V}\,(OM\,.\,OM'),$$

et cette formule fondamentale nous donnera toujours pour OX une fonction vectorielle du temps t, les valeurs OM, OM′ étant eux-mêmes fonctions du temps.

4. Comme premier exemple, considérons deux mouvements rectilignes et uniformes dans l'espace; en les rapportant à l'origine commune O, appelant A et A′ les positions initiales, $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B'}}$ les vitesses, nous avons

$$OM = \underline{\underline{M}} = OA + \underline{\underline{B}}t = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}t,$$

$$OM' = \underline{\underline{M'}} = OA' + \underline{\underline{B'}}t = \underline{\underline{A'}} + \underline{\underline{B'}}t.$$

Donc

$$OX = \underline{\underline{X}} = \mathfrak{V}\,[(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}t)(\underline{\underline{A'}} + \underline{\underline{B'}}t)] = \mathfrak{V}\,\underline{\underline{AA'}} + t\,\mathfrak{V}\,(\underline{\underline{AB'}} + \underline{\underline{BA'}}) + t^2\,\mathfrak{V}\,\underline{\underline{BB'}}.$$

Posons $\mathfrak{V}\,\underline{\underline{AA'}} = \underline{\underline{P}}$, $\mathfrak{V}\,(\underline{\underline{AB'}} + \underline{\underline{BA'}}) = \underline{\underline{Q}}$, $\mathfrak{V}\,\underline{\underline{BB'}} = \underline{\underline{R}}$, et il vient

$$\text{(2)} \qquad \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{P}} + t\underline{\underline{Q}} + t^2\underline{\underline{R}}.$$

Le mouvement composé aréolaire de deux mouvements rectilignes et uniformes s'accomplit donc comme celui d'un corps pesant, suivant une trajectoire parabolique.

L'accélération $\underline{\underline{R}} = \mathfrak{V}\,\underline{\underline{BB'}}$ est la composée aréolaire des deux vitesses, c'est-à-dire perpendiculaire aux deux trajectoires rectilignes, et indépendante du point fixe O. Lorsque ce point se trouve sur la droite qui joint les positions initiales des deux mobiles, il s'ensuit évidemment que $\underline{\underline{P}} = O$, et la trajectoire du mouvement parabolique passe alors par O.

5. Soient maintenant deux mouvements, l'un parabolique suivant la loi de la chute des corps, et l'autre rectiligne et uniforme, dont la trajectoire soit parallèle à l'axe de la parabole, c'est-à-dire à l'accélération du premier mouvement.

Alors

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}t + \underline{\underline{C}}t^2,$$

$$\underline{\underline{M}}' = \underline{\underline{A}}' + k\underline{\underline{C}}t,$$

et $\underline{\underline{X}} = \mathfrak{D}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}}'$ sera comme ci dessus de la forme

$$\underline{\underline{P}} + t\underline{\underline{Q}} + t^2\underline{\underline{R}},$$

le terme en t^3 s'annulant évidemment.

6. Nous allons maintenant considérer des mouvements elliptiques s'accomplissant suivant une loi d'attraction vers un centre fixe, qui serait proportionnelle à la distance. Un mouvement de cette nature peut être représenté par la relation

$$OM = OA \cos t + OB \sin t;$$

on vérifie en effet que la dérivée seconde de OM, qui représente l'accélération du mouvement, a précisément pour valeur $-$OM. A un mobile de cette nature nous pouvons, pour abréger le langage, donner le nom de *planète fictive,* en assimilant ces mouvements à ceux des astres composant le système solaire. Le temps de la révolution entière est évidemment 2π, avec la relation que nous avons écrite. Ce temps serait $\dfrac{2\pi}{k}$ en écrivant

$$OM = OA \cos kt + OB \sin kt.$$

7. Imaginons deux planètes fictives d'un même système solaire, et accomplissant leurs révolutions en des temps égaux.

Leurs mouvements seront déterminés par les relations

$$OM = OA \cos t + OB \sin t,$$

$$OM' = OA' \cos t + OB' \sin t,$$

en choisissant convenablement l'unité de temps.

Le composé-aréolaire des deux mouvements, par rapport au centre commun O, sera donné par la relation

$$\underline{\underline{X}} = \mathfrak{V}\,\underline{\underline{MM'}} = \mathfrak{V}\,\underline{\underline{AA'}} . \cos^2 t + \mathfrak{V}\,(\underline{\underline{AB'}} + \underline{\underline{BA'}}) \cos t \sin t + \mathfrak{V}\,\underline{\underline{BB'}} . \sin^2 t.$$

$$\text{Mais } \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2},\ \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2},\ \cos t \sin t = \frac{\sin 2t}{2},$$

de telle sorte que $\underline{\underline{X}}$ prend la forme:

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{P}} \cos 2t + \underline{\underline{Q}} \sin 2t. \tag{3}$$

Le mouvement composé-aréolaire est donc celui d'une planète fictive, qui accomplirait sa révolution dans un temps moitié moindre, mais autour d'un centre solaire différent du premier. La position de ce centre solaire nouveau est donné par

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{2} \mathfrak{V}\,(\underline{\underline{AA'}} + \underline{\underline{BB'}}).$$

8. Considérant les deux mêmes planètes fictives, cherchons le composé-aréolaire de leurs mouvements, par rapport à un point C quelconque. Nous avons, en posant $CO = \underline{\underline{C}}$

$$CM = \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{A}} \cos t + \underline{\underline{B}} \sin t,$$

$$CM' = \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{A'}} \cos t + \underline{\underline{B'}} \sin t,$$

et $CX = \mathfrak{V}(CM \,.\, CM')$ est de la forme

$$(4) \qquad \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{P}} \cos 2t + \underline{\underline{Q}} \sin 2t + \underline{\underline{R}} \cos t + \underline{\underline{S}} \sin t + \underline{\underline{L}},$$

comme il est bien aisé de le constater.

Si nous prenions deux planètes de systèmes différents, on aurait pour $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{C}}'$ deux vecteurs différents, mais la forme (4) subsisterait encore, L comprenant alors $\mathfrak{V}\,\underline{\underline{CC'}}$.

Cette forme (4) est susceptible d'une interprétation intéressante. On peut en effet décomposer le vecteur $\underline{\underline{X}}$ en trois autres:

$$\underline{\underline{L}}, \quad \underline{\underline{R}} \cos t + \underline{\underline{S}} \sin t, \quad \underline{\underline{P}} \cos 2t + \underline{\underline{Q}} \sin 2t.$$

Le premier est fixe et représente un nouveau centre d'attraction; le second figure le mouvement, autour de ce nouveau centre, d'une planète fictive accomplissant sa révolution dans le même temps que chacune des deux planètes données. Enfin, le troisième vecteur doit s'ajouter aux deux premiers, et représente un mouvement analogue, mais le temps de révolution étant moitié moindre.

Donc, en résumé, le mouvement composé-aréolaire est celui d'un satellite qui tournerait autour de son astre en faisant deux révolutions pendant que l'astre en fait une seule; le temps de révolution de l'astre est le même que celui des planètes fictives données, lesquelles appartiennent à deux systèmes solaires différents.

9. Comme dernier exemple, nous pouvons considérer des corps dont les mouvements s'effectueraient chacun sous l'influence d'un centre de *répulsion*, proportionnellement à la distance. Le mouvement d'un de ces corps est alors représenté par une relation de la forme

$$OM = OA \operatorname{ch} t + OB \operatorname{sh} t.$$

Si nous en considérons un second, dont la loi du mouvement soit

$$OM' = OA' \operatorname{ch} t + OB' \operatorname{sh} t,$$

le centre de répulsion étant commun, le mouvement composé-aréolaire, par rapport au centre commun, sera donné par

$$OX = \mathfrak{D}\,(OM\,.\,OM') = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{P}}\,\mathrm{ch}\,2t + \underline{\underline{Q}}\,\mathrm{sh}\,2t,$$

c'est-à-dire que le point X se déplacera suivant une hyperbole, ainsi que les deux corps donnés, et conformément à une loi analogue de répulsion; mais le centre de répulsion sera en général différent du premier.

SUR UNE SÉRIE

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. Lerch

(Professeur à l'École Polytechnique de Prague)

Je prends la liberté de vous présenter une démonstration de la formule élémentaire

$$\text{(1)} \qquad \frac{2\pi i \, e^{2vw\pi i}}{e^{2w\pi i}-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kv\pi i}}{w-k}$$

sur laquelle M^r Kronecker est revenu à maintes reprises (*) et qui peut s'obtenir d'un grand nombre de manières. Parmi celles que je connais la plus élémentaire découle de l'intégrale bien connue d'Euler:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

En la transformant par la substitution $x = e^{i\varphi}z$, φ étant réel et compris entre $-\pi$ et π, on obtient en effet la formule

$$\int_0^\infty \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}\,dz}{1+ze^{i\varphi}} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

(*) Sitzungsberichte der kön. preuss. Academie der Wissenschaften zu Berlin 1883 (XX) et 1885 (XXXVIII); puis Journal fur die reine and angwandte Mathematik, t. 105.

qu'on peut d'ailleurs vérifier directement en faisant voir que la dérivée, par rapport à φ, du premier membre est nulle, de sorte que celui-ci ne dépend pas de φ (*).

Décomposons maintenant l'intégrale en deux autres, prises respectivement entre les limites $(0 \ldots 1)$ et $(1 \ldots \infty)$ et faisons dans la seconde $z = \frac{1}{x}$, ce qui donne:

$$\frac{\pi e^{-ai\varphi}}{\sin a\pi} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+xe^{i\varphi}} + \int_0^1 \frac{e^{-i\varphi}x^{-a}\,dx}{1+xe^{-i\varphi}},$$

et il suffit maintenant d'employer les développements élémentaires

$$\frac{1}{1+xe^{\pm i\varphi}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^\nu e^{\pm \nu i\varphi}$$

pour en conclure:

$$\frac{\pi e^{-ai\varphi}}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu \frac{e^{\nu i\varphi}}{a+\nu},$$

formule qui prend la forme écrite plus haut en substituant $a = w$, $\pi - \varphi = 2v\pi$.

Ce procédé fait voir que le développement (1) est un cas particulier de la formule plus générale qu'on trouve en partant de l'équation

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}},$$

dont il résulte à l'aide de la même substitution $x = ze^{i\varphi}$:

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}\,dz}{(1+ze^{i\varphi})^{a+b}},$$

(*) Ce procédé m'a donné deux démonstrations élémentaires de la formule de départ et de l'intégrale d'Euler qui représente la quantité $\pi \cot a\pi$.

Ici le dénominateur est défini uniformément par la condition de représenter la valeur principale de la puissance. En décomposant et transformant cette intégrale comme plus haut nous aurons:

$$B(a, b) = e^{ai\varphi} \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{(1+xe^{i\varphi})^{a+b}} + e^{-bi\varphi} \int_0^1 \frac{x^{b-1}dx}{(1+xe^{-i\varphi})^{a+b}}$$

d'où, en employant la série binôme,

$$(2) \quad B(a, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a-b}{\nu} \left(\frac{e^{(a+\nu)i\varphi}}{a+\nu} + \frac{e^{-(b+\nu)i\varphi}}{b+\nu} \right).$$

Les quantités a, b étant supposées réelles, on aura alors:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a-b}{\nu} \left[\frac{\sin(a+\nu)\varphi}{a+\nu} - \frac{\sin(b+\nu)\varphi}{b+\nu} \right] = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a-b}{\nu} \left[\frac{\cos(a+\nu)\varphi}{a+\nu} + \frac{\cos(b+\nu)\varphi}{b+\nu} \right] = B(a, b),$$

et on obtient des formules plus convergentes en intégrant par rapport à φ.

Rappelons encore la formule

$$\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -i\varphi + \frac{e^{ai\varphi}}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{-a}{\nu} \left(\frac{e^{(a+\nu)i\varphi}}{a+\nu} + \frac{e^{-\nu i\varphi}}{\nu} \right)$$

qu'on tire aisément de (2) en comparant les termes constants dans le développement des deux membres de la formule (2) suivant les puissances de b.

BIBLIOGRAPHIA

E. Picard. — *Traité d'Analyse*, t. I, *Paris*, *1891*.

Este volume é o primeiro de uma obra em que o illustre geometra francez se propõe tractar principalmente, segundo o que diz no prefacio, da theoria das equações differenciaes. É tão consideravel o numero de memorias que têem sido publicadas sobre esta parte da Analyse mathematica, e tão espalhadas estão ellas por tantas collecções scientificas, que uma obra em que seja estudada profunda e desenvolvidamente esta doutrina é da maior utilidade, principalmente sendo elaborada por quem, como o sr. Picard, está tão altamente collocado na sciencia.

O volume presente é destinado a servir de introducção ao assumpto principal, e é dividido em tres partes em que são respectivamente estudados os principios do Calculo integral, algumas das suas applicações analyticas e algumas das suas applicações geometricas.

A primeira parte é dividida em cinco capitulos em que o auctor se occupa da theoria geral dos integraes definidos, dos integraes indefinidos, dos integraes curvilineos, dos integraes duplos e dos integraes multiplos. Na exposição d'estes assumptos não se limita o sr. Picard, a maior parte das vezes, ao que se contém ordinariamente nos manuaes de Calculo integral. Tracta, pelo contrario, muitos d'elles de um modo mais completo e desenvolvido do que é habitual, como acontece, por exemplo, com a theoria dos integraes curvilineos e com a theoria dos integraes de superficie.

Na segunda parte são estudadas a equação de Laplace

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0,$$

e o principio de Derichlet; a theoria do potencial; a integração por series; as series trignometricas; e as series multiplas. Como se vê, o sr. Picard escolheu principalmente, para fazer applicações dos principios expostos na 1.ª parte, as theorias analyticas que mais importancia têem na Physica mathematica. Em todos estes assumptos o auctor tomou em consideração os trabalhos mais modernos que sobre elles têem sido publicados.

A terceira parte contém applicações geometricas do Calculo infinitesimal. Ahi se encontram a theoria das envolventes, a theoria do contacto, a theoria da curvatura, o estudo das curvas traçadas sobre uma superficie dada, e a theoria da applicação das superficies umas sobre as outras.

Todos os assumptos de que se occupa o sr. Picard no seu bello livro são expostas com uma clareza, rigor e elegancia que torna a sua leitura das mais interessantes e proveitosas.

Ch. Hermite. — Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 4.ème édition, Paris, 1891.

No volume IV (pag. 186) d'este jornal deu-se uma noticia sobre a primeira edição do bello Curso de Analyse professado pelo sr. Hermite na Faculdade das Sciencias de Paris. Nas edições successivas, que têem sido depois publicadas, tem o eminente geometra francez aperfeiçoado e augmentado cada vez mais o seu notavel trabalho, tornando-o cada vez mais interessante e pondo-o a par dos progressos successivos que vai tendo a Analyse. N'esta quarta edição foi principalmente alterada a theoria das funcções Eurelianas e foi accrescentada a theoria da transformação das funcções ellipticas.

G. Lazzeri e A. Bassani. — Elementi di Geometria, Livorno, 1891.

O livro de que vamos dar noticia merece figurar entre os bons livros de texto para o ensino da Geometria elementar pela clareza e rigor com que está escripto, pela pureza geometrica das demonstrações e mesmo em certos pontos pela originalidade das mesmas demonstrações.

Varios são os pontos que chamam a attenção nos *Elementi di Geometria*. Em primeiro logar nota-se o cuidado com que os auctores tractam dos principios fundamentaes da sciencia geometrica, que com o nome de postulados, axiomas, etc., entram na sciencia como verdades primitivas. Sem pretender resolver a questão difficil de determinar quaes os postulados absolutamente necessarios para fundar a sciencia da extensão, os auctores melhoram, todavia, consideravelmente esta parte da Geometria fazendo uma enumeração dos postulados mais completa do que habitualmente se faz, e mais conforme com as exigencias didacticas.

Nota-se em segundo logar que os auctores tractam simultaneamente da Geometria plana e da Geometria no espaço. Este modo de tractar a Geometria, já empregado por varios auctores, entre os quaes citaremos Brestschneider na Allemanha, Steen na Dinamarca, De-Paolis na Italia, Galdeano na Hespanha, não foi ainda adoptado em livro algum portuguez. Já n'este jornal tivemos occasião de nos referir á vantagem que parece ter esta fusão dos dois ramos da sciencia da extensão, por approximar as proposições da mesma natureza, que apparecem na Geometria plana e na Geometria no espaço. O livro dos srs. Lazzeri e Bassani mostra que ainda existem outras razões para se acceitar a nova disposição das doutrinas, porque, aproveitando-se da Geometria no espaço, chegam a demonstrar por processos perfeitamente geometricos algumas proposições de Geometria plana, que pareciam não poder-se tornar independente da theoria das proporções.

Dissemos no principio d'esta noticia que os auctores empregam nas suas demonstrações o methodo puramente geometrico. Ha todavia uma excepção. Na ultima parte da obra, onde é exposta o theoria das grandezas proporcionaes e da medida, os auctores soccorrem-se da Arithmetica, considerando, como elles mesmos dizem, prejudicial e erroneo querer esconder debaixo de vestes geometricas uma serie de verdades que dependem essencialmente do conceito de numero.

Para dar noticia dos assumptos que são considerados no novo Manual de Geometria e da sua disposição, vamos dar um extracto do indice.

circulo e sobre a esphera. — IV. *Rectas parallelas. Rectas parallelas a planos. Planos parallelos. Rectas e planos perpendiculares.*

LIVRO II. — I. *Polygonos.* — II. *Anguloides.* — III. *Polyedros.* — IV. *Distancias.*

LIVRO III. — I. *Relações entre rectas, planos e espheras.* — II. *Relações de polygonos com um circulo e de polyedros com uma esphera.* — III. *Systemas de circulos e espheras.* — IV. *Geometria espherica.* — V. *Superficies e solidos de revolução.*

LIVRO IV. — I. *Theoria geral das equivalencias.* — II. *Equivalencia de polygonos e superficies polyedricas.* — III. *Equivalencia de polygonos esphericos e pyramides esphericas.* — IV. *Equivalencia de prismas.* — V. *Grandezas e limites.* — VI. *Equivalencia de polyedros.* — VII. *Equivalencia dos circulos e corpos redondos.*

LIVRO V. — I. *Theoria das proporções.* — II. *Figuras semelhantes.* — III. *Medida.* — IV. *Applicações de Algebra á Geometria.*

Terminamos aqui esta noticia na qual tivemos em vista chamar a attenção dos nossos professores para um bom livro de Geometria, escripto n'uma lingua tão facilmente comprehendida pelos portuguezes.

Johann G. Hagen. — *Synopsis der Hoeheren Mathematik,* I, *Berlin, 1891.*

Esta obra é uma vasta Encyclopedia, em que o auctor apresenta, dispostos segundo a ordem logica, os differentes assumptos que fazem parte das sciencias mathematicas. Contará provavelmente, segundo o que diz o auctor, quatro tomos.

O tomo primeiro, que acaba de ser publicado, é consagrado á Analyse mathematica. É um grosso volume de 400 paginas em formato grande, dividido em doze partes, em que são consideradas as doutrinas seguintes:

I. Theoria dos numeros. — II. Theoria das grandezas complexas. — III. Theoria das combinações. — IV. Theoria das series. — V. Theoria dos productos infinitos e das faculdades. — VI. Theoria das fracções continuas. — VII. Theoria das differenças e das sommas. — VIII. Theoria das funcções. — IX. Theoria dos determinantes. — X. Theoria dos invariantes. — XI. Theoria das substituições. — XII. Theoria das equações.

Por esta indicação dos titulos das partes em que está dividido o livro, vê-se o quadro geral dos assumptos considerados. Cada uma d'estas partes é dividida em capitulos sobre os assumptos especiaes, dos quaes não podemos dar indicações sem ultrapassar os limites de que podemos dispôr para esta noticia.

A respeito de cada assumpto considerado, o auctor apresenta as definições, regras, theoremas e formulas mais importantes. Em geral, as demonstrações dos principios indicados não são apresentadas, fazendo-se apenas algumas indicações sobre a marcha d'estas demonstrações quando isso é necessario para o encadeamento dos assumptos.

A respeito de cada theoria, formula ou proposição indicada, apresenta o auctor indicações historicas e bibliographicas, que augmentam o valor da obra. Na organisação dos assumptos e n'estas indicações teve o sr. Hagen em vista não só os trabalhos antigos, como os mais recentes, de modo a não deixar esquecer aquelles nem ficar atraz do estado actual da sciencia. Para isso serviu-se das obras classicas de maior valor, que são a cada passo citadas, e das memorias mais importantes que têem sido publicadas nas principaes collecções periodicas que existem.

Terminaremos esta rapida noticia recommendando esta obra. Pela riqueza dos assumptos e das informações que contém será muitas vezes consultada pelos que se occupam das sciencias mathematicas, já com o fim de tomar conhecimento do estado de qualquer assumpto, já com o fim de recordar ou verificar uma proposição ou formula esquecida. Estamos certos de que a utilidade da obra ha de compensar o auctor do enorme trabalho que ella representa, e que os mathematicos lhe serão gratos por ter assim posto ao serviço dos que estudam a sua vastissima erudição.

Accrescentaremos ainda que a edição é feita na casa de Felix L. Damas, de Berlin, e que dá a maior honra a esta casa.

E. Guedes Vaz. — Taboas para traçado de curvas e resolução de problemas de topographia elementar. Porto, 1891.

É bem conhecida a importancia que tem nos problemas de mathematicas applicadas dependentes de calculos numericos a construcção de taboas que auxiliem na resolução d'estes problemas e evitem repetições fastidiosas dos mesmos calculos. Esta consideração levou o sr. Guedes Vaz, distincto conductor de obras publicas, a publicar o presente livro, que contém em pequeno volume algumas taboas que a sua experiencia de trabalhos de obras publicas lhe indicou como vantajosas para a resolução de problemas relativos ás curvas de concordancia e para a resolução dos problemas elementares de topographia.

G. Pirondini. — Sulla determinazione delle linee di cui il rapporto della curvatura alla torsione è una funzione nota dell'arco (*Annali di Matematica pura ed applicata, 1891*).

O auctor generalisa o theorema de Bertrand segundo o qual a constancia da razão do raio de curvatura para o raio de torsão caracteriza as helices cylindricas. Tracta, com effeito, da determinação das curvas em que esta razão é uma funcção dada do arco.

—— *Sulle linee di stringimento e di allargamento di un sistema di curve qualunque* (*Memorie della R. Accademia delle Science di Bologna, 1891*).

—— *Alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili* (*Annali di Matematica pura ed applicata, 1891*).

—— *Alcune questione sulle evolute successive di una linea piana* (*Rend. della R. Accademie delle Scienze di Napoli, 1891*).

R. Marcolongo. — Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo indefinito limitato da un piano indefinito per speciali condizioni ai limiti (*Rend. della R. Accademia delle Scienze di Napoli, 1891*).

A. del Re. — *Escursione matematiche diverse* (*Giornale di Matematiche*, t. XXVIII).

G. Vivanti. — *Sull'infinitezimo attuale* (*Rivista di Matematica, 1891*).

—— *Sulle trasformazioni di contatto che trasformano qualunque sviluppabile in una sviluppabile* (*Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, t. V).

—— *Un problema sulle trasformazioni di contatto* (*Item*).

I. L. Jensen. — *Gammafunktionens theori i elementaer Fremstilling* (*Nyt Tidsskrift for Mathematik, 1891*).

G. Eneström. — *Ett par formler för beräkning at mortalitaten inon pensionskassor eller andra slutna sällskap* (*K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, 1891*).

—— *Om mattet för dodligheten inom en bertämd aldersklass* (*Item*).

Gino Loria. — *Cenni intorno a la vita e le opera di F. Casorati* (*Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1891*).

G. T.

SUR LE CONTACT ET L'OSCULATION DES LIGNES ENTRE ELLES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

(à Parme)

Courbes de l'espace

1. Théorème fondamental — Soient A, A_1, A_2, ... A_{n-2}, A_{n-1} n points consécutifs d'une ligne à double courbure L et a, a_1, a_2, ... a_{n-2}, a_{n-1} n points consécutifs d'une autre ligne l.

Si les lignes L, l sont placées de manière que les points a, a_1, a_2, coïncident avec les autres A, A_1, A_2, leurs rayons de courbure en A et a sont égaux.

Si, réciproquement, les rayons de courbure des lignes L, l aux points A, a sont égaux, lorsqu'on place les lignes de façon que le point a, la tangente et le plan osculateur en ce point de l coïncident respectivement avec le point A, la tangente et le plan osculateur en ce point de L, les cercles osculateurs des deux lignes L, l au point de contact coïncident aussi et les points a, a_1, a_2 de l tombent sur les points A, A_1, A_2 de L.

Les lignes L, l soient disposées de manière que les points a, a_1, a_2, a_3, tombent sur les autres A, A_1, A_2, A_3; évidemment les rayons de courbure aux points (A, a), (A_1, a_1) et les rayons de torsion aux points (A, a) sont, dans ce cas, égaux.

Si, réciproquement, ces dernières conditions sont remplies, lorsqu'on dispose les courbes de façon que les points a, a_1, a_2 coïncident avec les autres A, A_1, A_2, il a lieu aussi la coïncidence des plans osculateurs aux points (A_1, a_1).

En effet ces plans contiennent une même droite, la tangente aux points (A_1, a_1); de plus l'égalité des rayons de torsion et des arcs élémentaires en A, a entraîne celle des angles de torsion en ces mêmes points; ces particularités et la coïncidence des plans osculateurs en A et a conduisent à la coïncidence des plans osculateurs en A_1 et a_1. Mais les rayons de courbure des lignes L et l en A_1 et a_1 sont égaux et les points a_1, a_2 coïncident avec les autres A_1, A_2; donc le point a_3 tombe sur l'autre A_3.

Dans les courbes données il a lieu donc la coïncidence de 4 points consécutifs.

Cette méthode, appliquée successivement, conduit au théorème:

«La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes á double courbure L et l puissent être placées de manière que les n points consécutifs a, a_1, a_2,... a_{n-1} de l coïncident avec les n points consécutifs A, A_1, A_2,... A_{n-1} de L, est que les rayons de courbure en a, a_1, a_2,... a_{n-3} et le rayon de torsion en a, a_1, a_2,... a_{n-4} de la ligne l soient égaux respectivement aux rayons de courbure en A, A_1, A_2,... A_{n-3} et aux rayons de torsion en A, A_1, A_2,... A_{n-4} de la ligne L.»

Allons déterminer les conditions analytiques de la coïncidence de n points successifs des deux lignes.

Soient:

$$\rho = \rho(s), \; r = r(s)$$

les expressions des rayons de courbure et de torsion ρ, r de L en fonction de l'arc s et

$$\varphi = \varphi(\sigma), \; \psi = \psi(\sigma)$$

les expressions analogues pour la ligne l; on sait que les équations que l'on vient d'écrire suffisent à la détermination complète de la forme des lignes.

La coïncidence de n points consécutifs de l avec les n points correspondants de L, en force du théorème précédent, est exprimée par les conditions suivantes:

$$\varphi_a = \rho_A; \; \varphi_{a_1} = \rho_{A_1}; \; \varphi_{a_2} = \rho_{A_2}; \; \ldots \; \varphi_{a_{n-3}} = \rho_{A_{n-3}}$$

$$\psi_a = r_A; \; \psi_{a_1} = r_{A_1}; \; \psi_{a_2} = r_{a_2}; \; \ldots \; \psi_{a_{n-4}} = r_{a_{n-4}}.$$

Si l'on remarque que:

$$\varphi_a=\varphi(\sigma);\ \varphi_{a_1}=\varphi(\sigma)+d.\varphi(\sigma);\ \varphi_{a_2}=\varphi(\sigma)+2d.\varphi(\sigma)+d^2\varphi(\sigma);\ldots$$

$$\varphi_{a_k}=\varphi(\sigma)+kd.\varphi(\sigma)+\frac{k(k-1)}{\underline{|2}}d^2\varphi(\sigma)+\frac{k(k-1)(k-2)}{\underline{|3}}d^3\varphi(\sigma)+\ldots$$

$$+\frac{k(k-1)}{\underline{|2}}d^2\varphi(\sigma)+kd^{k-1}\varphi(\sigma)+d^k\varphi(\sigma),$$

quel que soit le nombre entier k, et que l'on peut écrire des formules analogues pour les autres quantités:

$$\rho_A,\ \rho_{A_1},\ \rho_{A_2},\ldots\ \rho_{A_k};\ \psi_a,\ \psi_{a_1},\ \psi_{a_2},\ldots\ \psi_{a_k};\ r_a,\ r_{a_1},\ r_{a_2},\ldots\ r_{a_k},$$

les conditions qui précèdent peuvent s'écrire:

$$\varphi(\sigma)=\rho(s);\ d\varphi(\sigma)=d\rho(s);\ d^2\varphi(\sigma)=d^2\rho(s);\ldots\ d^{n-3}\varphi(\sigma)=d^{n-3}\rho(s)$$

$$\psi(\sigma)=r(s);\ d\psi(\sigma)=dr(s);\ d^2\psi(\sigma)=d^2r(s);\ldots\ d^{n-4}\psi(\sigma)=d^{n-4}r(s).$$

Ces formules contiennent deux variables s et σ; on peut prendre s pour variable indépendante et alors on doit regarder σ comme une fonction de s. Si sur les lignes L, l (qui doivent être placées de manière à avoir plusieurs couples de points consécutifs communs) on regarde comme correspondants les points qui vont se confondre, les arcs infinitésimals qui joignent ces points successifs dans les deux courbes sont égaux; sans nuire à la généralité on peut donc prendre l'égalité suivante pour exprimer la loi de dépendance entre les deux variables s, σ:

$$\sigma=s+k,$$

k étant une constante.

Cette égalité réduit les conditions précédentes aux suivantes:

$$\varphi(\sigma)=\rho(s);\ \varphi'(\sigma)\,d\sigma=\rho'(s)\,ds;\ \varphi''(\sigma)\,d\sigma^2=\rho''(s)\,ds^2;\ldots$$

$$\varphi^{(n-3)}(\sigma)\,d\sigma^{n-3}=\rho^{(n-3)}(s)\,ds^{n-3}$$

$$\psi(\sigma)=r(s);\ \psi'(\sigma)\,d\sigma=r'(s)\,ds;\ \psi''(\sigma)\,d\sigma^2=r''(s)\,ds^2;\ldots$$

$$\psi^{(n-4)}(\sigma)\,d\sigma^{n-4}=r^{(n-4)}(s)\,ds^{n-4}.$$

Ces équations doivent être vérifiées au point de contact des deux lignes, dans lequel on a l'égalité des arcs élémentaires ds, $d\sigma$; on peut donc énoncer ce théorème général;

«La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes à double courbure L, l (définies par les équations $\rho=\rho(s)$, $r=r(s)$; $\varphi=\varphi(\sigma)$, $\psi=\psi(\sigma)$ exprimant leurs rayons de courbure et de torsion en fonction de l'arc) puissent être placées de manière que les n points consécutifs a, a_1, $a_2, \ldots$ a_{n-1} de l coïncident avec les n points consécutifs A, A_1, $A_2, \ldots$ A_{n-1} de L, est que dans les points de contact a, A les fonctions $\varphi(\sigma)$, $\rho(s)$ vérifient les $(n-2)$ équations:

$$(1)\quad \varphi(\sigma)=\rho(s);\ \varphi'(\sigma)=\rho'(s);\ \varphi''(\sigma)=\rho''(s);\ldots\ \varphi^{(n-3)}(\sigma)=\rho^{(n-3)}(s)$$

et les fonctions $\psi(\sigma)$, $r(s)$ les $(n-3)$ équations:

$$(2)\quad \psi(\sigma)=r(s);\ \psi'(\sigma)=r'(s);\ \psi''(\sigma)=r''(s);\ldots\psi^{(n-4)}(\sigma)=r^{(n-4)}(s).»$$

Remarque. — Dans ce théorème on doit supposer $n \geq 3$.

2. Si l'on désigne par i et i_1 les inclinaisons des deux lignes L, l sur leurs droites rectifiantes, aux points A, a, on a:

$$\operatorname{tang} i=\frac{r}{\rho},\ \operatorname{tang} i_1=\frac{\psi}{\varphi};$$

si donc aux points considérés on a $\rho = \varphi$, $r = \psi$, il résulte aussi $i = i_1$.

Les courbes données peuvent être disposées de façon à avoir 3 points consécutifs communs; cela à cause de la condition $\rho = \varphi$. Et dans cette position les tangentes, les normales principales et les binormales des deux lignes, au point de contact, coïncident. La condition $i = i_1$ entraîne alors la coïncidence des droites rectifiantes.

Donc «lorsque deux lignes L, l ont aux points A, a les mêmes rayons de courbure et de torsion, elles peuvent être disposées de manière à avoir la même droite rectifiante; cela arrive lorsque les deux lignes ont 3 points consécutifs communs.»

De ce théorème on dérive «si deux courbes sont placées de façon à avoir 4 points consécutifs communs, elles ont, au point de contact, la même droite rectifiante.»

On pourrait aisément généraliser ces derniers théorèmes.

Les coordonnés (x, y, z), (ξ, η, ζ) d'un point quelconque de L et d'un point quelconque de l, fonctions des variable s et σ respectivement, soient, au point de contact, finies, continues et pourvues des dérivées jusqu' à celle de l'ordre n; dans le voisinage des points A, a on peut écrire:

$$x = (x)_A + \left(\frac{dx}{ds}\right)_A ds + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)_A ds^2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\lfloor n}\left(\frac{d^n x}{ds^n}\right)_A ds^n + R$$

$$\xi = (\xi)_a + \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)_a d\sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 \xi}{d\sigma^2}\right)_a d\sigma^2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\lfloor n}\left(\frac{d^n \xi}{d\sigma^n}\right)_a d\sigma^n + R_1$$

. . . .

. . . .

$R, R_1, \ldots$ étant des infiniment petits d'ordre plus grand que n.

Désignons par:

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma);\ (\cos\lambda,\ \cos\mu,\ \cos\nu);\ (\cos l,\ \cos m,\ \cos n)$$

les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale de L et par $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1,\ldots$ $\cos n_1$ les quantités analogues relatives à l.

On a:

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\ \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\cos\lambda}{\rho};\ \frac{d\xi}{d\sigma}=\cos\alpha_1,\ \frac{d^2\xi}{d\sigma^2}=\frac{\cos\lambda_1}{\varphi};$$

et si l'on dérive successivement ces égalités et l'on y applique les formules bien connues de *M. Frenet*, on obtient pour une valeur quelconque de k supérieur à 2:

$$\frac{d^kx}{ds^k}=F\left(\alpha,\lambda,l;\rho,\frac{d\rho}{ds},\frac{d^2\rho}{ds^2},\ldots\frac{d^{k-2}\rho}{ds^{k-2}};r,\frac{dr}{ds},\frac{d^2r}{ds^2},\ldots\frac{d^{k-3}r}{ds^{k-3}}\right)$$

$$\frac{d^k\xi}{d\sigma^k}=F_1\left(\alpha_1,\lambda_1,l_1;\varphi,\frac{d\varphi}{d\sigma},\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2},\ldots\frac{d^{k-2}\varphi}{d\sigma^{k-2}};\psi,\frac{d\psi}{d\sigma},\frac{d^2\psi}{d\sigma^2}\ldots\frac{d^{k-3}\psi}{d\sigma^{k-3}}\right),$$

F et F_1 étant les symboles de deux certaines fonctions déterminées.

On aurait des formules analogues pour les autres coordonnées.

Ces formules, à cause des égalités (1), (2), démontrent que, lorsque les lignes données L, l ont n points consécutifs communs, il résulte:

$$(x)_A=(\xi)_a;\ \left(\frac{dx}{ds}\right)_A=\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)_a;\ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_A=\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)_a;\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d^{n-1}x}{ds^{n-1}}\right)_A=\left(\frac{d^{n-1}\xi}{d\sigma^{n-1}}\right)_a$$

et conséquemment (en remarquant que $ds = d\sigma$):

$$x-\xi=\frac{1}{\lfloor n}\left(\frac{d^nx}{ds^n}-\frac{d^n\xi}{d\sigma^n}\right)ds^n+\varepsilon;$$

$$y-\eta=\frac{1}{\lfloor n}\left(\frac{d^ny}{ds^n}-\frac{d^n\eta}{d\sigma^n}\right)ds^n+\varepsilon_1;$$

$$z-\zeta=\frac{1}{\lfloor n}\left(\frac{d^nz}{ds^n}-\frac{d^n\zeta}{d\sigma^n}\right)ds^n+\varepsilon_2,$$

ε, ε_1, ε_2 étant des infiniment petits d'ordre supérieur à n.

Si donc on désigne par δ la distance infinitésimale entre les points correspondants des lignes L, l dans le voisinage du point de contact, on a:

$$\delta=\sqrt{\Sigma\,\overline{(x-\xi)}^{\,2}}=\sqrt{\Sigma\left(\frac{d^nx}{ds^n}-\frac{d^n\xi}{d\sigma^n}\right)^2}\cdot\frac{ds^n}{\lfloor n}+\tau,$$

τ étant un infiniment petit d'ordre supérieur à n.

Cette analyse démontre que «lorsque deux lignes à double courbure ont n points consécutifs communs, la distance entre les points correspondants des lignes, dans le voisinage du point de contact, est un infiniment petit d'ordre non inférieur à n.»

3. Si la ligne l d'une certaine famille bien définie est déterminée de façon que le contact avec une ligne donnée L dans un point fixé A soit le plus grand possible, on dit que la ligne l est *osculatrice* à la courbe L en A.

Nous allons résoudre complètement le problème de la détermination de la courbe l osculatrice à une ligne donnée L, lorsque l appartient à quelque famille remarquable de lignes.

Une géodésique l d'un cône quelconque σ peut avoir 5 points consécutifs communs avec la ligne L et alors deux génératrices rectilignes consécutives du cône C coïncident avec deux droites rectifiantes consécutives de L; le sommet du cône C est donc sur l'arête de rebroussement de la développable rectifiante de L.

La géodésique l du cône C et la ligne L ne peuvent pas avoir en commun un nombre de points plus grand que 5; en effet cela conduirait à la coïncidence de 3, 4,... droites rectifiantes de L avec les génératrices rectilignes du cône C, ce que ne peut pas arriver, puisque si la ligne L n'est pas une géodésique d'un cône, trois de ses droites rectifiantes ne passent pas, en général, par un même point.

Donc «lorsqu'une géodésique d'un cône quelconque est tangente à une ligne à double courbure L, dont la développable rectifiante n'est pas un cône, l'ordre du contact ne peut pas, en général, arriver à 5; le sommet du cône est sur la droite rectifiante de L, si l'ordre du contact n'est pas inférieur à 3 (ou, plus généralement, si la ligne L et la géodésique du cône ont, au point de contact, les mêmes rayons le courbure et de torsion); le sommet du cône est sur l'arête de rebroussement de la développable rectifiante de L, si l'ordre du contact n'est pas inférieur à 4 (ou, plus généralement, si la ligne L et la géodésique du cône ont, au point de contact et au point successif, les mêmes rayons de courbure et de torsion).»

Si ρ est le rayon de courbure d'une géodésique l d'un cône et R_g le rayon de courbure géodésique de la ligne Δ que l'on obtient en coupant le cône par une sphère quelconque dont le centre est au sommet, dans le point où l coupe Δ on a (*):

$$R_g = \rho \sin^2 i,$$

i étant l'inclinaison de l sur les génératrices du cône: mais si l'ordre du contact des lignes l, L n'est pas inférieur à 3 (ou, plus généralement, si ces lignes ont, au point de contact, les mêmes rayons de courbure et de torsion) le sommet du cône est placé sur la droite rectifiante de la courbe L; on a donc dans cette hypothèse:

$$\operatorname{tang} i = \frac{r}{\rho}$$

(*) Sulle linee a doppia curvatura, § 6—*Journal de M. Battaglini*, 1887.

et l'égalité précédente devient:

$$R_g = \frac{\rho}{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Donc «si une ligne à double courbure L et une géodésique d'un cône ont en A un contact dont l'ordre n'est pas inférieur à 3 (ou, plus généralement, si ces lignes ont, au point de contact, les mêmes rayons de courbure et de torsion) la trajectoire ortogonale des génératrices de ce cône passant par A a pour rayon de courbure géodésique, sur la esphère où elle est tracée, la portion de la normale principale de L comprise entre cette ligne et la ligne de striction de la surface gauche des normales principales.»

Géodésique d'un cône de rotation osculatrice.—Le rayon de courbure φ et celui de torsion ψ de la géodésique l d'un cône quelconque sont liés à l'arc σ de la ligne par la relation (*):

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\sigma}{a},$$

a étant la plus courte distance entre le sommet du cône et la ligne l. D'autre part le cône de rotation est une développable dont les génératrices rectilignes sont inclinées d'un angle constant sur une droite (l'axe du cône); la géodésique l d'une telle développable doit donc vérifier la relation:

$$\frac{d}{d\sigma} \operatorname{arc.tang}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) = \operatorname{tang} \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\psi^2}},$$

ε étant le demi-angle au sommet du cône. On a donc les équations:

$$\varphi(\sigma) = \frac{(a^2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \operatorname{tang} \varepsilon; \quad \psi(\sigma) = \frac{(a^2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a\sigma} \operatorname{tang} \varepsilon$$

(*) Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe, § 1 — *Journal de M. Battaglini*, 1885.

qui définissent une géodésique d'un cône de rotation. Et puisque on a ici les trois paramètres σ, a, ε, on peut satisfaire aux deux premières équations (1) et à la première (2). On obtient donc le système d'équations:

$$(3)\quad \frac{(a^2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\operatorname{tang}\varepsilon=\rho;\ \frac{3\sigma(a^2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}\operatorname{tang}\varepsilon=\rho';\ \frac{(a^2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a\sigma}\operatorname{tang}\varepsilon=r,$$

d'où l'on dérive aisément:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma=3\dfrac{\rho}{\rho'}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2};\ a=3\dfrac{\rho}{\rho'}\cdot\dfrac{\dfrac{\rho}{r}}{1+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2}; \\[2ex] \cot\varepsilon=\dfrac{3}{\rho'}\cdot\dfrac{\rho}{r}\sqrt{1+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2}. \end{array}\right.$$

Ces équations suffisent à déterminer la forme et la position de la ligne demandée.

La ligne L et la géodésique conique l, ayant 4 points consécutifs communs, ont un contact dont l'ordre n'est pas inférieur à 3; le sommêt O du cône est donc sur la droit rectifiante de L. Si l'on désigne par H la distance OA entre le sommet et le point de contact, on a:

$$\mathrm{H}=\frac{\sigma}{\cos i},$$

i étant l'inclinaison de l sur les génératrices rectilignes du cône.

Or, au point A on a:

$$(\cot i)_{\mathrm{A}}=\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\mathrm{A}}=\left(\frac{\rho}{r}\right)_{\mathrm{A}}$$

d'où il suit:

$$\cos i = \frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}$$

et conséquemment:

$$(5) \qquad H = 3\frac{\rho}{\rho'}\frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

Cette équation fixe le sommet O du cône.

Les lignes L, l ont, au point de contact, la même normale principale AB et cette droite AB coupe l'axe du cône; si B est le point de rencontre, le triangle rectangle OAB nous donne:

$$AB = H \,.\, \mathrm{tang}\,\varepsilon = \frac{\rho}{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2},$$

ce qui démontre que le point B est sur la ligne de striction de la surface gauche des normales principales de L.

On a donc «Á un point quelconque A d'une ligne à double courbure quelconque L construisons le cône de rotation dans lequel:

- le demi-angle ε au sommet est défini par la troisième équation (4);
- le sommet O est sur la droite rectifiante de L à une distance H de A donnée par (5);
- l'axe est la droite joignant O au point de la ligne de striction de la surface gauche des normales principales de L qui correspond à A.

La géodésique de ce cône qui est tangente en A à la ligne donnée L est la géodésique osculatrice.»

Á l'aide de ce théorème la construction géométrique de la géodésique d'un cône de rotation osculatrice à une ligne quelconque n'offre aucune difficulté.

Si aux équations (3) on ajoute les autres:

$$\frac{3 \operatorname{tang} \varepsilon}{a^2} \cdot \frac{a^2 + 2\sigma^2}{\sqrt{a^2+\sigma^2}} = \rho''; \quad \frac{(\sigma^2+a^2)^{\frac{1}{2}}(2\sigma^2 - a^2)}{a\sigma^2} \operatorname{tang} \varepsilon = r',$$

correspondant aux conditions:

$$\varphi'' = \rho'', \quad \psi' = r',$$

et l'on rappelle les (4) donnant σ, a, ε, en fonction de ρ, et r, on obtient:

$$(6) \qquad \rho'^2 \frac{1 + 2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}{3\rho\left(\frac{\rho}{r}\right)^2} = \rho''; \quad \frac{\rho'\left\{2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 1\right\}}{3\left(\frac{\rho}{r}\right)^3} = r'.$$

Les courbes définies par le système des équations différentielles (6) ont la propriété que l'ordre du contact avec la géodésique d'un cône de rotation osculatrice n'est pas inférieur à 4.

Les courbes représentées par la deuxième des équations différentielles (6) ont avec la géodésique osculatrice susdite le contact le plus intime possible, bien que son ordre soit inférieur à 4; en effet les conditions:

$$\varphi = \rho, \ \varphi' = \rho', \ \psi = r, \ \psi' = r'$$

nous apprendent qu'il a lieu la coincidence de deux droites rectifiantes consécutives de L avec les génératrices du cône.

Pour que les géodésiques coniques l osculatrices d'une même ligne L soient semblables entre elles, il faut et il suffit qu'il résulte ε constante. Les lignes L ayant la propriété susdite sont donc définies par la troisième des équations (4), dans laquelle ε est à considérer comme une constante.

Les lignes L pour lesquelles les géodésiques d'un cône de rotation osculatrices sont égales entre elles, sont définies par le système des deux dernières équations (4), pourvu que l'on y suppose a et ε constantes.

Des équations susdites on dérive:

$$\frac{\rho}{r}=\frac{\sqrt{\rho^{\frac{2}{3}}-(a \operatorname{tang} \varepsilon)^{\frac{2}{3}}}}{(a \operatorname{tang} \varepsilon)^{\frac{1}{3}}};$$

en force de cette équation, la deuxième des (4) nous donne:

$$\frac{a\rho'}{\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt{\rho^{\frac{2}{3}}-(a \operatorname{tang} \varepsilon)^{\frac{1}{3}}}}=3\,(a \operatorname{tang} \varepsilon)^{\frac{1}{3}},$$

d'où par intégration:

$$\rho^{\frac{2}{3}}=\left\{\frac{(a \operatorname{tang} \varepsilon)^{\frac{1}{3}}}{a}\,s+k\right\}^2+(a \operatorname{tang} \varepsilon)^{\frac{2}{3}},$$

k étant une constante arbitraire, que l'on peut faire $=0$, sans nuire à la généralité.

On a donc:

$$\rho=\frac{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\operatorname{tang} \varepsilon,$$

et conséquemment:

$$r=\frac{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}{as}\operatorname{tang} \varepsilon.$$

Ces équations démontrent le théorème «si les géodésiques d'un cône de rotation osculatrices à une ligne L sont égales entre elles, dans tous les points da L, cette ligne L est elle-même une de ces géodésiques.»

4. Une hélice cylindrique quelconque peut avoir 4 points consécutifs communs avec une ligne L, mais elle ne saurait en avoir de plus; en effet si le nombre des points communs à la ligne L et à l'hélice l était supérieur à 4, les lignes susdites auraint au moins deux droites rectifiantes communes, ce qui ne peut pas arriver, les droites rectifiantes de l étant parallèles entre elles.

Donc «lorsqu' une hélice quelconque est tangente à une ligne à double courbure L, dont la développable rectifiante n'est pas un cylindre, l'ordre de leur contact ne peut pas, en général, arriver à 4; si cet ordre n'est pas inférieur à 3 (ou, plus généralement, si la ligne L et l'hélice ont, au point de contact, les mêmes rayons de courbure et de torsion) les génératrices rectilignes du cylindre contenant l'hélice sont parallèles à la droite rectifiante de L au point de contact.»

Dans l'hypothése que l'ordre du contact ne soit pas inférieur à 3, l'inclinaison i de l sur les génératrices du cylindre est égale à l'inclinaison de L sur la droite rectifiante; donc:

$$\operatorname{tang} i = \frac{r}{\rho}$$

Si ρ_0 est le rayon de courbure de la section droite du cylindre, au point de contact, on a:

$$\rho_0 = \rho \sin^2 i = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

et conséquemment. «Si une hélice et une courbe ont un contact d'ordre non inférieur à 3 (ou, plus géneralement, ci ces lignes ont au point de contact, les mêmes rayons de courbure et de torsion) le centre de courbure de la section droite du cylindre contenant l'hélice, au point de contact, est placé sur la ligne de striction de la surface gauche des normales principales de la ligne considérée.»

Hélice cylindro-conique osculatrice. — Les coordonées d'un point quelconque d'une hélice peuvent s'exprimer par les équations:

$$x = \mathrm{R} \cdot \cos u,\ y = \mathrm{R} \cdot \sin u,\ z = \cot i \int \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2} \cdot du, \tag{7}$$

R étant le rayon vecteur de la section droite du cylindre, u l'angle polaire et i l'inclinaison de la courbe sur les génératrices rectiligne du cylindre.

Les coordonnées d'un point quelconque d'une loxodromie d'une surface de révolution sont:

$$x = \mathrm{R} \cdot \cos u,\ y = \mathrm{R} \cdot \sin u,\ 2 = \frac{1}{\sin \theta} \int \sqrt{\mathrm{R}^2 \cos^2 \theta - \mathrm{R}'^2 \sin^2 \theta} \cdot du,$$

R ayant la même signification qu'auparavant et θ étant l'inclinaison de la loxodromie sur les lignes méridiennes.

Si l'on égale les deux expressions de z, on a:

$$\mathrm{R} = k\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta}}{\sin \theta} \cdot u},$$

équation d'une spirale logarithmique; en désignant par ω l'inclinaison de cette spirale sur les rayons vecteurs issus du pôle, on a:

$$\cot \omega = \frac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}. \tag{8}$$

Si l'on remarque que le rayon de courbure φ_0 d'une spirale logarithmique s'exprime en fonction de l'arc σ_0 par l'équation:

$$\varphi_0 = \cot \omega \cdot \sigma_0,$$

on obtient par des formules connues:

$$\varphi(\sigma) = \frac{\cot \omega}{\sin i} \sigma,\ \psi(\sigma) = \frac{\cot \omega}{\cos i} \sigma;$$

ces équations sont caractéristiques de l'hélice cylindro-conique.

Les deux premières équations (1) et la première (2) deviennent dans ce cas:

$$\frac{\cot\omega}{\sin i}\sigma=\rho;\quad \frac{\cot\omega}{\sin i}=\rho';\quad \frac{\cot\omega}{\sin i}\sigma=r;$$

et si l'on y ajoute l'équation (8), on obtient aisément:

$$\operatorname{tang} i=\frac{r}{\rho};\ \operatorname{tang}\theta=\frac{1}{\sqrt{\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}};\ \operatorname{tang}\omega=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\rho'};\ \sigma=\frac{\rho}{\rho'}.$$

Les équations (7) et l'expression déterminée pour R nous donnent pour équation de la ligne méridienne de la surface engendrée par la rotation de la ligne (7) autour de l'axe des z:

$$\frac{x_0}{z_0}=\cos\omega\,.\operatorname{tang} i,$$

qui représente une droite. Si donc α est le demi-angle au sommet du cône contenant l'hélice osculatrice, on a: $\operatorname{tang}\alpha=\cos\omega\operatorname{tang} i$, c'est-à-dire:

$$(9)\qquad \operatorname{tang}\alpha=\frac{\rho'}{\frac{\rho}{r}\sqrt{1+\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

En désignant par O le sommet du cône, on peut aisément calculer la longueur OA; en effet si l'on étale le cône sur un plan, l'hélice l devient une spirale logarithmique coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle θ. Par conséquent:

$$\mathrm{OA}=\sigma\,.\cos\theta=\frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\sqrt{\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\sqrt{1+\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

Si OB est l'axe du cône contenant l'hélice osculatrice et AB la perpendiculaire à l'axe menée par A, le triangle rectangle OAB nous donne:

$$(10)\qquad AB = OA \,.\, \sin\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right\}\left\{1+\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right\}}}$$

$$(11)\qquad OB = OA \,.\, \cos\alpha = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

La droite AB forme avec la normale principale commune à la ligne donnée et à l'hélice osculatrice le même angle que le rayon vecteur de la spirale forme avec la normale à cette courbe; si l'on désigne cet angle par ε, on a:

$$(12)\qquad \operatorname{tang}\varepsilon = \cot\omega = \frac{\rho'}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

Si donc on regarde la courbe osculatrice l comme tracée sur le cône, on a:

«Le cône de révolution contenant l'hélice cylindro-conique osculatrice à une ligne quelconque L est défini par les conditions suivantes:

l'axe du cône rencontre la droite AB menée dans le plan perpendiculaire à la droite rectifiante et inclinée sur la normale principale de l'angle ε donné par l'égalité (12);

la distance AB entre le point de rencontre B et le point de contact A est donnée par (10);

l'axe du cône est parallèle à la droite rectifiante et le sommet O a du point B une distance OB donnée par (11);

le demi-angle α au sommet est exprimé por (9).»

Si au contraire on regarde la courbe osculatrice comme tracée sur le cylindre, on a:

«Le cylindre contenant l'hélice cylindro-conique osculatrice à une ligne quelconque L est défini de la manière suivante:

les génératrices rectilignes sont parallèles à la droite rectifiante;

la section droite du cylindre est une spirale logarithmique coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle ω tel que:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\rho'};$$

le pôle de cette spirale est le point B déterminé précédement.»

Au moyen de ces théorèmes on peut construire, à chaque point d'une courbe L, l'hélice cylindro-conique osculatrice.

5. Helice circulaire osculatrice. — L'hélice circulaire est définie par les deux équations:

$$\varphi = a, \ \Psi = b,$$

a et b étant des constantes; on peut donc vérifier la première des équations (1) et des (2), qui dans notre cas deviennent:

$$a = \rho, \ b = r.$$

L'hélice circulaire osculatrice l et la ligne osculée L ont 3 points consécutifs communs et les égalités que l'on vient d'écrire démontrent que la droite rectifiante de l, c'est-à-dire la génératrice rectiligne du cylindre circulaire passant au point de contact, coïncide avec la droite rectifiante de L.

D'autre part la section droite du cylindre a le centre sur la ligne de striction de la surface gauche des normales principales de L.

Donc «l'hélice circulaire osculatrice à une courbe donnée L est tracée sur un cylindre circulaire dont l'axe est la plus courte distance entre deux normales principales consécutives de L; elle coupe les génératrices rectilignes sous l'angle i défini par la relation :

$$\cot i = \frac{\rho}{r}.$$

Ce théorème sert pour la construction de l'hélice dont il s'agit.

Courbes tracées sur une sphère ou sur un plan

6. Théorème fondamental. — Soient A, A_1, A_2,... et a, a_1, a_2,... des points consécutifs de deux lignes sphériques L, l définies par l'expression de leurs rayons de courbure géodésique :

$$\rho = \rho(s), \quad \varphi = \varphi(\sigma)$$

en fonction de l'arc.

Si les points a, a_1, a_2 coïncident avec A, A_1, A_2, les deux lignes ont en A et a le même rayon de courbure géodésique.

Si réciproquement $\rho = \varphi$ aux points A, a, on peut déplacer la ligne l sur la sphère jusqu'à la coïncidence des points a, a_1 avec A, A_1; et puisque l'égalité entre les rayons de courbure géodésique entraîne l'égalité des rayons sphériques, les trois points a, a_1, a_2 coïncident avec A, A_1, A_2.

Lorsque a, a_1, a_2, a_3 coïncident avec A, A_1, A_2, A_3, les rayons de courbure géodésique des lignes L, l en (A, a) et (A_1, a_1) sont égaux.

Si, réciproquemment, ces conditions sont remplies, lorsque les lignes L, l sont disposées de manière que a, a_1, a_2 coïncident avec A, A_1, A_2, on a aussi la coïncidence des points a_3, A_3, puisque l'égalité des rayons de courbure géodésique en A_3, a_3 équivaut à celle des rayons sphériques en ces points.

..

Si l'on suit un procédé analogue, on arrive au théorème général:

«La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes sphériques l, L, placées sur une même sphère, puissent être disposées de façon que les n points consécutifs $a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ de l coïncident avec les n points consécutifs $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ de L, est que les rayons de courbure géodésique de la ligne l aux points $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-3}$ soient égaux aux rayons de courbure géodésique de la ligne L aux points $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-3}$».

La coïncidence de n points consécutifs de l avec les n points consécutifs correspondants de L est donc exprimée par les équations suivants:

$$\varphi_a = \rho_a; \; \varphi_{a_1} = \rho_{A_1}; \; \varphi_{a_2} = \rho_{A_2}; \; \ldots \; \varphi_{a_{n-3}} = \rho_{A_{n-3}};$$

et si l'on applique ici des considérations analogues à celles dont on a fait usage au § 1, dans une pareille circonstance, on arrive au théorème.

«La condition necessaire et suffisante pour que les lignes l, L tracées sur une même sphère et définies par les équations:

$$\varphi = \varphi(\sigma), \; \rho = \rho(s)$$

exprimant leurs rayons de courbure géodésique en fonction de l'arc, puissent être placées de façon que les n points consécutifs $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ de l coïncident avec les n points consécutifs $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ de L, est qu'aux points de contact a, A soient vérifiées les $(n-2)$ équations suivantes entre les fonctions φ, ρ:

$$(13) \quad \varphi(\sigma) = \rho(s); \; \varphi'(\sigma) = \rho'(s); \; \varphi''(\sigma) = \rho''(s); \ldots \varphi^{(n-3)}(\sigma) = \rho^{(n-3)}(s).$$

Remarque. — Le théorème que l'on vient de démontrer peut aussi s'appliquer aux lignes planes, pourvu que l'on désigne par φ e ρ les rayons de courbure ordinaire des lignes considérées l, L.

7. **Hélice sphérique osculatrice.** — Si l'on désigne par Φ,

Ψ, σ les rayons de courbure et de torsion et l'arc d'une hélice sphérique, on a:

$$R^2=\Phi^2+\Psi^2\left(\frac{d\Phi}{d\sigma}\right)^2; \quad \Psi=\Phi \operatorname{tang} i,$$

R étant le rayon de la sphère et i l'inclinaison de la courbe sur les génératrices rectilignes du cylindre. On dérive d'ici:

$$\Phi=\sqrt{R^2-\sigma^2 \cot^2 i}, \quad \Psi=\operatorname{tang} i \sqrt{R^2-\sigma^2 \cot^2 i}$$

et par conséquent le rayon de courbure géodésique φ est donné par l'égalité:

$$\varphi(\sigma)=\frac{R\sqrt{R^2 \operatorname{tang}^2 i-\sigma^2}}{\sigma}.$$

Si l'on désigne par ρ le rayon de courbure géodésique de la ligne osculée L, les deux premières équations (13) deviennent:

$$\frac{R\sqrt{R^2 \operatorname{tang}^2 i-\sigma^2}}{\sigma}=\rho; \quad -\frac{R^3 \operatorname{tang}^2 i}{\sigma^2\sqrt{R^2 \operatorname{tang}^2 i-\sigma^2}}=\rho',$$

d'où l'on déduit:

$$\operatorname{tang} i=\frac{(R^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 \rho\rho'}; \quad \sigma=-\frac{R^2+\rho^2}{\rho\rho'}.$$

Ces équations suffisent pour la détermination de l'hélice osculatrice dans sa position par rapport à la courbe donnée.

Les rayons de courbure géodésique ρ_1, φ_1 des développées sphériques L_1, l_1 des lignes L, l sont exprimés par les équations (*):

$$\rho_1 = R^3 \frac{\rho\rho'}{(R^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \varphi_1 = R^3 \frac{\varphi\varphi'}{(R^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et puisque, au point de contact, $\varphi=\rho$, $\varphi'=\rho'$, on a ici: $\varphi_1=\rho_1$.

La développée géodésique l_1 de l'hélice sphérique l est donc un petit cercle, dont le rayon de courbure géodésique est égal à celui de L_1; on conclut que l_1 est le cercle osculateur de la ligne L_1.

Donc «sur une sphère quelconque l'hélice osculatrice à une ligne L est une des développantes géodésiques du cercle osculateur de la ligne L_1 dévéloppée géodésique de L.»

8. Spirale logarithmique osculatrice. — Une telle courbe est définie par l'équation:

$$\varphi(\sigma) = \sigma . \cot i,$$

i étant l'angle constant sous lequel la ligne coupe les rayons vecteurs issus du pôle.

On peut vérifier les deux premières équations (13):

$$\sigma . \cot i = \rho, \quad \cot i = \rho'$$

qui donnent:

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \cot i = \rho'.$$

Ces équations définissent la spirale logarithmique osculatrice à la ligne plane donnée, quel que soit le point de contact.

(*) Sur les lignes sphériques, § II, formule (2'). — Ce Journal, 1889.

Si l'on remarque que le produit $\rho\rho'$ est égal au rayon de courbure ρ_1 de la ligne L_1 développée de L, on peut écrire:

$$\cot i = \frac{\rho'}{\rho},$$

d'où le théorème «le pôle de la spirale logarithmique osculatrice à une ligne plane quelconque L est placé sur la droite qui joint le point de contact au centre de deuxième courbure de L.»

Ce remarque permet de trouver le pôle de la spirale logarithmique osculatrice, à l'aide d'une construction géométrique très facile.

9. Cycloïde osculatrice. — L'équation caractéristique de la cycloïde est:

$$\varphi(\sigma) = \sqrt{a^2 - \sigma^2},$$

$\frac{1}{2}a$ étant le diamètre du cercle générateur et l'origine des arcs étant au sommet de la ligne. Les équations:

$$\sqrt{a^2 - \sigma^2} = \rho, \quad -\frac{\sigma}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} = \rho',$$

correspondant aux conditions $\varphi = \rho$, $\varphi' = \rho'$, nous donnent:

$$a = \rho\sqrt{1 + \rho'^2}; \quad \sigma = -\rho\rho';$$

d'où, en remarquant que $\rho\rho'$ est le rayon de courbure de la développée de L:

$$a = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}.$$

Donc «le diamètre du cercle générateur de la cycloïde osculatrice à une ligne plane quelconque L au point A est la moitié de la droite joignant A au centre correspondant de deuxième courbure de L.»

Soient A un point quelconque de L, A_1 et A_2 le centre de première et de deuxième courbure de L, A_0 le contre de la droite AA_1. La base de la cycloïde est une droite passant par A_0; et lorsque le cercle générateur, en roulant sur la base, arrive à la position qui correspond au point de contact A, il touche la base au point A_0.

Si, dans cette position particulière du cercle, on désigne par B l'extrémité du diamètre du cercle générateur passant par A_0 et par C le point de rencontre de la base de la cycloïde avec AA_2, le triangle rectangle AA_0B (étant $A_0B = \frac{1}{2} AA_2$, à cause du théorème précédent) nous donne:

$$\cos(AA_0B) = \frac{AA_0}{A_0B} = \frac{AA_1}{AA_2}.$$

Donc il est:

$$\sin(AA_0C) = \cos(AA_0B) = \frac{AA_1}{AA_2}.$$

E puisque le triangle AA_1A_2 donne:

$$\sin(AA_2A_1) = \frac{AA_1}{AA_2},$$

il résulte:

$$A\hat{A}_0C = A\hat{A}_2A_1;$$

et la droite A_0C est perpendiculaire à AA_2.

Donc «la base de la cycloïde osculatrice à une ligne quelconque au point A passe par le centre du rayon de courbure en A et sa direction est perpendiculaire à celle de la droite qui joint A au centre de deuxième courbure de L.»

Si l'on remarque que le rayon de courbure de la cycloïde au point de contact est égal à celui de la ligne donnée, les théorèmes que l'on vient de démontrer suffisent à la détermination de la cycloïde osculatrice à une ligne plane quelconque, à l'aide d'une construction géométrique très simple.

Parme, août, 1891.

SOBRE A CONVERGENCIA DOS PRODUCTOS INFINITOS

(Extracto de uma carta dirigida a F. Gomes Teixeira)

POR

J. BRUNO DE CABEDO

(Professor na Universidade de Coimbra)

1.º Seja

$$p = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \dots$$

um producto infinito, onde $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ representam quantidades reaes e positivas.

Designando por p_n o producto dos n primeiros factores, tem-se

$$p = p_1 + (p_2 - p_1) + \dots + (p_n - p_{n-1}) + \dots$$

$$= p_1 + \sum_2^\infty (p_n - p_{n-1}) = p_1 + \sum_2^\infty p_{n-1}\, a_n,$$

d'onde se tira, substituindo successivamente os factores p_{n-1} por p_1 e p_n,

$$\left.\begin{array}{l} p > p_1 + p_1 \sum_2^\infty a_n \\[2ex] p < p_1 + p \sum_2^\infty a_n \end{array}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} p &> p_1\left(1+\sum_2^\infty a_n\right) \\ p &< \frac{p_1}{1-\sum\limits_2^\infty a_n} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

suppondo que é $\sum\limits_2^\infty a_n < 1$.

A ultima das relações (1) demonstra pois a convergencia de p, quando for convergente a serie $\sum\limits_2^\infty a_n$ e o seu valor menor que a unidade.

Se a serie $\sum\limits_2^\infty a_n$ é convergente mas não se tem $\sum\limits_2^\infty a_n < 1$, existe um numero inteiro e positivo j para o qual da serie $\sum\limits_{j+1}^\infty a_n < 1$ se deduz a convergencia de

$$p' = (1 + a_j)(1 + a_{j+1}) \ldots$$

e portanto do producto proposto

$$p = p_{j-1}\, p'.$$

Attendendo agora á primeira das relações (1) póde enunciar-se a proposição seguinte:

É condição necessaria e sufficiente para que o producto p seja convergente que a serie $\sum\limits_1^\infty a_n$ o seja.

2.° Se $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ designam quantidades reaes ou imaginarias, pondo

$$|a_n| = \alpha_n,\ \ \pi_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots\ (1+\alpha_n),$$

vê-se que da convergencia de

$$\pi = \pi_1 + \sum_{2}^{\infty} \pi_{n-1} \alpha_n$$

se deduz a convergencia de

$$p = p_1 + \sum_{2}^{\infty} p_{n-1} a_n,$$

por ser $$|p_{n-1}| \overline{\overline{<}} \pi_{n-1}.$$

Logo, se o producto π é convergente, tambem é convergente o producto p.

BIBLIOGRAPHIA

Maurice d'Ocagne. — Nomographie. Les calculs usuéls effectués au moyen des abaques. Paris, 1891.

Eis um livro bem interessante para os mathematicos e bem util para os engenheiros. Tracta n'elle o auctor dos *abacos*, isto é, dos quadros graphicos em que por meio de certas curvas, construidas antecipadamente, se representam sobre um plano equações que ligam quantidades submettidas ao calculo, de modo a obter as incognitas, dadas por aquellas equações, por meio de uma simples leitura feita n'aquelle quadro. O uso dos abacos é por isso da maior vantagem em todas as questões, em que é necessario effectuar um numero consideravel de vezes o mesmo calculo numerico com dados differentes.

Graças aos trabalhos dos srs. Lallane, Lallemand, Colignon e do proprio sr. Ocagne, o uso dos abacos está já bastante espalhado entre os engenheiros francezes, que têm reconhecido as suas grandes vantagens em muitas questões. Não existia porém uma obra em que a sua theoria fosse completa e methodicamente estudada; por isso o sr. M. d'Ocagne fez um importante serviço, publicando sobre ella o presente livro. As qualidades que se junctam no auctor de geometra e engenheiro dão-lhe uma competencia especial para os assumptos d'esta natureza; por isso o seu trabalho é excellente, quer se considere pelo lado da Geometria pura, quer se considere pelo lado practico.

O assumpto é distribuido em seis capitulos, de cujo assumpto vamos dar uma rapida noticia.

No capitulo 1.° o auctor mostra como se fórma o abaco correspondente a uma equação de tres variaveis $F_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ que resulta da eliminação de x e y entre tres equações da fórma

$$F_1(x, y, \alpha) = 0, \quad F_2(x, y, \beta) = 0, \quad F_3(x, y, \gamma) = 0.$$

Como as funcções F_1, F_2 e F_3 podem ser escolhidas de uma infinidade de maneiras diversas, quando F_0 é dada, o auctor tracta em seguida de procurar as fórmas mais simples para aquellas funcções, e de determinar a fórma que deve ter F_0 para que $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ representem linhas rectas.

No capitulo 2.° faz o auctor applicação dos principios geraes estudados no capitulo 1.° à construcção de alguns abacos. Considera assim o abaco da multiplicação e divisão, o abaco da equação trinomia do terceiro gráo, o abaco dos muros de supporte para um massiço de terra prefilado segundo o seu talude natural, etc.

No capitulo 3.° são estudados os abacos correspondentes ao caso em que as equações $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ representam tres systemas de rectas parallelas. Ahi são considerados os trabalhos de Lallemand a respeito do methodo do indicador transparente, do uso das escalas lineares, dos abacos hexagonaes, etc.

Como applicação vem n'este capitulo os abacos para o calculo dos prefis de aterros a desaterros.

No capitulo 4.° são considerados os abacos que correspondem ao caso de $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ representarem tres systemas de rectas não parallelas. Este caso leva o sr. Ocagne a considerar um novo systema de abacos por elle imaginados, em que as rectas representadas por aquellas equações são substituidas por simples escalas. Para fazer o estudo d'estes abacos emprega o auctor o seu methodo das *coordenadas parallelas*, de que se deu noticia na pag. 30 do tom. VI d'este jornal. Entre as applicações encontra-se o abaco de equação completa do terceiro gráo.

Nos capitulos 5.° e 6.° são emfim considerados alguns abacos de equações com mais de tres variaveis. Depois de algumas considerações e principios geraes sobre estes abacos, são considerados os abacos dos juros compostos, da impulsão de terras, das equações do terceiro, quarto e quinto gráo, etc.

Por esta rapida noticia vê-se quanto interesse offerece o livro excellente que vem de publicar o sr. Ocagne e de quão grande utilidade póde ser aos engenheiros. Accrescentaremos ainda que o livro é terminado por oito estampas, muito bem gravadas, contendo os principaes abacos mencionados no texto.

W. Herkness. — The solar parallax and its related constants, etc., Washington, 1891.

Esta importante memoria foi publicada como appendice ás *Washington Observations for 1885*. A parallaxe sollar não é uma constante independente, mas sim uma constante dependente de outras muitas, que são a parallaxe lunar, as massas da terra e da lua, a relação do tempo solar e lunar, as constantes de aberração, nutação, etc. Por isso o auctor julga preferivel á determinação isolada da parallaxe solar a determinação simultanea de todas estas constantes, combinando as equações pelo methodo dos menores quadrados. É esta determinação que o sr. Herkness faz no seu trabalho, e acha asssim para valor da parallaxe solar o numero $8 \cdot 80905'' \pm 0 \cdot 00567''$. Não indicaremos aqui os numeros que acha para valores das outras constantes.

G. Floquet. — Notice sur Émile Mathieu (Bulletin de la Société des sciences de Nancy, 1891).

E. Mathieu nasceu em Metz a 15 de agosto de 1835 e morreu em Nancy a 19 de outubro de 1890. Era na occasião da sua morte professor na Faculdade de sciencias d'esta ultima cidade. Publicou muitos trabalhos importantes, entre os quaes sobresahe o seu *Traité de Physique mathématique*, que infelizmente ficou incompleto. O sr. Floquet na sua interessante noticia faz o elogio d'este sabio illustre e dá informações sobre os trabalhos que publicou.

Gino Loria. — Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche (Rivista di Matematica, 1891).

Eis um trabalho muito util e muito interessante. Contém a historia das demonstrações, que têem sido apresentadas, do theorema fundamental da theoria das equações. Ao mesmo tempo o auctor faz a critica d'estas demonstrações, analysando os defeitos das que são viciosas, ligando as que derivam de um principio commum, etc.

Annuaire pour l'an 1892, publié par le Bureau des Longitudes (*Paris, Gauthier-Villars et Fils*, 1fr,50).

Além das informações practicas que contém cada anno, o *Annuaire du Bureau des Longitudes* para 1892 contém artigos devidos aos sabios mais illustres sobre as Moedas, a Geographia, a Mineralogia, etc., e finalmente as noticias seguintes:

Noticia sobre a 3.ª reunião da Commissão internacional permanente, para a execução photographica da Carta celeste, no Observatorio de Paris, em abril de 1892, pelo contra-Almirante Mouchez. — *Noticia sobre a Lua e sua acceleração secular*, por F. Tisserand. — *Sessão da Associação geodesica internacional, celebrada em Florença, em 8 de outubro de 1891*, por A. Bouquet de la Grye. — *Os Observatorios de montanha. Um Observatorio no Monte Branco*, por J. Janssen. — *Sobre a Mira do Observatorio de Nice*, por A. Cornu. — *Discursos pronunciados na inauguração da estatua de Borda, em Dax, a 24 de maio de 1891*, por A. Bouquet de la Grye e Vice-Almirante Paris.

J. A. Serrasqueiro. — Tratado elementar de Arithmetica, 10.ª edição. Coimbra, 1891.

—— *Tratado elementar de Trigonometria e Noções de Geometria analytica, 4.ª edição. Coimbra 1891.*

G. de Longchamps. — Exposition de la théorie des intégrateurs (*Progreso Matematico*, t. I).

O auctor expõe n'este artigo, debaixo de uma fórma geometrica inteiramente elementar, a theoria dos integradores.

—— *Développements sur les paraboles de M. Artzt* (*Progreso Matematico*, t. I).

Dá-se o nome de parabola de Artz a toda a parabola que passa por dois dos vertices de um triangulo e é tangente aos lados que unem estes dois vertices ao terceiro. O sr. Longchamps no seu interessante artigo estuda as propriedades d'estas parabolas.

Vincenzo Reina. — *Sulle linee conjugate di una superficie* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890*).

Com este titulo apresenta o auctor duas Notas muito interessantes. N'ellas tracta do estudo de algumas fórmas differenciaes, importantes na Geometria das superficies, que resultam de exprimir por coordenadas curvilineas os elementos

$$ds^2, \quad \frac{ds^2}{\rho}, \quad -\frac{ds^2}{\tau}, \quad d\sigma^2,$$

e da interpretação geometrica dos seus parametros differenciaes de primeira ordem.

—— *Di alcune formule relative alla teoria delle superficie* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890*).

O auctor estuda n'esta bella Nota as consequencias de seis equações ás derivadas parciaes, a que satisfazem os cosenos directores da normal a qualquer superficie e as coordenadas do ponto da superficie pelo qual se tira esta normal. Entre estas consequencias notam-se duas expressões notaveis da *curvatura Gaussiana*.

T. W. Backhouse. — *The structure of the sideral Universe, Sunderland, 1891.*

Este opusculo, publicado pelo *West Hendon House Observatory* (*Sunderland*), contém as observações sobre a structura das nebulosas feitas pelo auctor durante nove annos n'este Observatorio.

G. Pirondini. — *Sulle linee d'ombra di alcune superficie* (*Giornale di Battaglini*, t. XXIX).

O auctor estuda no seu bello trabalho as linhas de sombra dos helicoides, das superficies regradas que admittem cone director de revolução, das superficies parallelas, etc.

L. Kronecker. — *Ueber eine Stelle in Jacobis Aufsatz. «Observatiunculai ad theoriam aequationum pertinentes»* (*Journal für die reine und angwandte Mathematik*, t. 107).

—— *Ueber die Zeit un die Art der Entstehung der Jacobis Thetaformel* (*Item*, t. 108).

—— *Eine analytisch-arithmetische Formel* (*Item*).

—— *Reduction der Systeme von si ganzzahligen Elementen* (*Item*).

—— *Anwendung der Modulssysteme auf Fragen der Determinantentheoria* (*Item*).

—— *Bermerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale* (*Item*).

Todos estes artigos importantes foram publicados no *Journal für die reine und angwandte Mathematik*, do qual o auctor dirigia ultimamente a publicação. São os ultimos trabalhos com que Kronecker enriqueceu o seu jornal, pois que este grande mathematico a quem a Analyse, em especial a Algebra, e a Arithmetica superior devem brilhantes trabalhos, falleceu em Berlin no dia 29 de dezembro do anno que findou.

L. Niesten. — *A propos de la rotation de la planète Vénus* (*Bulletins de l'Académie R. de Belgique, 1891*.

Contém este trabalho algumas observações feitas pelo auctor no Observatorio de Bruxellas, para a determinação do periodo de rotação do planeta Venus. Havendo grande discordancia entre o periodo de rotação determinado por Vico, por muito tempo admittido na sciencia, e o periodo modernamente determinado por Schiaparelli, o auctor analysa e compara as suas observações e as feitas por outros astronomos inclinando-se a admittir o periodo de Vico.

D. Juan Durán y Loriga. — Teoria elementar de las formas algebricas. Segovia, 1889.

Este interessante opusculo foi escripto pelo auctor para servir aos alumnos que se quizerem preparar para entrar na Eschola preparatoria de Engenheiros e Architectos de Madrid. Contém por isso sómente a parte da theoria das fórmas algebricas necessaria para este fim.

O assumpto está distribuido por dez capitulos, em que o auctor tracta das substituições lineares, dos descriminantes, dos invariantes, das funcções jacobiana e hesseana, dos covariantes, dos contravariantes e concomitantes mixtos, dos emanantes e finalmente das fórmas canonicas.

A respeito de cada um d'estes pontos o auctor expõe os theoremas, regras e principios mais essenciaes, conservando-se sempre no ponto de vista elementar. Esta exposição é feita com a maior clareza e bom methodo, sendo por isso o livro muito proprio para servir de auxiliar a quem quizer tomar conhecimento da parte elementar de uma doutrina que tem tanta importancia na analyse moderna.

—— *Tres capitulos de Geometria superior. Coruña, 1891.*

Este opusculo foi escripto pelo auctor para o mesmo fim que o anterior. Por isso contém as doutrinas de Geometria superior exigidas pelos programmas de admissão á Eschola de Engenheiros e Architectos de Madrid. As mesmas qualidades de clareza, precisão e bom methodo que se notam no livro a que anteriormente nos referimos, notam-se ainda no presente opuscnlo.

Como o titulo do opusculo mesmo indica, contém elle tres capitulos, sendo estudadas no primeiro as relações anharmonicas de quatro pontos em linha recta e de quatro rectas formando um feixe; no segundo a relação harmonica de quatro pontos em linha recta ou de quatro rectas formando feixe; e no terceiro a homographia e a involução.

G. Bigourdan. — *Nébuleuses nouvelles découvertes à l'Observatoire de Paris* (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 1887 e 1891*).

Duas Notas apresentadas pelo sr. Bigourdan á Academia das sciencias de Paris em 1887 e 1891, que contêm a primeira uma lista de 102 nebulosas descobertas por este illustre astronomo no intervallo de 1884 a 1887, e a segunda uma lista de 142 nebulosas descobertas pelo mesmo astronomo no intervallo de 1887 a 1890.

Rodolpho Guimarães. — *Sobre una escuadra cicloidal* (*El Progreso matematico*, t. I).

—— *Sur une équerre cicloidale propre à effectuer la rectification des arcs de cercle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIX).

Estas duas Notas contêm um resumo de um artigo publicado pelo sr. R. Guimarães no tom. VIII d'este jornal.

F. Engel. — *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie* (*Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaft, 1891*).

S. Lie. — *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen transformationsgruppen* (*Item*).

Debaixo d'estes titulos estão comprehendidas quatro Notas do sr. Engel e duas do sr. Lie, todas relativas á theoria das transformações infinitesimaes, theoria creada por este eminente geometra e no estudo da qual tem tomado uma parte das mais importantes o sr. Engel.

Vincenzo Reina. — *Di alcune proprità delle linee caratteristiche* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890*).

—— *Della compensazione nel problema di Hansen* (*Atti della R. Accademia di Torino, 1891*).

Vincenzo Reina. — *Sulla teoria della normali ad una superficie* (*Rend. della R. Accademia de Napoli, 1890*).

G. Vivanti. — *Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton* (*Bibliotheca mathematica, 1891*).

—— *Ancora sull'infinitezimo attuale* (*Rivista di Matematica*, t. I).

G. T.

NOTAS SOBRE A THEORIA DAS FUNCÇÕES ELLIPTICAS

POR

F. GOMES TEIXEIRA

I

Sobre o integral $\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$.

1. O integral

$$(1) \qquad u = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

tem uma importancia consideravel na theoria das funcções ellipticas, visto que leva pela inversão á funcção $z = p(u)$, introduzida pelo sr. Weierstrass, que representa um papel fundamental n'aquella theoria.

Supponhamos que as constantes g_2 e g_3 são reaes e que e_1, e_2 e e_3 representam as raizes da equação

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

Estas raizes podem ser todas reaes, e n'este caso supporemos $e_1 > e_2 > e_3$; ou podem ser uma real e duas imaginarias, e n'este caso supporemos que e_1 representa a raiz real. Em ambos os casos estas raizes satisfazem á condição

$$e_1+e_2+e_3=0.$$

Posto isto, a primeira questão a resolver, quando se estuda o integral (1), é mostrar que o integral tem um valor finito e determinado quando z varia desde e_1 até ∞; isto é, que, sendo $a>z>e_1$, o integral

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

tende para um limite finito e determinado quando a tende para o infinito, e que o integral (1) tende tambem para um limite finito e determinado quando z tende para e_1.

Para demonstrar esta proposição póde-se empregar um theoréma bem conhecido de calculo integral, que a dá com muita facilidade. Aqui vamos demonstral-a porém por uma analyse directa, que tem a vantagem de levar a algumas desegualdades interessantes.

I. Supponhamos primeiramente que as raizes e_1, e_2 e e_3 são reaes.

Por ser $e_2>e_3$ e

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\int_z^a \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

temos evidentemente

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}<\int_z^a \frac{dx}{2(x-e_2)\sqrt{x-e_1}}.$$

Mas, pondo

$$t=\sqrt{x-e_1},$$

vem

$$\int \frac{dx}{(x-e_2)\sqrt{x-e_1}} = 2\int \frac{dt}{t^2+e_1-e_2} = \frac{2}{\sqrt{e_1-e_2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x-e_1}{e_1-e_2}}.$$

Portanto

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} < \frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-e_1}{e_1-e_2}} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{z-e_1}{e_1-e_2}}\right]$$

$$< \frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{z-e_1}{e_1-e_2}}\right],$$

e *á fortiori*

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} < \frac{\pi}{2\sqrt{e_1-e_2}}.$$

Logo o integral que entra no primeiro membro d'esta desigualdade, que cresce com a e não póde jámais exceder o segundo membro da mesma desegualdade, tende para um limite determinado

$$\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

quando a tende para o infinito; e este integral, que cresce quando z tende para e_1 sem poder tambem exceder o segundo membro da mesma desegualdade, tende para um limite determinado

(2) $$\omega = \int_{e_1}^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}.$$

II. No caso de serem imaginarias as raizes $e_2 = \alpha + i\beta$,

$e_3 = \alpha - i\beta$, as conclusões precedentes são ainda verdadeiras. É o que se tira da desegualdade

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_z^a \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)[(x-\alpha)^2 + \beta^2]}}$$

$$< \int_z^a \frac{dx}{2(x-\alpha)\sqrt{x-e_1}} < \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - \alpha}},$$

quando $e_1 > \alpha$, procedendo como no caso anterior.

Se porém é $\alpha \geqq e_1$, partiremos da decomposição

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_z^\eta \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} + \int_\eta^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

onde η representa uma quantidade qualquer comprehendida entre a e z e maior do que α, e das desegualdades

$$\int_z^\eta \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} < \int_z^\eta \frac{dx}{2\beta\sqrt{x-e_1}},$$

$$\int_\eta^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} < \int_\eta^a \frac{dx}{2(x-\alpha)\sqrt{x-e_1}} < \int_\eta^a \frac{dx}{2(x-\alpha)\sqrt{x-\alpha}},$$

6
7
13
3
39
2
41

e teremos a relação

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} < \frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\eta - e_1} - \sqrt{z - e_1}\right]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\eta - \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{a - \alpha}} < \frac{1}{\beta}\sqrt{\eta - e_1} + \frac{1}{\sqrt{\eta - \alpha}},$$

da qual se tiram as conclusões enunciadas procedendo como no caso anterior.

2. O integral (2) tem grande importancia na theoria das funcções ellipticas, e a doutrina precedente dá um limite superior do seu valor. Temos, com effeito,

$$\omega < \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - e_2}},$$

se as raizes e_1, e_2 e e_3 são reaes; e

$$\omega < \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - \alpha}},$$

se as raizes e_2 e e_3 são imaginarias e é $\alpha < e_1$; e finalmente

$$\omega < \frac{1}{\beta}\sqrt{\eta - e_1} + \frac{1}{\sqrt{\eta - \alpha}},$$

se e_2 e e_3 são imaginarias e é $\alpha \geqq e_1$.

Por ser

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

temos $e_1 = -2\alpha$ e portanto as duas ultimas egualdades podem ser escriptas do modo seguinte

$$\omega < \frac{\pi}{2\sqrt{-3\alpha}}, \quad \alpha < 0$$

$$\omega < \frac{1}{\beta}\sqrt{\eta + 2\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\eta - \alpha}}, \quad \alpha \geqq 0.$$

Póde-se tambem achar fácilmente um limite inferior do valor de ω. Se as raizes e_2 e e_3 são reaes, temos com effeito, por ser $e_2 > e_3$,

$$\omega > \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2(x-e_3)\sqrt{x-e_1}},$$

o que dá

$$\omega > \frac{\pi}{2\sqrt{e_1-e_3}}.$$

Se as raizes e_2 e e_3 são imaginarias e é $\alpha \leqq e_1$, temos $x > \alpha$, e portanto

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}}$$

$$> \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2+2\beta(x-\alpha)\right]}},$$

o que dá

$$\omega > \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2(x-\alpha+\beta)\sqrt{x-e_1}},$$

ou, integrando e pondo $e_1 = -2\alpha$,

$$\omega > \frac{\pi}{2\sqrt{-3\alpha+\beta}}.$$

Se as raizes e_2 e e_3 são imaginarias e é $\alpha > e_1$, partindo da decomposição

$$\int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} = \int_{e_1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

e das desegualdades

$$\int_{e_1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{e_1}^{\alpha} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]}}$$

$$> \int_{e_1}^{\alpha} \frac{dx}{2(x-\alpha-\beta)\sqrt{x-e_1}},$$

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]}}$$

$$> \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2(x-\alpha+\beta)\sqrt{x-e_1}},$$

cujos ultimos membros são integraveis por meio de funcções elementares, resolve-se a questão proposta, mas o resultado que se obtem n'este caso não é simples.

II

Sobre o theorema de addição da funcção $p(u)$

Halphen no seu *Traité des fonctions elliptiques* deduz o theorema de addição da funcção $p(u)$ por meio da consideração de um caso particular do theorema de Abel. Aqui vamos mostrar como se deduz este theorema por meio da integração da equação d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = 0.$$

Ponha-se

$$\Delta x = \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}, \quad \Delta y = \sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$$

e

$$\frac{dx}{\Delta x} = -\frac{dy}{\Delta y} = dt,$$

o que dá

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

$$2\frac{d^2 x}{dt^2} = 12x^2 - g_2,$$

$$2\frac{d^2 y}{dt^2} = 12y^2 - g_2.$$

Teremos

$$\frac{dx^2 - dy^2}{dt^2} = 4(x^3 - y^3) - g_2(x - y),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 6(x^2 + y^2) - g_2.$$

Substituindo n'estas egualdades as variaveis x e y por outras p e q ligadas com x e y por meio das equações

$$x + y = p, \quad x - y = q,$$

em

$$\frac{dp\,dq}{dt^2}=q\,(3\,p^2+q^2)-g_2\,q,$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2}=3\,(p^2+q^2)-g_2,$$

e, eliminando g_2 entre estas equações,

$$q\frac{d^2 p}{dt^2}-\frac{dp\,dq}{dt^2}=-q^3,$$

ou

$$2\frac{q\dfrac{d^2 p}{dt^2}\dfrac{dp}{dt}-\left(\dfrac{dp}{dt}\right)^2\dfrac{dq}{dt}}{q^3}=4\frac{dp}{dt},$$

ou ainda

$$\frac{d\left[\dfrac{1}{q^2}\left(\dfrac{dp}{dt}\right)^2\right]}{dt}=4\frac{dp}{dt}.$$

Integrando esta equação obtem-se o resultado

$$\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2=4\,p+C',$$

ou, substituindo p e q pelos seus valores em funcções de x e y,

$$\left(\frac{\Delta\,x-\Delta\,y}{x-y}\right)^2=4\,(x+y)+C',$$

C' representando uma constante arbitraria.

Esta equação representa o integral geral, obtido pela primeira vez por Euler, da equação proposta. O methodo que vem de ser empregado para o achar é devido a Lagrange.

Posto isto, para obter o theorema de addição de $p(u)$, notemos em primeiro logar que a equação proposta dá

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\Delta x} + \int_y^\infty \frac{dy}{\Delta y} = \mathrm{C},$$

ou, determinando a constante C de modo que seja $y = z$ quando $x = \infty$,

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\Delta x} + \int_y^\infty \frac{dy}{\Delta y} = \int_z^\infty \frac{dz}{\Delta z}, \tag{a}$$

onde

$$\Delta z = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}.$$

Por outra parte, o integral de Euler póde ser escripto do modo seguinte

$$\frac{4x\left[\left(1 - \dfrac{g_2 x + g_3}{4x}\right)^{\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta y}{2x^{\frac{3}{2}}}\right]}{\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)^2} = 4(x+y) + \mathrm{C}',$$

ou, desenvolvendo os binomios que entram no primeiro membro em serie,

$$4x\left[1 - \frac{1}{2}\frac{g_2 x + g_3}{4x^3} + \ldots - \frac{\Delta y}{z x^{\frac{3}{2}}}\right]\left[1 + 2\frac{y}{x} + \ldots\right]$$

$$= 4(x+y) + \mathrm{C}';$$

e esta egualdade dá, effectuando as operações e pondo depois $x=\infty$ e $y=z$,

$$C'=4z.$$

Quando pois se determina a constante que entra no integral de Euler pela condição de ser $y=z$ quando $x=\infty$, este integral toma a fórma

$$z=\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta x-\Delta y}{x-y}\right)^2-x-y. \tag{b}$$

Pondo agora na egualdade (a),

$$u=\int_x^\infty \frac{dx}{\Delta x},\ v=\int_y^\infty \frac{dy}{\Delta y},$$

vem

$$u+v=\int_z^\infty \frac{dz}{\Delta z};$$

e portanto temos

$$x=p(u),\ y=p(u),\ z=p(u+v).$$

Temos porém

$$\Delta x=p'(u),\ \Delta y=p'(v).$$

Logo a formula (b) dá a egualdade

$$p(u+v)=\frac{1}{4}\left(\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)}\right)^2-p(u)-p(v),$$

na qual consiste o theorema de addição da funcção $p(u)$.

III

Sobre algumas series

1. Uma questão relativa á theoria das funcções ellipticas leva a estudar as condições de convergencia das series

$$(1) \qquad \sum_c \frac{1}{(u-a_c)^\alpha},\ \alpha > 2$$

$$(2) \qquad \sum_c \left[\frac{1}{(u-a_c)^2} - \frac{1}{a_c^2}\right],$$

$$(3) \qquad \sum_c \left[\frac{1}{u-a_c} + \frac{1}{a_c} + \frac{u}{a_c^2}\right],$$

onde a_c representa os numeros que se obtêm dando a n e m os valores

$$\left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

na expressão

$$a_c = 2\,n\,\omega_1 + 2\,m\,\omega_2,$$

ω_1 *e* ω_2 representando duas quantidades taes que o quociente $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ tenha a parte imaginaria differente de zero.

Para estudar estas series basear-nos-hemos, como se faz ordinariamente, no lemma seguinte cuja demonstração é bem conhecida.

A serie

$$\sum \frac{1}{(2\,n\,\omega_1 + 2\,m\,\omega_2)^2}$$

é absolutamente convergente quando é $\alpha > 2$ *e a parte imaginaria do quociente* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *é differente de zero.*

Mas para d'elle tirar as condições de convergencia das series propostas seguiremos um novo caminho.

Para tractar simultaneamente as tres series propostas, vamos considerar a serie:

$$\text{(A)} \qquad \Sigma \frac{f(c, u)}{(u - a_c)^\alpha},$$

e mostrar que *esta serie é absoluta e uniformemente convergente em qualquer área* A *que não contenha ponto algum dos que são representados por* a_c, *se for* $\alpha > 2$ *e existir um numero* L *que o módulo de* f (c, u) *não possa exceder quando* n *e* m *variam desde* 0 *até* ∞ *e* u *passa por todos os valores representados por pontos da área* A.

Com effeito, por ser, na área A, u differente de a_c, existe um numero l a que a quantidade

$$\left| 1 - \left| \frac{u}{a_c} \right| \right|^\alpha$$

não póde ser inferior, e porisso temos

$$\frac{|f(c, u)|}{\left| 1 - \left| \frac{u}{a_c} \right| \right|^\alpha} < \frac{\mathrm{L}}{l};$$

e por ser convergente a serie

$$\frac{\mathrm{L}}{l} \Sigma \left| \frac{1}{a_c^\alpha} \right| = \frac{\mathrm{L}}{l} \Sigma \frac{1}{|2n\,\omega_1 + 2m\,\omega_2|^\alpha},$$

a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um numero t_1 tal que a desigualdade

$$\frac{\mathrm{L}}{l}\sum_{c=t}^{t+p}\left|\frac{1}{a_c^{\alpha}}\right|<\delta$$

é satisfeita pelos valores de t superiores a t_1, qualquer que seja p.

Logo teremos, quando $t>t_1$,

$$\sum_{c=1}^{t+p}\left|\frac{1}{a_c^{\alpha}}\right|\frac{|f(c,u)|}{\left|1-\left|\frac{u}{a_c}\right|\right|^{\alpha}}<\delta;$$

depois

$$\sum_{c=1}^{t+p}\left|\frac{1}{a_c^{\alpha}}\right|\frac{|f(c,u)|}{\left|1-\frac{u}{a_c}\right|^{\alpha}}<\delta,$$

por ser

$$1=\left|1-\frac{u}{a_c}+\frac{u}{a_c}\right|\leqq\left|1-\frac{u}{a_c}\right|+\left|\frac{u}{a_c}\right|,$$

ou

$$\left|1-\frac{u}{a_c}\right|\geqq 1-\left|\frac{u}{a_c}\right|;$$

e finalmente

$$\sum_{c=t}^{t+p}\left|\frac{f(c,u)}{(u-a_c)^{\alpha}}\right|<\delta.$$

D'esta deseguldade conclue-se que a serie (A) é absoluta e uniformemente convergente no interior da área A.

2. D'este theorema tira-se como corollario que as series (1), (2) e (3) são absoluta e uniformemente convergentes na área A. Para considerar a serie (1) basta pôr em (A) $f(c,u)=1$.

A serie (2) póde ser reduzida á fórma

$$\sum_{c=0}^{\infty} \frac{u(2a_c - u)(u - a_c)}{a_c^2 (u - a_c)^3},$$

e a sua convergencia demonstra-se por meio do theorema anterior pondo

$$f(c, u) = \frac{u(2a_c - u)(u - a_c)}{a_c^2} = u\left(2 - \frac{u}{a_c}\right)\left(\frac{u}{a_c} - 1\right)$$

e notando que $|f(c, u)|$ não póde augmentar indefinidamente quando n e m crescem desde 0 até ∞ e u passa por todos os pontos da área A.

A serie (3) pode ser reduzida á fórma

$$\sum_{c=0}^{\infty} \frac{u^2 (u - a_c)^2}{a_c^2 (u - a_c)^3},$$

e n'este caso podemos pôr

$$f(c, u) = \left(\frac{u}{a_c}\right)^2 (u - a_c)^2 = u^2 \left(\frac{u}{a_c} - 1\right)^2,$$

e demonstra-se ainda a sua convergencia por meio do theorema anterior.

IV

Desenvolvimento de $p(u)$ em serie de fracções simples

1. A formula que dá o desenvolvimento de $p(u)$ em serie de fracções simples póde ser obtida por meios inteiramente elementares, como fez Halphen na sua obra já citada. Póde ser tambem obtida de uma maneira menos elementar mas mais rapida por meio d'alguns theoremas da theoria das funcções analyticas.

Supporemos demonstrado que $p(u)$ é uma funcção analytica uniforme, que é par, que é duplamente periodica, e que os seus infinitos são os pontos

$$a_c = 2n\omega_1 + 2m\omega_2,$$

n e m reprcsentando dois numeros inteiros quaesquer e $2\omega_1$ e $2\omega_2$ os periodos de $p(u)$.

Demonstremos em primeiro logar a egualdade

$$\lim_{u=a_c} (u-a_c)^2 p(u) = 1.$$

Consideremos para isso o integral que serve de definição a $p(u)$

$$u = \int_z^\infty \frac{dx}{\Delta x} = \int_z^\infty \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

o qual dá

$$u = \frac{1}{2}\int_z^\infty x^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{e_1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{e_2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{e_3}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

e, desenvolvendo em serie os binomios,

$$u = \frac{1}{2}\int_z^\infty (x^{-\frac{3}{2}} + \mathrm{A}x^{-\frac{5}{2}} + \mathrm{B}x^{-\frac{7}{2}} + \ldots)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{3} z^{-1} + \frac{\mathrm{B}}{5} z^{-2} + \ldots\right).$$

Logo temos, pondo $z = p(u)$ e elevando os dois membros d'esta egualdade ao quadrado,

$$u^2 p(u) = 1 + \frac{2A}{3} p^{-1}(u) + \ldots,$$

o que dá, por ser $p(0) = \infty$,

$$\lim_{u=0} u^2 p(u) = 1.$$

Por ser a_c um periodo de $p(u)$, tira-se d'esta egualdade

$$\lim_{u=a_c} (u - a_c)^2 p(u) = \lim_{u=0} u^2 p(u + a_c) = \lim_{u=0} u^2 p(u) = 1.$$

Posto isto, por ser $p(u)$ uma funcção uniforme e por ser a_c um dos seus infinitos, temos na visinhança do ponto a_c (em virtude do theorema de Laurent),

$$p(u) = \ldots + \frac{A_3}{(u - a_c)^3} + \frac{A_2}{(u - a_c)^2} + \frac{A_1}{u - a_c} + P(u - a_c),$$

$P(u - a_c)$ representando uma serie ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de $u - a_c$, e A_1, A_2, A_3, ... representando quantidades constantes.

Mas, devendo ser

$$\lim_{u=a_c} (u - a_c)^2 p(u) = 1,$$

temos

$$\lim_{u=a_c} \left[A_2 + \frac{A_3}{u - a_c} + \frac{A_4}{(u - a_c)^2} + \ldots \right] = 1,$$

o que dá

$$A_2 = 1, \; A_3 = 0, \; A_4 = 0, \ldots$$

Por outra parte, por ser a_c um periodo de $p(u)$, temos na visinhança do ponto $u = 0$,

$$p(u) = p(u + a_c) = \frac{1}{u^2} + \frac{A_1}{u} + P(u),$$

e esta egualdade mostra que é $A_1 = 0$.

Substituindo estes valores de $A_1, A_2, \ldots$ na expressão anterior de $p(u)$ vem a egualdade

$$p(u) = \frac{1}{(u - a_c)^2} + P(u - a_c),$$

que tem logar na visinhança do ponto a_c e que dá

$$p'(u) = -\frac{2}{(u - a_c)^3} + P'(u - a_c).$$

Baseados n'esta egualdade vamos resolver a questão proposta.

Vimos com effeito na *Nota* anterior que a funcção $\varphi(u)$ definida pela serie

$$\varphi(u) = -\Sigma \frac{2}{(u - a_c)^3}$$

é uniformemente convergente; é pois natural comparar a funcção $p'(u)$ com a funcção $\varphi(u)$ definida por esta serie.

Para fazer esta comparação notemos em primeiro logar que $\varphi(u)$ admitte derivadas de todas as ordens, finitas em todos os pontos differentes de a_c, e dadas pelas relações

$$\varphi'(u) = \Sigma \frac{2.3}{(u-a_c)^4},$$

$$\varphi''(u) = -\Sigma \frac{2.3.4}{(u-a_c)^5},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

visto que estas series são todas uniformemente convergentes.

Nos pontos differentes de a_c, como as duas funcções $p'(u)$ e $\varphi(u)$ admittem derivadas finitas, a funcção $p'(u) - \varphi(u)$ tambem admitte derivadas finitas.

Na visinhança do ponto a_j, j representando um valor qualquer de c, teremos

$$\varphi(u) + \frac{2}{(u-a_j)^3} = -\Sigma' \frac{2}{(u-a_c)^3}$$

(devendo no segundo membro d'esta egualdade excluir-se j dos valores dados a c), e

$$p'(u) = -\frac{2}{(u-a_j)^3} + \mathrm{P}'(u-a_j);$$

portanto

$$p'(u) - \varphi(u) = \mathrm{P}'(u-a_j) + \Sigma' \frac{2}{(u-a_c)^3},$$

onde o segundo membro admitte derivadas de todas as ordens finitas no ponto a_j.

Logo a funcção $p'(u) - \varphi(u)$ admitte derivadas de todas as ordens, finitas em todo o plano, e é portanto uma funcção holomorpha de u, que representaremos por $\mathrm{P}_1(u)$.

Temos pois

$$p'(u) = P_1(u) - \Sigma \frac{2}{(u-a_c)^3}.$$

Resta determinar a funcção $P_1(u)$.

Notemos para isso que a funcção $\varphi(u)$ é periodica e que os seus periodos são os de $p'(u)$.

Com effeito, mudando em $a_c = 2n\omega_1 + 2m\omega_2$, n em $n+n_1$ e m em $m+m_1$, vem

$$\varphi(u) = -\Sigma \frac{2}{[u-2(n+n_1)\omega_1 - 2(m+m_1)\omega_2]^3}$$

e mudando depois u em $u+2n_1\omega_1+2m_1\omega_2$,

$$\varphi(u+2n_1\omega_1+2m_1\omega_2) = -\Sigma \frac{2}{(u-2n\omega_1-2m\omega_2)^3} = \varphi(u).$$

Logo a funcção holomorpha $P_1(u)$ é duplamente periodica e portanto, em virtude de um theorema de theoria das funcções duplamente periodicas bem conhecido, é egual a uma constante C.

Temos pois

$$p'(u) = C - \Sigma \frac{2}{(u-a_c)^3}.$$

Para determinar C basta pôr n'esta egualdade $u=\omega_1$, e attender ás egualdades

$$p'(\omega_1) = 0,\ \Sigma \frac{2}{[(2n-1)\omega_1 + 2m\omega_2]^3} = 0,$$

a segunda das quaes resulta de a cada termo de somma corresponder outro egual e de signal contrario, que se obtem mudando $2n-1$ em $-(2n-1)$ e m em $-m$.

Vem d'este modo

$$C=0.$$

Temos pois

$$p'(u)=-\Sigma\frac{2}{(u-a_c)^3},$$

onde é

$$a_c=2n\omega_1+2m\omega_2,\quad \left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots.$$

D'esta egualdade tira-se o desenvolvimento de $p(u)$ integrando entre os limites 0 e u os seus dois membros.

Temos d'este modo, separando o termo correspondente a $m=0$ e $n=0$,

$$\int_0^u\left[p'(u)+\frac{2}{u^3}\right]du=\Sigma\left[\frac{1}{(u-a_c)^2}-\frac{1}{a_c^2}\right],$$

ou

$$p(u)-\frac{1}{u^2}-\lim_{u=0}\left[p(u)-\frac{1}{u^2}\right]=\Sigma\left[\frac{1}{(u-a_c)^2}-\frac{1}{a_c^2}\right].$$

Mas, por ser, na visinhança do ponto $u=0$,

$$p(u)=\frac{1}{u^2}+a_0+a_1u+\ldots,$$

e

$$p'^2(u)=4p^3(u)-g_2p(u)-g_3,$$

podemos substituir n'esta segunda egualdade $p(u)$ e $p'(u)$ pelos seus desenvolvimentos dados pela primeira e pela sua derivada, e egualar os coefficientes das mesmas potencias de u nos dois membros do resultado. Acha-se d'este modo que $a_0=0$.

Logo

$$\lim_{u=0}\left[p(u)-\frac{1}{u^2}\right]=0.$$

Temos pois

$$(1)\qquad p(u)=\frac{1}{u^2}+\Sigma\left[\frac{1}{(u-a_c)^2}-\frac{1}{a_c^2}\right],$$

onde

$$a_c=2n\omega_1+2m\omega_2,\quad \left.\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,$$

excluindo a combinação $n=0,\ m=0$.

É esta formula que pretendiamos achar.

2. A formula que vimos de achar póde servir tambem para definir a funcção $p(u)$.

Querendo-se tractar d'este modo a theoria das funcções ellipticas, é necessario tirar do desenvolvimento (1) as propriedades da funcção $p(u)$. É o que vamos fazer.

I. A simples inspecção da formula (1) mostra que a funcção $p(u)$ é *meromorpha* e que os seus pólos são os pontos

$$2n\omega_1+2m\omega_2;$$

que é

$$(2)\qquad p(-u)=p(u);$$

e que é

$$(3)\qquad \lim_{u=0}\left[p(u)-\frac{1}{u^2}\right]=0.$$

II. A funcção $p(u)$ é duplamente periodica e os seus periodos são $2\omega_1$ e $2\omega_2$.

Para demonstrar esta proposição consideremos primeiramente a serie que resulta de derivar (1) (onde se introduz o termo $-\frac{2}{u^3}$ na somma Σ):

$$p'(u) = -\Sigma \frac{2}{(u-2n\omega_1-2m\omega_2)^3}.$$

Mudando n em n_1+n e m em m_1+m, vem

$$p(u) = -\Sigma \frac{2}{[u-2(n+n_1)\omega_1-2(m+m_1)\omega_2]^3};$$

e, mudando depois u em $u+2n_1\omega_1+2m_1\omega_2$,

$$p'(u+2n_1\omega_1+2m_1\omega_2) = -\Sigma \frac{2}{(u-2n\omega_1-2m\omega_2)^3}.$$

Logo

$$p'(u+2n_1\omega_1+2m_1\omega_2) = p'(u).$$

Integremos agora a equação

$$p'(u+2n_1\omega_1+2m_1\omega_2)\,du = p'(u)\,du,$$

e teremos

$$p(u+2n_1\omega_1+2m_1\omega_2) = p(u) + C,$$

C representando uma constante. Para a determinar ponha-se

$$u = -(n_1\omega_1+m_1\omega_2);$$

o que dá

$$p(-n_1\omega_1 - m_1\omega_2) = p(n_1\omega_1 + m_1\omega_2) - C,$$

e portanto $$C = 0.$$

Temos pois

$$p(u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2) = p(u),$$

que é o que se queria demonstrar.

III. Das egualdades (1), (2) e (3) conclue-se que a funcção $p(u)$ póde ser desenvolvida em serie por meio do theorema de Laurent, e que este desenvolvimento tem a fórma

$$(4) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \ldots$$

IV. A funcção $p(u)$ satisfaz a uma equação da fórma

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3.$$

Para demonstrar (*) esta proposição notemos primeiramente que as funcções duplamente periodicas

$$p'^2(u), \; 4p^3(u) - g_2 p(u),$$

as quaes têm um unico pólo $u = 0$ n'um dos parallelogrammos

(*) Esta demonstração e a seguinte são tiradas de um artigo que a este respeito publicámos no *Bulletin des sciences mathématiques* de Paris, (tom. XXVII, 1892).

dos periodos, dão, na visinhança do ponto $u=0$,

$$p'^2(u)=\left[-\frac{2}{u^3}+2a_2u+4a_4u^3+\dots\right]^2$$

$$=\frac{4}{u^6}-\frac{8a_2}{u^2}-16a_4+\dots,$$

$$4p^3(u)-g_2p(u)=4\left[\frac{1}{u^2}+a_2u^2+a_4u^4+\dots\right]^3$$

$$-g_2\left[\frac{1}{u^2}+a_2u^2+a_4u^4+\dots\right]$$

$$=\frac{4}{u^6}+\frac{12a_2-g_2}{u^2}+12a_4+\dots.$$

Logo, se posermos

$$12a_2-g_2=-8a_2,$$

a differença

$$p'^2(u)-[4p^3(u)-g_2p(u)]$$

não tem o pólo $u=0$, e esta differença é portanto (em virtude de um theorema da theoria das funcções duplamente periodicas bem conhecido) constante.

Temos pois

$$p'^2(u)=4p^3(u)-g_2p(u)-g_3,$$

representando a constante por $-g_3$. Para a determinar, substitua-se $p'^2(u)$, $p^3(u)$ e $p(u)$ pelos seus valores, tirados de (4), e ponha-se $u=0$; teremos assim

$$g_3=28a_4.$$

Logo $p(u)$ satisfaz a uma equação da fórma

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$$

onde é

$$g_2 = 20a_2, \quad g_3 = 28a_4.$$

v. Para demonstrar o theorema de addição da funcção $p(u)$ consideremos as duas funcções

$$F_1(u) = p(u+v)[p(u) - p(v)]^2,$$

$$F_2(u) = \frac{1}{4}[p'(u) - p'(v)]^2 - [p(u) + p(v)][p(u) - p(v)]^2,$$

que, considerando v como constante e u como variavel, são funcções periodicas de u que admittem os mesmos periodos $2\omega_1$ e $2\omega_2$.

A primeira funcção admitte o pólo $u=0$; e, substituindo $p(u)$ pelo desenvolvimento (4) e $p(u+v)$ pelo desenvolvimento

$$p(u+v) = p(v) + up'(v) + \frac{1}{2}u^2 p''(v) + \ldots,$$

onde

$$p''(v) = 6p^2(v) - \frac{1}{2}g_2 = 6p^2(v) - 10a_2,$$

$$p'''(v) = 12p(v)p'(v),$$

temos, na visinhança d'este pólo,

$$F_1(u) = \frac{p(v)}{u^4} + \frac{p'(v)}{u^3} + \frac{p^2(v) - 5a_2}{u^2} + \frac{0}{u} + \ldots.$$

A funcção $F_2(u)$ dá do mesmo modo

$$F_2(u) = \frac{p(v)}{u^4} + \frac{p'(v)}{u^3} + \frac{p^2(v) - 5a_2}{u^2} + \frac{0}{u} + \ldots$$

Logo a differença $F_1(u) - F_2(u)$ não contém o pólo 0, nem em virtude da sua periodicidade pólo algum, e temos

$$F_1(u) - F_2(u) = C.$$

Para determinar a constante C ponha-se $u = v$, e teremos

$$F_1(v) = 0, \quad F_2(v) = 0,$$

e portanto $$C = 0.$$

Logo

$$p(u+v)[p(u) - p(v)]^2$$

$$= \frac{1}{4}[p'(u) - p'(v)]^2 - [p(u) + p(v)][p(u) - p(v)]^2,$$

d'onde resulta o theorema de addição da funcção $p(u)$

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right)^2 - p(u) - p(v).$$

VI. A egualdade

$$p'(u) = -\Sigma \frac{2}{(u - 2n\omega_1 - 2m\omega_2)^3}$$

dá, pondo $u = \omega_1$,

$$p'(\omega_1) = \Sigma \frac{2}{[(2n-1)\omega_1 + 2m\omega_2]^3}.$$

Se notarmos agora que a cada termo d'esta somma corresponde outro egual e de signal contrario, que se obtém mudando $2n-1$ em $-(2n-1)$ e m em $-m$, podemos escrever

$$p'(\omega_1)=0.$$

Do mesmo modo se mostra que é

$$p'(\omega_2)=0.$$

D'estas egualdades e da egualdade

$$p'^2(u)=4p^3(u)-g_2p(u)-g_3$$

conclue-se que $p(\omega_1)$ e $p(\omega_2)$ são raizes da equação

$$4p^3(u)-g_2p(u)-g_3=0.$$

VII. A expressão de $p(u)$ mostra que $p(u)$ não soffre alteração quando se muda o signal a uma ou a ambas as quantidades ω_1 e ω_2. A mesma expressão mostra que $p(u)$ é uma funcção *homogenea* do gráo -2 de u, ω_1 e ω_2; e temos

$$p(su,\ s\omega_1,\ s\omega_2)=\frac{1}{s^2}p(u,\ \omega_1,\ \omega_2)$$

$$=\frac{1}{s^2}p(u,\ -\omega_1,\ \omega_2)=\frac{1}{s^2}p(u,\ -\omega_1,\ -\omega_2).$$

V

Sobre a funcção $\zeta(u)$

Designa-se por $\zeta(u)$ a funcção definida pela serie absoluta e uniformemente convergente

$$(5) \qquad \zeta(u) = \frac{1}{u} + \Sigma\left[\frac{1}{u - a_c} + \frac{1}{a_c} + \frac{u}{a_c^2}\right],$$

onde a_c representa os numeros que resultam de dar a n e a m os valores

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \infty,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \infty$$

em

$$a_c = 2\, n\, \omega_1 + 2\, m\, \omega_2,$$

excluindo a combinação $n = 0, m = 0$.

Da definição de $\zeta(u)$ deduzem-se immediatamente as propriedades d'esta funcção.

I. Derivando a serie que define $\zeta(u)$ e comparando o resultado com a serie que define $p(u)$, vem

$$(6) \qquad \frac{d\zeta(u)}{du} = -p(u).$$

II. Da expressão analytica de $\zeta(u)$ resulta immediatamente que a funcção $\zeta(u)$ é regular em todo o plano, excepto nos pontos 0 e a_c que são pólos.

III. Como a cada valor de a_c corresponde outro igual e de signal contrario, a expressão de $\zeta(u)$ não muda de valor quando se muda a_c em $-a_c$. Mudando em seguida u em $-u$ torna a apparecer a mesma expressão com signal contrario. Logo temos $\zeta(-u)=-\zeta(u)$.

A funcção $\zeta(u)$ é pois impar.

IV. Da fórmula (5) tira-se immediatamente a egualdade.

$$\lim_{u=0}\left[\zeta(u)-\frac{1}{u}\right]=0. \tag{7}$$

V. A funcção $\zeta(u)$ tem um theorema de addição, que se deduz do theorema de addição da funcção $p(u)$, como vamos ver.

O theorema de addição da funcção $p(u)$ dá, como vimos,

$$p(u+v)-p(u-v)=-\frac{p'(u)\,p'(v)}{[p(u)-p(v)]^2}$$

e portanto

$$p(u+v)\,du-p(u-v)\,du=-\frac{p'(u)\,p'(v)\,du}{[p(u)-p(v)]^2}.$$

Integrando os dois membros d'esta igualdade, vem

$$\zeta(u-v)-\zeta(u+v)=\frac{p'(v)}{p(u)-p(v)}+C,$$

C representando uma constante arbitraria que se póde determinar pondo $u=0$, o que dá, attendendo ás igualdades $\zeta(-v)=-\zeta(v)$ e $p'(0)=\infty$, $C=-2\zeta(v)$.

Temos pois

$$\zeta(u-v)-\zeta(u+v)=\frac{p'(v)}{p(u)-p(v)}-2\zeta(v).$$

..

Mudando n'esta igualdade u em v e v em u, vem

$$\zeta(u-v)+\zeta(u+v)=\frac{p'(u)}{p(u)-p(v)}+2\zeta(u).$$

D'esta relação e das precedentes deduzem-se as igualdades

$$(8)\qquad \zeta(u\pm v)=\frac{1}{2}\frac{p'(u)\mp p'(v)}{p(u)-p(v)}+\zeta(u)\pm\zeta(v),$$

nas quaes consiste o theorema de addição da funcção $\zeta(u)$.

VI. A relação

$$p(u\pm 2\omega_1)=p(u)$$

dá (I).

$$\zeta(u\pm 2\omega_1)=\zeta(u)+C,$$

onde C representa uma constante, que se determina pondo $u=\pm\omega_1$, o que dá $C=\pm 2\zeta(\omega_1)$.

Logo, pondo para simplificar $\zeta(\omega_1)=\eta_1$, temos

$$(9)\qquad \zeta(u\pm 2\omega_1)=\zeta(u)\pm 2\eta_1.$$

Do mesmo modo se acha a igualdade

$$(10)\qquad \zeta(u\pm 2\omega_2)=\zeta(u)\pm 2\eta_2,$$

onde

$$\eta_2=\zeta(\omega_2).$$

VI

Sobre a funcção $\sigma(u)$

Formemos por meio do theorema de Weierstrass as funcções inteiras cujas raizes são os pólos de $p(u)$, isto é o ponto 0 e os pontos a_c, e cujos graus de multiplicidade das raizes são iguaes á unidade. Teremos

$$f(u) = e^{\varphi(u)} u \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{a_c}\right) e^{S_c},$$

$$S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{u}{a_c}\right)^2,$$

m_c devendo ser determinado pela condição de ser convergente a serie

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{u^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|.$$

Ora já vimos que esta serie é convergente quando $m_c = 2$, e temos portanto a formula

$$f(u) = e^{\varphi(u)} u \prod \left(1 - \frac{u}{a_c}\right) e^{\frac{u}{a_c} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a_c^2}}$$

que dá todas as funcções que satisfazem ás condições enunciadas.

A mais simples d'estas funcções corresponde a $\varphi(u) = 0$, e é esta que se representa por $\sigma(u)$. Temos pois

$$(11) \qquad \sigma(u) = u \prod \left(1 - \frac{u}{a_c}\right) e^{\frac{u}{a_c} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a_c^2}},$$

onde

$$a_c = 2n\omega_1 + 2m\omega_2, \quad \left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Da igualdade (11) tiram-se as propriedades da funcção $\sigma(u)$.

I. A funcção $\sigma(u)$ é inteira e as suas raizes são 0 e os numeros a_c.

II. Derivando o logarithmo de $\sigma(u)$ e comparando o resultado com a igualdade (5) vem

$$(12) \qquad \frac{d \log \sigma(u)}{du} = \zeta(u).$$

III. Quando u tende para zero, temos

$$\lim \frac{\sigma(u)}{u} = 1.$$

IV. Se notarmos que a cada valor de a_c corresponde outro igual e de signal contrario, podemos escrever a formula (11) do modo seguinte:

$$\sigma(u) = u \Pi \left(1 + \frac{u}{a_c}\right) e^{\frac{u}{a_c} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_c^2}}.$$

Mudando n'esta igualdade u em $-u$ e comparando o resultado com (11) vem $\sigma(-u) = -\sigma(u)$. Logo a funcção $\sigma(u)$ é impar.

V. Da relação (12) e da relação

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) = \frac{p'(u)}{p(u) - p(v)}$$

deduz-se

$$\frac{d}{du} \log \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)} = \frac{d}{du} \log [p(u) - p(v)],$$

e portanto

$$C\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}=p(u)-p(v),$$

onde C representa uma constante que se determina multiplicando os dois membros d'esta igualdade por u^2 e fazendo depois tender u para 0, o que dá

$$-C\sigma^2(v)\lim\frac{u^2}{\sigma^2(u)}=\lim u^2 p(u)=1,$$

e portanto

$$C=-\frac{1}{\sigma^2(v)}.$$

Temos portanto

$$(13)\qquad \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}=p(v)-p(u).$$

Esta formula importante representa para a funcção $\sigma(u)$ o papel que o theorema de addição representa para as funcções $\zeta(u)$ e $p(u)$.

VI. Da relação

$$\zeta(u\pm 2\omega_1)=\zeta(u)\pm 2\eta_1$$

tira-se

$$\frac{d}{du}\log\frac{\sigma(u\pm 2\omega_1)}{\sigma(u)}=\pm 2\eta_1,$$

e portanto

$$\frac{\sigma(u\pm 2\omega_1)}{\sigma(u)}=e^{\pm 2\eta_1 u+C},$$

onde C representa uma constante que se determina pondo

$$u=\mp\omega_1,$$

o que dá

$$\sigma(u\pm 2\omega_1)=-e^{\pm 2\eta_1(u\mp\omega_1)}\sigma(u).$$

Para o periodo ω_2 tem logar uma igualdade analoga que so tira d'esta, mudando ω_1 em ω_2.

VII. Das propriedades da funcção $\sigma(u)$ notaremos finalmente a seguinte:

$$\sigma(a-b)\,\sigma(a+b)\,\sigma(c-d)\,\sigma(c+d)$$

$$+\sigma(b-c)\,\sigma(b+c)\,\sigma(a-d)\,\sigma(a+d)$$

$$+\sigma(c-a)\,\sigma(c+a)\,\sigma(b-d)\,\sigma(b+d)=0,$$

conhecida pelo nome de equação dos tres termos, que se verifica facilmente substituindo os productos

$$\sigma(a-b)\,\sigma(a+b),\ \sigma(c-d)\,\sigma(c+d),\ldots$$

pelos seus valores em funcção de $p(a)$, $p(b)$, etc., dados pela igualdade (13).

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A F. GOMES TEIXEIRA

PAR

M. D'OCAGNE

. . . Permettez moi de revenir sur le problème d'Algèbre dont j'ai insére une solution dans votre Journal en 1887 (vol. VIII, p. 171). J'ai donné depuis, dans *l'American Journal of Mathematics* (vol. XIII, n.° 2 ; 1890), une solution plus simples de ce problème. Voici le résultat auquel je suis alors parvenu :

Si on met le polynôme

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

sous la forme

$$F(x) = b_0 + b_1 x + b_n x(x-1) + \ldots + b_n x(x-1)\ldots(x-(n-1)),$$

on a

$$b_p = K_p^p a_p + K_{p+1}^p a_{p+1} + K_{p+2}^p a_{p+2} + \ldots + K_p^p a_p.$$

Dès lors l'expression de h_p, dans la note que j'ai rappelée plus haut, peut être écrite

$$h_p = K_p^p a_p - K_{p+1}^p a_{p+1} + \ldots\ldots + (-1)^{h-p} K_p^p a_n.$$

Par identification de cette expression avec celle donnée à l'endroit cité (*Jornal*, 1887, p. 173), on a cette propriété remarquable des nombres K_n^p.

$$[1-(-1)^{n-p}]\mathrm{K}_n^p = \mathrm{C}_n^p \mathrm{K}_p^p p^{n-p} - \mathrm{C}_{n-1}^p \mathrm{K}_{p+1}^p \frac{n}{p+1} p^{n-p-1}$$

$$+ \mathrm{C}_{n-2}^p \mathrm{K}_{p+2}^p \frac{(n-1)n}{(p+2)(p+1)} p^{n-p-2}$$

$$- \ldots + (-1)^{n-p-1} \mathrm{C}_{p+1}^p \frac{p(p-1)\ldots(n-1)n}{(n+1)n\ldots(p+2)(p+1)}.$$

Cette formule fait connaître K_p^p en fonction de tous les nombres qui le précèdent dans la colonne du triangle arithmétique de définition, mais seulement *lorsque la différence* n — p *est impaire.*

Récemment, M. Laisant est revenu sur le même problème dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (t. XX, p. 6). Il a obtenu pour b^p l'expression symbolique suivante

$$b_p = \frac{1}{p!}[\varphi-1]^p,$$

avec cette convention que dans le développement du second membre φ^m doit être remplacé par $\varphi(m)$, et, en particulier, φ^0 par $\varphi(0)$. Comparant cette expression avec celle écrite plus haut, on en déduit la formule rappelée dans ce Journal (1887, p. 171) qui fait connaître la valeur de K_n^p en fonction de ses indices. . .

BIBLIOGRAPHIA

J. de Mendizábal Tamborrel. — *Tables des logarithmes à huit décimales des nombres de 1 à 125000, et des fonctions goniometriques, etc.* — *Paris, 1891.*

As novas taboas de logarithmos, que vem de publicar o illustre engenheiro geographo sr. Mendizábal Tamborrel, distinguem-se das outras taboas de logarithmos, que existem, em que o auctor, na parte relativa aos logarithmos das funcções trigonometricas, tomou para unidade, na medida dos angulos, o angulo que corresponde a uma circumferencia (a que dá o nome de *gono*), e adoptou o systema decimal para as divisões e subdivisões d'este angulo (*decigono, centigono,* etc.). Este modo de escolher a unidade de medida dos angulos tem grandes vantagens em Astronomia, como fez notar Wilarceau, de que até aqui se não podia tirar partido por causa da falta de taboas de logarithmos apropriadas. É esta falta que o sr. Tamborrel vem de supprir com a sua importante obra.

A nova collecção de taboas de logarithmos contém os logarithmos dos numeros desde 1 até 125000, com oito decimaes, e os logarithmos dos senos, cosenos, tangentes e cotangentes de centimilligone em centimilligone e de microgone em microgone, com oito decimaes para os 25000 microgonos, e com sete decimaes para os seguintes.

Os logarithmos dos numeros desde 1 até 10800 foram extrahidos pelo auctor das taboas de Callet e de Schrön. As taboas dos numeros desde 108000 até 125000 e as taboas dos logarithmos das funcções trigonometricas foram calculados pelo sr. Tamborrel.

Para tornar mais correctas as suas taboas, o auctor comparou-as com as de Prony e com as *Tables du service géographique* publicadas em França. Esta comparação levou-o tambem a descobrir alguns erros que existem n'estas duas ultimas collecções de taboas.

Para verificar as suas taboas trigonometricas comparou o auctor os logarithmos dos senos, calculados directamente, com os numeros que resultam de sommar os logarithmos dos cosenos e das tangentes, numeros que tambem havia calculado directamente.

A impressão da nova collecção de taboas foi feita em França, e é nitida e perfeita, como é essencial em obras d'esta natureza. O cuidado com que o auctor as calculou e as verificações a que as submetteu são garantia de sua exactidão.

Os astronomos e engenheiros serão, estamos certos d'isso, bem gratos ao sr. Tamborrel pela obra util que vem de publicar, tanto mais que esta obra é o fructo de um trabalho consideravel.

Henri Padé. — Premières leçons d'Algèbre élémentaire. — Paris, (Gauthier-Villars), 1892.

Contém este excellente opusculo a parte da Algebra elementar que se refere á theoria dos numeros negativos e ás operações sobre os polynomios, sendo destinado um capitulo a cada um d'estes assumptos.

O capitulo destinado á theoria dos numeros negativos é escripto com rigor e clareza taes, que o aconselharemos vivamente aos professores dos nossos Lyceus para lhes servir de modelo na exposição d'esta doutrina. Não conhecemos na verdade livro algum elementar em que ella melhor e mais completamente seja apresentada.

Para tractar a theoria d'estes numeros, o auctor affecta cada numero, considerado em valor absoluto, de um indice p ou n segundo o numero é positivo ou negativo, define e estuda as operações sobre os numeros assim considerados, e mostra finalmente que se chega aos mesmos resultados supprimindo estes indices e affectando os numeros dos signaes $+$ e $-$, attribuindo a estes signaes um duplo sentido. Depois de constituir assim a theoria dos numeros negativos, faz o sr. Padé applicação d'esta theoria ás grandezas concretas, considerando os exemplos classicos conhecidos.

No capitulo destinado á theoria dos polynomios, o auctor tracta dos polynomios inteiros relativos a uma ou mais variaveis. Estuda as propriedades d'estes polynomios relativas ás operações fundamentaes, mostrando a analogia d'estas propriedades com as propriedades dos numeros inteiros demonstradas na Arithmetica.

O livro é precedido de um prefacio do sr. J. Tannery, em que este sabio professor, ao mesmo tempo que faz o elogio do trabalho do sr. Padé, apresenta observações cheias de interesse sobre o ensino dos pontos de Algebra, considerados n'aquelle trabalho.

John Gray. — *Les machines électriques à influence.* — *Paris, 1892* (*Livraria Gauthier-Villars*, 5 fr.)

Esta obra, escripta pelo auctor em inglez, foi muito bem acolhida em Inglaterra. Porisso o sr. G. Pelissier a traduziu em francez, enriquecendo-a ao mesmo tempo de notas importantes e completando-a por meio de um Appendice em que se acham algumas informações omittidas pelo sr. Gray ou posteriores á apparição da edição ingleza.

A presente obra é a primeira, especialmente consagrada á theoria e á historia das machinas electricas de influencia, que apparece.

Divide-se em tres partes, na primeira das quaes se dá um resumo dos primeiros principios de electricidade statica; na segunda a historia das machinas electricas de influencia e a descripção das machinas de Varley, Toepler, Holtz, Wimshurst, W. Thompson, etc.; na terceira o meio de construir practicamente estas machinas.

M. Lerch. — *Sur une extension de la formule de Frullani* (*Bolletin da Academia bohemia de Praga, 1891*).

——— *Contribution à la théorie des fonctions elliptiques, des séries e des intégrales définies* (*Item*).

——— *Déduction nouvelle d'une formule de Legendre* (*Item*).

——— *Démonstration élémentaire de la formule asymptotique rélative aux polynômos de Legendre* (*Item*).

N'esta serie de artigos apresenta o sr. Lerch varios resultados importantes relativos ao calculo integral. Entre elles mencionaremos a formula seguinte:

$$\int_a^b [f(x) - f(\varphi)\,\varphi'(x)]\,dx = \mathrm{A}\log\varphi'(x) - \mathrm{B}\log\varphi'(b),$$

$$\mathrm{A} = \lim_{x=a}(x-a)f(x),\ \mathrm{B} = \lim_{x=b}(x-b)f(x),$$

que contém como caso particular a formula de Frullani; e o theorema seguinte:

Se $f(t)$ representar uma funcção uniforme no interior do circulo $|t| = 1$, não admittindo senão pólos simples $c_1, c_2 \ldots, c_m$ a que correspondem os residuos $R_1, R_2, \ldots, R_m$, e se a representar uma fracção positiva tal que o intervallo $(0\ldots a)$ não contenha nenhum d'aquelles pólos, temos

$$\int_0^{2a} f(e^{i\varphi})\,e^{\alpha i\varphi}(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta-1}d\varphi$$

$$= 2\,\mathrm{sen}\,\beta\,\pi\int_0^a f(\varphi)\,t^{\alpha-\beta}(t-a)^{\beta-1}(1-at)^{\beta-1}\,dt$$

$$+ 2\pi\sum_{v=1}^{m}\mathrm{R}_v(1-ac_v)^{\beta-1}\left(1-\frac{a}{c_v}\right)^{\beta-1}c_v^{\alpha-1},$$

onde α representa um inteiro nullo ou positivo tal que a parte real de $\alpha - \beta$ seja superior a -1.

G. Loria. — Esame di alcune richerche concernenti l'esistenza di radici nelle equasioni algebriche (Bibliotheca mathematica, 1891).

N'este artigo o auctor resume e completa em alguns pontos o artigo de que se deu noticia na pag. 143 d'este volume.

M. Lerch. — Uber eine characteristiche Eigenschaft der Gattungen von Geschlechte Null (Monatshefte für Mathematik, t. II).

G. T.

FIM DO VOLUME X.

INDICE