JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Escola Polytechnica do Porto,
Antigo Professor na Universidade de Coimbra,
Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME VIII

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1887

SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. Lerch

(à Prague)

Je prends la liberté de vous communiquer une démonstration d'une propriété de la fonction elliptique

$$\Theta(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\nu^2\tau\pi i},$$

où le coefficient de i dans la quantité complexe τ est supposé positif.

Dans les *Monatsberichte* de Berlin de 1880 Mr. Weierstrass dit que cette fonction n'existe que pour les valeurs de τ dont la partie imaginaire est positive, c'est-à-dire pour lesquelles le module de la quantité $q = e^{\tau\pi i}$ est inférieur à l'unité.

Il en a donné une démonstration dans son excellent livre *Abhandlungen aus der functionenlehre* (1886). Dans le tome cité des *Monatsberichte* se trouve aussi un article de Mr. Kronecker (Ueber den vierten Gauss'schen Beweis etc.) contenant un grand nombre des remarques méthodiques relatives à la théorie des fonctions elliptiques. L'étude de ce mémoire m'a inspiré une autre démonstration de la dicte propriété de la fonction $\Theta(\tau)$ que j'ai faite avant la lecture du livre cité de Mr. Weierstrass et qui est bien différente de celle qui a été donné par l'éminent géomètre de Berlin.

*

Soit α une quantité réelle positive et prenons

$$\tau = \frac{2m}{n} + \alpha i, \quad \alpha > 0$$

m, n étant deux nombres entiers; nous aurons évidemment

$$\Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2m\nu^2}{n}\pi i} e^{-\alpha\pi\nu^2};$$

posant alors

$$\nu = r + \mu n, \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

il vient

$$(1) \qquad \Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{2mr^2}{n}\pi i} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2}.$$

Il s'agit ici de la manière dont se comporte la fonction

$$\Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right)$$

pour les valeurs infiniment petites de α, ce qui sera connu quand on reconnaîtra le caractère correspondant de la série

$$(2) \qquad S_r = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2}.$$

C'est pourquoi je me borne à l'étude des séries

$$S'_r = \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2}, \quad S''_r = \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\alpha\pi(-r+\mu n)^2}$$

dont la somme est évidemment égale à S_r.

La fonction $e^{-\alpha\pi(r+zn)^2}$ de la variable réelle z décroissant quand

z croît depuis zéro jusqu'à l'infini nous avons d'après un théorème élémentaire

$$e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2} > \int_{\mu}^{\mu+1} e^{-\alpha\pi(r+zn)^2} dz > e^{-\alpha\pi(r+\mu n+n)^2}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$ne^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2} > \int_{r+\mu n}^{r+(\mu+1)n} e^{-\alpha\pi x^2} dx > e^{-\alpha\pi(r+\mu n+n)^2}.$$

En y posant successivement $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ et en faisant la somme des résultats nous aurons

$$n \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2} > \int_{r}^{\infty} e^{-\alpha\pi x^2} dx > n \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2}$$

d'ou l'on conclut l'égalité

$$nS'_r = \int_{r}^{\infty} e^{-\alpha\pi x^2} dx + n\varepsilon e^{-\alpha\pi r^2}, \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Posant $z = x\sqrt{\alpha}$ il vient

$$\int_{r}^{\infty} e^{-\alpha\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{r\sqrt{\alpha}}^{\infty} e^{-\pi z^2} dz$$

et par conséquent

$$n\sqrt{\alpha}S'_r = \int_{r\sqrt{\alpha}}^{\infty} e^{-\pi z^2} dz + n\varepsilon\sqrt{\alpha} e^{-\alpha\pi r^2}$$

d'où on tire la formule

$$n \lim_{\alpha=0} \sqrt{\alpha}\, S'_r = \int_{0}^{\infty} e^{-\pi z^2} dz = \frac{1}{2}.$$

On trouve de la même manière

$$n \lim_{\alpha=0} \sqrt{\alpha}\, S''_r = \frac{1}{2},$$

de sorte qu'on aura

$$(3) \qquad n \lim_{\alpha=0} \sqrt{\alpha}\, S_r = 1.$$

Donc nous aurons d'après l'équation (1)

$$(4) \qquad \lim_{\alpha=0} \Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right)\sqrt{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{2mr^2}{n}\pi i} = \Phi\left(\frac{2m}{n}\right).$$

Supposons donc qu'il existe pour une certaine valeur réelle τ_0 une série de la forme

$$c_0 + c_1(\tau - \tau_0) + c_2(\tau - \tau_0)^2 + \ldots + c_\nu(\tau - \tau_0)^\nu + \ldots$$

convergente dans un certain entourage du point τ_0, et que, pour les valeurs de τ de cet entourage ayant la partie imaginaire positive, cette série soit égale à la fonction $\Theta(\tau)$. Cette supposition exige, pour chaque valeur rationnelle $\frac{2m}{n}$ contenue dans l'intervalle $(\tau_0 - \rho \ldots \tau_0 + \rho)$, que la limite $\lim_{\alpha=0} \Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right)$ soit finie, de sorte qu'on ait, d'après (4), $\Phi\left(\frac{2m}{n}\right) = 0$. Mais c'est impossible puisqu'on sait depuis Gauss et Dirichlet que chaque intervalle contient une infinité des nombres rationnels $\frac{2m}{n}$ tels que $\Phi\left(\frac{2m}{n}\right)$ est différent de zéro. Donc la fonction $\Theta(\tau)$ n'existe point pour les valeurs réelles de τ de sorte que l'axe réel est une *ligne singulière* de la fonction $\Theta(\tau)$ ce qui est le théorème en question.

Vous voyez, Monsieur, que la démonstration de la formule (3) que je viens de développer est au fond la même qui a été donnée par Poisson et Cauchy, mais elle est exacte tandis que celles-ci ne le sont pas. A la manière dont j'ai obtenu la formule (3) peut être substituée avec succès la suivante qui repose sur le théorème de Poisson exprimé par la formule

$$\theta_3(u\,|\,\tau)=\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)e^{-\frac{\pi i}{\tau}u^2}\,\theta_3\left(\frac{u}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right),$$

où

$$\theta_3(u\,|\,\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(\nu^2\tau+2\nu u)}$$

et où $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ désigne, d'après Mr. Kronecker, celle des deux valeurs de la racine $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$ dont la partie réelle est positive.

En effet on voit d'après l'équation (2) que

$$S_r=e^{-\alpha\pi r^2}\,\theta_3(n\alpha i\,|\,n^2\alpha i);$$

en y appliquant la formule de Poisson on trouve

$$\theta_3(n\alpha i\,|\,n^2\alpha i)=\sqrt{\frac{1}{n^2\alpha}}\,e^{\alpha\pi}\,\theta_3\left(\frac{1}{n}\middle|\frac{i}{n^2\alpha}\right)$$

d'où on tire

$$\lim_{\alpha=0} n\sqrt{\alpha}\,\theta_3(n\alpha i\,|\,n^2\alpha i)=\lim_{\alpha=0}\theta_3\left(\frac{1}{n}\middle|\frac{i}{n^2\alpha}\right)=1$$

d'où l'on a la relation cherchée (3).

Vous avez reçu sans doute ma petite note «*Contributions à la théorie des fonctions*» (insérée dans la Société Roy. des Sciences de Bohême en 1886) où j'ai développé une démonstration de ce que la fonction $\theta_3(u\,|\,\tau)$ a l'axe réel dans le plan des τ pour *ligne singulière* quelle que soit la valeur de u (à l'exception du cas où cette fonction s'annulle pour chaque valeur de τ), et cette démonstration a été extremement facile pour les valeurs complexes de u. Dans le même mémoire j'ai démontré que la fonction

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{2^\nu}$$

n'existe que pour les valeurs de z dont le module est moindre que l'unité. Voici une autre démonstration de ce fait.

Posons $z = e^{\pi i x}$ en supposant positive la partie imaginaire de x. En écrivant

$$\Phi(e^{\pi i x}) = f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{2^\nu \pi i x}$$

nous aurons

$$(a) \qquad f\left(\frac{m}{2^{n-1}} + \alpha i\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2^{\nu-n+1}\pi i - \alpha\pi 2^\nu} + \sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\alpha\pi 2^\nu},$$

m, n étant deux nombres entiers, le premier quelconque, le second positif, et α désignant une quantité réelle et positive.

Considérons la fonction

$$\varphi(\alpha) = \sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\alpha\pi 2^\nu}$$

qui figure dans le second membre de l'équation (a).

L'inégalité évidente

$$e^{-\alpha\pi 2^\nu} > \int_\nu^{\nu+1} e^{-\alpha\pi 2^z} dz > e^{-\alpha\pi 2^{\nu+1}}$$

nous offre la suivante

$$\varphi(\alpha) > \int_n^{\infty} e^{-\alpha\pi 2^z} dz > -e^{-\alpha\pi 2^n} + \varphi(\alpha)$$

d'où nous aurons

$$(b) \qquad \varphi(\alpha) = \int_n^{\infty} e^{-\alpha\pi 2^z} dz + \varepsilon e^{-\alpha\pi 2^n}, \ (0 < \varepsilon < 1).$$

Posant maintenant $\alpha 2^z = t$ il vient

$$\int_n^\infty e^{-\alpha\pi 2^z}\, dz = c\int_{\alpha 2^n}^\infty e^{-\pi t}\frac{dt}{t}, \quad c = \frac{1}{\lg 2}.$$

Or cette intégrale est une fonction de la forme $c \lg \alpha + \psi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ étant inférieur à une certaine limite finie indépendante de la valeur positive de la quantité suffisemment petite α, de sorte que l'on a suivant l'équation (b)

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\varphi(\alpha)}{\lg \alpha} = \frac{1}{\lg 2}$$

et, par conséquent, la formule

$$\lim_{\alpha=0} \frac{f\left(\dfrac{m}{2^n} + \alpha i\right)}{\lg \alpha} = \frac{1}{\lg 2}$$

d'où l'on conclut facilement le théorème dont il s'agit.

J'ai déjà remarqué que la méthode appliquée par Poisson et Cauchy pour la démonstration de la formule (3) est inexacte. Elle consiste dans le changement d'une série en une intégrale définie, changement tout à fait analogue à celui dont je vais affirmer l'illégitimité. Pour démontrer la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

on s'est servi du raisonnement suivant: «Soit δ une quantité positive moindre que π, et considérons la formule

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin \nu\delta}{\nu\delta}\,\delta = \frac{\pi - \delta}{2};$$

en posant $\dfrac{\sin x}{x} = \psi(x)$ elle devient

$$\sum_{\nu=1}^\infty \psi(\nu\delta)\,\delta = \frac{\pi - \delta}{2}.$$

Or pour les valeurs infiniment petites de δ le premier membre s'échange en

$$\int_0^\infty \psi(x)\,dx, \quad \text{etc.»}$$

Vous voyer, Monsieur, que ce passage de la somme $\Sigma\psi(\nu\delta)\,\delta$ à l'intégrale $\int_0^\infty \psi(x)\,dx$ est inadmissible et il pourrait conduire aux résultats inexactes; il est donc lui même à rejeter si on ne le peut modifier d'une telle manière comme je l'ait montré plus haut dans deux cas très-simples.

NOTE SUR LES NOMBRES PARFAITS

PAR

H. NOVARESE

(à Turin)

Le n.° de novembre 1886 de *Mathesis* donne (d'après une lettre de M. Ed. Lucas) l'énoncé de deux propositions sur les nombres parfaits pairs. Voici une démonstration de ces théorèmes.

THÉORÈME I. — *Tout nombre parfait pair autre que* 6 *est un multiple de* 9, *plus* 1 (*a*).

Soit N un nombre parfait pair supérieur à 6. On aura nécessairement (*b*)

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

où n est un nombre premier > 2, puisqu'on a exclu le nombre parfait 6, et, par suite, est impair. On peut donc écrire $n = 2\nu + 1$.

Cela étant, si l'on pose

$$2^n - 1 = 2m + 1,$$

m désignant un entier positif, il vient

$$2^{n-1} = m + 1.$$

(*a*) Ce théorème est déjà énoncé dans une note de M. Carvallo insérée aux *Comptes Rendus* de l'Académie de Paris, t. LXXXI (1875), pp. 73-75. J'ignore si M. Carvallo en a publié une démonstration.

(*b*) On sait que tous les nombres parfaits pairs rentrent dans la forme indiquée par Euclide. V. *American Journal of Mathem.*, vol. I, pp. 234-35, ou *Mathesis*, t. VI, pp. 146-47.

Je dis que le nombre m est de la forme 3μ, μ étant un entier impair. En effet

$$2^{n-1}=2^{2\nu}=4^{\nu}$$

et, par suite,

$$m=4^{\nu}-1=(4-1)(4^{\nu-1}+4^{\nu-2}+\ldots+1)=3\mu.$$

Il en résulte

$$2^{n-1}=3\mu+1,\quad 2^{n}-1=6\mu+1;$$

et, en substituant dans (1),

$$N=(3\mu+1)(6\mu+1)=9(2\mu^2+\mu)+1,$$

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Tout nombre parfait pair qui n'est pas terminé par 6 est nécessairement terminé par 28* (*c*).

Je vais déduire cette proposition de la précédente, en faisant voir que le nombre $2\mu^2+\mu$ est nécessairement terminé par 5 ou par 03 (*d*). A cet effet, j'aurai recours au lemme suivant, qu'il est aisé d'établir:

Toute puissance impaire de 4 a pour dernier chiffre 4 et pour avant-dernier chiffre un nombre pair; toute puissance paire de 4 (4^0 est censé exclu) a pour dernier chiffre 6 et pour avant-dernier chiffre un nombre impair (*e*).

De là résulte que, si l'on additionne une puissance impaire et

(*c*) M. Carvallo dit (Note citée):

«Les nombres parfaits (*pairs*) forment deux séries: 1° $2^{4p}(2^{4p+1}-1)$, nombres parfaits terminés par un 6; 2° $2^{4p+2}(2^{4p+3}-1)$, nombres parfaits terminés par un 8.»

(*d*) Evidemment, peu importe si de cette manière on laisse de côté le nombre parfait 6.

(*e*) L'avant-dernier chiffre de $4^{2\alpha-1}$ est $\overline{6(\alpha-1)}$, l'avant-dernier chiffre de $4^{2\alpha}$ est $\overline{4(\alpha-1)+1}$. Par la notation $\bar{a}$ j'entends le nombre a ou bien son dernier chiffre, suivant que a est <10 ou $\overline{>}\ 10$.

une puissance paire de 4, on obtient un nombre dont le dernier chiffre est 0 et l'avant-dernier chiffre est un nombre pair. En particulier, $4^{2\alpha-1}+4^{2\alpha}$ finit par 20. Cela posé, il faut distinguer deux cas, suivant que ν est pair ou impair, c'est-à-dire suivant que n est de la forme $4\nu'+1$ ou de la forme $4\nu'+3$.

1er cas. $\nu=2\nu'$. Puisque

$$\mu=1+4+4^2+\ldots+4^{2\nu'-1},$$

le nombre $\mu-1$ sera la somme de ν' puissances impaires et de $\nu'-1$ puissances paires de 4. Donc son dernier chiffre sera 4. Par suite μ sera terminé par 5, μ^2 par 5, $2\mu^2$ par 0 et $2\mu^2+\mu$ par 5. (V. Remarque 1.)

2ème cas. $\nu=2\nu'+1$. Dans ce cas le nombre $\mu-1$ est la somme de ν' binômes du type $4^{2\alpha-1}+4^{2\alpha}$. Par conséquent son dernier chiffre sera 0 et son avant-dernier chiffre sera $\overline{2\nu'}$. On en déduit que les deux derniers chiffres de $2\mu^2+\mu$ sont $\overline{10\nu'}$ et 3, c'est-à-dire 03.

En résumé, il est établi que le nombre $2\mu^2+\mu$ se termine toujours par 5 ou par 03, C. Q. F. D. On voit de plus qu'il se vérifie une chose ou l'autre et que, par conséquent, N finit par 6 ou par 28, suivant que n est de la forme $4\nu'+1$ ou de la forme $4\nu'+3$.

Remarques 1. Lorsque ν est pair, l'avant-dernier chiffre de N n'est pas toujours le même, mais change d'après la valeur de ν. Toutefois il est facile de déterminer ce chiffre en fonction de ν. D'après ce qui précède [en égard à la note (*e*)], on trouve que μ a pour avant-dernier chiffre $\overline{8(\nu'-1)}$; d'où il suit que $2\mu^2+\mu$ a pour avant-dernier chiffre $\overline{8\nu'-3}$. On en conclut que l'avant-dernier chiffre de N est $\overline{4+9(8\nu'-3)}=\overline{\nu-3}$.

2. Lorsque ν est pair, le nombre $2\mu^2+\mu$, étant terminé par 5, est divisible par 5. Donc: *Tout nombre parfait* (*autre que* 6) *terminé par* 6 *est un multiple de* 45, *plus* 1 (*f*).

3. On peut écrire évidemment

$$N=3\,[3\,(2\mu^2+\mu)+1]-2.$$

(*f*) Comp. Carvallo, note citée, p. 75.

Lorsque ν est impair, $2\mu^2+\mu$ étant terminé par 03,

$$3(2\mu^2+\mu)+1$$

sera terminé par 10 et, par suite, sera divisible par 10. Donc: *Tout nombre parfait terminé par 8 est un multiple de 30, moins 2* (*g*).

Turin, 3 décembre 1886.

(*g*) Comp. Carvallo, note citée, p. 75.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES SÉRIES

(Extraits d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

E. CESARO
Professeur à l'université de Palermo

.... Ce fait (*) est, d'ailleurs, extrêmement probable pour les séries à convergence absolue, lorsque le produit nu_n subit des oscillations. Si, en effet, dans une série convergente, à termes positifs, le rapport de deux termes consécutifs tend vers une limite λ, finie et déterminée, on sait que $\lambda \leqq 1$. Par suite, si $\lambda < 1$, et si ε est suffisamment petit pour que l'on ait encore $\lambda + \varepsilon < 1$, il existe un nombre *fini* ν, tel que, pour $n > \nu$, on a toujours

$$u_n < (\lambda + \varepsilon)^{n-\nu} u\ ;$$

puis, pour n infini,

$$lim.\ n^r u_n = 0,$$

r étant arbitrairement grand, mais *fini*. Si le rapport de deux termes consécutifs tend vers l'unité, soit λ la limite de $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$. Ayant pris $r < \lambda$, supposons que le nombre positif ε soit inférieur à $\lambda - r$, ce qui exige que cette différence, arbitrairement petite, *ne soit pas nulle*. On démontre sans peine que, ν étant un nombre fini, suffisamment grand, on a

$$u_n < \frac{u_\nu}{\left(1 + \frac{\lambda - \varepsilon}{\nu}\right)\left(1 + \frac{\lambda - \varepsilon}{\nu + 1}\right) \cdots \left(1 + \frac{\lambda - \varepsilon}{n - 1}\right)},$$

(*) Veja-se o final da carta anterior do mesmo geometra, publicada a pag. 171 do vol. VII d'este jornal. Na presente carta continua o sr. Cesáro o assumpto da anterior.

d'où l'on déduit $lim. n^r u_n = 0$. La condition $r \leqq \lambda$ est d'ailleurs nécessaire; car, à cause de

$$u_n > \frac{u_\nu}{\left(1+\frac{\lambda+\varepsilon}{\nu}\right)\left(1+\frac{\lambda+\varepsilon}{\nu+1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda+\varepsilon}{n-1}\right)},$$

ε étant moindre que $r-\lambda$, le produit $n^r u_n$ augmente au-delà de toute limite, si r surpasse λ: il ne saurait tendre vers une limite finie et déterminée, différente de zéro, que pour $r = \lambda$. . . . . En particulier, si $\lambda > 1$, auquel cas la série est convergente, on peut affirmer que nu_n tend à zéro. En résumé, nous voyons que, si, dans une série convergente, à termes positifs, le produit nu_n oscille, au lieu de tendre à zéro, le rapport de deux termes consécutifs oscille également, à moins qu'il ne tende à l'unité. Il n'est pas dit que cette dernière éventualité soit possible; mais, si elle se présente dans quelque série, il est certain que la règle de Raabe et Duhamel ne suffira, dans aucun cas, pour en constater la convergence . . . . J'applique maintenant le théorème de M. Cahen, d'après lequel, si la série est convergente, le produit de n par $\frac{nu_n}{u_{n+1}}-(n+1)$ doit augmenter à l'infini, à moins qu'il n'oscille. De sorte que, N étant arbitrairement grand, il existe un nombre fini ν, tel que le produit en question surpasse N, dès que n surpasse ν. On en déduit aisément

$$nu_n < \frac{\nu u_\nu}{\left[1+\frac{4N}{(2\nu+1)^2}\right]\left[1+\frac{4N}{(2\nu+3)^2}\right]\cdots\left[1+\frac{4N}{(2n-1)^2}\right]}.$$

Donc, encore une fois, $lim. n^r u_n = 0$, si $r < 1$. Du reste, la dernière inégalité donne $nu_n < \nu u_\nu$. Lorsque N croît à l'infini, il existe donc une série de nombres indéfiniment croissants, ν, ν', ν'', ν''', . . ., tels que l'on a $\nu u_\nu > \nu' u_{\nu'} > \nu'' u_{\nu''} > \ldots$. Si, comme cela est fort probable, cette série n'est pas à fréquence infinitésimale, on pourra dire que nu_n tend à zéro, au moins pour un système spécial de valeurs de n . . . .

SOBRE O DESENVOLVIMENTO EM SERIE DAS FUNCÇÕES DE VARIAVEIS IMAGINARIAS

POR

F. Gomes Teixeira

1. O theorema de Taylor, demonstrado primeiro para o caso das variaveis reaes, foi por Cauchy estendido ao caso das variaveis imaginarias. Baseando-se em propriedades por elle descobertas dos integraes das funcções de variaveis imaginarias, deu uma expressão do resto da serie de Taylor do qual deduziu um dos mais bellos theoremas d'Analyse mathematica.

Não se limitou, porém, este eminente geometra em considerar esta doutrina por este lado superior. Tomando a questão debaixo do ponto de vista elementar, demonstrou a serie de Taylor dando outra expressão do resto sufficiente para o estudo do desenvolvimento das funcções elementares $(1+z)^k$, e^z, $\log(1+z)$, $\operatorname{sen} z$, ...

Occuparam-se depois da mesma questão, e chegaram a outras expressões do resto da serie de Taylor, os srs. Darboux e Falk, o primeiro n'uma memoria intitulada: *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable* (*Jornal de Liouville*, 3.ª série, t. II), e o segundo n'uma memoria intitulada: *Sur les fonctions imaginaires, à l'égard spécial du calcul des résidus* (Upsal, 1887).

Vem, finalmente, de se occupar d'este assumpto o sr. Mansion, professor na Universidade de Gand, n'uma memoria importante intitulada: *Principes d'une théorie nouvelle des fonctions d'une variable imaginaire* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. IX) e n'um artigo publicado no *Bulletin de l'Académie de Belgique* (3.ª serie, t. X). N'estes trabalhos o illustre geometra expõe completamente a parte elementar da theoria do desenvolvimento em serie, ordenada segundo as potencias da variavel, das funcções de variaveis imaginarias, dando uma expressão nova do resto da serie de Taylor, demonstrando as expressões d'este resto dadas pelos srs. Darboux e Falk por um methodo diverso do que empregaram estes geometras, e tractando de uma maneira completa dos desenvolvimentos em serie das funcções $(1+z)^k$, e^z, $\log(1+z)$, $\operatorname{sen} z$.

No presente trabalho vamos tirar da expressão do resto, devida ao sr. Mansion, a extensão ás funcções de variaveis imaginarias de uma fórmula que publicámos no nosso artigo intitulado: *Sur une formule d'Analyse* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª serie, t. v); e d'este resultado tiraremos em seguida uma expressão nova do resto da serie de Taylor, completamente similhante á que tem logar no caso das variaveis reaes. Para mais clareza demonstraremos primeiramente um theorema de Cauchy, que serve de base a esta theoria, e o theorema do sr. Mansion.

2. THEOREMA I. — *Se a funcção* $f(z)$ *tiver uma derivada finita e determinada para todos os valores que toma* z *quando passa de* z_0 *a* Z, *descrevendo uma recta que una estes dois pontos, será* (*)

$$(1) \qquad f(Z)-f(z_0)=\mathrm{R}\left[(Z-z_0)f'(z_1)\right]+\mathrm{I}\left[(Z-z_0)f'(z_2)\right]$$

z_1 *e* z_2 *representando dois valores de* z *comprehendidos no caminho seguido por* z *para ir de* z_0 *a* Z.

Seja AB a recta descripta pelo ponto z; Cx e Cy os eixos coordenados; O o ponto em que a recta corta o eixo das absissas; A, M, B os pontos que representam os imaginarios z_0, z, Z; ω o angulo BOx da recta com o eixo das abscissas; e ρ_0, ρ, ρ' e a as distancias OA, OM, OB e CO. Será

$$z=\mathrm{CP}+i\mathrm{MP}=a+\mathrm{OP}+i\mathrm{MP}$$

$$=a+\rho(\cos\omega+i\operatorname{sen}\omega)$$

$$=a+\rho e^{i\omega}$$

onde

$$i=\sqrt{-1},$$

(*) Pelas notações R (A) e I (A) representa-se a parte real e a parte imaginaria de A.

e do mesmo modo

$$z_0 = a + \rho_0 e^{i\omega}$$

$$Z = a + \rho' e^{i\omega}.$$

Logo temos

$$f(z) = f(a + \rho e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\,\psi(\rho),$$

e, derivando relativamente a ρ,

$$e^{i\omega} f'(z) = \varphi'(\rho) + i\,\psi'(\rho).$$

Applicando agora ás funcções $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ um theorema bem conhecido, vem

$$\varphi(\rho') = \varphi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,\varphi'(\rho_1)$$

$$\psi(\rho') = \psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,\psi'(\rho_2),$$

ρ_1 e ρ_2 representando dois valores de ρ correspondentes a dois valores z_1 e z_2 de z comprehendidos no intervallo AB.

Temos pois

$$f(Z) = \varphi(\rho') + i\,\psi(\rho')$$

$$= \varphi(\rho_0) + i\,\psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,[\varphi'(\rho_1) + i\,\psi'(\rho_2)]$$

$$= f(z_0) + (\rho' - \rho_0)\,\{\mathrm{R}\,[e^{i\omega} f'(z_1)] + \mathrm{I}\,[e^{i\omega} f'(z_2)]\}$$

ou

$$f(Z) = f(z_0) + \mathrm{R}\,[(Z - z_0)\,f'(z_1)] + \mathrm{I}\,[(Z - z_0)\,f'(z_2)]$$

por ser

$$e^{i\omega}(\rho' - \rho_0) = Z - z_0.$$

Está pois demonstrada a formula (1) devida a Cauchy. D'esta formula vamos tirar o theorema seguinte, devido ao sr. P. Mansion:

3. Theorema II. — *Se a funcção* f(z) *tiver uma derivada finita e determinada para todos os valores que toma* z *quando* *passa de* z_0 *para* Z *descrevendo uma recta que una estes dois pontos, será*

$$(2) \quad f(Z) - f(z_0) = \lambda \sqrt{2}\, e^{ai} (Z - z_0) f'[z_0 + \theta (Z - z_0)],$$

λ e θ *representando quantidades reaes positivas comprehendidas entre* 0 *e* 1.

Este theorema é demonstrado pelo sr. Mansion do modo seguinte (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 3.ª serie, t. x):

Pondo na formula (1)

$$Z - z_0 = B e^{ib}$$

$$f'(z_1) = C e^{ic}, \quad f'(z_2) = D e^{id}$$

vem

$$f(Z) - f(z_0) = BC \cos(b + c) + BD\, i \operatorname{sen}(b + d) = H e^{ih}$$

onde

$$H^2 = B^2 C^2 \cos^2(b + c) + B^2 D^2 \operatorname{sen}^2(b + d).$$

Suppondo agora $C > D$, vem

$$H^2 \overline{\gtrless} 2 B^2 C^2$$

e portanto

$$H = \lambda BC \sqrt{2},$$

onde λ representa um factor positivo egual ou inferior á unidade.

Logo temos a formula

$$f(Z) - f(z_0) = \lambda \sqrt{2}\, e^{i(h-b-c)} (Z - z_0) f'(z_1),$$

que dá a formula (2), pondo $h - b - c = a$, e notando que das relações

$$Z - z_0 = (\rho' - \rho_0)\, e^{i\omega}$$

$$z_1 - z_0 = (\rho_1 - \rho_0)\, e^{i\omega}$$

$$\rho_1 - \rho_0 < \rho' - \rho_0$$

se tira

$$\rho_1 - \rho_0 = \theta(\rho' - \rho_0)$$

e portanto

$$z_1 - z_0 = \theta(Z - z_0),$$

θ representando uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Se fôr $D > C$ demonstra-se o theorema do mesmo modo pondo $H = \lambda BD\sqrt{2}$.

A formula do sr. Mansion, que vimos de deduzir, serve para o mesmo fim que a formula anteriormente dada pelo sr. Darboux:

$$f(Z) - f(z_0) = \lambda e^{\alpha i}(Z - z_0) f'(z_1),$$

mas a demonstração d'esta ultima é menos simples do que a precedente.

4. Theorema III. — *Se as funcções* $f(z)$ *e* $F(z)$ *e as suas derivadas* $f'(z), f''(z), \ldots, f^n(z), F'(z), F''(z), \ldots, F^m(z)$ *fossem finitas e determinadas para todos os valores que toma* z *quando passa de* z_0 *a* Z *descrevendo uma recta que una estes dois pontos, será*

$$\frac{f(Z) - f(z_0) - (Z - z_0) f'(z_0) - \ldots - \dfrac{(Z - z_0)^l}{l!} f^l(z_0)}{F(Z) - F(z_0) - (Z - z_0) F'(z_0) - \ldots - \dfrac{(Z - z_0)^k}{k!} F^k(z_0)}$$

$$= \frac{\dfrac{(Z - z_0)^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(z_0) + \ldots + \dfrac{(Z - z_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(z_0) + R_n}{\dfrac{(Z - z_0)^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(z_0) + \ldots + \dfrac{(Z - z_0)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(z_0) + R'_m}$$

onde

$$R_n = \lambda\sqrt{2}\, e^{\alpha i} \frac{(Z - z_0)^n (1 - \theta)^{n-1} f^{n-1}[z_0 + \theta(Z - z_0)]}{(n-1)!}$$

$$R'_m = \lambda\sqrt{2}\, e^{\alpha i} \frac{(Z - z_0)^m (1 - \theta)^{m-1} F^{m-1}[z_0 + \theta(Z - z_0)]}{(m-1)!}.$$

Este theorema que demonstrámos, no caso das variaveis reaes, no nosso artigo: *Sur une formule d'Analyse*, demonstra-se por um meio semelhante no caso das variaveis imaginarias, como vamos vêr.

Consideremos a funcção

$$\varphi(u) = f(z_0) + (Z - z_0) f'(z_0) + \ldots + \frac{(Z - z_0)^l}{l!} f^l(z_0)$$

$$- f(u) - (Z - u) f'(u) - \ldots - \frac{(Z - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(u)$$

$$- \left[F(z_0) + (Z - z_0) F'(z_0) + \ldots + \frac{(Z - z_0)^k}{k!} f^k(z_0) \right.$$

$$\left. - F(u) - (Z - u) F'(u) - \ldots - \frac{(Z - u)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(u) \right]$$

$$\times \frac{f(Z) - f(z_0) - (Z - z_0) f'(z_0) - \ldots - \dfrac{(Z - z_0)^l}{l!} f^l(z_0)}{F(Z) - F(z_0) - (Z - z_0) F'(z_0) - \ldots - \dfrac{(Z - z_0)^k}{k!} F^k(z_0)}.$$

Applicando-lhe o theorema II, vem

$$\varphi(Z) = \varphi(z_0) + \lambda \sqrt{2}\, e^{\alpha i} (Z - z_0)\, \varphi' [z_0 + \theta (Z - z_0)],$$

o que dá, suppondo $n \gtreqless l + 1$, $m \gtreqless k + 1$,

$$0 = - \frac{(Z - z_0)^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(z_0) - \ldots - \frac{(Z - z_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(z_0)$$

$$- \left[- \frac{(Z - z_0)^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(z_0) - \ldots - \frac{(Z - z_0)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(z_0) \right]$$

$$\times \frac{f(Z)-f(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z_0)^l}{l!}f^l(z_0)}{F(Z)-F(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z_0)^k}{k!}F^k(z_0)}$$

$$+(Z-z_0)\left\{-\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^n[z_0+\theta(Z-z_0)]\right.$$

$$+\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^{m-1}(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}F^m[z_0+\theta(Z-z_0)]$$

$$\left.\times\frac{f(Z)-f(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z_0)^l}{l!}f^l(z_0)}{F(Z)-F(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z_0)^k}{k!}F^k(z_0)}\right\}.$$

D'esta equação tira-se o theorema enunciado, resolvendo-a em ordem a

$$\frac{f(Z)-f(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z_0)^l}{l!}f^l(z_0)}{F(Z)-F(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z_0)^k}{k!}F^k(z_0)}.$$

Podia-se evidentemente estabelecer tambem o theorema enunciado applicando á funcção $\varphi(u)$ o theorema do sr. Darboux.

5. THEOREMA IV. — *Se as funcções $f(z)$, $f'(z)$, ..., $f^n(z)$ forem finitas e determinadas no intervallo de z_0 a Z, teremos*

$$f(Z)=f(z_0)+(Z-z_0)f'(z_0)+\frac{(Z-z_0)^2}{2!}f''(z_0)+\ldots$$

$$+\frac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)}f^{n-1}(z_0)+R_n$$

onde

$$R_n = \frac{(Z - z_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} f^n [z_0 + \theta (Z - z_0)],$$

θ *representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade.*

Com effeito, pondo no theorema anterior

$$F(Z) = (Z - z_0)^m, \quad k = m - 1, \quad l = n - 1,$$

e portanto

$$F(z_0) = 0, \quad F'(z_0) = 0, \quad \ldots, \quad F^{m-1}(z_0) = 0$$

$$F^m(z_0) = m!, \quad F^m[z_0 + \theta (Z - z_0)] = m!,$$

vem o theorema enunciado.

O theorema que precede é o theorema descoberto por Taylor para o caso das variaveis reaes e estendido por Cauchy ao caso das variaveis imaginarias. A expressão do resto que vimos de dar é differente das propostas pelos srs. Darboux e Mansion, e é completamente semelhante á empregada no caso das variaveis reaes.

BIBLIOGRAPHIA

H. M. de Figueiredo. — Superficies de Riemann. — Coimbra, 1887.

É objecto d'este trabalho o methodo profundo apresentado por Riemann, para o estudo das funcções multiformes, nas suas duas memorias celebres intituladas — *«Grundlagen für eine allgmeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse»* e *«Theorie der Abel'schen Functionen.»* Apesar das difficuldades d'este methodo, que têem obstado a que seja geralmente empregado, tem elle dado origem a trabalhos do mais alto interesse. Bem fez, pois, o sr. Henrique de Figueiredo em tomar este assumpto para a sua *Dissertação inaugural,* e concorrer assim para tornar conhecida em Portugal esta bella doutrina.

No primeiro capitulo do seu trabalho expõe o auctor rapidamente os principios geraes da theoria das funcções multiformes, e em seguida estuda, segundo o methodo empregado por Puiseux na sua memoria classica intitulada: *Recherches sur les fonctions algébriques,* o modo como as funcções algebricas permutam os seus valores em volta dos pontos criticos.

No capitulo segundo é exposta a theoria das superficies empregadas por Riemann para a representação das funcções multiformes *(superficies de Riemann).*

Finalmente, nos capitulos terceiro e quarto são estudados, pelo methodo de Riemann, os integraes das funcções de variaveis complexas, e, em particular, os integraes ellipticos.

V. F. Larangeira. — O impulso das terras. — Porto, 1887.

N'este opusculo, que serviu de Dissertação para o concurso a uma cadeira da Academia Polytechnica do Porto, o auctor expõe e analysa os trabalhos mais importantes que têem sido publicados a respeito da questão importante do impulso das terras.

Principia pelos trabalhos theoricos, e a este respeito expõe rapidamente a theoria fundada na distribuição das pressões no interior dos macissos, e a theoria do prisma de maior impulso. A complicação das formulas, e a pouca confiança que merecem em virtude das hypotheses que é necessario estabelecer para se poder resolver o problema, levam naturalmente a procurar resolver o problema por outro caminho, combinando a theoria com experiencias methodicas. O sr. Larangeira occupa-se tambem d'estas experiencias, expondo e comparando successivamente aos trabalhos de Darwin, Gobin e finalmente de Leygue, cujos resultados adopta.

B. d'Engelhardt. — *Observations astronomiques.* — *Dresde, 1886.*

Contém este trabalho importante as observações astronomicas feitas pelo sr. B. d'Engelhardt no seu Observatorio particular construido em Dresde, onde este astronomo, fugindo do clima da Russia, sua patria, veio fixar a sua residencia.

Principia pela descripção do Observatorio e dos instrumentos que contém, que são um equatorial de Howard Grubb, um instrumento de passagens construido por Bamberg, um oculo para procurar cometas, um instrumento universal de Fennel, uma pendula sideral de Tiede ligada a um apparelho registrador de Fuess, uma pendula sideral de Knoblich, etc. O equatorial é o principal instrumento do Observatorio, e é por isso cuidadosamente estudado na obra de que estamos dando noticia.

Em seguida á descripção do Observatorio apresenta o sr. B. d'Engelhardt as tabellas das observações feitas com os instrumentos anteriormente descriptos, indicando os methodos seguidos n'estas observações e nos calculos correspondentes:

1.° Uma serie de observações da lua e das estrellas de culminação, feitas com o instrumento de passagens desde junho de 1884 até outubro de 1885.

2.° Uma serie de observações dos phenomenos dos satellites de Jupiter feitas com o equatorial desde dezembro de 1881 até maio de 1885.

3.° Uma serie de observações de occultações de estrellas pela lua, feitas entre maio de 1884 e setembro de 1885.

4.° Observações de duas estrellas novas, uma na constellação de Andromeda e outra na constellação de Orion.

5.° Uma serie de observações de cometas, feitas nos annos de 1879 a 1885.

6.° Observações de 66 planetas, feitas com o micrometro do equatorial.

7.° Observações micrometricas de nebulosas, feitas no intervallo de novembro de 1883 a setembro de 1885.

Pela rapida noticia que vimos de dar vê-se a importancia da obra do sr. B. d'Engelhardt. Accrescentaremos ainda que é illustrada com quatro bellas gravuras, representando o observatorio e os seus principaes instrumentos, e que a belleza da impressão faz honra á casa de Guillaume Baensch, de Dresde, onde foi impressa.

M. Lerch. — Contributions à la théorie des fonctions (Comptes rendus des séances de la Société des Sciences de Bohême, 1886).

N'esta interessante memoria apresenta o sr. Lerch dois exemplos muito simples de funcções que n'um intervallo finito não têem derivada determinada em um numero infinito de pontos, a saber:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2^n \pi x}{2^n},$$

que não tem derivada quando x é da fórma $\frac{a}{2^q}$, a e q representando dois inteiros quaesquer; e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n!\, \pi x}{n!},$$

que não tem derivada quando x é da fórma $\frac{a}{q!}$, a e q representando dois numeros inteiros impares.

D'estes resultados tira o illustre geometra dois exemplos de funcções analyticas, que não podem ser continuadas fóra de um circulo de raio egual á unidade sem perder o seu caracter de funcções monogeneas.

Entrando em seguida na theoria das funcções ellipticas, mostra que a serie de Jacobi

$$\theta_{00}(u \mid \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu u \pi i}$$

é uma funcção de q gosando da mesma propriedade, assim como as outras funcções θ_{01}, θ_{10}, θ_{11} de Jacobi, e dá meios de formar outras funcções que estão nas mesmas circumstancias.

E. Cesàro. — Medie ed assintotiche espressioni in Aritmetica (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, t. XXV).

Seguem-se com pequenos intervallos os trabalhos importantes com que o sabio professor da Universidade de Palermo vai enriquecendo a Arithmetica superior. Na presente memoria o auctor tracta de determinar as expressões medias das funcções arithmeticas, isto é, tracta de determinar as funcções $g(x)$ que satisfazem á condição

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{\psi(n)} \sum_1^n f(p) \right] = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{\psi(n)} \sum_1^p g(p) \right],$$

$f(n)$ representando uma funcção arithmetica dada. Principia por considerar alguns casos particulares muito interessantes; desenvolve depois um methodo devido ao sr. Sylvester para achar estas expressões medias; e dá finalmente uma serie de formulas importantes para o progresso d'esta doutrina.

—— *Remarques de Géométrie infinitésimale* (Mathesis, t. VII).

—— *Intorno ad una classe di funzioni aritmetiche* (*Giornale di Matematiche*, t. XXV).

M. d'Ocagne.—Sur certaine classe de suites récurrentes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1887).

Federico Amodeo.—Sulle coniche bitangente a due coniche (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, t. XXIV).

G. T.

NOTA RELATIVA Á RECTIFICAÇÃO DOS ARCOS DE ELLIPSE

POR

RODOLPHO GUIMARÃES

1. Demonstramos a pag. 111 do vol. VII do *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* que podiamos sempre rectificar um arco de ellipse quando as coordenadas dos seus extremos satisfizessem á equação de condição

$$\frac{y'.\xi}{x'.\eta} \pm \frac{a \pm x'}{\sqrt{2\frac{a^2c^2}{b^4}y'^2-(a \pm x')^2}} = 0 \;\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

em que (x', y') e (ξ, η) são as coordenadas das extremidades B'_1 e μ do arco dado.

Esta equação póde-se comtudo simplificar em alguns casos, tornando-se então facil rectificar o arco dado. Effectivamente esta equação póde-se escrever

$$\frac{y'.\xi}{x'.\eta} \pm \frac{1}{\sqrt{2\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{a \mp x'}{a \pm x'}-1}} = 0 \;\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

e se fizermos

$$\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{a \pm x'}{a \mp x'} = m \;\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

teremos que a equação (II) se torna

$$\frac{\eta}{\xi} = \mp \sqrt{2m-1}\cdot\frac{y'}{x'}$$

ou, chamando α e β os angulos que os diametros que passam por μ e B'_1 formam com o semi-eixo maior,

$$\operatorname{tg} \alpha = \mp \sqrt{2m-1} \cdot \operatorname{tg} \beta \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

e da equação (A) tiramos

$$x' = a \cdot \frac{a^2 - b^2(1+m)}{a^2 - b^2(1-m)} \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

D'onde se conclue que todo o arco $\widehat{B'_1 \mu}$ cujo extremo B'_1 seja determinado pela distancia Ob egual ao valor numerico dado pela formula (B) e o outro extremo μ pelo angulo $\mu O a$ cuja tangente seja (em virtude da equação III) egual a $\sqrt{2m-1}$ vezes a tangente do angulo $B'_1 O a$, é susceptivel de se rectificar empregando a formula (A) de pag. 112.

Este caso é bastante geral, por isso que m póde tomar qualquer valor positivo tal que seja $2m - 1 > 0$.

2. Póde-se dar ainda outro caso em que a equação (I) se póde simplificar.

Com effeito a equação (I) póde-se escrever

$$\frac{x' \cdot \eta}{y' \cdot \xi} \pm \sqrt{2 \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a \mp x'}{a \pm x'} - 1} = 0.$$

E se exprimirmos as coordenadas da ellipse referida ao seu centro e aos seus eixos em funcção dos angulos variaveis α e β, isto é,

$$\begin{cases} x' = a \cos \beta \\ y' = b \operatorname{sen} \beta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \xi = a \cos \alpha \\ \eta = b \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

temos

$$\operatorname{tang} \alpha \,.\, \operatorname{cotang} \beta = \mp \sqrt{2 \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a \mp x'}{a \pm x'} - 1}$$

ou

$$\operatorname{cotang}(90^\circ + \alpha) \,.\, \operatorname{cotg} \beta = \pm \sqrt{2 \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a \mp x'}{a \pm x'} - 1} \ldots \text{(IV)}$$

e na hypothese de que os semi-diametros que formam com o semi-eixo maior os angulos $(90^\circ + \alpha)$ e β são conjugados, isto é, quando

$$\operatorname{tang}(90^\circ + \alpha) \,.\, \operatorname{tang}\beta = -\frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots (C)$$

virá

$$\frac{a \pm x'}{a \mp x'} = \frac{2b^2c^2}{a^4 + b^4}$$

d'onde

$$x' = a \,.\, \frac{2b^2c^2 - (a^4 + b^4)}{2b^2c^2 + (a^4 + b^4)} \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

Logo, quando um dos extremos B'_1 do arco dado for determinado pela abscissa Ob egual ao valor numerico dado pela expressão (V), e a posição do outro extremo μ fique do mesmo modo determinado por um angulo α satisfazendo á condição (C), o comprimento do arco dado é expresso tambem pela formula (A) de pag. **112.**

SUR UNE SÉRIE CONSIDÉRÉE PAR M. LERCH

(Extraits des deux lettres adressées à F. Gomes Teixeira)

PAR

A. GUTZMER

(à Berlin)

Permettez-moi de vous communiquer une petite remarque sur une série que Mr. Lerch (à Prague) a considérée dans une *Remarque sur la théorie des séries,* imprimée dans le *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas,* 1886, pp. 79-80.

C'est la série

$$\sum_{\nu} u_\nu = \sum_{\nu} \delta^{\nu - (\log \nu)} \cdot g^{\frac{1}{2}(\log \nu) \cdot \{1 + (\log \nu)\}},$$

où $(\log \nu)$ désigne la partie entière du logarithme vulgaire de ν, et où les quantités δ, g sont positives, $\delta < 1$, $g > 1$, mais telles que $\delta \cdot \sqrt{g} < 1$.

Mr. Lerch a démontré le fait intéressant que pour les valeurs de ν de la forme $10^\mu - 1$, c'est-à-dire pour une infinité de valeurs, le quotient

$$\frac{u_{\nu+1}}{u}$$

peut devenir aussi grand que l'on voudra, malgré que la série soit convergente.

Mais il est possible de transformer la série Σu_ν dans une autre Σv_μ, telle que le quotient

$$\frac{v_{\mu+1}}{v_\mu}$$

reste toujours inférieur à l'unité; c'est ce que je me permets de vous communiquer.

En effet, on peut écrire

$$\sum_\nu u_\nu = \sum_\nu \delta^{\nu-(\log \nu)} \cdot g^{\frac{1}{2}(\log \nu)\cdot\{1+(\log \nu)\}}$$

$$= \sum_\mu \sum_{\nu=10^\mu}^{10^{\mu+1}-1} \delta^{\nu-(\log \nu)} \cdot g^{\frac{1}{2}(\log \nu)\{1+(\log \nu)\}}.$$

Or, pour toutes les valeurs de ν de 10^μ à $10^{\mu+1}-1$, on a $(\log \nu) = \mu$, et par conséquent

$$\sum_{\nu=10^\mu}^{10^{\mu+1}-1} \delta^{\nu-(\log \nu)} \cdot g^{\frac{1}{2}(\log \nu)\{1+(\log \nu)\}} = \sum_{\nu=10^\mu}^{10^{\mu+1}-1} \delta^{\nu-\mu} g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}$$

$$= \delta^{10^\mu-1} g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)} + \delta^{10^\mu+1-\mu} g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)} + \ldots$$

$$+ \delta^{10^{\mu+1}-1-\mu} \cdot g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}$$

$$= \delta^{10^\mu-1} \cdot g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)} \cdot [1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{9\cdot 10^\mu-1}]$$

$$= \delta^{10^\mu-1} \cdot g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)} \cdot \frac{1-\delta^{9\cdot 10^\mu}}{1-\delta}.$$

En désignant cette expression par v_μ, on obtient

$$\sum_\nu u_\nu = \sum_\mu v_\mu = \sum \delta^{10^\mu-\mu} \cdot g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)} \cdot \frac{1-\delta^{9\cdot 10^\mu}}{1-\delta}.$$

C'est la série transformée.

Maintenant il est facile de voir que le quotient

$$\frac{v_{\mu+1}}{v_\mu}$$

reste toujours inférieur à l'unité; car il suit

$$\frac{v_{\mu+1}}{v_\mu} = \frac{\delta^{10^{\mu+1}-\mu-1} \cdot g^{\frac{1}{2}(\mu+1)(\mu+2)}}{\delta^{10^\mu-\mu} \cdot g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}} \cdot \frac{1-\delta^{9 \cdot 10^{\mu+1}}}{1-\delta^{9 \cdot 10^\mu}}$$

$$= \delta^{9 \cdot 10^\mu - 1} \cdot g^{\mu+1} \cdot \frac{1-\delta^{9 \cdot 10^{\mu+1}}}{\delta - \delta^{9 \cdot 10^\mu}}.$$

Mais, δ étant < 1, on voit que

$$\frac{1-\delta^{9 \cdot 10^{\mu+1}}}{1-\delta^{9 \cdot 10^\mu}} < 1$$

et comme $\delta \sqrt{g} < 1$, on aura à fortiori

$$\delta^{9 \cdot 10^\mu - 1} \cdot g^{\mu+1} < 1$$

donc

$$\frac{v_{\mu+1}}{v_\mu} < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{v_{\mu+1}}{v_\mu} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Mr. Lerch m'a communiqué encore d'autres séries qui jouissent de la même propriété comme celle que nous venons de considérer; mais toujours il était facile de les transformer de manière que le quotient $\frac{v_{\mu+1}}{v_\mu}$ de la nouvelle série reste toujours infé-

..

rieur à l'unité. Il serait donc très intéressant d'avoir une série convergente à termes positifs, telle que, pour un nombre infini de valeurs de ν, le quotient $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ soit supérieur à l'unité et que cette qualité ne se perde pas à une transformation quelconque.

. . . .

. . . .

M. Lerch a publié cette série, pour la première fois, en commun avec d'autres qui jouissent de la même qualité dans les «Comptes rendus des séances de la Société royale des sciences de Bohême», Prague, le 13 mars 1885. Là il se trouve aussi la série très simples

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^\nu}{2^\nu}+\frac{1-(-1)^\nu}{\nu^2}\right\}$$

dont le quotient de deux termes consécutifs tend vers zéro ou l'infini, selon que n est impair ou pair. Un autre exemple très simple est aussi le suivant

$$\sum_\nu \frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^\nu}{10^\nu}7+\frac{1+(-1)^\nu}{10^\nu}.9\right]=0,79\,\overline{79}\ldots$$

où ce quotient-là prend tour à tour les valeurs $\frac{9}{70}$ et $\frac{7}{90}$.

M. Lerch et moi, nous avons trouvé encore beaucoup d'autres séries de cette qualité, dont le nombre est infini. Mais la série citée ci-dessus est la plus remarquable de toutes celles que M. Lerch, M. Cesaro (dans son article fort intéressant, Jornal tome VII, p. 171–177) et moi ont trouvée, parce que les termes où le quotient $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ cesse d'être inférieur à l'unité deviennent par degrés plus rares!

. . . .

. . . .

Berlin, le 24 mai 1887.

NOTE DE CALCUL INTÉGRAL

PAR

H. LE PONT

Considérons le système de n équations simultanées:

$$
(A)\quad \left\{
\begin{aligned}
dy_1 &= (a_{1,1}\,y_1 + a_{1,2}\,y_2 + \ldots + a_{1,n}\,y_n)\,dx_1 \\
&\quad + (a_{2,1}\,y_1 + a_{2,2}\,y_2 + \ldots + a_{2,n}\,y_n)\,dx_2 + \ldots \\
&\quad + (a_{n,1}\,y_1 + a_{n,2}\,y_2 + \ldots + a_{n,n}\,y_n)\,dx_n \\
dy_2 &= (b_{1,1}\,y_1 + b_{1,2}\,y_2 + \ldots + b_{1,n}\,y_n)\,dx_1 \\
&\quad + (b_{2,1}\,y_1 + b_{2,2}\,y_2 + \ldots + b_{2,n}\,y_n)\,dx_2 + \ldots \\
&\quad + (b_{n,1}\,y_1 + b_{n,2}\,y_2 + \ldots + b_{n,n}\,y_n)\,dx_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dy_n &= (k_{1,1}\,y_1 + k_{1,2}\,y_2 + \ldots + k_{1,n}\,y_n)\,dx_1 \\
&\quad + (k_{2,1}\,y_1 + k_{2,2}\,y_2 + \ldots + k_{2,n}\,y_n)\,dx_2 + \ldots \\
&\quad + (k_{n,1}\,y_1 + k_{n,2}\,y_2 + \ldots + k_{n,n}\,y_n)\,dx_n
\end{aligned}
\right.
$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ étant des fonctions des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$ et les $a, b, \ldots k$ des coefficients constants. Nous allons chercher à former avec ces n équations n combinaisons linéaires telles que les deux membres soient différentielles exactes. Chacune des équations ainsi obtenues sera intégrée et en resolvant le système de ces n équations intégrales, nous aurons l'expression de chacune des fonctions y au moyen des n variables x et de n constantes arbitraires. Le système de ces n fonctions y sera donc bien le système intégrant des équations données.

A cet effet, nous multiplierons chacune de ces équations (A) respectivement par des indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ et nous les ajouterons, ce qui nous donnera:

$$
(\mathrm{B}) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \lambda_1\, dy_1 + \lambda_2\, dy_2 + \ldots + \lambda_n\, dy_n \\
& = [\lambda_1 (a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 + \ldots + a_{1,n}\, y_n) \\
& + \lambda_2 (b_{1,1}\, y_1 + b_{1,2}\, y_2 + \ldots + b_{1,n}\, y_n) + \ldots \\
& + \lambda_n (k_{1,1}\, y_1 + k_{1,2}\, y_2 + \ldots + k_{1,n}\, y_n)]\, dx_1 \\
& + [\lambda_1 (a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \ldots + a_{2,n}\, y_n) \\
& + \lambda_2 (b_{2,1}\, y_1 + b_{2,2}\, y_2 + \ldots + b_{2,n}\, y_n) + \ldots \\
& + \lambda_n (k_{2,1}\, y_1 + k_{2,2}\, y_2 + \ldots + k_{2,n}\, y_n)]\, dx_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + [\lambda_1 (a_{n,1}\, y_1 + a_{n,2}\, y_2 + \ldots + a_{n,n}\, y_n) \\
& + \lambda_2 (b_{n,1}\, y_1 + b_{n,2}\, y_2 + \ldots + b_{n,n}\, y_n) + \ldots \\
& + \lambda_n (k_{n,1}\, y_1 + k_{n,n}\, y_2 + \ldots + k_{n,n}\, y_n)]\, dx_n
\end{aligned}
\right.
$$

Posons maintenant:

$$
(C)\quad\left\{
\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{\lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 b_{1,1} + \ldots + \lambda_n k_{1,1}}{\lambda_1} \\
&= \frac{\lambda_1 a_{1,2} + \lambda_2 b_{1,2} + \ldots + \lambda_n k_{1,2}}{\lambda_2} = \ldots \\
&= \frac{\lambda_1 a_{1,n} + \lambda_2 b_{1,n} + \ldots + \lambda_n k_{1,n}}{\lambda_n} \\
\mu_2 &= \frac{\lambda_1 a_{2,1} + \lambda_2 b_{2,1} + \ldots + \lambda_n k_{2,1}}{\lambda_1} \\
&= \frac{\lambda_1 a_{2,2} + \lambda_2 b_{2,2} + \ldots + \lambda_n k_{2,2}}{\lambda_2} = \ldots \\
&= \frac{\lambda_1 a_{2,n} + \lambda_2 b_{2,n} + \ldots + \lambda_n k_{2,n}}{\lambda_n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu_n &= \frac{\lambda_1 a_{n,1} + \lambda_2 b_{n,1} + \ldots + \lambda_n k_{n,1}}{\lambda_1} \\
&= \frac{\lambda_1 a_{n,2} + \lambda_2 b_{n,2} + \ldots + \lambda_n k_{n,2}}{\lambda_2} = \ldots \\
&= \frac{\lambda_1 a_{n,n} + \lambda_2 b_{n,n} + \ldots + \lambda_n k_{n,n}}{\lambda_n}
\end{aligned}
\right.
$$

l'équation (B) prend la forme:

$$
(D)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2 + \ldots + \lambda_n dy_n \\
&= (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n)(\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \ldots \mu_n dx_n)
\end{aligned}
\right.
$$

ou bien

$$
d\operatorname{Log}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n) = \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \ldots + \mu_n dx_n.
$$

En intégrant et désignant par Γ la constante, il vient:

$$\text{(E)} \qquad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n = \Gamma e^{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (c) donnent pour les λ des valeurs finies et déterminées sont que les μ soient racines des n équations obtenues en égalant à zéro leurs déterminants. Nous avons ainsi les équations:

$$\text{(F)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{1,1}-\mu_1 & b_{1,1} & \ldots & k_{1,1} \\ a_{1,2} & b_{1,2}-\mu_1 & \ldots & k_{1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & b_{1,n} & \ldots & k_{1,n}-\mu_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a_{2,1}-\mu_2 & b_{2,1} & \ldots & k_{2,1} \\ a_{2,2} & b_{2,2}-\mu_1 & \ldots & k_{2,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2,n} & b_{2,n} & \ldots & k_{2,n}-\mu_2 \end{vmatrix} = 0 \ldots \\ \\ \qquad\qquad \begin{vmatrix} a_{n,1}-\mu_n & b_{n,1} & \ldots & k_{n,1} \\ a_{n,2} & b_{n,2}-\mu_n & \ldots & k_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,n} & b_{n,n} & \ldots & k_{n,n}-\mu_n \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

Exprimons maintenant que toutes les équations (c) donnent les mêmes valeurs pour les λ. Nous avons, en désignant par $\Delta_{r,1}$, $\Delta_{r,2}$, ... $\Delta_{r,n}$ les mineurs du premier ordre du déterminant (F) en μ_r, les relations

$$\text{(G)} \qquad \frac{\lambda_1}{\Delta_{r,1}} = \frac{\lambda_2}{\Delta_{r,2}} = \ldots = \frac{\lambda_n}{\Delta_{r,n}},$$

$$\text{(H)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{1,1} : \Delta_{1,2} : \ldots : \Delta_{1,n} :: \Delta_{2,1} : \Delta_{2,2} : \ldots : \Delta_{2,n} :: \ldots \\ \qquad\qquad :: \Delta_{n,1} : \Delta_{n,2} : \ldots : \Delta_{n,n}. \end{array} \right.$$

L'élimination de $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ entre les équations (F) et (H) nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système proposé (A) soit compatible.

Soient $\mu_{r,i}$ l'un des n racines de l'équation (F) en μ_r, et $\lambda_{1,i}$, $\lambda_{2,i}, \ldots \lambda_{n,i}$ les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ obtenus en remplacant μ_r par $\mu_{r,i}$ dans les équations (G), désignons par $\mu_{1,i}, \mu_{2,i}, \ldots \mu_{n,i}$ les valeurs fournies pour $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ par les équations (C) lors qu'on y fait $\lambda_j = \lambda_{j,i}$, par Γ_i un constante, nous obtenons une intégrale

$$\text{(J)} \quad \lambda_{1,i}y_1 + \lambda_{2,i}y_2 + \ldots + \lambda_{n,i}y_n = \Gamma e^{(\mu_{1,i}x_1 + \mu_{2,i}x_2 + \ldots + \mu_{n,i}x_n)}.$$

Prenant les $(n-1)$ autres racines μ_r, nous obtenons $(n-1)$ autres équations (3) que jointes à cette équation déterminent les n fonctions y qui satisfont au système différentiel donné.

Il n'y a pas lieu d'insister sur les divers cas particuliers qui pourraient se présenter, ni sur la détermination des constantes, ces questions n'offrant aucune difficulté. Bornons nous à donner comme exemple de l'application de la méthode et des simplifications qui se rencontrent dans la pratique, l'intégration du système des deux équations

$$\left.\begin{aligned} du &= (3u + 12v)\,dx + (2u + 12v)\,dy \\ dv &= (u + 2v)\,dx + (u + v)\,dy \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

proposé à la licence à Paris (novembre 1881).

Multiplions la première équation par 1, la seconde par λ, et faisons la somme, il vient

$$d(u+\lambda v) = (3+\lambda)\left[u + \frac{12+2\lambda}{3+\lambda}v\right]dx + (4+\lambda)\left[u + \frac{12+\lambda}{4+\lambda}v\right]dy. \quad (2)$$

Pour que les deux membres soient différentielles exactes, il faut et il suffit que λ satisfasse à la fois aux deux conditions:

$$\frac{12+2\lambda}{3+\lambda} = \frac{12+\lambda}{4+\lambda} = \lambda$$

qui se réduisent à une seule

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0. \qquad (3)$$

Le système différentiel donné est donc compatible.

Remplaçant successivement λ par les racines de l'équation (3) dans l'équation (2), nous avons les deux combinaisons linéaires

$$\frac{d(u+3v)}{u+3v} = 6\, dx + 5\, dy$$

$$\frac{d(u-4v)}{u-4v} = -\, dx - 2\, dy$$

où les deux membres sont différentielles exactes.

Intégrant, il vient en appelant c_1 et c_2 les constantes,

$$u + 3v = c_1 e^{6x+5y}$$

$$u - 4v = c_2 e^{-x-2y}$$

et en résolvant

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{4}{7} C_1 e^{6x+3y} + \frac{3}{7} C_2 e^{-x-2y} \\ v &= \frac{1}{7} C_1 e^{6x+5y} - \frac{1}{7} C_2 e^{-x-2y} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ce qui est bien le système intégrant des équations différentielles données.

NOTE SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES ET LES LIGNES DE COURBURE

PAR

M. H. Le Pont

(à Caen)

On sait que dans toute surface développable, la génératrice rectiligne est en même temps ligne asymptotique et ligne de courbure. Nous allons faire voir que les développables sont les seules surfaces qui jouissent de cette propriété qu'un des deux systèmes de lignes asymptotiques se confond avec un système de lignes de courbure.

Prenons pour la surface (*s*), les lignes asymptotiques (*la*) et les lignes de courbure (*lc*), les équations de Joachimstal:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \qquad (s)$$

$$dP\,dx + dQ\,dy + dR\,dz = 0 \qquad (la)$$

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ dP & dQ & dR \end{vmatrix} = 0 \qquad (lc)$$

Il nous suffit d'exprimer que ces équations ont une solution commune en dx, dy et dz, c'est à dire que l'on a:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ dP & dQ & dR \\ Q\,dR - R\,dQ & R\,dP - P\,dR & P\,dQ - Q\,dP \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant:

$$(QdR-RdQ)^2+(RdP-PdR)^2+(PdQ-QdP)^2=0 \qquad (a)$$

Cette équation est équivalente à l'équation connue

$$r^2=st.$$

En effet, elle s'intègre en prenant les équations

$$\frac{dP}{P}=\frac{dQ}{Q}=\frac{dR}{R} \qquad (b)$$

ou

$$\frac{dx}{\lambda}=\frac{dy}{\theta}=dz \qquad (c)$$

λ et θ étant des fonctions d'un paramètre arbitraire.

Intégrons les équations (c), il vient μ et ν désignant deux nouvelles fonctions de ce paramètre

$$x=\lambda z+\mu \quad y=\theta z+\nu \qquad (\alpha)$$

Nous voyons déjà que la surface (s) est réglée: de plus, elle est dévéloppable.

Différentions les équations (α), nous avons

$$dx=\lambda dz+zd\lambda+d\mu \quad dy=\theta dz+zd\theta+d\nu$$

et en tenant compte des relations (c)

$$zd\lambda+d\mu=0 \quad zd\theta+d\nu=0 \qquad (\beta)$$

d'où

$$d\lambda d\nu=d\theta\, d\mu \qquad (\gamma)$$

propriété qui caractérise les développables.

Exprimant maintenant que les deux systèmes de lignes asymptotiques de la surface (s) sont les lignes de courbure, c'est à dire que les équations (la) et (lc) sont identiques, nous avons

$$\frac{dP}{QdR - RdQ} = \frac{dQ}{RdP - PdR} = \frac{dR}{PdQ - QdP} \qquad (A)$$

par suite

$$dP = 0 \quad dQ = 0 \quad dR = 0 \qquad (B)$$

et

$$P = l \quad Q = m \quad R = n \qquad (C)$$

l, m, n désignant trois constantes. Donc:

Le plan est la seule surface dont les deux systèmes de lignes asymptotiques sont en même temps lignes de courbure.

BIBLIOGRAPHIA

A. Schiappa Monteiro. — *Sur la génération du conoïde circonscrit à une courbe plane au moyen de courbes du même ordre de celle-ci* (*Jornal da Academia de Sciencias de Lisboa*, 1887).

No seu excellente livro de Geometria Descriptiva o sr. La Gournerie demonstrou analyticamente que o conoïde circumscripto a uma conica póde ser gerado por linhas de segunda ordem.

Esta proposição foi demonstrada depois syntheticamente pelo sr. Motta Pegado, e generalisada para o caso em que a curva directriz do conoïde é d'ordem qualquer.

É d'este assumpto que o sr. Schiappa Monteiro se occupa no seu bello artigo, onde dá uma demonstração muito simples, tambem synthetica, da proposição dos srs. La Gournerie e Pegado, e onde apresenta alguns theoremas importantes relativos á divisão anharmonica e á divisão homographica das generatrizes da superficie considerada.

R. Guimarães. — *Sobre as fórmulas relativas ao calculo da superficie convexa do tronco de cone de revolução* (*Instituto*, de Coimbra, tom. XXXIV).

Contém este artigo a continuação de outro artigo sobre o mesmo assumpto, publicado pelo sr. Guimarães no tom. XXXIII do *Instituto*, de Coimbra, do qual se deu noticia na pag. 107 d'este jornal.

J. A. Serrasqueiro. — *Tratado de Algebra Elementar* — 3.ª edição — Coimbra, 1887.

Na pag. 122 do tom. V d'este jornal deu-se noticia da segunda edição da presente obra. Na terceira edição o auctor teve a boa idéa de ajunctar dois capitulos dedicados á theoria dos determinantes, contendo a parte que é necessaria para a resolução e discussão dos systemas de equações do primeiro grão.

J. A. Serrasqueiro. — *Noções de Geometria Analytica.* — *Coimbra, 1887.*

Contém este opusculo a parte da Geometria Analytica plana que foi introduzida ultimamente nos programmas dos Lyceus, isto é, a deducção da equação da linha recta e da equação do circulo (em coordenadas cartesianas) e alguns problemas mais elementares relativos a estas duas linhas.

F. A. de Brito Limpo. — *Apontamentos para facilitar a leitura das cartas chorographicas e topographicas.* — *Lisboa, 1887.*

N'este opusculo o sr. Brito Limpo explica de uma maneira simples e ao alcance de toda a classe de leitores, o que representam os principaes signaes empregados nas cartas chorographicas e topographicas, e o caminho a seguir para, da inspecção attenta da carta, se concluir a disposição e accidentes do terreno que ella representa.

G. Guccia. — *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* t. I).

—— *Sulla reduzioni dei sistemi lineari di curve ellitiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere* p (Item).

N'estes artigos o auctor continua as bellas indagações geometricas, que deram já origem aos trabalhos de que se deu noticia na pag. 167 do tomo VII d'este jornal.

No primeiro occupa-se do seguinte importante theorema, devido ao sr. Picart:

«As unicas superficies algebricas, cujas secções planas são unicursaes, são as superficies regradas de genero zero e a superficie de Steiner.»

Depois de notar algumas objecções que se podem fazer á demonstração do sabio geometra francez, o sr. Guccia dá uma nova demonstração do mesmo theorema, baseando-se nos resultados por elle obtidos sobre a reducção dos systemas lineares de curvas planas.

No segundo trabalho occupa-se o sr. Guccia da reducção dos systemas lineares no caso de ser egual á unidade o genero do systema, empregando para isso o methodo por elle seguido anteriormente no caso de este genero ser egual a zero.

Gino Loria. — *La definizione di spazio a* n *dimenzioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor* (*Giornale di Matematiche de Battaglini,* t. XXV).

Lerch. — *Un théorème de la théorie des séries* (*Acta Mathematica,* t. X).

M. d'Ocagne. — *Sur les péninvariants des formes binaires* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 1887).

M. R. Perrin. — *Sur les péninvariants des formes binaires* (Item).

A. Rémont. — *Resumé de Géométrie Analytique à deux et à trois dimensions.* — *Paris. 1887.*

N'este livro, muito util para os estudantes de Geometria Analytica, encontram-se reunidos os principios d'esta sciencia exigidos aos candidatos ás Escolas Polytechnica e Normal de Paris, e ás Escolas Central, de Minas, e de Pontes e Estradas.

O auctor limita-se aos enunciados das questões e aos resultados, destinando o livro a auxiliar os alumnos no estudo das notas tomadas nos Cursos.

G. de Longchamps. — Une conique remarquable du plan d'un triangle (*Association Française pour l'avancement des sciences,* 1886).

O auctor principia por definir tres especies de transformações homographicas, a que dá os nomes de *transformação instantanea*, de *transformacão complementar* e *de transformação anti-complementar*.

Depois de indicar o papel importante que estas transformações são chamadas a representar na Geometria do triangulo, estuda a conica que resulta de applicar a transformação complementar ao circulo circumscripto ao triangulo de referencia. Esta conica tem propriedades muito curiosas, que o illustre geometra deduz no seu interessante trabalho.

G. de Longchamps. — Les points d'inflexion dans les cubiques circulaires unicursales droites (*Association Française pour l'avancement des sciences,* 1866).

—— *Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites, au moyen des intégrales elliptiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 1887).

—— *Applications nouvelles des transversales réciproques* (*Journal de Mathématiques spéciales,* 1886).

M. d'Ocagne. — Sur une classe de nombres remarquables (*American Journal of Mathematics,* t. IX).

N'esta memoria importante o sr. d'Ocagne estuda uma classe de numeros importantes encontrados pelos srs. Schölomilch, Catalan e Cesàro em varias questões de Analyse, e definidos por estes geometras por meio de certas fórmulas em que elles intervinham. O auctor define-os por meio de um triangulo arithmetico analogo ao de Pascal, em que o lado vertical e a hypothenusa são compostos da unidade, e em que cada numero do triangulo é egual á somma d'aquelle que é collocado immediatamente por cima d'elle multiplicado pelo numero da columna na qual elles se acham ambos, e d'aquelle que está collocado immediatamente á esquerda d'este.

O auctor, na sua bella memoria, deduz muitas propriedades interessantes d'estes numeros, acha a sua expressão debaixo de uma fórma explicita, deduz a sua funcção generatriz, mostra a relação d'elles com outros numeros importantes que apparecem na Analyse, etc.

J. M. Rodrigues. — *Lei da resistencia do ar segundo as experiencias balisticas* (*Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa*, 1887, e *Revista das Sciencias militares*, 1887).

N'este artigo o auctor, partindo das experiencias balisticas de Krupp e das experiencias russas e inglezas, tracta de determinar a lei da resistencia do ar no movimento dos projectis para todas as trajectorias e para todas as velocidades.

G. T.

NOTE SUR LE TRIANGLE ISOSCÈLE

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

(Professeur à l'Ecole Polytechnique de Lisbonne)

THÉORÈME. — *Si les bissectrices des angles à la base d'un triangle sont égales, ce triangle est isoscèle* (*).

Nous pouvons démontrer directement ce théorème comme il suit:

Soit (fig. 1) ADB le triangle et Aa, Bb les bissectrices égales des angles A, B à la base AB; et Dd la troisième bissectrice, étant le point i l'intersection de ces bissectrices.

Menons par l'extrémité a de la bissectrice Aa la droite ac coupant Di au point c situé vers le côté de la base et faisant l'angle $Aac=\frac{1}{2}ADB$. Nous aurons donc les triangles semblables iac et iDA qui donnent

$$\frac{ic}{ia}=\frac{iA}{iD} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Par l'autre extrémité A de Aa tirons la droite Ac' coupant de même Di au point c' situé vers le côté de la base, et formant l'angle $aAc'=\frac{1}{2}ADB$; alors, les triangles iAc' et iDa étant semblables, on a

$$\frac{ic'}{ia}=\frac{iA}{iD} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

(*) Question proposée par M.M. E. Rouché et Ch. de Comberousse, et par d'autres géomètres.

et en vertu de la relation (1) il vient

$$ic = ic'$$

donc le point c' se confondra avec le point c et le triangle isoscèle acA aura le sommet c sur la bissectrice Did.

Soit $c''bB$ un autre triangle isoscèle égal au premier caA et construit sur la bissectrice Bb, le sommet c'' se trouvant aussi sur Did vers le côté de la base.

Les triangles cia et caD, ayant l'angle acD commun et les angles cai et cDa égaux, seront semblables et nous auront donc

$$\overline{ca}^2 = ci \, . \, cD \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (3)$$

De même les triangles $c''bi$ et $c''Db$, qui ont l'angle $bc''D$ commun et les angles cbi et cDb égaux, seront semblables et donneront

$$\overline{c''a}^2 = c''i \, . \, c''D \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (4)$$

mais les triangles isoscèles caA et $c''bB$ étant égaux par construction, ou étant $ca = c''b$, il vient

$$ci \, . \, cD = c''i \, . \, c''D \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (5)$$

En représentant par o le point milieu du segment Di, et prenant ce point pour origine des segments, cette expression (5) donne

$$(oc - oi)(oc + Do) = (oc'' - oi)(oc'' + Do), \ldots$$

mais

$$oi = Do$$

d'où

$$\overline{oc}^2 - \overline{oi}^2 = \overline{oc''}^2 - \overline{oi}^2 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (6)$$

ou

$$oc = oc'', \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (7)$$

donc, le point c'' se confond avec le point c. Ainsi les points A, b, a, B se trouvent sur une circonférence (c) ayant pour centre ce point c (*); et par suite les angles aAB et aBb sont égaux comme ayant même mesure; et puisque les angles BAb et ABa sont respectivement doubles de ceux-ci, il s'ensuit que le triangle ADB est isoscèle.

q. e. d.

Autrement.—Par le point d'intersection i des bissectrices (fig. 2) menons la droite ia' parallèle au côté DA, et coupant le côté DB au point a'. Les triangles aia' et aAD étant évidemment semblables donnent

$$\frac{ia}{ia'}=\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{AD}} \qquad (8)$$

De même les triangles Bia et BbD étant aussi semblables on a

$$\frac{ia'}{i\mathrm{B}}=\frac{b\mathrm{D}}{b\mathrm{B}} \qquad (9)$$

mais, étant par hypothèse Aa = Bb, ces relations donnent

$$\frac{ia}{i\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{DA}} \qquad (10)$$

Maintenant par les sommets A et B tirons parallèlement aux bissectrices égales Aa et Bb les droites AIA_1 et BIB_1, qui, concourant au point I, coupent les côtés DA et DB aux points A_1 et B_1.

Or, de la similitude des triangles iaD et IBA_1, ainsi que de la similitude des triangles DbB et DAA_1, nous tirons

$$\frac{ia}{i\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IA}_1} \qquad (11)$$

(*) Ce point sera de même le second point d'intersection des circonférences AcaD et BcbD déterminant sur les droites égales Aa et Bb les segments capables de l'angle D, lesquelles seront égales elles-mêmes.

et

$$\frac{Db}{DA}=\frac{DB}{DA_1}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(12)$$

donc, en comparant ces relations avec la relation (10), nous en concluons

$$\frac{IB}{IA_1}=\frac{DB}{DA_1}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(13)$$

donc, la droite DI est la bissectrice de l'angle AIB, supplément de l'angle BIA_1 du triangle IBA_1.

Cela étant, circonscrévons aux triangles IBA_1 et IAB_1 les circonférences BIA_1 et AIB_1, lesquelles seront coupées par la bissectrice DI de l'angle externe AIB aux points milieux I' et I'' des arcs BIA_1 et AIB_1. Or, ces circonférences déterminant sur les droites égales BA_1 et AB_1 les segments capables des angles égaux BIA_1 et AIB_1 seront égales elles-mêmes, et par suite

$$I'B=I'A_1=I''A=I''B_1\dots\dots\dots\dots\dots(14)$$

Les triangles I'BI et I'DB ayant les angles I'IB et I'BD égaux et l'angle BI'D commun seront semblables, d'où il résulte

$$\overline{I'B}^2=I'I\,.\,I'D\dots\dots\dots\dots\dots\dots(15)$$

et étant O le point milieu du segment ID on a

$$\overline{I'B}^2=(OI'-OI)(OI'+OI)=\overline{OI'}^2-\overline{OI}^2\dots\dots(16)$$

De même les triangles I''IA et I''DB étant semblables donnent

$$\overline{I''A}^2=\overline{OI''}^2-\overline{OI}^2\dots\dots\dots\dots\dots(17)$$

et étant (14)

$$I'B=I''A$$

on aura

$$OI' = OI''$$

ce qui montre que le point I'' se confond avec le point I', et d'où il s'ensuit que les quatre points B_1, A, B, A_1 se trouvent sur une circonférence, ayant le point I' pour centre; et les cordes B_1A, AB, BA_1 étant égales par construction il en sera de même des angles B_1AB et ABA_1, et par suite le triangle donné ADB sera isoscèle.

q. e. d.

Obs. — Nous pourrions aussi considérer les hauteurs $I'P$ et $I''Q$ des triangles isoscèles égaux $I'BA$ et $I''AB_1$, et nous aurions les triangles égaux $I'PD$ et $I''QD$, comme ayant les cathètes $I'P$ et $I''Q$ égaux ainsique les angles adjacents $PI'I$ et $PI''I$, et de là nous conclurions

$$DP = DQ$$

et puisque

$$BP = AQ$$

on aurait

$$DB = DA.$$

Donc, etc.

Problème. — *Construire un triangle isoscèle connaissant le côté adjacent aux angles égaux et les bissectrices de ces angles.*

Supposons le problème résolu, et soit (fig. 3) AVB le triangle demandé dans lequel on connaît la base AB et les bissectrices $A\alpha$ et $B\alpha_1$ des angles adjacents VAB et ABV, lesquelles se coupent en i.

En considérant le triangle $AB\alpha$ et la bissectrice Bi de l'angle B on a

$$\frac{\alpha i}{iA} = \frac{\alpha B}{BA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

d'où

$$\frac{\alpha i + iA}{\alpha B + BA} = \frac{\alpha A}{\alpha B + BA} = \frac{\alpha i}{\alpha B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Les triangles αBi et αAB étant semblables, comme ayant l'angle $A\alpha B$ commun et les angles αBi et αAB égaux, donnent

$$\frac{\alpha i}{\alpha B}=\frac{\alpha B}{\alpha A}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

donc, en comparant cette relation avec la relation (20), on en conclue

$$\frac{\alpha A}{\alpha B+BA}=\frac{\alpha B}{\alpha A}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

ou

$$\overline{\alpha A}^2=\alpha B(\alpha B+BA)\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

On peut encore trouver très-facilement cette expression en considérant le trapèze isoscèle $AB\alpha\alpha_1$, qui, comme les quadrilatères inscriptibles, donne

$$\alpha A \,.\, \alpha_1 B=\alpha\alpha_1 \,.\, BA+\alpha B \,.\, \alpha_1 A$$

où

$$\alpha A=\alpha_1 B \quad \text{et} \quad \alpha B=\alpha\alpha_1=\alpha_1 A,$$

donc, etc.

De là résulte la construction suivante:

Sur AB comme diamètre décrivez un cercle (d), et à la extrémité A de ce diamètre élevez la perpendiculaire $A\alpha_0=A\alpha$, et la sécante $\alpha_0 d$ qui, coupant ce cercle aux points x et x', donne les segments $\alpha_0 x$ et $\alpha_0 x'$, dont les grandeurs seront celles des côtés égaux des trapèzes isoscèles $B\alpha\alpha_1 A$ et $A\alpha' B\alpha'_1$, qui déterminent les deux triangles isoscèles AVB et AV'B répondant aux solutions demandées.

Obs. — Dans la seconde solution les droites $B\alpha'$ et $A\alpha_1$ sont les bissectrices des suppléments des angles $AB\alpha'_1$ et $AB\alpha'$.

Remarque

D'après l'expression (3) on voit (fig. 1) que la grandeur du rayon du cercle $AbaB$ sera celle de la tangente ct menée de c

au cercle (ot) décrit sur le segment Di comme diamètre. Si au lieu des deux bissectrices nous considérons deux droites égales quelconques passant par un point i de la bissectrice de l'angle ADB, nous trouverons toujours de même, que les angles aAb et bBa sont égaux, ou que ces droites sont également inclinées par rapport à la bissectrice Di de l'angle donné D; et ainsi nous sommes conduits, en n'employant que la géométrie élémentaire, à la solution très facile du célèbre problème qui a pour object de *mener des transversales par un point* i *donné à égale distance de deux droites* DA *et* DB *de manière que la partie interceptée par ces droites soit égale a une droite donnée* m (*).

La grandeur de la tangente ct sera donc égale à l'hypoténuse ca d'un triangle rectangle acq, ayant un cathète $qa=\frac{1}{2}m$, et un angle égale à la moitié de l'angle ADB des droites données. Le centre du cercle (ct) ou (c), qui donne, en général, deux des solutions, se trouvent à une distance oc du point milieu du segment Di égale á l'hypoténuse d'un triangle ayant pour cathètes les segments oi et ca. Le segment $c_0o=oc$ donnera le centre c_0 de l'autre cercle (c_0a') ou (c_0) de même rayon que le cercle (c) et qui évidemment détermine toujours deux solutions du problème ou deux transversales $ia'A'$ et $ib'B$.

Il est facile de voir que le cercle (c) pourra ne couper pas les droites données, les toucher, ou les couper, et ainsi il ne donnera aucune solution, donnera une ou deux; et donc le problème pourra avoir deux, trois ou quatre solutions.

Les transversales demandées peuvent de même être déterminées très facilement en les considérant comme les bases de triangles données par ces bases, par l'angle opposé et par la grandeur de la bissectrice de cet angle, ou de son supplément.

On reconnaîtra aussi que les rayons ca et cb coupent orthogonalement les bissectrices Aa et Bb en leurs points milieux p et q.

La démonstration indirecte du théorème proposé revient à le considérer comme corollaire de l'*égalité de deux triangles résultante de l'égalité des côtés opposés à des angles égaux chacun à*

(*) Nous avons proposé cette question, dans le *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. I, pag. 64, pour être résolue seulement à l'aide de la géomètrie élémentaire. Les solutions s'y trouvent á pag. 71 et 105.

chacun et de l'égalité des bissectrices de ces angles, ou de leurs suppléments.

Ce théorème-là sera encore un corollaire du théorème suivant: *Dans tout triangle la bissectrice du plus grand angle est moindre que celle du plus petit angle.*

En effet (fig. 4), en menant par b la droite ba_0 parallèle à AB, et par le point d'intersection a_0 de cette parallèle avec DB la droite $a_0a'_0$ parallèle à Aa, on aura évidemment

$$a'_0b = ba_0 = a_0B.$$

Si, maintenant, par le point b nous tirons la droite bB' parallèle au côté DB coupant la base AB au point B' on aura évidemment $b'B' = a_0B$ et $bA > bB'$ d'où $bA > ba'_0$, donc le point a'_0 se trouvera entre les points A et D; et le point a_0 entre les points a et D, et par suite $Aa > a'_0a_0$. Or, étant par hypothèse, l'angle $DAB = Dba_0$ moindre que l'angle $DBA = Da_0b$, on aura l'angle Aba_0 plus grand que l'angle ba_0B, donc la comparaison des triangles isoscèles $a_0ba'_0$ et ba_0B donne $a_0a'_0 > Bb$ et par conséquent à plus forte raison on aura $Aa > Bb$.

q. e. d.

Obs.—Comme on sait, les perpendiculaires élévées aux points milieux q_0 et p_0 des bissectrices Aa et Bb rencontrant les côtés DA et DB aux points b_0 et a_0 ainsi que la bissectrice Did aux points c_1 et c_2, détermineront les quadrilatères Ab_0ac_1 et Ba_0bc_2 chacun des quels a ses côtés égaux deux à deux; les triangles isoscèles Ac_1a et Bc_2b étant semblables. D'ailleurs il est facile de reconnaître la similitude des triangles ac_1b_0 et a_0c_2b, et en déduire une autre démonstration de ce théorème.

NOTA SOBRE A SERIE DE LAGRANGE

POR

J. M. Rodrigues

Primeiro tenente de artilheria

No Curso d'Analyse do sr. Hermite vem a seguinte fórmula:

$$\frac{\pi(\zeta)}{F(\zeta)} = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_c \frac{\pi(z)\,dz}{F(z)},$$

que exprime por meio de um integral curvilineo uma funcção holomorpha de uma raiz da equação

$$F(z) = 0$$

existente no interior de uma área s.

D'esta expressão analytica deduz o sr. Hermite uma demonstração elegante da serie de Lagrange. Seguindo o caminho traçado pelo illustre geometra vamos deduzir da mesma fórmula uma serie nova, que comprehende a de Lagrange como um caso particular.

Seja

$$F(z) = f(z) - \alpha \cdot \varphi(z) = 0$$

uma equação holomorpha; se ao longo do contorno que limita a área s for constantemente

$$\text{mod.}\left(\alpha \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1$$

esta equação tem, como se sabe, nesta área tantas raizes como a equação

$$f(z)=0.$$

Supponhamos que na área s existe sómente uma raiz; teremos

$$f(z)=(z-t)\,.\,f_1(z);$$

e como a equação proposta só póde ter tambem uma raiz na mesma área, a fórmula citada dá-nos a sua expressão analytica por meio de um integral curvilineo, a saber:

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)}=\frac{1}{2i\pi}\,.\int_c\frac{\pi(z)\,dz}{f(z)-\alpha\varphi(z)}.$$

Para desenvolver este integral em serie temos a identidade

$$\frac{1}{f(z)-\alpha\,.\,\varphi(z)}=\sum_0^n\left(\alpha\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^p.\frac{1}{f(z)}+\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^n.\frac{\alpha^n}{F(z)},$$

d'onde se deduz, multiplicando por $\pi(z)\,dz$ e integrando ao longo do contorno c,

$$\frac{\pi(\zeta)}{F(\zeta)}=\sum_0^n\alpha^p\,.\,J_p+R_n$$

onde

$$R_n=\frac{1}{2i\pi}\,.\int_c\left(\frac{\alpha\varphi(z)}{f(z)}\right)^n.\frac{\pi(z)}{F(z)}.$$

Applicando o theorema do sr. Darboux a esta expressão do resto resulta immediatamente

$$R_n=\frac{\lambda\,.\,\sigma}{2\pi}\,.\frac{\pi(z)}{F(z)}\,.\left(\frac{\alpha\varphi(z)}{f(z)}\right),$$

onde λ é o factor do sr. Darboux, σ o perimetro da curva c, e z um dos seus pontos.

Ora para todos os pontos do contorno de integração temos imposta a condição

$$\text{mod.}\left(\alpha \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1;$$

logo o resto tende para *zero* quando n augmenta indefinidamente, e portanto a serie é convergente no interior da área s:

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \alpha^2 . J_2 + \ldots + \alpha . J_p + \ldots.$$

Os coefficientes d'esta serie exprimem-se por um integral curvilineo da fórma

$$J_p = \frac{1}{2i\pi} . \int_c \frac{\left(\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right)^p . \frac{\pi(z)}{f_1(z)}}{(z-t)^{p+1}} . dz,$$

e applicando o theorema de Cauchy a esta expressão deduz-se immediatamente a lei da formação dos coefficientes

$$J_p = \frac{1}{1.2.3\ldots p} . \frac{d^p\left[\left(\frac{\varphi(t)}{f_1(t)}\right)^p . \frac{\pi(t)}{f_1(t)}\right]}{dt^p},$$

mas

$$f(z) = (z-t) . f_1(z)$$

portanto

$$f_1(t) = f'(t);$$

logo resulta a serie

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \sum_0^\infty \left\{ \frac{\alpha^p}{p!} . D^p\left[\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p . \frac{\pi(t)}{f'(t)}\right]\right\}$$

que dá o desenvolvimento de uma funcção holomorpha de uma raiz da equação

$$f(z) - \alpha . \varphi(z) = 0$$

existente na sua área de convergencia.

Esta serie presta-se a muitas combinações analyticas entre os seus coefficientes.

Fazendo

$$\pi(z) = \mathrm{F}'(z) \,.\, \Phi(z) = [f'(z) - \alpha\varphi'(z)] \,.\, \Phi(z)$$

resulta immediatamente a serie

$$\Phi(\zeta) = \sum_0^\infty \left\{ \frac{\alpha^p}{p!} \,.\, \mathrm{D}^p \left[\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)} \right)^p . \left(1 - \alpha \,.\, \frac{\varphi'(t)}{f'(t)} \right) . \Phi(t) \right] \right\}$$

que comprehende a serie de Lagrange como um caso particular quando for

$$f(z) = z - t.$$

Esta fórmula dá o desenvolvimento em serie convergente de uma raiz da equação

$$f(z) - \alpha \,.\, \varphi(z) = 0$$

existente no interior de uma área, quando ao longo do seu contorno for

$$\text{mod.} \left(\alpha \,.\, \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) < 1;$$

mas, se esta condição existir tambem para o contorno de uma raiz, a fórmula póde dar todas essas raizes em serie convergente; porque, os *zeros* das funcções holomorphas, sendo pontos isolados, separados por intervallos finitos, podemos envolver cada um por um contorno c ao longo do qual se verifique a condição de convergencia.

Sejam

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots\ t_n \quad \text{e} \quad z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ z_n$$

as raizes das equações

$$f(z) = 0$$

$$f(z) - \alpha \,.\, \varphi(z) = 0$$

existentes na mesma área e dispostas por ordem de modulos crescentes.

Se for possivel envolver estas raizes por um systema de circulos

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ c_n$$

de modo que cada um contenha só duas raizes t e z na sua área será tambem ao longo d'estes circulos

$$\text{mod.}\left(\alpha\,.\,\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1.$$

Com effeito, o numero de raizes d'estas equações no interior de um contorno c exprime-se pelos integraes curvilineos

$$n = \frac{1}{2i\pi}\,.\int_c d\log f(z)$$

$$n' = \frac{1}{2i\pi}\,.\int_c d\log\left[f(z) - \alpha\varphi(z)\right],$$

mas, se este circulo envolver só duas raizes t e z, temos

$$n = n' = 1,$$

logo

$$\frac{1}{2i\pi}\,.\int_c d\log\left(1 - \alpha\,.\,\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = 0,$$

e para que este integral seja nullo é necessario que seja constantemente ao longo da linha de integração

$$\text{mod.}\left(\alpha\,\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1.$$

Logo quando for possivel separar as $2n$ raizes duas a duas por meio de circulos verifica-se a condição da convergencia da serie, e por isso a fórmula precedente dá o desenvolvimento das raizes da equação

$$f(z) - \alpha \,.\, \varphi(z) = 0$$

existentes no interior de uma área em funcção das raizes da equação

$$f(z) = 0$$

existentes na mesma área e no mesmo circulo de convergencia

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \sum\limits_0^\infty \left\{ \dfrac{\alpha^p}{p!} \,.\, \mathrm{D}^p \left[\left(\dfrac{\varphi\, t_1}{f'\, t_1} \right)^p \left(1 - \alpha \dfrac{\varphi'\, t_1}{f'\, t_1} \right) . \, t_1 \right] \right\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = \sum\limits_0^\infty \left\{ \dfrac{\alpha^p}{p!} \,.\, \mathrm{D}^p \left[\left(\dfrac{\varphi\, t_n}{f'\, t_n} \right)^p \left(1 - \alpha \dfrac{\varphi'\, t_n}{f'\, t_n} \right) . \, t_n \right] \right\} \end{array}\right\}$$

DEUXIÈME NOTE DE CALCUL INTÉGRAL

PAR

H. LE PONT

Considérons les deux équations:

$$
(\mathrm{A}) \quad \left\{
\begin{aligned}
dy_1 &= (a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2)\, dx_1 + (a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2)\, dx_2 \\
dy_2 &= (b_{1,1}\, y_1 + b_{1,2}\, y_2)\, dx_1 + (b_{2,1}\, y_1 + b_{2,2}\, y_2)\, dx_2
\end{aligned}
\right.
$$

les coefficients a et b étant des fonctions quelconques des variables indépendantes x_1 et x_2.

Multipliant la seconde équation par une fonction indéterminée λ de x_1 et de x_2 et ajoutant ce produit à la première, il vient

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
d(y_1+\lambda y_2) = & \left[(a_{1,1}+\lambda b_{1,1})\, y_1 + \left(a_{1,2}+\lambda b_{1,2} + \frac{d\lambda}{dx_1} \right) y_2 \right] dx_1 \\
& + \left[(a_{2,1}+\lambda b_{2,1})\, y_1 + \left((a_{2,2}+(\lambda b_{2,2} + \frac{d\lambda}{dx_2} \right) y_2 \right] dx_2
\end{aligned}
\right.
$$

ou

$$
(\mathrm{B}) \quad a \operatorname{Log}(y_1+\lambda y_2) = (a_{1,1}+\lambda b_{1,1})\, dx_1 + (a_{2,1}+\lambda b_{2,1})\, dx_2
$$

en posant

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dx_1} &= b_{1,1}\, \lambda^2 + (a_{1,1} - b_{1,2})\, \lambda - a_{1,2}, \\
\frac{d\lambda}{dx_2} &= b_{2,1}\, \lambda^2 + (a_{2,1} - b_{2,2})\, \lambda - a_{2,2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pourque le système (A) soit compatible, il faut et il suffit évidemment: 1.° que le second membre de l'équation (B) soit une différentielle exacte; 2.° que les équations (2) définissent une même fonction λ intégrale de l'équation aux différentielles totales:

$$(C)\quad \left\{ \begin{aligned} d\lambda = & [b_{1,1}\lambda^2 + (a_{1,1} - b_{1,2})\lambda - a_{1,2}]\, dx_1 \\ & + [b_{2,1}\lambda^2 + (a_{2,1} - b_{2,2})\lambda - a_{2,2}]\, dx_2. \end{aligned} \right.$$

La première condition s'exprime de la manière suivante:

$$\frac{d}{dx_2}(a_{1,1} + \lambda b_{1,1}) = \frac{d}{dx_1}(a_{2,1} + \lambda b_{2,1}),$$

ou, en développant et remplaçant $\frac{d\lambda}{dx_1}$ et $\frac{d\lambda}{dx_2}$ par leurs valeurs,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{da_{2,1}}{dx_1} - \frac{da_{1,1}}{dx_2} - a_{1,2}\, b_{2,1} + b_{1,1}\, a_{2,2} \\ & + \left[\frac{db_{2,1}}{dx_1} - \frac{db_{1,1}}{dx_2} + (a_{1,1} - b_{12})\, b_{2,1} - (a_{21} - b_{22})\, b_{1,1}\right]\lambda = 0, \end{aligned} \right.$$

équation qui doit être vérifiée identiquement, donc:

$$(I)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{da_{2,1}}{dx_1} - \frac{da_{1,1}}{dx_2} = a_{1,2}\, b_{2,1} - b_{1,1}\, a_{2,2} \\ & \frac{db_{2,1}}{dx_1} - \frac{db_{1,1}}{dx_2} = (a_{2,1} - b_{2,2})\, b_{1,1} - (a_{1,1} - b_{1,2})\, b_{2,1}. \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir la deuxième condition, égalons les valeurs de

$\frac{d^2\lambda}{dx_1\,dx_2}$ fournies par les équations (2); nous avons en éliminant toujours $\frac{d\lambda}{dx_1}$ et $\frac{d\lambda}{dx_2}$ et tenant compte de (I):

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{da_{2,2}}{dx_1}-\frac{da_{1,2}}{dx_2}-(a_{1,1}-b_{1,2})\,a_{2,2}+(a_{2,1}-b_{2,2})\,a_{1,2}\\ &+\left(\frac{db_{2,2}}{dx_1}-\frac{db_{1,2}}{dx_2}-b_{1,1}\,a_{2,2}+a_{1,2}\,b_{2,1}\right)\lambda=0, \end{aligned}\right.$$

puis, en annulant les coefficients de cette équation:

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{da_{2,2}}{dx_1}-\frac{da_{1,2}}{dx_2}=(a_{1,1}-b_{1,2})\,a_{2,2}\,(a_{2,1}-b_{2,2})\,a_{1,2}\\ &\frac{db_{2,2}}{dx_1}-\frac{db_{1,2}}{dx_2}=b_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}\,b_{2,1}. \end{aligned}\right.$$

Les quatre relations (I) et (II) sont les conditions de compatibilité du système différentiel proposé. Il est du reste facile de le vérifier directement. En effet les équations (A) sont équivalentes à celles-ci:

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi_1}{dx_1}=a_{1,1}\,y_1+a_{1,2}\,y_2 \qquad \frac{d\varphi_1}{dx_2}=a_{2,1}\,y_1+a_{2,2}\,y_2\\ &\frac{d\varphi_2}{dx_1}=b_{1,1}\,y_1+b_{1,2}\,y_2 \qquad \frac{d\varphi_2}{dx_2}=b_{2,1}\,y_1+b_{2,2}\,y_2. \end{aligned}\right.$$

Egalant les valeurs de $\frac{d^2y_1}{dx_1\,dx_2}$ et $\frac{d^2y_2}{dx_1\,dx_2}$ tirées de ces équations, nous avons

*

$$(\beta)\begin{cases} \left(\dfrac{da_{21}}{dx_1}-\dfrac{da_{11}}{dx_2}+b_{11}\,a_{22}-a_{12}\,b_{21}\right)y_1 \\ \quad+\left[\dfrac{da_{22}}{dx_1}-\dfrac{da_{12}}{dx_2}+(a_{21}-b_{22})\,a_{12}-(a_{11}-b_{12})\,a_{22}\right]y_2=0. \\ \left[\dfrac{db_{21}}{dx_1}-\dfrac{db_{11}}{dx_2}+(a_{11}-b_{12})\,b_{21}-(a_{21}-b_{22})\,b_{11}\right]y_1 \\ \quad+\left(\dfrac{db_{22}}{dx_1}-\dfrac{db_{12}}{dx_2}+a_{12}\,b_{21}-b_{11}\,a_{22}\right)y_2=0. \end{cases}$$

ce qui nous donne, en exprimant que les coefficients de y_1 et de y_2 sont nuls, les relations (I) et (II).

Ces conditions étant supposés satisfaites, nous allons déterminer les deux fonctions λ qui forment nos deux combinaisons linéaires immediatement intégrables. Posons

$$(5)\qquad\begin{cases} h_1=b_{1,1}\,\lambda^2+(a_{1,1}-b_{1,2})\,\lambda-a_{1,2} \\ h_2=b_{2,1}\,\lambda^2+(a_{2,1}-b_{2,2})\,\lambda-a_{2,2} \end{cases}$$

l'équation (C) prend la forme

$$(\gamma)\qquad d\lambda=h_1\,dx_1+h_2\,dx_2$$

et la condition d'intégrabilité

$$h_1\frac{dh_2}{d\lambda}-h_2\frac{dh_1}{d\lambda}=\frac{dh_1}{dx_2}-\frac{dh_2}{dx_1}$$

doit être vérifiée. Nous avons alors, en effectuant

$$(3)\qquad\begin{cases} [(a_{1,1}-b_{12})\,b_{21}-(a_{21}-b_{22})\,b_{11}]\,\lambda^2-2\,(a_{12}\,b_{21}-b_{11}\,a_{22})\,\lambda \\ \qquad+(a_{11}-b_{12})\,a_{22}-(a_{21}-b_{22})\,a_{12}=0, \end{cases}$$

équation qui détermine les deux valeurs de λ satisfaisant à la question.

Soient λ_1 et λ_2 les deux racines de cette équation, et

$$(6)\quad \begin{cases} (a_{1,1}+\lambda_1 b_{11})\, dx_1 + (a_{21}+\lambda_1 b_{21})\, dx_2 = dt_1 \\ (a_{11}+\lambda_2 b_{11})\, dx_1 + (a_{21}+\lambda_2 b_{21})\, dx_2 = dt_2, \end{cases}$$

nous avons, en appelant c_1 et c_2 les constantes d'intégration

$$(\Sigma)\quad y_1 = \frac{-1}{\lambda_1-\lambda_2}(c_1\lambda_2 e^{t_1} - c_2\lambda_1 e^{t_2} \qquad y_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(c_1 e^{t_1} - c_2 e^{t_2}).$$

Il est facile de voir que l'équation (S) ne peut jamais avoir une racine double. En effet, introduisons dans les valeurs (Σ) de y_1 et de y_2 l'hypothèse

$$\lambda_1 = \lambda + \varepsilon \quad \lambda_2 = \lambda;$$

il vient, en faisant tendre ε vers zéro

$$(7)\qquad y_1 + \lambda y_2 = 0.$$

Or la relation

$$(\mathrm{H})\quad \begin{cases} (a_{12} b_{21} - b_{11} a_{22})^2 + [(a_{11}-b_{12})\, a_{22} - (a_{21}-b_{22})\, a_{12}] \\ \qquad [(a_{11}-b_{12})\, b_{22} - (a_{21}-b_{22})\, b_{11}] = 0, \end{cases}$$

qui exprime que l'équation (S) a une racine double λ, exprime aussi, comme il est facile de s'en assurer par un calcul direct, que cette valeur λ est une solution commune des équations

$$(8)\qquad h_1 = 0 \quad h_2 = 0;$$

et alors, à cause des formules (2) elle est indépendante de x_1 et de x_2. Nous nous trouvons donc dans le cas d'une seule fonction y définie par deux équations differéntielles qui se réduisent nécessairement à une seule, ce que nous n'avons pas supposé.

Il est clair aussi que l'équation (S) n'a pas de racine indépendante à la fois de x_1 et de x_2. Si l'une des racines ne contient ni x_1 ni x_2, elle est racine commune des équations (8), racine double de l'équation (S) et nous rentrons dans le cas précédent; si les deux racines ne contiennent ni x_1 ni x_2 elles satisfont aux équations (8) et donnent

$$\text{(III)} \qquad \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{11} - b_{12}}{a_{21} - b_{22}} = \frac{b_{11}}{b_{21}}$$

relations qui montrent que l'équation (S) est vérifiée identiquement, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Dans ce dernier cas, le seul où la méthode puisse tomber en défaut, les conditions d'intégrabilité se réduisent à

$$\text{(IV)} \quad \frac{da_{21}}{dx_1} = \frac{da_{11}}{dx_2} \quad \frac{da_{22}}{dx_1} = \frac{da_{12}}{dx_2} \quad \frac{db_{21}}{dx_1} = \frac{db_{11}}{dx_2} \quad \frac{db_{22}}{dx_1} = \frac{db_{21}}{dx_2}$$

et les équations (8) à une seule

$$\text{(9)} \qquad a + c\lambda - b\lambda^2 = 0$$

a, b, c étant des constantes. Les équations (A) prennent alors la forme

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} dy_1 = [f_1(x_1, x_2)\, y_1 + aky_2]\, dx_1 \\ \qquad + [f_2(x_1, x_2)\, y_1 + ay_2]\, dx_2 \\ dy_2 = \{bky_1 + [f_1(x_1, x_2) + ck]\, y_2\}\, dx_1 \\ \qquad + \{by_1 + [f_2(x_1, x_2) + c]\, y_2\}\, dx_2 \end{cases}$$

on appelant k la valeur commune des rapports (III), $f_1(x_1, x_2)$

et $f_2(x_1, x_2)$ deux fonctions quelconques de x_1 et de x_2 telles que l'expression

$$\text{(V)} \qquad f_1(x_1, x_2)\,dx_1 + f_2(x_1, x_2)\,dx_2$$

soit une différentielle exacte. En appelant $f(x_1, x_2)$ son intégrale, la substitution

$$\text{(10)} \qquad y = e^{f(x_1, x_2)} z$$

transforme le système (D) en un système à coefficients constants dont l'intégration est connue.

La même méthode s'applique évidemment dans le cas où il y a un nombre quelconque de variables indépendantes.

BIBLIOGRAPHIA

G. Darboux. — Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitesimal. — Paris, 1887.

É a primeira parte d'uma obra, em que o eminente geometra faz publicas as suas lições sobre a theoria das superficies, professadas na Sorbonne de 1882 a 1886. Está dividida em tres livros, cujo conteúdo vamos analysar rapidamente.

O primeiro é consagrado a applicações geometricas da theoria phoronomica do movimento relativo. Depois de recordar as fórmulas conhecidas de Mechanica, o auctor propõe-se a solução do problema directo da determinação do movimento, dadas em funcção do tempo as componentes de rotação e as coordenadas da origem. Analyticamente, esta questão equivale á integração d'um systema de tres equações differenciaes simultaneas, lineares de 1.ª ordem; o sr. Darboux mostra, por uma transformação elegante, que o systema sempre se póde reduzir a uma equação geral de Riccati. Os resultados geometricos que correspondem a este processo analytico são particularmente interessantes para a theoria das curvas enviezadas, consideradas como geradas por um triedro movel, cujas arestas são a tangente, a normal principal e a binormal; citaremos, entre outras applicações, as que se referem ás curvas, cujas duas curvaturas estão ligadas por uma relação qualquer.

Segue-se o estudo do movimento dos systemas moveis, que depende de dois parametros; o problema, analogamente com o precedente, reduz-se á integração de dois systemas simultaneos de equações differenciaes lineares e de 1.ª ordem.

Depois de mostrar que tem soluções communs, o auctor expõe um methodo que torna sempre possivel a sua determinação por meio d'uma unica equação geral de Riccati, no caso em que o systema tem um ponto fixo, e mais tres quadraturas no caso geral de movimento.

Fecham este livro dois capitulos: o primeiro tracta das coordenadas curvilineas, segundo Gauss; o ultimo é uma applicação d'ellas ás superficies definidas por propriedades phoronomicas, taes como helicoides, superficies de revolução, superficies geradas pelo movimento d'uma curva invariavel, etc.

O segundo livro é especialmente destinado aos systemas de coordenadas curvilineas, sobre os quaes o sr. Darboux já publicou alguns resultados importantes n'uma memoria, inserida nos *Annales de l'École Normale* de 1878. Começa pelo estudo dos systemas conjugados, segundo Dupin, e faz uma applicação d'elles á determinação das superficies, cujas duas familias de linhas de curvatura são planas; em seguida vem as linhas assymptoticas, sendo objecto d'um exame especial as das superficies tetraedraes de Lamé, determinadas primeiro pelo geometra Sophus Lie.

Aos systemas orthogonaes isothermicos é dedicado um extenso capitulo; a determinação d'um d'estes systemas sobre uma superficie é uma problema importante para a cartographia, pois se demonstra facilmente que d'elle depende a representação d'uma porção d'essa superficie com a conservação dos angulos, ou, o que é o mesmo, da semelhança dos seus elementos infinitesimos. N'este ponto o auctor é levado a examinar a questão da representação conforme de duas áreas planas; e expõe os trabalhos de Schwarz, que resolvem completamente este problema, tão importante pelas suas applicações á Physica Mathematica e á Analyse.

Os systemas orthogonaes e simultaneamente conjugados, formados pelas duas familias de linhas de curvatura, são estudados em seguida, bem como a representação espherica das superficies, tal como a define Gauss.

Os restantes capitulos do livro são consagrados ás coordenadas pentasphericas, já estudadas na memoria citada do sr. Darboux, e que conduzem á transformação de superficies de Sophus Lie, em que ás linhas assymptoticas d'uma correspondem as linhas de curvatura da outra; ás coordenadas tangenciaes, e por ultimo á transformação especial que Laguerre denominou por direcções reciprocas.

O terceiro livro, applicação das doutrinas dos dois antecedentes, é todo concernente ás superficies minimas que passam por um contorno dado. Precede o estudo geral um estudo historico, em que se examinam todas as contribuições que tem fornecido á questão os mathematicos posteriores a Monge e Lagrange.

Nos onze capitulos seguintes discute o auctor as fórmulas de Monge, de Schwarz e de Weierstrass, e a sua interpretação geometrica, pondo especial attenção nas superficies minimas reaes e algebricas, quer ellas se determinem pela condição de estarem inscriptas n'uma superficie planificavel algebrica, quer pela condição de passarem por um contorno composto de rectas (problema de Plateau), ou planos que a superficie tem de cortar orthogonalmente.

DUARTE LEITE.

J. A. Serrasqueiro. — *Tratado de Geometria Elementar,* 5.ª edição. — *Coimbra, 1887.*

—— *Elementos de Arithmetica,* 4.ª edição. — *Coimbra, 1887.*

Veja-se o que se disse a respeito das edições anteriores do primeiro d'estes livros na pagina 122 do tomo v e na pagina 141 do tomo VII d'este jornal.

No segundo o auctor expõe a parte da Arithmetica exigida pelos programmas do 1.º e 2.º anno do curso dos Lyceus, isto é, as regras practicas para effectuar as operações sobre numeros inteiros e sobre numeros fraccionarios; os enunciados d'algumas propriedades dos numeros relativas á divisibilidade; os systemas de medidas usados em Portugal na actualidade e antigamente; os enunciados dos theoremas relativos ás proporções e progressões; e finalmente a applicação d'estes theoremas á regra de tres, á regra de juros e á regra de companhia.

Diogo Nunes. — *Elementos d'Arithmetica practica.* — *Covilhã, 1887.*

No livro I expõe o auctor a theoria das operações sobre numeros inteiros; no livro II as propriedades dos numeros relativas á divisibilidade; no livro III a theoria das operações sobre numeros fraccionarios, e os systemas de medidas; no livro IV a doutrina relativa á raiz quadrada; e finalmente no livro V a doutrina das razões e proporções e sua applicação aos problemas de regra de tres, de juros, de desconto, de companhia, de mistura e de liga

Este livro é principalmente util para as Escolas Normaes primarias e para os Institutos industriaes.

Valentin Balbin. — Elementos de Calculo de los cuaterniones. — Buenos-Ayres, 1887.

O livro de que vamos dar noticia é o primeiro que, a respeito da theoria dos quaterniões, se publica em lingua hespanhola. O auctor, professor na Universidade de Buenos-Ayres, não só expõe de um modo claro e elementar a theoria dos quaterniões, mas tambem as suas applicações á Geometria, á Mecanica e á Physica mathematica.

Vamos dar uma idéa rapida das materias de que tracta esta excellente obra.

No capitulo I vem a doutrina da addição e subtracção dos vectores, e da multiplicação dos mesmos por quantidades reaes.

No capitulo II vem a doutrina da multiplicação e divisão dos vectores, e abundantes exemplos para facilitarem a sua comprehensão.

No capitulo III expõe o auctor a parte symbolica da theoria dos quaterniões, isto é, tracta das operações fundamentaes com os signaes que representam as partes escalares e as partes vectoriaes de uma expressão.

Os capitulos IV e V contêem applicações da theoria exposta nos capitulos precedentes á Geometria da linha recta, do plano, da circumferencia, da esphera, do cone, etc.

O capitulo VI tracta da differenciação dos quaterniões.

O capitulo VII versa sobre o estudo das conicas.

O capitulo VIII é consagrado ao estudo das equações do primeiro grão, e á applicação dos resultados achados a algumas equações de uso frequente na Mecanica racional e na Physica mathematica.

Os capitulos IX, X e XI são consagrados a applicações da theoria dos quaterniões á theoria das linhas e das superficies; os capitulos XII, XIII e XIV são consagrados ás applicações da mesma doutrina á Mecanica e á Physica mathematica.

Finalmente o capitulo XV contém um resumo historico do assumpto.

Pela rapida noticia que vimos de dar vê-se quanto é completo e rico em applicações o bello livro do sr. V. Balbin.

P. Stroobant.— Étude sur le satellite énigmatique da Venus (Mémoires de l'Académie des Sciences de Belgique, 1887).

Refere-se o presente trabalho ao astro que alguns observadores têem visto no telescopio ao lado de Venus. Depois de expôr as diversas observações que d'este astro mysterioso têem sido feitas, todas anteriores ao seculo actual e separadas por intervallos longos, o auctor analysa as differentes hypotheses que têem sido propostas para explicar estas apparições, concluindo d'este exame que estas hypotheses não podem resolver a difficuldade. Em seguida apresenta uma nova hypothese, que consiste em que o pretendido satellite de Venus não é outra cousa que uma estrella que apparece no campo do oculo ao lado de Venus. Para justificar este modo de vêr determina esta estrella em sete das observações mencionadas, tendo o cuidado de se referir primeiro a observações que fez no Observatorio de Bruxellas, para tirar a duvida que póde haver de que estrellas de pequeno brilho sejam visiveis no campo do oculo ao lado de Venus.

O sr. Stroobant junctou ao seu trabalho os textos de todas as observações que têem sido feitas do pretendido satellite de Venus, escriptos na lingua original.

Gino Loria.— Il passato e il presente delle principali teorie geometriche (Memorie della Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXVIII).

Revela profunda erudição este trabalho do illustre professor de Geometria na Universidade de Genova.

O auctor teve em vista principalmente tractar da historia da

Geometria moderna; mas em virtude da impossibilidade que ha de estudar um ramo qualquer de historia a partir de uma epocha determinada sem se referir aos acontecimentos anteriores, principia por dizer rapidamente de que modo a Geometria chegou ao estado a partir do qual se propõe seguil-a detidamente.

N'esta primeira parte o auctor refere-se á origem da Geometria no Egypto, ao seu desenvolvimento na Grecia, ao nascimento da Geometria analytica, ao renascimento da Geometria synthetica nas mãos de Monge, Carnot, Poncelet, etc.

Entrando em seguida no ponto de que pretende occupar-se, divide a exposição em varias partes, principiando pela theoria das curvas planas e das superficies, em seguida das curvas no espaço, passando depois a descrever a origem e o desenvolvimento da doutrina das transformações geometricas, a Geometria da recta, a Geometria não euclideana, e terminando pela Geometria a *n* dimensões.

A exposição da historia d'estes assumptos geometricos indo até aos tempos mais recentes, a bella memoria do sr. Gino Loria dá uma idéa completa do estado actual da Geometria, o que lhe dá um interesse consideravel.

C. le Paige. — *René-François de Sluse* (*Ciel et Terre*, 2.ª série, t. II, 1887).

No volume VII d'este jornal deu-se (pag. 16) noticia de um trabalho do sr. Paige relativo a René-François de Sluse, geometra belga que floreceu no seculo 17.º

No presente trabalho o sr. Paige analysa os trabalhos mathematicos do eminente sabio belga, para dar noticia dos resultados por elle obtidos a respeito dos assumptos seguintes: quadratura de certas curvas; cubatura de volumes; indagação de centros de gravidade; geometria cartesiana e applicações especiaes á construcção das raizes das equações; determinação das tangentes, dos pontos de inflexão e dos maximos e minimos.

O trabalho do sr. Paige offerece muito interesse, por se referir a um dos geometras que prepararam a descoberta do Calculo infinitesimal.

C. le Paige. — *Sur les homographies dans le plan* (*Bulletins de l'Académie de Belgique, 1886*).

Depois de ter, em um trabalho anterior, definido o que se deve entender por involuções e homographias nos espaços lineares a um numero qualquer de dimensões, principia no presente trabalho o estudo d'estes elementos.

Alfonso del Re. — *Nuova construzione della superficie del quint' ordine dotata di curva doppia del quint' ordine* (*Rendiconti della Accademia di Napoli, 1866*).

N'esta memoria o auctor apresenta pela primeira vez um meio geral de gerar as superficies de 5.ª ordem, dotadas de curvas duplas de 5.ª ordem com um ponto triplo.

F. Gerbaldi. — *Sulla realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. I).

N'este artigo o auctor apresenta criterios analyticos para reconhecer, sem passar pela resolução de uma equação do terceiro gráo, o numero de pontos reaes em que duas conicas se cortam e o numero de tangentes reaes communs.

George Paxton Young. — *Forms, Necessary and Sufficient, of the Roots of Pure Uni-Serial Abelian Equations* (*American Journal of Mathematics*, t. IX).

Uma equação abeliana é chamada pelo sr. Young *uni-serial* quando as raizes formam uma unica serie circular, e é chamada equação abeliana *pura* quando cada raiz é funcção racional das outras. O objecto da memoria precedente é procurar as fórmas das raizes d'estas equações.

Principia o auctor por estabelecer o criterio para reconhecer quando uma equação abeliana é *uni-serial* e *pura*, e em seguida deduz as fórmas das raizes d'estas equações: 1.º quando ellas são do primeiro grão, 2.º quando são do quarto grão, 3.º quando o grão é o producto de numeros primos distinctos, etc.

Os resultados obtidos n'esta memoria importante são novos, assim como os methodos empregados, ainda que fundados em principios estabelecidos por Abel.

Já por varias vezes temos dado noticia n'este jornal de trabalhos devidos ao sr. Young relativos á theoria difficil da resolução algebrica das equações. A este respeito ainda promette o auctor, em carta que nos fez a honra de nos escrever, apresentar brevemente um methodo directo e definitivo para achar as raizes d'aquellas equações do 5.º grão com coefficientes commensuraveis, que são resoluveis algebricamente.

M. d'Ocagne. — *Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques* (*Annales de l'École Normale Supérieure, 1887*).

—— *Les coordonées cycliques* (*Mathesis*, t. VII).

—— *Sur les courbes algébriques de degré quelconque* (*Journal de Mathématiques spéciales, 1887*).

E. Cesàro. — *Sull' uso dell' integrazione in alcune questioni d'Aritmetica* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. I).

—— *Intorno ad una ricerca di limiti* (*Item*).

—— *Intorno ad una questioni di probabilità* (*Item*).

—— *Sul moto d'un ponto sollecitato verso una retta* (*Item*).

M. Lerch. — *Addition au mémoire présenté dans la séance du 15 octobre 1886* (*Comptes rendus de la Société des Sciences de Boheme, 1887*).

Refere-se o auctor á memoria de que se deu noticia na pag. 27. Apresenta novos casos em que a funcção considerada na primeira memoria (vid. pag. 27) não tem derivada.

M. Lerch.— *Démonstration de la formule fondamentale dans la transformation linéaire de la transcendante elliptique* $\vartheta_1(u \mid \tau)$ *(Comptes rendus de la Société des Sciences de Boheme, 1887).*

E. B. Guccia.— *Sui sistemi lineari di superficie algebriche dotati di singolarità base qualunque* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. I).

A. del Re.— *Alcune proprietà geometriche che potrebbero essere utili nella teorica dei sistemi di raggi luminosi* (*Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, t. I).

—— *Sulla congruenza* (6, 2) *delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche che si corrispondono in una determinata omografia non assiale nè omologica dello spazio* (*Item*).

—— *Su certi luoghi che s'incontrano nello studio di tre forme geometriche fondamentali di 2.ª specie projecttivamente riferite dua a due* (*Item*).

C. le Paige.— *Recherches sur le pentaèdre* (*Bulletins de l'Académie des Sciences de Belgique, 1887*).

F. Engel.— *Kleinere Beiträge zu Gruppentheorie* (*Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1887*).

L. Kronecker.— *Ueber den Zahlbegriff* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 101).

G. T.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES SÉRIES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

A. GUTZMER

(à Berlin)

Je prends la liberté de vous communiquer quelques remarques sur deux séries regardées l'une par G. Kirchhoff et l'autre par Mr. Cesaro. Dans un article intitulé: «Zur Theorie der Gleichgewichtsverteilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln» (*), le premier a fait usage de la série:

$$\text{(A)}\quad R(x,y,z)=\frac{1}{1-x}+\frac{y}{1-xz}+\frac{y^2}{1-xz^2}+\ldots+\frac{y^n}{1-xz^n}+\ldots$$

où les quantités x, y, z sont supposées <1. Par des moyens parfaitement élémentaires cette série y est transformée dans une autre:

$$\text{(B)}\quad R(x,y,z)=\frac{1-xy}{(1-x)(1-y)}+\frac{1-xyz^2}{(1-xz)(1-yz)}\cdot xyz$$

$$+\frac{1-xyz^4}{(1-xz^2)(1-yz^2)}\cdot x^2y^2z^4+\ldots+\frac{1-xyz^{2n}}{(1-xz^n)(1-yz^n)}\cdot x^ny^nz^{n^2}+\ldots$$

qui converge beaucoup plus rapidement que la série (A).

(*) Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akademie des Wissenschaften zu Berlin vom 12 november 1885, pp. 1007-1013.

Je me propose d'abord de faire voir que cette transformation est contenue comme cas spécial dans une transformation générale de la série

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,\xi)=1+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q)(1-q^{\gamma})}\cdot q^{\xi}$$

$$+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta})(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^{2})(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}q^{2\xi}+\ldots$$

dont la loi générale est évidente; en posant

$$q^{\alpha}=a,\quad q^{\beta}=b,\quad q^{\gamma}=c,\quad q^{\xi}=\zeta,$$

elle prend la forme

$$\text{(C)}\qquad \varphi[a,b,c,q,\zeta]=1+\frac{(1-a)(1-b)}{(1-q)(1-c)}\cdot\zeta$$

$$+\frac{(1-a)(1-aq)(1-b)(1-bq)}{(1-q)(1-q^{2})(1-c)(1-cq)}\cdot\zeta^{2}+\ldots.$$

Ces séries (B) et (C) sont dues à Heine (*) e forment une généralisation de la série hypergéométrique de Gauss. Pour les valeurs particulières

$$a=q=z,\quad b=x,\quad c=xz,\quad \zeta=y$$

nous avons

$$\varphi[z,x,xz,z,y]=1+\frac{1-x}{1-xz}\cdot y+\frac{1-x}{1-xz^{2}}\cdot y^{2}+\ldots$$

$$+\frac{1-x}{1-xz^{n}}\cdot y^{n}+\ldots.$$

(*) Crelle, Journal für reine und angewante Mathematik, vol. 32, 34; et Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2 éd. Berlin 1878, t. 1, p. 98.

d'où nous concluons

$$(1)\qquad R(x,y,z)=\frac{1}{1-x}\cdot\varphi[z,x,xz,z,y].$$

Mais pour la transformation de la série de Heine il y a la formule générale (*):

$$(D)\quad \varphi[a,b,c,q,\zeta]=\varphi\left[\frac{c}{b},\zeta,a\zeta,q,b\right].\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a\zeta q^n)(1-bq^n)}{(1-\zeta q^n)(1-cq^n)}.$$

Cette formule nous donne dans le cas présent après quelques réductions simples

$$\frac{1}{1-x}\varphi[z,x,xz,z,y]=\varphi[z,y,yz,z,x]\cdot\frac{1}{1-y}$$

ou

$$(2)\qquad R(x,y,z)=R(y,x,z).$$

Par conséquent on peut changer dans la série (A) les variables x et y sans changer la valeur de (A). Il s'ensuit qu'il doit être possible de transformer la série (A) dans une autre, dans laquelle x et y entrent symmétriquement.

Or il est évident que

$$\frac{1}{1-x}\varphi[z,x,xz,z,y]$$

$$=\frac{1}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{xyz}{1-xz}+\frac{xy^2z^2}{1-xz^2}+\ldots+\frac{xy^nz^n}{1-xz^n}+\ldots$$

$$=\frac{1-xy}{(1-x)(1-y)}+xyz\cdot\frac{1}{1-xz}\cdot\varphi[z,xz,xz^2,z,yz].$$

(*) L. c., p. 106.

*

Il suit de même

$$\frac{1}{1-xz}\cdot\varphi\left[z, xz, xz^2, z, yz\right]=\frac{1-xyz^2}{(1-xz)(1-yz)}$$

$$+xyz^3\cdot\frac{1}{1-xz^2}\cdot\varphi\left[z, xz^2, xz^3, z, yz^2\right]$$

$$\frac{1}{1-xz^2}\cdot\varphi\left[z, xz^2, xz^3, z, yz^2\right]=\frac{1-xyz^4}{(1-xz^2)(1-yz^2)}$$

$$+xyz^5\cdot\frac{1}{1-xz^3}\cdot\varphi\left[z, xz^3, xz^4, z, yz^3\right]$$

....

$$\frac{1}{1-xz^n}\cdot\varphi\left[z, xz^n, xz^{n+1}, z, yz^n\right]=\frac{1-xyz^{2n}}{(1-xz^n)(1-yz^n)}$$

$$+xyz^{2n+1}\cdot\frac{1}{1-xz^{n+1}}\cdot\varphi\left[z, xz^{n+1}, xz^{n+2}, z, yz^{n+1}\right].$$

....

De ce système d'équations on conclut facilement

$$(3)\quad R(x,y,z)=\frac{\varphi[z,x,xz,z,y]}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-xyz^{2n}}{(1-xz^n)(1-yz^n)}\cdot x^n\cdot y^n z^{n^2};$$

c'est la série (B) de G. Kirchhoff. En effet, elle est symmétrique en x et y, et on arriverait évidemment au même résultat en sortant de l'autre série en (2). La méthode avec laquelle nous avons trouvé cette forme symmétrique (3) est essentiellement la même que celle employée par G. Kirchhoff.

On se convaincra de même que cette série converge beaucoup plus rapidement que (A). Mais il y a un point dans l'équation (3) qui me semble digne d'être observé et qui ne vient pas au jour dans la transformation employée dans l'article de G. Kirchhoff.

Il ne semble pas possible de représenter la série, que nous avons obtenue sans aucun changement de variables, par la série de Heine, parce que l'exposant de z^{n^2} croît d'après une autre loi que celui de ζ dans la série Heinéenne; de sorte que nous avons le fait intéressant qu'une série Heinéenne peut être transformée dans une autre qui n'est plus représentable par une telle série.

Permettez-moi, Monsieur, d'ajouter à ces remarques encore quelques mots sur la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xz^n}{1-xz^n} \tag{4}$$

d'où Mr. Cesaro a tiré des «Conséquences arithmétiques» (*) et que je ne connais que par votre rapport dans le «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Jahrgang 1885», car malheureusement je n'ai pas lu ce numéro de votre journal. Vous voyez que cette série est très semblable à celle regardée par G. Kirchhoff, et en effet il est possible de la transformer de la même méthode. Car il suit:

$$\Sigma u_n = \frac{xz}{1-xz} + \frac{xz^2}{1-xz^2} + \frac{xz^3}{1-xz^3} + \ldots$$

$$= \frac{xz}{1-xz}\left\{1 + \frac{1-xz}{1-xz^2}z + \frac{1-xz}{1-xz^3}z^2 + \frac{1-xz}{1-xz^4}z^3 + \ldots\right\}.$$

Mais la série entre les crochets peut être représentée par une série Heinéenne, de sorte qu'il vient

$$\Sigma u_n = \frac{xz}{1-xz} \cdot \varphi[z, xz, xz^2, z, z]. \tag{5}$$

En profitant de l'équation (D), nous trouverons

$$\varphi[z, xz, xz^2, z, z] = \varphi[z, z, z^2, z, xz] \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-z^{n+2})(1-xz^{n+1})}{(1-z^{n+1})(1-xz^{n+2})}.$$

(*) Votre journal, VII, pp. 3-6.

Mais comme $z<1$, nous avons

$$\lim_{\nu=\infty} \prod_{n=0}^{\nu} \frac{(1-z^{n+2})(1-xz^{n+1})}{(1-z^{n+1})(1-xz^{n+2})}$$

$$=\lim_{\nu=\infty} \frac{1-xz}{1-z} \cdot \frac{1-z^{\nu+2}}{1-xz^{\nu+2}} = \frac{1-xz}{1-z}$$

et par suite

$$\varphi[z, xz, xz^2, z, z] = \frac{1-xz}{1-z} \cdot \varphi[z, z, z^2, z, xz]$$

et avec cette relation (5) devient

$$(6) \qquad \Sigma u_n = \frac{xz}{1-z} \varphi[z, z, z^2, z, xz]$$

ou, en développant,

$$\Sigma u_n = \frac{xz}{1-z}\left\{1+\frac{1-z}{1-z^2}\cdot xz+\frac{1-z}{1-z^3}(xz)^2+\ldots+\frac{1-z}{1-z^n}(xz)^{n-1}+\ldots\right\}$$

$$=\frac{xz}{1-z}+\frac{(xz)^2}{1-z^2}+\frac{(xz)^3}{1-z^3}+\ldots+\frac{(xz)^n}{1-z^n}+\ldots$$

ce qui nous donne la relation intéressante

$$(7) \qquad \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \frac{xz^n}{1-xz^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(xz)^n}{1-z^n}$$

relation qui est vérifiée immédiatement pour $x=1$. En écrivant la série (7) sous la forme

$$xz \cdot \sum_1^\infty \frac{(xz)^{n-1}}{1-z \cdot z^{n-1}} = xz \sum_0^\infty \frac{(xz)^\nu}{1-z \cdot z^\nu}$$

on voit qu'elle est un cas particulier de la série (A) de G. Kirchhoff.

Par suite il est possible de la transformer dans une autre série de la forme (B) ou (3). Il faut donc que nous ayons l'équation

$$\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \frac{(xz)^n}{1-z^n} = xz \sum_{\nu=0}^\infty \frac{1-x\,.\,z^{2(\nu+1)}}{(1-z^{\nu+1})(1-xz^{\nu+1})} \,.\, x^\nu \,.\, z^{\nu(\nu+2)}$$

ou

$$\sum_{n=1}^\infty u_n = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{1-x\,.\,z^{2(\nu+1)}}{(1-z^{\nu+1})(1-xz^{\nu+1})} \,.\, x^{\nu+1} \,.\, z^{\nu^2+2\nu+1}$$

ou enfin

$$(8) \qquad \sum_{n=1}^\infty u_n = \sum_{\mu=1}^\infty \frac{1-x\,.\,z^{2\mu}}{(1-z^\mu)(1-xz^\mu)} \,.\, x^\mu \,.\, z^{\mu^2}.$$

D'autre part vous voyez, Monsieur, que déjà la série (4) est un cas spécial de la série (A), pour laquelle on a $y=z$.

En appliqnant la formule (3) à ce cas, nous aurons

$$\sum_1^\infty u_n = x\sum_1^\infty \frac{z^n}{1-xz^n} = x \sum_{n=0}^\infty \frac{1-x\,.\,z^{2n+1}}{(1-xz^n)(1-z^{n+1})} x^n \,.\, z^{n(n+1)} - \frac{x}{1-x}$$

où le second terme à droite est ajouté à cause de la différence dans la sommation des séries (A) et (4); cette équation s'écrit immédiatement

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{1-xz^n} = \sum_0^\infty \frac{1-xz^{2n+1}}{(1-xz^n)(1-z^{n+1})} x^n \,.\, z^{n(n+1)}.$$

Beaucoup d'autres formes pourraient être obtenues encore, en profitant des relations (2), (3) et (7), mais il suffit d'avoir donné quelques unes de ces formes; c'est pourquoi je n'y insiste plus.

Voilà les remarques que je me suis proposé de vous communiquer. Vous voyez encore que la série (8) peut s'obtenir au moyen de la série (3) en y posant $y=1$ et en commençant la sommation dès la valeur $n=1$. Toutes les transformations faites dans ces lignes peuvent être considérés comme des identités, car nous n'avons fait ni des substitutions d'autres variables ni des restrictions, de sorte que les transformées doivent être convergentes pour les mêmes valeurs que les séries originales.

Berlin, le 15 janvier 1888.

EXTRACTOS DAS PUBLICAÇÕES RECENTES

I

Inversão das derivações

Para demonstrar o theorema importante da inversão das derivações é necessario impôr condições á funcção $f(x, y)$; por isso é necessario depois, quando se particularisa a funcção, verificar se estas condições têem logar. Para evitar em cada caso esta verificação, o sr. P. Mansion demonstra directamente este theorema para o caso das funcções elementares, do modo que vamos expôr.

Seja $u = f(x, y)$ e demonstremos que é $\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$.

I. O theorema é verdadeiro se u é funcção só de x (ou só de y); porque, nestes casos, é $\frac{d^2u}{dx\,dy} = 0$, $\frac{d^2u}{dy\,dx} = 0$.

II. O theorema é verdadeiro para $u = f(v)$, se fôr verdadeiro para a funcção v, isto é, se fôr $\frac{d^2v}{dx\,dy} = \frac{d^2v}{dy\,dx}$. Com effeito, temos

$$\frac{du}{dx} = f'(v)\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = f'(v)\frac{dv}{dy}$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = f''(v)\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + f'(v)\frac{d^2v}{dx\,dy}$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dx} = f''(v)\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dx} + f'(v)\frac{d^2v}{dy\,dx},$$

e os segundos membros das duas ultimas egualdades são eguaes.

III. O theorema é verdadeiro para a funcção

$$u = v + w - t$$

se fôr verdadeiro para v, w e t. Com effeito, temos

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2v}{dx\,dy} + \frac{d^2w}{dx\,dy} - \frac{d^2t}{dx\,dy}$$

$$= \frac{d^2v}{dy\,dx} + \frac{d^2w}{dy\,dx} - \frac{d^2t}{dy\,dx} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

IV. O theorema é verdadeiro para vw, vw^{-1}, v^w, se fôr verdadeiro para v, w, como se demonstra de um modo analogo ao empregado no caso anterior.

Por meio de reducções successivas aos casos anteriores estabelece-se o theorema para uma funcção elementar qualquer. Por exemplo, para a funcção

$$y = (u + v)\,u^v$$

põe-se

$$y = st, \quad s = u + v, \quad t = u^v.$$

Se o theorema é verdadeiro para u e v tambem é verdadeiro para t (4.° caso), para s (3.° caso), e portanto para y (4.° caso).

(P. Mansion: Résumé du Cours d'Analyse infinitésimal, Gand, 1887).

II

Sobre o limite da expressão $\sqrt[p]{q} - 1$

Este limite importante na theoria elementar dos logarithmos, quando $q > 1$, é achado pelo sr. Escary de um modo muito simples, por meio da identidade

$$x - a = \frac{x^m - a^m}{x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}}.$$

Com effeito, pondo

$$m=p, \quad x=\sqrt[p]{q}, \quad a=1$$

vem

$$\sqrt[p]{q}-1=\frac{q-1}{\sqrt[p]{q^{p-1}}+\sqrt[p]{q^{p-2}}+\ldots+\sqrt[p]{q}+1}.$$

Por ser $\sqrt[p]{q^{p-n}}>1$ quando $n<p$, o segundo membro d'esta egualdade tende para zero quando p tende para o infinito: logo $\sqrt[p]{q}$ tende para a unidade.

[*Escary: Sur la limite de l'expression* $\sqrt[p]{q}-1$ (*Journal de Vuibert*, t. 12)].

III

Theorema sobre determinantes

Mostrou Cauchy que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

é egual ao producto das $\frac{n(n-1)}{2}$ differenças das n quantidades $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Este theorema foi generalisado por Borchardt, que mostrou que o determinante cuja linha de ordem h é

$$\varphi_h(t_1), \quad \varphi_h(t_2), \quad \ldots, \quad \varphi_h(t_n),$$

onde é

$$\varphi_h(t)=t^{h-1}+\mathrm{A}_{h,h-1}\,t^{h-1}+\ldots+\mathrm{A}_{h,1},$$

é egual ao producto das $\frac{n(n-1)}{2}$ differenças das n quantidades $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Este theorema vem de ser demonstrado pelo sr. Marcolongo de um modo muito simples.

Com effeito, se subtrahirmos a primeira columna de cada uma das seguintes vem um novo determinante de ordem $n-1$ onde não entram as constantes $A_{2,1}, A_{3,1}, \ldots, A_{n,1}$. Logo o determinante proposto não deve mudar quando n'elle se põe $A_{2,1}=0$, $A_{3,1}=0, \ldots, A_{n,1}=0$. Desenvolvendo este determinante segundo os elementos da primeira linha obtem-se n determinantes de ordem $n-1$, e da mesma fórma que o anterior.

Applicando-lhes portanto o mesmo raciocinio demonstra-se que estes determinantes são independentes de $A_{r,s}$, e portanto o determinante proposto não se altera quando se põe $A_{r,s}=0$. Logo é egual ao determinante de Cauchy.

[*R. Marcolongo: Generalizzazione di un teorema sui determinanti* (*Jornal de Battaglini*, t. XXV)].

IV

Theoremas de Arithmetica

Devem-se ao sr. Lugli os theoremas interessantes seguintes, que nos limitaremos a enunciar:

1.° Para que um numero da fórma 10^p-1 seja divisivel por outro da fórma 10^q-1, é necessario e sufficiente que p seja multiplo de q.

2.° Convertendo em dizima uma fracção ordinaria $\frac{1}{p}$, cujo denominador é primo, o periodo terá ou $p-1$ algarismos ou um numero de algarismos sub-multiplo de $p-1$.

3.° Se o numero de algarismos do periodo d'uma fracção simples, que tem por denominador um numero primo p, é par e egual a $2t$, o resto de ordem t da divisão do numerador pelo denominador será egual ao denominador diminuido d'uma unidade. A reciproca d'esta proposição é verdadeira.

4.º Se á fracção $\frac{1}{p}$ corresponde um periodo de s algarismos, a qualquer outra fracção irreductivel de egual denominador corresponderá um periodo de egual numero de algarismos.

5.º Se á fracção $\frac{1}{p}$, onde p é um numero primo diverso de 2 e 5, corresponde um periodo de $p-1$ algarismos, á fracção $\frac{n}{p}$ corresponderá um periodo formado dos mesmos algarismos.

6.º Se o denominador p de uma fracção $\frac{1}{p}$ é o producto de dois numeros p_1 e p_2, e os numeros dos algarismos dos periodos das fracções $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{p_2}$ são respectivamente s, s_1, s_2 e p_1 é diverso de p_2, s é o menor multiplo commum de s_1 e s_2.

[*A. Lugli: Sulle frazioni decimali periodiche* (*Periodico di Matematica de D. Besso*, t. II)].

V

Sobre a corda focal da parabola

Devem-se ao sr. Graves as seguintes propriedades interessantes da parabola, dadas sem demonstração nos *Annals of Mathematics*.

1.ª Sendo S o fóco da parabola e PSP′ uma corda focal, a tangente e a normal em P′ encontram o diametro que passa por P em dois pontos M e N taes que PM = PN = PP′; uma propriedade analoga tem logar para o ponto P, e temos PM′ = PN′ = PP′. D'aqui conclue-se um meio de traçar as normas e as tangentes á parabola nos pontos P e P′, construindo os parallelogrammos PP′M′M e PP′N′N; as diagonaes d'estes parallelogrammos são as tangentes e normaes pedidas.

2.ª Cada uma d'estas normaes devide a outra na razão de 1 para 3.

3.ª A corda que juncta as extremidades das cordas normaes em P e P′ é parallela a PP′ e tres vezes maior; e a recta perpendicular a PP′ no ponto S, e terminada por esta parallela e pelo pólo de PP′, é dividida por S na razão de 1 : 4. O logar geometrico da intersecção d'esta perpendicular com a parallela é uma recta, e a envolvente das porções da parallela é uma parabola, que tem o mesmo fóco que a parabola dada e que a corta orthogonalmente.

[*Graves: On the focal chord of a parabola* (*Annals of Mathematics*, t. 3)].

VI

Sobre uma propriedade da esphera

Deve-se ao sr. Maurice d'Ocagne a seguinte propriedade interessante da esphera:

Existe uma relação linear entre as distancias de m *pontos quaesquer do espaço* (m *sendo pelo menos egual a* 4) *aos planos tangentes a uma esphera qualquer.*

Eis como este illustre geometra a demonstra.

Se o plano

$$Ax + By + Cz + 1 = 0$$

é tangente á esphera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

teremos

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R,$$

e a distancia δ_i de um ponto qualquer do espaço P_i $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ a este plano tangente será portanto

$$\delta_i = R\,(A\alpha_i + B\beta_i + C\gamma_i + 1).$$

Tomando no espaço m pontos $P_1, P_2, \ldots, P_m$ e chamando $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ parametros indeterminados, vem

$$\Sigma\lambda_i\delta_i = R(A\Sigma\lambda_i\alpha_i + B\Sigma\lambda_i\beta_i + C\Sigma\lambda_i\gamma_i + \Sigma\lambda_i),$$

onde os signaes Σ se referem aos valores 1, 2, 3, ..., m de i. Mas, quando m é pelo menos egual a 4, póde-se dispôr dos parametros λ_i de modo que seja

$$\Sigma\lambda_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma\lambda_i\beta_i = 0, \quad \Sigma\lambda_i\gamma_i = 0,$$

e portanto póde-se sempre considerar o centro da esphera como o barycentro dos m pontos $P_1, P_2, \ldots, P_m$ affectados de certos coefficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Vem, pois, chamando k a somma d'estes coefficientes,

$$\Sigma\lambda_i\delta_i = kR,$$

que é o que se queria demonstrar.

Este theorema é verdadeiro tambem no caso de ser $m=3$, quando o plano determinado pelos tres pontos passa pelo centro da esphera.

O theorema reciproco do precedente é tambem verdadeiro.

Deve-se ainda ao sr. d'Ocagne a extensão do theorema precedente ás superficies quaesquer.

[*M. d'Ocagne: Sur une proprieté de la sphère et son extension aux surfaces quelconques* (*Procedings of the London Mathematical Society*, t. XVIII)].

VII

Passagem de Venus pelo disco do Sol em 1882

1.° *Resultado obtido pelas commissões brazileiras.* A passagem de Venus, que teve logar em 1882, foi observada por tres commissões brazileiras, estabelecidas na Ilha de S. Thomaz (Antilhas), em Pernambuco e em Punta-Arenas (no Estreito de Magalhães). Da combinação das observações feitas por estas tres commissões resultou para valor da parallaxe equatorial horizontal do Sol, á distancia media á Terra, o numero 8″,808 (*Revista do Observatorio do Rio de Janeiro, novembro de 1887*).

2.° *Resultado obtido pelas commissões inglezas.* A mesma passagem foi observada por commissões inglezas em Jamaica, Barbados, Bermuda, Cabo da Boa-Esperança, Madagascar, Nova-Zelandia, etc. A discussão de todas estas observações deu para limites superior e inferior da parallaxe equatorial horizontal do Sol, á média distancia da Terra, os numeros 8″,856 e 8″,808.

DEUX REMARQUES RELATIVES AUX SÉRIES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. Ed. Weyr

Professeur à l'École Polytechnique bohême à Prague

... Je me permets de vous communiquer deux remarques relatives aux séries, qui, peut-être, pourraient avoir quelque intérêt pour les lecteurs de votre journal.

Considérons, en premier lieu, une série convergente et à termes positifs

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu. \tag{1}$$

Soit q une quantité positive moindre que 1, choisie à volonté. Si l'on désigne par a_m un terme quelconque de la série, on peut toujours assigner un entier ρ_m tel qu'on ait

$$q \sum_{\nu=m}^{m+\rho_m} a_\nu > \sum_{m+\rho_m+1}^{\infty} a_\nu. \tag{2}$$

En effet, la série (1) étant convergente, on doit avoir

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu < q a_m,$$

dès que n surpasse un certain entier r. Si l'on a $r \leqq m$, on peut prendre $\rho_m = 0$, et si $r > m$, on peut faire $\rho_m = r - m$, pour que l'inégalité (2) soit satisfaite.

Posons maintenant

$$s_m = \sum_{\nu=m}^{m+\rho_m} a_\nu, \quad \text{et} \quad m+\rho_m+1=m_1,$$

$$s_{m_1} = \sum_{\nu=m_1}^{m_1+\rho_{m_1}} a_\nu, \quad \text{et} \quad m_1+\rho_{m_1}+1=m_2,$$

etc., et généralement

$$s_{m_k} = \sum_{\nu=m_k}^{m_k+\rho_{m_k}} a_\nu, \quad \text{et} \quad m_k+\rho_{m_k}+1=m_{k+1}.$$

On aura

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{m-1} a_\nu + s_m + s_{m_1} + s_{m_2} + \ldots \text{in inf.},$$

et les s satisferont aux inégalités

$$q s_m > \sum_{\nu=m_1}^{\infty} a_\nu, \quad q s_{m_1} > \sum_{\nu=m_2}^{\infty} a_\nu, \quad \text{etc.}$$

Par là

$$\frac{s_{m_1}}{s_m} < \frac{1}{s_m} \sum_{m_1}^{\infty} a_\nu < q,$$

$$\frac{s_{m_2}}{s_{m_1}} < \frac{1}{s_{m_1}} \sum_{m_2}^{\infty} a_\nu < q,$$

. . . .

On peut donc toujours, dans une série convergente à termes positifs (1), rassembler les termes — à partir d'un terme quelconque, p. e. le premier — de telle manière, que, dans la nouvelle série (3) le rapport de deux termes consécutifs reste constamment plus petit qu'un nombre positif $q < 1$, choisi à volonté.

Cela montre qu'il est impossible de former une série qui satisfasse aux conditions formulées par Mr. Gutzmer dans sa note «Sur une série considérée par Mr. Lerch», ce journal, vol. VIII, p. 36.

Ma seconde remarque concerne, plus généralement, les séries à termes complexes. Soit

$$\sum_1^\infty a_\nu$$

une telle série, convergente, mais cependant telle que la série des valeurs absolues des termes soit divergente.

Prenons une série convergente à termes positifs

$$\sum_1^\infty b_\nu.$$

On a, k_1, k_2, . . . étant quelconques,

$$\left|\sum_{m_1}^{m_1+k_1} a_\nu\right| < b_1, \quad \left|\sum_{m_2}^{m_2+k_2} a_\nu\right| < b_2, \quad \text{etc.},$$

dès que

$$m_1 > r_1, \quad m_2 > r_2, \quad \text{etc.},$$

r_1, r_2, . . . étant certains entiers.

Si donc on choisit pour m_2 un entier plus grand que m_1 et en même temps plus grand que r_2; pour m_3 un entier à la fois plus grand que m_2 et que r_3, etc., on aura

$$\left|\sum_{m_1}^{m_2-1} a_\nu\right| < b_1, \quad \left|\sum_{m_2}^{m_3-1} a_\nu\right| < b_2, \quad \text{etc.},$$

ce qui montre que la série

$$\left|\sum_1^{m_1-1} a_\nu\right| + \left|\sum_{m_1}^{m_2-1} a_\nu\right| + \left|\sum_{m_2}^{m_3-1} a_\nu\right| + \ldots$$

*

sera convergente. Donc, dans toute série convergente, on peut réunir les termes en groupes de telle sorte, que la nouvelle série ainsi formée soit absolument convergente.

Prague, le 28 janvier 1888.

NOTE SUR UN PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

Voici une application d'une formule que nous avons démontrée il y a quelque temps dans le *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* (t. VII, p. 127), application que nous avons présentée sans démonstration à l'Académie des Sciences de Paris (*), à propos de deux communications qui avaient été faites à cette Académie par M. Emile Barbier (**).

Convenons d'abord des notations suivantes:

$(n \mid 1)$ est un nombre exclusivement composé de n chiffres 1. Ainsi $(4 \mid 1)$ est le nombre 1111.

$N(n)$ est un nombre ainsi composé: écrire le nombre n, à sa droite n chiffres 8 consécutifs et à la droite du tout le chiffre 9. Ainsi

$$N(1) = 189$$
$$N(2) = 2889$$
$$N(3) = 38889$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Cela posé, la formule à laquelle nous venons de faire allusion est la suivante:

Dans la suite naturelle des nombres de 1 *à* N *inclusivement,* N *étant composé de* n *chiffres, le nombre total des chiffres écrits est égal à*

$$n(N+1) - (n \mid 1).$$

(*) *Comptes-Rendus*, t. CVI, p. 190.
(**) *Ibid.*, t. CV, p. 795 et 1328.

Voici maintenant quelle est l'application que nous avons en vue:

Déterminer, dans la suite naturelle des nombres, le k[ième] *chiffre écrit.*

Remarquons d'abord que, si dans la formule précédente on fait

$$N = 10^{n+1} - 1 = \overbrace{999\ldots 99}^{n+1},$$

on trouve que, dans la suite naturelle des nombres de 1 à $10^{n+1}-1$ inclusivement, il y a $N(n)$ chiffres.

Dès lors, si

$$N(n-2) < k \leq N(n-1),$$

le nombre auquel appartient le chiffre cherché, de rang k, est composé de n chiffres. Cette double inégalité permet d'obtenir immédiatement le nombre n.

Cela posé, si N est le nombre auquel appartient, dans la suite naturelle, le chiffre cherché, on a

$$nN - (n \mid 1) < k \leq n(N+1) - (n \mid 1),$$

ou

$$N < \frac{k + (n \mid 1)}{n} \leq N + 1,$$

d'où l'on déduit immédiatement que si Q est le quotient entier et R le reste de la division de $k + (n \mid 1)$ par n:

1.° *Lorsque* R *n'est pas nul, le chiffre demandé est le* R[ième], *à partir de la gauche, du nombre* Q.

2.° *Lorsque* R *est nul, le chiffre demandé est le premier à droite du nombre* Q − 1.

Exemple. — Quel est le 123456789[ième] chiffre écrit? On voit ici que $n = 8$, et on a

$$123456789 + 11111111 = 134567900.$$

Divisant ce dernier nombre par 8, on trouve

$$Q = 16820987,$$

$$R = 4.$$

Le 123456789ième chiffre écrit dans la suite naturelle des nombres est donc le 4ième du nombre 16820997, soit le chiffre 2.

NOTE SUR LES CONIQUES

PAR

M. Maurice d'Ocagne

Soient ABC un triangle inscrit dans une conique et I un point variable sur cette conique. Les droites AB et CI se coupant en P, AC et BI en Q, *la droite* PQ *passe par un point fixe.* En effet, si la droite AI coupe BC au point V, le triangle PVQ est autopolaire par rapport à la conique; par suite, la droite PQ passe par le pôle M de la droite BC qui contient le pôle V de cette droite PQ.

Il résulte de là que si on prend sur la conique deux points I et I′ et que l'on construire les droites PQ et P′Q′ correspondantes, le point de rencontre M de ces droites est le pôle de BC par rapport à la coniqne.

Dès lors, on voit que *si une droite* PQ *pivote autour d'un point* M *et rencontre les côtés* AB *et* AC *d'un triangle* ABC *respectivement aux points* P *et* Q, *le point de rencontre* I *des droites* PC *et* QB *décrit une conique circonscrite au triangle* ABC *et tangente en* B *et en* C *aux droites* MB *et* MC.

Il suffit, pour s'en assurer, de mener par le point M deux droites quelconques P′Q′ et P″Q″ auxquelles répondent les points I′ et I″ et de considérer la conique déterminée par les cinq points A, B, C, I′ et I″. D'après ce qui vient d'être dit, à chaque point I de cette conique correspond une droite PQ passant par le point M. En outre, M est le pôle de BC par rapport à cette conique, c'est-à-dire que MB et MC sont tangentes à la conique.

Il est facile d'obtenir la tangente au point I. En effet, soient H le point de rencontre des droites MB et PC, K celui des droites MC et QB. La droite HK coupe la droite BC en un point T dont la polaire par rapport aux droites MB et MC, et conséquemment par rapport à la conique, est la droite MI. De là résulte que TI est la tangente à la conique au point I.

Enfin, voyons comment le centre O de la conique est lié au point M.

Si nous faisons coïncider le point P avec le point P_1 situé à la rencontre de AB et de la parallèle à AC menée par M, le point Q est rejeté à l'infini et le point I_1 correspondant se trouve à la rencontre de P_1C et de la parallèle à AC menée par B. Nous avons ainsi deux cordes AC et BI_1 de la conique, qui sont parallèles. La droite qui joint leurs milieux est un diamètre; mais cette droite passe par le point P_1. Donc, *la droite qui joint le point* P_1 *au milieu* γ *de* AC *est un diamètre.* De même pour la droite qui joint le milieu β de AB au point de rencontre Q_2 de AC et de la parallèle à AB menée par M.

L'intersection de ces deux droites fournit le centre O.

Si les droites $P_1\gamma$ et $Q_2\beta$ sont parallèles la conique est une parabole. Pour avoir le lieu des points M qui donnent des paraboles, il suffit de remarquer que le parallélisme de $P_1\gamma$ et de $Q_2\beta$ donne

$$AP_1 \times AQ_2 = A\beta \times A\gamma = \text{Constante},$$

ce qui montre que le lieu cherché est une hyperbole dont AB et AC font les asymptotes, et qui est tangente à BC en son milieu.

Si les droites $P_1\gamma$ et $Q_2\beta$ sont perpendiculaires respectivement à AC et à AB, la conique est le cercle circonscrit à ABC.

Applications

On peut, des considérations qui précèdent, tirer diverses constructions de coniques, moins symétriques que celles qui résultent du théorème de Pascal, mais peut-être plus simples, et qui méritent à cet égard d'être signalées.

On saura, en effet, construire la conique point par point avec ses tangentes, et, en outre obtenir son centre, lorsqu'on connaîtra trois points A, B, C de cette conique et le point M correspondant. Nous pourrons, dès lors, envisager les cas suivants:

1.° *Construire une conique connaissant trois de ses points* A, B, C *et les tangentes en deux d'entre eux* B *et* C.

Le point M étant précisément le point de rencontre des tangentes données, le problème est immédiatement résolu.

2.° *Construire une conique connaissant quatre de ses points* A, B, C, I′ *et la tangente en l'un d'eux* B.

On tire BI′ et CI′ qui coupent AC et AB en Q′ et en P′. La droite P′Q′ coupe la tangente en B donnée au point M.

3.° *Construire une conique connaissant cinq de ses points* A, B, C, I′, I″.

On détermine les droites P′Q′ et P″Q″ répondant aux points I′ et I″. Le point de rencontre de ces deux droites est le point M.

4.° *Construire une conique connaissant trois de ses points* A, B, C *et son centre* O.

On joint le centre O aux milieux β et γ de AB et de AC. La droite $O\beta$ coupe AC au point Q_2; $O\gamma$ coupe AB au point P_1. La parallèle à AB menée par Q_2 et la parallèle à AC menée par P_1 se coupent au point M.

Transformation des courbes

Ce mode de génération des coniques, au moyen d'un triangle et d'une droite pivotant autour d'un point fixe, fait naître l'idée d'une transformation générale des courbes ainsi définie:

Étant donné un triangle ABC, *on mène à une courbe quelconque* Γ *une tangente qui coupe* AB *en* P *et* AC *en* Q. *Les droites* PC *et* BQ *se coupent en un point* I. *Lorsqu'on fait varier la tangente* PQ *à la courbe* Γ, *le point* I *décrit une courbe* Γ' *transformée de la première.*

Dans ce mode de transformation, d'après ce qui a été vu plus haut, à un point M correspond une conique (M) circonscrite au triangle ABC et tangente en B et en C à MB et à MC.

A la droite qui joint deux points M et M′ correspond le quatrième point commun aux coniques (M) et (M′); par suite, à une série de points en ligne droite correspond un faisceau de coniques circonscrites à un quadrilatère.

Si nous prenons sur la courbe Γ deux points infiniment voisins M et M′ qui déterminent la tangente PQ en M à la courbe Γ, les coniques correspondantes (M) et (M′) infiniment peu différentes l'une de l'autre se coupent au point I qui répond à la tangente PQ.

La courbe transformée Γ' *peut donc être indifféremment considérée comme lieu du point* I, *ou comme enveloppe de la conique* (M). Il suit de là que si MB *et* MC *coupent respectivement* PC *et* QB *en* H *et en* K, *la tangente en* I *à la courbe* Γ' *passe par le point de rencontre des droites* BC *et* HK. C'est, en effet, comme on l'a vu plus haut, la construction de la tangente en I à la conique (M).

Constructions corrélatives

En transformant par polaires réciproques les résultats précédents on obtient ceux que voici:

Étant donnés un triangle ABC et une droite δ, si on prend sur cette droite un point I' quelconque et que les droites BI et CI coupent respectivement AC et AB en Q et en P, la droite PQ, ou t, enveloppe une conique inscrite dans le triangle ABC et qui touche AB et AC respectivement aux points E et F où ces côtés sont coupés par la droite δ.

En outre, si les droites EQ et FP se coupent en H, la droite AH passe par le point où t est tangente à la conique.

Ainsi, la droite δ permet de construire par tangentes et points une conique inscrite dans le triangle ABC, comme le point M permettait précédemment de lui construire une conique circonscrite.

Il suffira dès lors de connaître ABC et δ pour construire la conique. Voici comment δ s'obtiendra dans différents cas:

1.° *Construire une conique connaissant trois tangentes* AB, AC, BC *et les points de contact* E *et* F *des deux premières.*

Dans ce cas EF donne immédiatement la droite δ.

2.° *Construire une conique connaissant quatre tangentes* AB, AC, BC, t' *et le point de contact* E *de la première.*

La tangente t' coupant AB en P' et AC en E', les droites CP' et BQ' donnent le point I' correspondant. EI' est la droite δ.

3.° *Construire une conique connaissant cinq tangentes* AB, AC, BC, t', t''.

On détermine comme précédemment les points I' et I'' correspondant à t' et à t''. La droite δ est celle qui joint ces deux points.

Enfin, on peut ici encore remplacer la droite δ par une courbe quelconque Γ et en déduire par la même construction une courbe transformée Γ':

Joignant le point I de la courbe Γ aux points B et C, on a des droites qui coupent respectivement AC et AB aux points Q et P. PQ enveloppe la courbe Γ'. *On obtient le point* M *où* PQ *touche* Γ' *en joignant le point* A *au point de rencontre* H *des droites* EQ *et* FP, E *et* F *étant les points où la tangente en* I *à la courbe* Γ *coupe respectivement* AB *et* AC.

Nous avons déjà obtenu cette dernière propriété, démontrée alors directement (*), dans le cas particulier où les points B et C sont rejetés à l'infini sur AB et sur AC, et qui résulte d'une transformation homographique du précédent.

(*) *Journal de Mathématiques spéciales*, 1886, p. 256.

BIBLIOGRAPHIA

J. A. Sarrasqueiro. — *Tratado Elementar de Trigonometria rectilinea, Noções de Geometria Analytica,* 3.ª edição, *Coimbra, 1888.*

—— *Tratado Elementar de Arithmetica,* 8.ª edição, *Coimbra, 1887.*

Já se deu noticia da anterior edição do primeiro d'estes livros no tomo v (pag. 122). Na presente edição o auctor juncta no mesmo volume a Trigonometria e a parte da Geometria Analytica exigida pelos ultimos programmas para o ensino d'esta sciencia nos Lyceus.

A respeito do segundo livro veja-se o que se disse das edições anteriores nos tomos v (pag. 122) e vii (pag. 141) d'este jornal.

G. de Longchamps. — *Cours de Mathématiques spéciales.* — *Paris, 1886.*

É extremamente recommendavel o excellente Curso de Mathematicas especiaes do sr. Longchamps, pela clareza com que está escripto, pelo rigor e elegancia da exposição, e por contêr as ultimas indagações dos geometras relativas ao assumpto de que tracta.

Compõe-se de tres volumes, sendo o primeiro relativo á Algebra, o segundo á Geometria Analytica plana, o terceiro á Geometria Analytica no espaço, e de um supplemento aos volumes anteriores.

A Algebra abre por um bello capitulo relativo ás *identidades,* onde o auctor expõe alguns methodos para verificar ou achar identidades, e applicações interessantes d'estes methodos á demonstração de theoremas de Arithmetica e de identidades algebricas notaveis.

Vem em seguida a theoria das combinações, as fórmulas do desenvolvimento das potencias inteiras e positivas do binomio e do polynomio, a determinação da somma das potencias semelhantes dos termos de uma progressão arithmetica, o methodo para a extracção das raizes dos polynomios e a theoria dos determinantes (lições 2.ª a 7.ª).

Nas lições 8.ª e 9.ª o auctor expõe a theoria das equações lineares, baseando-se para isso n'um bello e importante theorema, devido ao sr. Rouché.

As lições 10.ª e 11.ª referem-se á theoria dos numeros irracionaes introduzidos pela consideração dos radicaes, e á theoria dos numeros imaginarios.

Nas lições 12.ª e 13.ª occupa-se o sr. Longchamps das equações do segundo gráo e das equações cuja resolução se póde reduzir á de equações do segundo gráo. Deve notar-se na lição 12.ª uma demonstração engenhosa do theorema de Waring, que dá a somma das potencias semelhantes das raizes de uma equação algebrica, para o caso particular da equação do segundo gráo.

Na lição 14.ª vêem alguns theoremas relativos á transformação das expressões irracionaes n'outras mais simples; na lição 15.ª a theoria das desegualdades, e nas lições 16.ª e 17.ª a theoria das fracções continuas algebricas.

Nas lições 18.ª, 19.ª e 20.ª vem a theoria das funcções inteiras, das funcções exponenciaes e das funcções logarithmicas. Deve notar-se n'este capitulo uma demonstração interessante do desenvolvimento da exponencial em série.

As lições 21.ª a 25.ª são destinadas á indagação das derivadas das funcções elementares, á demonstração da fórmula de Taylor, e ás applicações d'esta fórmula á indagação dos maximos e minimos das funcções e á determinação dos verdadeiros valores das quantidades indeterminadas.

Segue-se a theoria geral das equações, que occupa as lições 27.ª a 40.ª, onde o sr. Longchamps expõe desenvolvidamente os methodos e os theoremas classicos relativos a esta parte da Algebra.

O volume segundo da obra importante do sr. Longchamps contém a Geometria analytica a duas dimensões.

O primeiro livro d'este volume contém os principios geraes de Geometria analytica e a sua applicação a um grande numero de curvas celebres; em seguida o estudo da linha recta e do circulo.

O livro segundo contém a theoria geral das curvas planas, principalmente das curvas algebricas. Ahi se determinam as suas tangentes, as assymptotas, os pontos singulares, os centros, diametros, eixos, etc.

O livro terceiro é destinado ao estudo da equação geral das conicas. N'este livro offerecem o maior interesse as lições 25.ª a 26.ª, destinadas a uma serie de theoremas notaveis sobre as conicas.

No livro quarto estuda o auctor separadamente a ellipse, a hyperbole e a parabola.

Finalmente no livro quinto vêem os processos para construir as curvas determinadas pelas suas equações, algumas noções sobre as curvas unicursaes, etc.

A Geometria a tres dimensões é tambem dividida em livros, sendo o primeiro destinado aos principios geraes e ao estudo da theoria analytica do plano, da linha recta e da esphera; o segundo ao estudo da equação geral das superficies do segundo gráo; e o terceiro ao estudo particular do ellipsoide, dos hyperboloides e dos paraboloides.

No volume quarto *(Supplément)* o auctor expõe a parte elementar da theoria das séries, os principios do methodo infinitesimal e suas applicações geometricas, os principios fundamentaes de Calculo integral, e finalmente as fórmulas de interpolação mais importantes.

G. de Longchamps. — Sur le trifolium (Journal des Mathématiques spéciales, 1887).

—— *Sur la rectification de quelques courbes remarquables (Mathesis,* t. VII).

—— *Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites au moyen des intégrales elliptiques (Comptes rendus de l'Académie de Paris,* 1887).

Na terceira d'estas notas o sr. Longchamps faz vêr que toda a cubica circular, unicursal, recta, póde ser rectificada por meio dos integraes ellipticos.

H. le Pont. — *Note de Géométrie* (*Association française pour l'avancement des sciences,* 1887).

N'esta nota interessante o auctor demonstra o theorema seguinte e o seu correlativo:

É condição necessaria e sufficiente para que tres grupos de tres planos estejam associados, segundo o modulo dois, que os tres vertices dos triedros formados por cada grupo estejam em linha recta.

G. Paxton Young. — *Solvable quintic Equations with Commensurable Coefficients* (*American Journal of Mathematics,* vol. x).

Deu-se no tomo v (pag. 121) d'este jornal noticia de uma memoria do sr. Paxton Young, onde este geometra dá o criterio de solubilidade das equações do quinto grão, e esboça um methodo para esta resolução. Em successivas memorias, de que se deu noticia no tomo vi (pag. 99) e no tomo viii (pag. 78), o auctor continúa as suas indagações sobre este difficil e importante assumpto. Na memoria presente o auctor simplifica aquelle methodo e dá-lhe todos os desenvolvimentos necessarios para o tornar applicavel, por um processo certo e definido, a todas as equações resoluveis do quinto grão com coefficientes racionaes. Em seguida applica a theoria exposta a uma série de vinte exemplos convenientemente escolhidos para a tornar clara.

M. Lerch. — *Note sur la fonction*

$$\mathrm{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}.$$

(*Acta Mathematica,* t. 11).

A somma precedente é convergente para cada valor de s, se a parte imaginaria de x é maior do que zero, e não convergente sómente para os valores de s, cuja parte real é positiva, quando x é uma quantidade real.

N'esta excellente memoria o auctor faz vêr que a série considerada representa uma funcção transcendente inteira de s, e deduz algumas propriedades importantes d'esta funcção.

M. Lerch. — *Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale Eulérienne de première espèce* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XV).

O auctor dá uma demonstração da fórmula importante

$$\int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

baseada sobre os principios da theoria das funcções, e sobre o theorema de Cauchy relativo aos integraes tomados entre limites imaginarios.

A. del Re. — *Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti* (*Rendiconti della R. Accademia di Napoli*, 1887).

E. Cesàro. — *Sur l'analyse barycentrique des courbes* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, serie 2.ª, t. XV).

N'esta memoria importante o auctor principia por apresentar as fórmulas fundamentaes da Geometria intrinseca, para as applicar á analyse barycentrica das curvas no espaço com n dimensões.

E. Cesàro. — *Sui concetti di limite e di continuità* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1888).

— *Formole relative al moto d'un ponto (Item).*

G. B. Guccia. — *Théorème sur les points singuliers des surfaces algébriques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1887).

V. Jamet. — *Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes.* — Paris, 1888.

O auctor expõe de um modo simples a parte elementar da theoria dos logarithmos. Principia por demonstrar que a expressão $n(\sqrt[n]{a}-1)$ tende para um limite quando n tende para o infinito, e toma este limite para definição de logarithmo neperiano de numero a. D'esta definição deduz depois as propriedades principaes dos logarithmos.

Edouard Weyr. — *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* (*Bulletin de la Société R. bohême des Sciences à Prague*, 1887).

Refere-se a presente nota á theoria dos numeros complexos formados de um numero qualquer de unidades independentes. D'este bello assumpto se occupou ainda ha pouco o auctor n'uma sabia memoria, publicada no *Bulletin des Sciences Mathématiques* (1887). No presente trabalho demonstra que um systema de quantidades complexas, formadas de n unidades principaes e de multiplicação associativa, póde ser realisado substituindo ás n unidades matrizes convenientemente escolhidas. É uma generalisação do que acontece com o systema dos quaterniões de Hamilton, que póde ser realisado tomando para as quatro unidades matrizes de segunda ordem.

M. d'Ocagne. — *Les coordonées parallèles de points* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª série, t. VI).

O artigo de que vamos dar noticia é continuação da bella memoria do mesmo auctor, de que se deu noticia no tomo VI (pagina 30) d'este jornal. No systema de coordenadas parallelas refere-se cada ponto dado a dois pontos fixos, pelos quaes se fazem passar dois eixos parallelos. Traçando pelos pontos fixos e pelo ponto dado duas rectas, determina-se sobre os eixos dois segmentos u e v, e a $\frac{1}{u}$ e $\frac{1}{v}$ chama o sr. d'Ocagne *coordenadas parallelas do ponto dado.*

Mostra em seguida que as equações de uma curva em coordenadas parallelas de pontos e em coordenadas cartesianas são do mesmo grão, e passa ao estudo das equações da linha recta e das conicas referidas ás coordenadas consideradas, terminando pela applicação do principio da dualidade por meio das coordenadas parallelas de pontos.

M. d'Ocagne. — *Quelques propriétés du triangle* (*Mathesis*, t. VI).

G. T.

EXTRACTOS DAS PUBLICAÇÕES RECENTES

I

Sobre a convergencia das series

A condição $\lim nu_n = \lambda$, onde λ é differente de zero, é condição necessaria para a convergencia da serie $\sum_1^\infty u_n$, visto que, se a serie é convergente e nu_n tende para um limite, este limite é differente de zero. Esta proposição é demonstrada pelo sr. E. Cesàro da maneira seguinte:

Se a_n tende para um limite quando n tende para o infinito, temos

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \lim a_n,$$

portanto

$$\lim \frac{1}{n}(u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n) = \lambda.$$

Por outra parte, temos

$$u_1 + 2u_2 + \ldots nu_n = S_1 + 2(S_2 - S_1) + \ldots + n(S_n - S_{n-1})$$

$$= (n+1)S_n - (S_1 + S_2 + \ldots + S_n),$$

e portanto

$$\lim \left[\left(\frac{1}{n} + 1\right) S_n - \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)\right] = \lambda.$$

Se a serie é convergente, a primeira das egualdades precedentes dá

$$\lim \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \lim S_n.$$

Logo é $\lambda = 0$.

A respeito do caracter precedente da divergencia das series, notou o sr. E. Cesàro que, quando por elle se póde decidir da divergencia de uma serie, não se conseguiria o mesmo pela regra de Duhamel. Com effeito, se λ é finito e differente de zero, temos

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)\,u_{n+1}}{n u_n} = 1.$$

Recorrendo então ao theorema de Duhamel, ponha-se

$$\lim n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) = \mu,$$

isto é,

$$\lim \frac{(n+1)\,u_{n+1} - n u_n}{u_{n+1}} = 1 - \mu,$$

e applique-se esta egualdade á serie Σv_n onde

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = 2u_2 - u_1, \quad v_3 = 3u_3 - 2u_2, \quad \ldots,$$

evidentemente convergente, por ser

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = n u_n,$$

o que dá

$$\lim \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = 1 - \mu,$$

e portanto

$$\lim n v_n = (1 - \mu)\,\lambda = 0,$$

isto é,

$$\mu = 1.$$

[*E. Cesàro: Sur la convergence des séries* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1888)].

II

Theoremas de Trigonometria

Se tiverem logar simultaneamente as duas relações

$$\sum_1^n A_i \cos x_i = 0, \quad \sum_1^n A_i \cos (x_i + \alpha) = 0,$$

será tambem

$$(1) \qquad \sum_1^n A_i \cos (x_i + \theta) = 0$$

e

$$(2) \qquad \sum_1^n A_i \operatorname{sen} (x_i + \theta) = 0,$$

θ sendo um arco qualquer.

Com effeito, considerando $A_1, A_2, \ldots, A_n$ como representando rectas, as duas primeiras egualdades exprimem que estas rectas formam um contôrno fechado, e portanto que a sua projecção segundo qualquer direcção é nulla, o que dá a fórmula (1). Mudando depois n'esta fórmula θ em $\frac{\pi}{2} + \theta$ obtem-se a fórmula (2).

Mudando no theorema precedente x_i em $x_i + \frac{\pi}{2}$ obtem-se o theorema seguinte:

Se tiverem logar simultaneamente as duas relações

$$\sum_1^n A_i \operatorname{sen} x_i = 0, \quad \sum_1^n A_i \operatorname{sen} (x_i + \alpha)$$

será tambem

$$\sum_1^n A_i \operatorname{sen} (x_i + \theta) = 0$$

e

$$\sum_1^n A_i \cos (x_i + \theta).$$

Se for $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a segunda das equações precedentes dá

$$\sum_{1}^{n} A_i \cos x_i.$$

Das fórmulas precedentes deduzem-se algumas das fórmulas fundamentaes da Trigonometria.

[*M. C. A. Laisant: Théorèmes de Trigonométrie* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XV)].

SOBRE A DERIVAÇÃO DAS FUNCÇÕES COMPOSTAS

POR

F. GOMES TEIXEIRA

I

Tem-se ultimamente proposto uma duvida contra a demonstração que habitualmente se dava do theorema relativo á derivação das funcções compostas, o que levou a restringir o numero das funcções a que o theorema se applica, impondo-lhe condições a que têem de satisfazer. Vamos expôr esta demonstração, a duvida a que dá logar, e as condições para que o theorema tenha logar.

Seja

$$y = f(u, v),$$

$$u = \varphi_1(x), \quad v = \varphi_2(x)$$

e procuremos a derivada de y relativamente a x. Chamando k e l os augmentos infinitamente pequenos de u e v correspondentes ao augmento infinitamente pequeno h de x, temos, considerando v como constante,

$$f(u+k, v) = f(u, v) + k\frac{df(u, v)}{du} + \alpha k,$$

onde α representa uma funcção de u, v e k, infinitamente pequena com k; e considerando u como constante

$$f(u, v+l) = f(u, v) + l\frac{df(u, v)}{dv} + \alpha_1 l,$$

onde α_1 representa uma funcção de u, v e l, infinitamente pequena com l.

Suppondo $\frac{df(u,v)}{du}$ uma funccção continua de v, temos

$$\frac{df(u,v+l)}{du}=\frac{df(u,v)}{du}+\alpha_2,$$

onde α_2 é infinitamente pequeno com l.

Mudando na primeira das tres fórmulas precedentes v em $v+l$ e attendendo ás duas ultimas, vem

$$f(u+k,v+l)=f(u,v)+k\frac{df}{du}+l\frac{df}{dv}$$
$$+\alpha' k+\alpha_2 k+\alpha_1 l,$$

chamando α' o valor que toma a funcção α quando se muda v em $v+l$.

Temos, pois, quando h tende para zero,

$$y'=\lim\frac{f(u+k,v+l)-f(u,v)}{h}=\frac{dy}{du}u'+\frac{dy}{dv}v'.$$

Para tirar esta conclusão suppõe-se que a funcção α', que tende para zero com k quando é $l=0$, ainda tende para zero quando k e l tendem simultaneamente para zero, o que nem sempre se dá.

Procuremos, pois, a condição para que α' tenda para zero quando k e l tendem simultaneamente para zero.

Em virtude da fórmula de Lagrange temos

$$\alpha=\frac{1}{2}k\frac{d^2f(u+\theta k,v)}{du^2},$$

onde θ representa uma quantidade positiva menor do que a unidade, e portanto

$$\alpha'=\frac{1}{2}k\frac{d^2f(u+\theta k,v+l)}{du^2};$$

logo, para que α' tenda para zero, basta que a derivada

$$\frac{d^2 f(u, v)}{du^2}$$

seja finita na vizinhança do ponto (u, v).

NOTA. Tudo o que vem de ser dicto para o caso das variaveis reaes applica-se ao caso das variaveis imaginarias, como mostraremos n'outro logar.

II

Consideremos agora a funcção composta

$$y = f(u, v, w),$$

onde u, v e w representam funcções de x.

Temos, chamando l_1, l_2 e l_3 os augmentos de u, v e w correspondentes ao augmento h de x,

$$f(u + l_1, v, w) = y + l_1 \frac{dy}{du} + \frac{1}{2} l^2_1 \frac{d^2 f(u + \theta_1 l_1, v, w)}{du^2},$$

$$f(u, v + l_2, w) = y + l_2 \frac{dy}{dv} + \frac{1}{2} l^2_2 \frac{d^2 f(u, v + \theta_2 l_2, w)}{dv^2},$$

$$f(u, v, w + l_3) = y + l_3 \frac{dy}{dw} + \alpha l_3,$$

onde α tende para zero quando l_3 tende para zero, e onde θ_1 e θ_2 representam quantidades positivas menores do que a unidade.

Mudando na primeira fórmula v em $v + l_2$, e attendendo á segunda e á fórmula

$$\frac{df(u, v + l_2, w)}{du} = \frac{dy}{du} + l_2 \frac{d^2 f(u, v + \theta\, l_2, w)}{du\, dv},$$

vem

$$f(u+l_1, v+l_2, w) = y + l_1 \frac{dy}{du} + l_2 \frac{dy}{dv}$$

$$+ \frac{1}{2} l^2_1 \frac{d^2 f(u+\theta_1 l_1, v+l_2, w)}{du^2}$$

$$+ l_1 \ l_2 \ \frac{d^2 f(u, v+\theta l_2, w)}{du\, dv}$$

$$+ \frac{1}{2} l^2_2 \frac{d^2 f(u, v+\theta_2 l_2, w)}{dv^2}.$$

Suppondo $\dfrac{df(u, v, w)}{du}$ e $\dfrac{df(u, v, w)}{dv}$ funcções continuas de w, temos

$$\frac{df(u, v, w+l_3)}{du} = \frac{dy}{du} + \alpha_1$$

$$\frac{df(u, v, w+l_3)}{dv} = \frac{dy}{dv} + \alpha_2,$$

onde α_1 e α_2 são quantidades infinitamente pequenas com l_3.

Mudando agora w em $w + l_3$, vem

$$f(u+l_1, v+l_2, w+l_3) = y + l_1 \frac{dy}{du} + l_2 \frac{dy}{dv} + l_3 \frac{dy}{dw}$$

$$+ \frac{1}{2} l^2_1 \frac{d^2 f(u+\theta_1 l_1, v+l_2, w+l_3)}{du^2}$$

$$+ l_1 l_2 \quad \frac{d^2 f(u, v+\theta l_2, w+l_3)}{du\, dv}$$

$$+ \frac{1}{2} l^2_2 \frac{d^2 f(u, v+\theta_2 l_2, w+l_3)}{dv^2}$$

$$+ \alpha l_3 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2.$$

Quando h tende para zero temos pois

$$y' = \frac{dy}{du} u' + \frac{dy}{dv} v' + \frac{dy}{dw} w',$$

quando têem logar as seguintes condições:

1.° As funcções

$$\frac{dy}{du}, \quad \frac{dy}{dv}$$

são funcções continuas de w no ponto (u, v, w).

2.° As derivadas

$$\frac{d^2y}{du^2}, \quad \frac{d^2y}{du\,dv}, \quad \frac{d^2y}{dv^2}$$

são finitas na vizinhança do ponto (u, v, w).

III

Habitualmente acham-se as condições para que o theorema das funcções compostas tenha logar recorrendo só ás derivadas de primeira ordem, como vamos ver.

O theorema de Lagrange dá

$$f(u+k, v+l) = f(u, v+l) + k \frac{df(u+\theta_1 k, v+l)}{du}$$

$$f(u, v+l) = f(u, v) + l \frac{df(u, v+\theta_2 l)}{dv}$$

onde θ_1 e θ_2 representam quantidades positivas menores do que a unidade.

Temos pois

$$f(u+k, v+l) = f(u,v) + l\,\frac{df(u, v+\theta_2 l)}{dv}$$

$$+ k\,\frac{df(u+\theta_1 k, v+l)}{du}.$$

Logo se

$$\frac{df(u,v)}{dv}$$

é funcção continua de v no ponto (u, v); e se

$$\frac{\delta f(u,v)}{\delta u}$$

é funcção continua de u e v no ponto (u, v), vem

$$f(u+k, v+l) = f(u,v) + k\,\frac{dy}{du} + l\,\frac{\delta y}{\delta v} + \alpha_1 k + \alpha_2 l$$

onde α_1 e α_2 tendem para zero quando k e l tendem para zero.

D'esta fórmula deduz-se o theorema das funcções compostas.

No caso da funcção

$$y = f(u, v, w)$$

temos

$$f(u+l_1, v, w) = y + l_1\,\frac{df(u+\theta_1 l_1, v, w)}{du},$$

$$f(u, v+l_2, w) = y + l_2\,\frac{df(u, v+\theta_2 l_2, w)}{dv},$$

$$f(u, v, w+l_3) = y + l_3\,\frac{df(u, v, w+\theta_3 l_3)}{dw},$$

Mudando na primeira fórmula v em $v+l_2$ e attendendo á segunda, vem

$$f(u+l_1, v+l_2, w) = y + l_1 \frac{df(u+\theta_1 l_1, v+l_2, w)}{du} + l_2 \frac{df(u, v+\theta_2 l_2, w)}{dv}.$$

Mudando n'esta fórmula w em $w+l_3$ e attendendo á anterior, vem

$$f(u+l_1, v+l_2, w+l_3) = y + l_1 \frac{df(u+\theta_1 l_1, v+l_2, w+l_3)}{du} + l_2 \frac{df(u, v+\theta_2 l_2, w+l_3)}{dv} + l_3 \frac{df(u, v, w+\theta_3 l_3)}{dw}.$$

D'esta egualdade tira-se o theorema das funcções compostas quando a derivada $\frac{dy}{dw}$ é funcção continua de w; a derivada $\frac{dy}{dv}$ é funcção continua de v e w; e a derivada $\frac{dy}{du}$ é funcção continua de u, v e w.

Do mesmo modo se procede no caso das funcções compostas de mais de tres funcções.

Nota. O processo precedente não tem logar no caso das variaveis imaginarias.

IV

No seu excellente *Resumé du Cours d'Analyse infinitésimal de l'Université de Gand*, o sr. P. Mansion demonstra directamente que o theorema relativo á derivação das funcções compostas tem logar no caso das funcções encontradas nos Elementos. Vamos transcrever aqui a demonstração dada por este illustre geometra.

As quatro fórmulas, que se acham directamente:

$$(uvw)' = u'vw + v'uw + w'uv,$$

$$(u + v - w)' = u' + v' - w',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \log u,$$

mostram que o theorema da derivação das funcções compostas tem logar no caso em que a funcção

$$F(u, v, w)$$

representa uma das quatro funcções

$$u + v - w, \quad uvw, \quad \frac{u}{v}, \quad u^v.$$

1.° Mostremos agora que se o theorema é verdadeiro para a funcção $s = F(u, v, w)$, tambem é verdadeiro para a funcção $y = f(s)$.

Com effeito, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$$

e

$$\frac{ds}{dx} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{ds}{dw} \cdot \frac{dw}{dx};$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dw}\frac{dw}{dx},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx},$$

que é o theorema que se queria demonstrar.

2.° Sejam agora s e t duas funcções de u e v, funcções de x, e supponhamos que a regra de derivação das funcções compostas tem logar para s e t consideradas como funcções de u e v, u e v sendo funcções de x; para y considerado como funcção de s e t, s e t sendo funcções de x; para y considerado como funcção de s e t, s e t sendo funcções de u; para y considerado como funcção de s e t, s e t sendo funcções de v. Vamos mostrar que esta regra ainda tem logar para y considerado como funcção de u e v, u e v sendo funcções de x.

Com effeito, temos

$$\frac{ds}{dx}=\frac{ds}{du}\frac{du}{dx}+\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dt}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{du}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}$$

$$\frac{dy}{dv}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dv}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dv}.$$

Combinando as tres primeiras fórmulas vem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dv}\frac{dv}{dx}$$

ou

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{ds}\frac{ds}{du}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}\right)\frac{du}{dx}+\left(\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dv}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dv}\right)\frac{dv}{dx},$$

ou, attendendo ás duas ultimas,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx},$$

que é o que se queria demonstrar.

Por applicações successivas do que vem de ser dicto extende-se a regra da derivação das funcções compostas a todas as funcções elementares.

V

O modo de considerar o theorema das funcções compostas exposto no n.º III não é applicavel no caso das variaveis imaginarias. Pelo contrario, o modo exposto no n.º IV é applicavel n'este caso, como se vê facilmente, assim como o exposto nos n.ºs I e II, como vamos mostrar.

Notemos primeiro que sendo $F(z)$, $F'(z)$ e $F''(z)$ funcções finitas de z em todos os pontos da curva K que une um ponto z_0 ao ponto Z, da fórmula de M. Darboux

$$\varphi(Z) - \varphi(z_0) = \lambda s e^{\alpha i} \varphi'(z_1),$$

onde s representa o comprimento da curva K, λ um factor positivo não superior á unidade, e z_1 uma quantidade imaginaria representada por um ponto da curva K, tira-se, applicando-a á funcção de z

$$F(Z) - [F(z) + (Z - z) F'(z)],$$

a fórmula

$$F(Z) = F(z_0) + (Z - z_0) F'(z_0) + \lambda s e^{\alpha i} (Z - z_1) F''(z_1).$$

Posto isto, appliquemos esta fórmula á funcção $f(u, v)$, o que dá

$$f(u+k, v+l) = f(u+k, v) + \frac{df(u+k, v)}{dv} l$$

$$+ \lambda s e^{ai}(v+l-v_1) \cdot \frac{d^2 f(u+k, v_1)}{dv^2},$$

v_1 representando um valor de v representado por um ponto da linha descripto por v na passagem de v para $v+l$.

Mas da definição de derivada resulta

$$f(u+k, v) = f(u, v) + \frac{df}{du} k + \alpha_1 k,$$

e da continuidade de $\frac{df(u, v)}{dv}$ relativamente a u resulta

$$\frac{df(u+k, v)}{dv} = \frac{df(u, v)}{dv} + \alpha_2,$$

onde α_1 e α_2 são quantidades infinitamente pequenas com k.

Logo

$$f(u+k, v+l) = f(u, v) + \frac{df}{du} k + \frac{df}{dv} l$$

$$+ \alpha_1 k + \alpha_2 l + \lambda s e^{ai}(v+l-v_1) \frac{d^2 f(u+k, v_1)}{dv^2},$$

e portanto

$$\frac{f(u+k, v+l) - f(u, v)}{h} = \frac{df}{du} \frac{k}{h} + \frac{df}{dv} \frac{l}{h}$$

$$+ \alpha_1 \frac{k}{h} + \alpha_2 \frac{l}{h} + \lambda s e^{ai} \cdot \frac{v+l-v_1}{h} \cdot \frac{d^2 f(u+k, v_1)}{dv^2}.$$

Temos, porém, quando h tende para zero

$$\lim \frac{k}{h} = u', \quad \lim \frac{l}{h} = v', \quad \lim s = 0,$$

e das desegualdades

$$|v + l - v_1| < |v - v_1| + |l|,$$

$$|v_1 - v| < |l|,$$

das quaes a segunda tem logar para valores sufficientemente pequenos de l, tira-se

$$(v + l - v_1) < 2\,|l|$$

e portanto

$$\left|\frac{v + l - v_1}{h}\right| < 2\left|\frac{l}{h}\right|.$$

Logo se a derivada $\frac{d^2 f(u, v)}{dv^2}$ é finita na vizinhança de (u, v), temos

$$\lim \frac{f(u + k, v + l) - f(u, v)}{h} = \frac{df}{du} u' + \frac{df}{dv} v',$$

que é o que se queria demonstrar.

Do mesmo modo se demonstra o theorema quando a derivada $\frac{df(u, v)}{du}$ é uma funcção continua de v no ponto (u, v) e a derivada de segunda ordem

$$\frac{d^2 f(u, v)}{du^2}$$

é finita na vizinhança do ponto (u, v).

BIBLIOGRAPHIA

R. R. de Sousa Pinto. — *Estudos instrumentaes no Observatorio astronomico da Universidade de Coimbra.* — *Coimbra, 1887.*

N'este livro excellente, e da maior utilidade para aquelles que pretendem instruir-se nos meios de trabalhar com o circulo meridiano, expõe o illustre director do Observatorio astronomico da Universidade de Coimbra os methodos empregados n'aquelle Observatorio para o estudo do circulo meridiano de Repsold, com que foi dotado em 1879. Occupa-se das rectificações do instrumento, da determinação dos erros instrumentaes e das correcções que devem ser feitas ás observações das passagens meridianas e das distancias zenithaes.

R. R. de Sousa Pinto. — *Supplemento ao Calculo das ephemerides astronomicas.* — *Coimbra.*

É bem conhecido o trabalho de alta importancia que o sr. Sousa Pinto publicou em 1849, intitulado: *Calculo das Ephemerides Astronomicas,* no qual o auctor expõe desenvolvidamente os processos empregados para o calculo das *Ephemerides astronomicas,* que todos os annos publica a Universidade de Coimbra. No *Supplemento* que vem de ser publicado são expostos os processos que se empregam no calculo de alguns artigos introduzidos nas *Ephemerides* depois da publicação d'aquella obra.

A. Schiappa Monteiro. — *Note sur le triangle isoscèle* (*Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa,* 1887).

Refere-se a primeira parte d'este trabalho ao mesmo assumpto de que o auctor se occupou no seu artigo publicado na pagina 51.

Em seguida apresenta soluções novas de alguns problemas propostos pelo auctor no tomo I d'este jornal e analysa as soluções conhecidas. Finalmente apresenta algumas propriedades interessantes das bissectrizes interiores dos triangulos escalenos, das quaes faz applicação á demonstração do theorema de Geometria elementar seguinte:

Em todo o triangulo o angulo da maior bissectriz é menor do que o angulo da maior, e reciprocamente.

M. David. — Développement des fonctions implicites (*Journal de l'École Polytechnique de Paris*, 1887).

N'esta importante memoria resolve o auctor a questão seguinte: Dada uma equação algebrica $f(x, y) = 0$, determinar uma série que represente uma funcção de y por meio da variavel x, para qualquer valor de x.

Mostra primeiro como se resolve esta questão por meio da serie de Lagrange, e como se determina o contorno no interior do qual esta serie é convergente e no exterior do qual é divergente. Em seguida mostra como se resolve a mesma questão por meio de series a dupla entrada, e que o contôrno de convergencia d'estas series está comprehendido no contôrno de convergencia da serie de Lagrange.

Finalmente faz applicação dos principios precedentes á fórmula que nós publicàmos em 1881 no *Journal de Mathématiques* e em seguida no nosso *Curso de Analyse* (pag. 237), para dar uma demonstração nova da nossa fórmula e deduzir d'ella que a serie de Lagrange é a unica serie a simples entrada que póde representar uma funcção da raiz da equação proposta.

M. David. — Sur les contours décrits autour des points singuliers d'une équation algébrique (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, 1886).

— *Équations des contours tracés autour de points donnés* (*Item*, 1887).

H. Bentabol. — *Cuadratura de áreas planas applicada al calculo de perfiles transversales.* — *Madrid, 1887.*

N'este opusculo o auctor expõe o methodo graphico, devido ao sr. Collignon, para o calculo das áreas planas, methodo que exige sómente o emprego da regoa e do compasso. Em seguida applica este methodo ao calculo de perfis transversaes.

H. G. Zeuthen. — *Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés* (*Mathematiche Annalen,* t XXXI).

N'esta memoria importante occupa-se o sábio geometra dinamarquez de formular e demonstrar de um modo completo os principaes theoremas relativos á determinação d'uma curva algebrica que passa por pontos dados.

Principia por procurar o numero de determinações, independentes entre si, de uma curva de ordem n que deve passar por nm pontos de intersecção de uma curva de ordem n com outra de ordem m. Em seguida demonstra o theorema de Cayley relativo ao numero de determinações de uma curva que passa por $m_1 m_2$ pontos de intersecção de duas curvas de ordem m_1 e de ordem m_2. Finalmente d'estes theoremas deduz o numero de determinações de uma curva de ordem n que deve passar por um grupo de pontos dados.

M. Lerch. — *Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre limites imaginaires* (*Bulletin de la Société des Sciences de Bohême,* 1887).

O fim do auctor n'este bello trabalho é mostrar como se podem estudar os elementos da theoria das funcções de variaveis imaginarias empregando integraes rectilineos, em logar de integraes curvilineos, como se faz habitualmente. É assim que, pela consideração de integraes tomados ao longo de polygonos, demonstra o theorema de Taylor e o theorema de Cauchy relativo aos integraes tomados ao longo de um contôrno no interior do qual a funcção integrada é synectica.

M. Lerch. — *Deux théorèmes d'Arithmétique* (*Item*).

—— *Sur une formule d'Arithmétique* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1887).

S. Pincherle. — *Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 103).

N'este bello artigo demonstra o auctor que os coefficientes da serie ordenada segundo as potencias de x, que representa o desenvolvimento de um integral de uma equação differencial linear de ordem m com coefficientes racionaes, são numeros algebricos que pertencem ao dominio de racionalidade definido pela equação determinante $D(\rho) = 0$; e que os coefficientes das potencias de ρ n'estes numeros são fracções que reduzidas á expressão mais simples não contêem em denominador senão factores primos p_n taes que $\lim\limits_{n=\infty} \frac{p_n}{n^{m^2}}$ é um numero finito.

A. Marre. — *Théorème du carré de l'hypothénuse* (*Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. XX).

N'este interessante artigo apresenta o auctor uma serie de demonstrações do theorema do quadrado da hypothenusa attribuido a Pythagoras. É assim que apresenta uma demonstração tirada do *Youcti-Bâcha* sanscrito pelo sr. Ch. Whish; duas demonstrações tiradas do *Bija-Ganita*, a primeira fundada no desenvolvimento de $(a-b)^2$ e a segunda na semelhança do triangulo proposto com os triangulos formados pela perpendicular abaixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa; uma demonstração fundada no desenvolvimento de $(a+b)^2$; uma demonstração devida a Saunderson; etc.

Pirzeti. — *Contribuzione allo studio geometrico della superficie ter-*

restre (*Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche in Genova*, 1887).

Piuma. — *Intorno a due classi di integrali esprimibili con soli logaritmi* (*Item*).

Loria. — *Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica* (*Item*).

Morera. — *Sulla integrazioni dell' equazione a derivata parziali del primo ordine* (*Item*).

Perroni. — *Sul punto doppio apparente della cubica gobba* (*Item*).

G. T.

MODIFICATION DE LA TROISIÈME DÉMONSTRATION DONNÉE PAR GAUSS DE LA LOI DE REPROCITÉ DE LEGENDRE

PAR

M. Lerch

(à Prague)

Il y a déjà une foule des démonstrations du célèbre théorème arithmétique appelé la loi de reciprocité de Legendre, et parmi elles plusieures reposent sur le même principe que la troisième parmi les six démonstrations données par Gauss de ce théorème. C'est aussi la démonstration suivante que je vais développer.

Dans cette note je fais usage du symbole $E(\varkappa)$ qui représente le plus grand nombre entier contenu dans la quantité $\varkappa$ supposée réelle et positive, de sorte que la différence $\varkappa - E(\varkappa)$ sera ou zéro ou une quantité positive inférieure à l'unité; ensuite, je représente par $R(\varkappa)$ le résultat qu'on obtient en retranchant de la quantité réelle $\varkappa$ le nombre entier qui lui est le plus approché, de sorte que la quantité $R(\varkappa)$ est ou positive ou négative, mais toujours contenue entre les limites $\left(-\frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}\right)$, de sorte qu'on a

$$-\frac{1}{2} \leq R(\varkappa) < \frac{1}{2}.$$

Enfin, $\varkappa$ étant une quantité différente de zéro, je représente par le symbole sgn. $\varkappa$ (lisez signum $\varkappa$) ou $+1$ ou -1, selon que $\varkappa$ est positif ou négatif. Ces deux dernières fonctions numériques ont été introduites par M. Kronecker.

1. Soit maintenant p un nombre premier supérieur à 2, q un nombre entier positif non divisible par p, et posons

$$(1) \qquad a_\nu = 2\nu q - p - 2p\,\mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right), \quad \left(\nu = 1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2}\right).$$

Les nombres $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{p-1}{2}}$ sont évidemment tous entiers, positifs ou négatifs, impairs, et en valeur absolue moindres que p. Je vais en premier lieu en déterminer les signes. Comme le nombre a_ν a le même signe que le suivant

$$\frac{a_\nu}{2p} = \frac{\nu q}{p} - \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right) - \frac{1}{2},$$

il suffit de considérer ce dernier nombre. Or la différence

$$\frac{\nu q}{p} - \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$

étant le reste positif de la fraction $\frac{\nu q}{p}$, la quantité $\frac{a_\nu}{2p}$ sera positive ou négative selon que

$$\frac{\nu q}{p} - \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right) > \frac{1}{2} \text{ ou } < \frac{1}{2};$$

et comme on a dans le premier cas $\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right) < 0$, et $\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right) > 0$ dans le second, on voit que $\frac{a_\nu}{2p}$ sera positif ou négatif selon que $\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ sera négatif ou positif.

En d'autres termes on a

$$\mathrm{sgn.}\left(\frac{a_\nu}{2p}\right) = -\,\mathrm{sgn.}\,\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right),$$

ou ce qui est la même chose,

$$\text{sgn.}\, a_\nu = -\,\text{sgn.}\, \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right). \tag{2}$$

C'est cette formule qui exprime le signe de a_ν par celui de la fonction arithmétique R (x).

Je dis maintenant que les $\frac{p-1}{2}$ nombres a_ν sont différents même dans leurs valeurs absolues. Car en effet, si a_ρ et a_ν auraient la même valeur absolue, ou devrait avoir ou $a_\nu = a_\rho$ ou $a_\nu = -a_\rho$, c'est-à-dire l'un des deux nombres $a_\nu \pm a_\rho$ devrait s'annuler. Or les nombres ν, ρ étant supposés contenus dans la série $1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2}$, la valeur absolue du nombre $\nu \pm \rho$ sera moindre que $p-1$; ensuite, on déduit de l'hypothèse $a_\nu \pm a_\rho = 0$ l'équation suivante

$$2(\nu \pm \rho)\, q = (1 \pm 1)\, p + 2p\,\mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right),$$

dont on voit que $(\nu \pm \rho)\, q$ doit être divisible par p. Or q étant premier avec p, il faut que $\frac{\nu \pm \rho}{p}$ soit un nombre entier, ce qui est impossible, le numérateur étant inférieur à $p-1$. Donc tous les nombres a_ν ont leurs modules différents entre eux.

Cela étant il est clair que les nombres a_ν ne diffèrent que par l'ordre et le signe des nombres de la suite $1, 2, 5, 7, \ldots p-2$, de sorte que le produit $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{\frac{p-1}{2}}$ a pour valeur absolue le nombre $1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots p-2$, et comme son signe équivant au produit des seconds membres de la formule (2), savoir

$$\Pi\left[-\,\text{sgn.}\, \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right] = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}\, \text{sgn.} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right),$$

on aura évidemment la formule

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 a_2 a_3 \ldots a_{\frac{p-1}{2}} \\ = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 1.3.5\ldots(p-2)\,\mathrm{sgn.} \prod\limits_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right). \end{cases}$$

Or l'équation (1) montre qu'il subsiste la congruence

$$a_\nu \equiv 2\nu q, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

de sorte que nous aurons

$$a_1 a_2 \ldots a_{\frac{p-1}{2}} \equiv 1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}.(2q)^{\frac{1}{2}(p-1)}, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

et l'équation (3) nous donnera, par conséquent, la congruence

$$1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}.(2q)^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

$$\equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 1.3.5\ldots(p-2)\,\mathrm{sgn.} \prod\limits_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$

prise par rapport au même module p.

En multipliant les deux membres de cette congruence par le nombre

$$2.4.6\ldots(p-1) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}.1.2.3\ldots\frac{p-1}{2},$$

il vient

$$(3*)\quad \begin{cases} \left(1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\right)^2.(4q)^{\frac{1}{2}(p-1)} \\ \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}(p-1)!\,\mathrm{sgn.} \prod \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right). \end{cases}$$

Or le théorème de Wilson exprimé par la formule

$$(p-1)! \equiv -1, \quad (\operatorname{mod} p)$$

conduit à la congruence

$$\left(1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv -(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}, \quad (\operatorname{mod} p),$$

puisque les nombres $\frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \ldots p-1$ sont congrus aux nombres $-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \ldots -1$; on a ensuite, d'après le théorème de Fermat,

$$4^{\frac{1}{2}(p-1)} = 2^{p-1} \equiv 1, \quad (\operatorname{mod} p).$$

D'après ces trois congruences la formule (3 *) se change en la suivante

$$q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \text{sgn.} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right), \quad (\operatorname{mod} p),$$

et c'est cette congruence qui joue le rôle capitale dans la démonstration qui nous occupe.

Car en représentant avec Legendre par le symbol $\left(\frac{q}{p}\right)$ ou 1 ou -1 selon que la congruence $x^2 \equiv q$, $(\operatorname{mod} p)$ a ou n'a pas de racines, on sait depuis Euler que l'on a

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q}{p}\right),$$

ce qui est en même temps le théorème le plus élémentair de la théorie des résidus quadratiques.

D'après cette formule la congruence (4) se change en l'équation

$$(5) \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = \text{sgn.} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$

qui se trouve établie dans plusieurs articles fort intéressants de M. Kronecker (*).

2. La formule (5) n'exprime que ce que le symbole $\left(\frac{q}{p}\right)$ équivaut ou à 1 ou à -1, selon que le nombre des termes négatifs de la série

$$(5\,*) \qquad R\left(\frac{q}{p}\right), \quad R\left(\frac{2q}{p}\right), \quad R\left(\frac{3q}{p}\right), \ldots \; R\left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)\,q}{p}\right]$$

est pair ou impair. Cette série peut être remplaçée par d'autres; par exemple, le signe de la quantité $\operatorname{tg} \pi x$ ou celui de $\sin 2\pi x$ étant le même que celui de $R(x)$ on peut considérer les séries

$$\operatorname{tg}\frac{\nu q \pi}{p}, \; \sin\frac{2\nu q\pi}{p}, \; \left(\nu = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}\right)$$

au lieu de la précédante.

Je me borne seulement à remarquer que la somme

$$(6) \qquad \sigma = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{2}\left[1 - \text{sgn.}\, R\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]$$

est précisément égale au nombre des termes négatifs de la série (5). Car si $\text{sgn.}\, R\left(\frac{\nu q}{p}\right) = 1$, le terme correspondant de la

(*) Sitzungsberichte der kön. preussischen Akad. d. Wiss; mai et juin 1884, avril et novembre 1885.

somme σ disparaît, tandis qu'il deviendra égal à l'unité en supposant que $R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ soit négatif, c'est-à-dire que $\operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)=-1$; on aura donc la formule

$$(6*)\qquad \left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\sigma}.$$

Pour transformer la somme (6) je considère de nouveau les nombres a_ν introduits au commencement. Les nombres a_ν étant affectés du signe $-\operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ les produits $a_\nu \operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ seront négatifs et coïncideront à l'ordre près avec les termes de la série $-1, -3, -5, \ldots -(p-2)$, dont la somme est

$$-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

de sorte qu'il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\left[2\nu q-p-2p\,E\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right].\operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)=-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2;$$

il s'ensuit la formule

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\left[\nu q-p\,E\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right].\operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$
$$=\frac{p}{2}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{2}\right)^2;$$

en la retranchant, membre à membre, de l'identité

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\left[\nu q-p\,E\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]=\frac{p^2-1}{8}q-p\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}E\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$

il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \left[\nu q - p\mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]\left[1-\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]$$

$$=p\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{2}\left[1-\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]-p\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right)+\frac{p^2-1}{8}(q-1).$$

Or les facteurs $1-\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ étant ou zéro ou deux, on voit que le premier membre est un nombre pair, et le nombre p étant impair on voit aisément que le second membre n'est pair que si

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{2}\left[1-\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right] \\ &\equiv \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right)+\frac{p^2-1}{8}(q-1, \quad (\mathrm{mod}\ 2);\end{aligned}\right.$$

c'est donc une formule qui permet de remplacer la somme (6) par un nombre de la même parité, ce qui suffit pour notre but.

Prenant alors $q=2$ et se rappelant ce que, dans ce cas, tous les fractions $\frac{2\nu}{p}$ étant moindres que l'unité, on aura $\mathrm{E}\left(\frac{2\nu}{p}\right)=0$, de sorte que la formule (7) nous donne

$$\sigma\equiv\frac{p^2-1}{8}, \quad (\mathrm{mod}\ 2),$$

et par suite l'équation (6 *) devient dans ce cas

$$(8)\qquad \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Soit maintenant q un nombre impair; dans ce cas le nombre $\frac{p^2-1}{8}(q-1)$ sera pair et la congruence (7) deviendra

$$(9) \qquad \sigma \equiv \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right), \quad (\mathrm{mod}\ 2).$$

Cette formule n'exige que ce que le nombre q soit impair et non divisible par le nombre premier p.

Mais si l'on cherche l'expression $\left(\frac{q}{p}\right)$, on doit supposer que même le nombre q soit premier et différent de p.

Cela étant supposé rempli, la règle exprimée par la formule (6 *) nous donne

$$(10) \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sigma'}, \quad \sigma' \equiv \sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{E}\left(\frac{\rho p}{q}\right), \quad (\mathrm{mod}\ 2).$$

Je vais maintenant prouver la formule

$$(11) \qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right) + \sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{E}\left(\frac{\rho p}{q}\right) = \frac{1}{4}(p-1)(q-1).$$

A cet effet je suppose $q<p$ et je considère la droite OP dont l'équation, dans le système cartésien, soit $y=\frac{q}{p}x$; soit P le point de cette droite dont l'abscisse est $x=\frac{1}{2}(p-1)$ et dont l'ordonnée sera donc

$$y=\frac{1}{2}(q-1)+\frac{1}{2}\left[1-\frac{q}{p}\right],$$

de sorte que

$$\mathrm{E}(y)=\frac{1}{2}(q-1).$$

En représentant par P′, P″ les projections du point P sur l'axe des x et des y, j'observe que le triangle rectangle OP′P contient précisément $\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ points dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs, ainsi que le triangle OP″P contient $\sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\rho p}{q}\right)$ des points de cette espèce. Comme le contour de ces triangles ne contient aucun de tels points, on voit que la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\nu q}{p}\right) + \sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\rho p}{q}\right)$$

équivaut au nombre des points, à coordonnées entières et positives, placés dans le rectangle OP′PP″, et ce nombre étant évidemment le produit $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ l'équation (11) est démontrée.

Alors il résulte des formules (6 *), (9), (10) et (11) la suivante

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}$$

qui exprime le célèbre théorème de Legendre que nous voulions établir.

SUR CERTAINES MOYENNES ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

A. GUTZMER

(à Berlin)

...... Vous connaissez le théorème de M. Rouché (*) sur la moyenne arithmétique d'une fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{ou} \quad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+8} a_\nu x^\nu,$$

selon lequel la moyenne arithmétique de toutes les valeurs de $\frac{f(x)}{x^n}$, correspondantes à une valeur déterminée du module r de la variable

$$x = r \cdot e^{\theta i} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

est égale au coefficient a_n, ce qui s'écrit

$$\mathcal{M}_r \frac{f(x)}{x^n} = a_n.$$

Ce théorème, cité par plusieurs auteurs et d'une certaine importance dans la théorie des fonctions, a été étendue par M. Thomae (**).

(*) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, cahier 39.—Voyez aussi: Serret, *Algèbre Supérieur*.

(**) *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, p. 130.

Je vais vous communiquer dans ces lignes un théorème analogue qui se rapporte aux valeurs du carré du module de la fonction $f(x)$ le long d'un cercle autour de l'origine, et qui sera publié prochainement dans les «Mathematische Annalen».

Supposons que la série de puissance

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \tag{1}$$

converge absolument dans la région définie par $|x| \leq R$ (en désignant d'après M. Weierstrass par $|x|$ le module de la quantité x), et posons

$$x = r \,.\, e^{\theta i}, \quad (r < R);$$

l'équation (1) deviendra

$$f(x) = f(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{\nu\theta i}$$

et par la multiplication par la quantité conjuguée

$$\overline{f}(r\theta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \overline{a}_\mu r^\mu e^{-\mu\theta i}$$

nous obtiendrons

$$|f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_\nu \overline{a}_\mu r^{\nu+\mu} \,.\, e^{(\nu-\mu)\theta i}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_\nu \overline{a}_\mu r^{\nu+\mu} e^{(\nu-\mu)\theta i}.$$

En posant $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$, cette équation devient

$$|f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \left\{ (\alpha_\nu \alpha_\mu + \beta_\nu \beta_\mu) \cos(\nu-\mu)\theta + \right.$$

$$\left. + (\alpha_\nu \beta_\mu - \alpha_\mu \beta_\nu) \sin(\nu-\mu)\theta \right\} r^{\nu+\mu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ (\alpha_{\mu+\lambda} \alpha_\mu + \beta_{\mu+\lambda} \beta_\mu) \cos\lambda\theta \right.$$

$$\left. + (\alpha^{\mu+\lambda} \beta_\mu - \alpha_\mu \beta_{\mu+\lambda}) \sin\lambda\theta \right\} r^{2\mu+\lambda}.$$

En désignant

$$(2)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} (\alpha_{\mu+\lambda}\,\alpha_\mu + \beta_{\mu+\lambda}\,\beta_\mu)\, r^{2\mu+\lambda} = A_\lambda$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} (\alpha_{\mu+\lambda}\,\beta_\mu - \alpha_\mu\,\beta_{\mu+\lambda})\, r^{2\mu+\lambda} = B_\lambda,$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$(3)\qquad |f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Big\{ A_\lambda \cos\lambda\theta + B_\lambda \sin\lambda\theta \Big\}.$$

Cette équation nous donne immédiatement

$$|f(r,\theta+\pi)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda \Big\{ A_\lambda \cos\lambda\theta + B_\lambda \sin\lambda\theta \Big\}$$

et par suite nous aurons

$$\frac{1}{2}\Big\{ |f(r,\theta)|^2 + |f(r,\theta+\pi)|^2 \Big\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Big\{ A_{2\lambda} \cos 2\lambda\theta + B_{2\lambda} \sin 2\lambda\theta \Big\}.$$

De même vous trouvez

$$\frac{1}{2}\left\{ \left| f\left(r,\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|^2 + \left| f\left(r,\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2 \right\}$$

$$= \sum_\nu |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda \Big\{ A_{2\lambda} \cos 2\lambda\theta + B_{2\lambda} \sin 2\lambda\theta \Big\},$$

et, en additionnant ces deux équations, vous aurez

$$\frac{1}{4}\left\{ |f(r,\theta)|^2 + \left| f\left(r,\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|^2 + |f(r,\theta+\pi)|^2 + \left| f\left(r,\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2 \right\}$$

$$= \sum_\nu |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Big\{ A_{4\lambda} \cos 4\lambda\theta + B_{4\lambda} \sin 4\lambda\theta \Big\}.$$

En continuant de cette manière, vous finirez par trouver l'équation

$$(4)\qquad \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f\left(r,\theta+\frac{k\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_{2^n\lambda}\cos(2^n\lambda\theta)+B_{2^n\lambda}\sin(2^n\lambda\theta)\right\}.$$

Maintenant il est facile de se convaincre que la dernière somme s'approche de la valeur zéro, si n augmente indéfiniment. En effet, en profitant des définitions (2) et de la supposition faite de la série (1), il s'ensuit

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_{2^n\lambda}\cos(2^n\lambda\theta)+B_{2^n\lambda}\sin(2^n\lambda\theta)\right\}$$

$$<\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}r^{2\mu+2^n\lambda}\left\{|\alpha_{\mu+2^n\lambda}\cdot\alpha_\mu|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}\cdot\beta_\mu|+\right.$$

$$\left.+|\alpha_{\mu+2^n\lambda}\cdot\beta_\mu|+|\alpha_\mu\cdot\beta_{\mu+2^n\lambda}|\right\}$$

$$<\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}r^{2\mu+2^n\lambda}\cdot\left\{|\alpha_\mu|+|\beta_\mu|\right\}\cdot\left\{|\alpha_{\mu+2^n\lambda}|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}|\right\}$$

$$<\sum_{\mu=0}^{\infty}r^\mu\cdot\left\{|\alpha_\mu|+|\beta_\mu|\right\}\cdot\sum_{\lambda=1}^{\infty}r^{\mu+2^n\lambda}\cdot\left\{|\alpha_{\mu+2^n\lambda}|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}|\right\}.$$

La première somme est évidemment une quantité finie, tandis que la seconde en représente une sorte de reste; par conséquent elle devra s'évanouir pour n infini, et de même le produit des deux séries.

Nous pouvons donc conclure que

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f\left(r,\theta+\frac{k\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Or, le premier membre de (5) représente la moyenne arithmétique des carrés des modules de (1) pour tous les points du cercle $|x|=r$.

En indiquant cette moyenne par $\mathfrak{M}_r$, nous avons

$$(6)\qquad \mathfrak{M}_r\,|f(x)|^2=\mathfrak{M}_r\,|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu|^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Cette équation nous fournit le

Théorème: *La moyenne arithmétique des carrés des modules de toutes les valeurs que la série*

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

puisse avoir le long du cercle $|x|=r$, *situé dans la région de convergence, est égale à la somme des carrés des modules des termes de la série.*

Il est aisé de voir que ce théorème est encore en force pour des séries plus générales d'une seule ou de plusieurs variables. De même on peut énoncer ce théorème pour un cercle quelconque, situé parfaitement dans la région de convergence de la série, pourvu qu'on prenne, au lieu de la série proposée, son développement autour du centre du cercle. Mais je n'y insisterai plus.

Dans ses recherches sur les séries trigonométriques (*) A. Harnack a trouvé quelques formules intégrales, qui ne sont autre chose que des théorèmes sur la moyenne d'une fonction, et il est facile de dériver d'une de ces formules une autre démonstration de notre théorème, laquelle je dois à une lettre, dont M. W. Dyck m'a honoré; il s'ensuit que ce théorème est en force plus généralement qu'il semble d'après la démonstration donnée ci-dessus. Cependant A. Harnack n'a pas tiré des conséquences de sa formule pour les fonctions d'une variable complexe. Toutefois, cette formule (**) m'a inspiré une nouvelle démonstration du théorème énoncé, que je me permets de vous communiquer.

(*) *Mathematische Annalen*, ts. 17 e 19.
(**) L. c., t. 17, p. 127, éq. (III).

En effet, en sortant de l'équation (3), nous aurons par intégration

$$\int_0^{2\pi} |f, \theta)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} . d\theta + 2 \int_0^{2\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ A_\lambda \cos \lambda\theta + B_\lambda \sin \lambda\theta \right\} . d\theta$$

$$= 2\pi . \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ A_\lambda \int_0^{2\pi} \cos \lambda\theta . d\theta + B_\lambda \int_0^{2\pi} \sin \lambda\theta . d\theta \right\}$$

$$= 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ A_\lambda \left(\frac{\sin \lambda\theta}{\lambda} \right)_0^{2\pi} + B_\lambda \left(\frac{-\cos \lambda\theta}{\lambda} \right)_0^{2\pi} \right\}.$$

Evidemment chaque terme de la dernière somme, et par suite la somme elle-même, s'évanouit, de sorte que nous avons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r, \theta)|^2 d\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Voilà le théorème en forme intégrale. Vous voyez, Monsieur, qu'il ne faut que de supposer que l'intégrale au premier membre a un sens, ce qui est conforme aux conditions de A. Harnack pour les séries trigonométriques.

Considérons encore quelques exemples. D'après la formule (6) nous aurons pour la fonction e^x:

$$\mathfrak{M}_r |e^x|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(n!)^2}$$

ce qui devient, pour le cercle $|x| = 1$,

$$\mathfrak{M}_1 |e^x|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

De même nous aurons pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ la relation

$$\mathfrak{M}_r \left| \sum \frac{x^n}{n^2} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n^4};$$

par conséquent la moyenne arithmétique du carré du module de cette série, pour tous les points du cercle $|x|=1$, est égale à

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^2}{90}.$$

La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ possède pour un cercle $|x|=r$ la moyenne arithmétique $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2^{2n}}$, qui devient pour $r=\frac{1}{2}$,

$$\mathcal{M}_{\frac{1}{2}}\left|\Sigma\frac{x^n}{2^n}\right|^2=\Sigma\frac{1}{2^{4n}}=\frac{16}{15},$$

et pour $r=1$

$$\Sigma\frac{1}{2^{2n}}=\frac{4}{3}.$$

Pour la série

$$\log\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

il suit

$$\mathcal{M}_r\left|\log\frac{1}{1-x}\right|^2=\Sigma\frac{r^{2n}}{n^2},\quad (\text{où } r<1);$$

la même moyenne se trouve pour la fonction

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n},$$

car évidemment on a

$$\mathcal{M}_r|\log(1+x)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n^2}\quad (\text{où } r<1),$$

de sorte que les carrés des modules des deux fonctions $\log(1+x)$ et $\log\frac{1}{1-x}$ ont la même moyenne arithmétique pour les mêmes cercles.

Parmi les conséquences qu'on peut tirer du théorème énoncé, je ne mentionnerai que la suivante. En désignant par q_λ des quantités positives, nous aurons certainement l'inégalité

$$q^2_\mu + q^2_\nu > 2\, q_\mu\, q_\nu \quad (\mu \neq \nu).$$

Formons cette inégalité pour toutes les valeurs de $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m$, $\mu \neq \nu$; nous trouverons facilement par addition

$$(m-1) \sum_{\mu=1}^{m} q^2_\mu > 2 \sum_{\mu,\nu=1}^{m} q_\mu\, q_\nu, \quad \mu \neq \nu.$$

Ajoutons aux deux membres de cette inégalité l'expression $q^2_1 + q^2_2 + \ldots + q^2_m$; il suit

$$m \cdot \sum_{\mu=1}^{m} q^2_\mu > \left(\sum_{\mu=1}^{m} q_\mu\right)^2,$$

ou

$$\sqrt{\left(\sum_{\mu=1}^{m} q^2_\mu\right)} > \frac{\sum_{\mu=1}^{m} q_\mu}{\sqrt{m}}.$$

Si nous posons maintenant

$$q_\mu = \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|$$

et $m = 2^n$, nous aurons

$$\sqrt{\frac{1}{2^n} \sum_{\mu=0}^{2^n-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2} > \frac{\sum_{\mu=0}^{2^n-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|}{2^n}$$

d'où vient à l'aide de l'équation (5), pour n infini

$$\sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}} > \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\mu=0}^{2^n-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{2^{n-1}}{\mu\pi}\right)\right|.$$

A gauche nous avons une quantité finie et déterminée, par conséquent la quantité à droite devra être finie, et comme la somme $\Sigma \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu \pi}{2^{n-1}}\right)\right|$ est certainement divergente, il faut qu'elle devienne infinie du même ordre que 2^n.

D'autre part le second membre représente la moyenne arithmétique des valeurs que le module de $f(x)$ parcourt pour le cercle $|x| = r$. Nous avons donc le

Théorème: *La moyenne arithmétique des valeurs que le module de la fonction* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *parcourt pour tous les points du cercle* $|\mathfrak{x}| = \mathfrak{r}$, *est inférieure à la racine carrée de la moyenne arithmétique du carrée de ces modules.*

Nous avons donc une limite supérieure de cette moyenne arithmétique; je n'ai pas encore réussi à en trouver une expression exacte par la méthode employée d'abord dans cette lettre.

Pour déterminer cette expression par l'autre méthode, on aurait à former

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_\nu \overline{a}_\mu r^{\nu+\mu} \cdot e^{(\nu-\mu)\theta i}} \cdot d\theta$$

Peut-être je reviendrai une autre fois à cette expression.

Permettez-moi, Monsieur, de ajouter à ces lignes une nouvelle démonstration du théorème de M. Rouché, cité au commencement de cette lettre. Considérons la fonction

$$\frac{f(x)}{x^k} = \sum_\nu a_\nu x^{\nu-k} = \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \Big\{\cos(\nu-k)\theta + i\sin(\nu-k)\theta\Big\};$$

en intégrant, on aura

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x^k} d\theta = \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \int_0^{2\pi} \Big\{\cos(\nu-k)\theta + i\sin(\nu-k)\theta\Big\} d\theta$$

$$= 2\pi a_k + \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \left\{\left(\frac{\sin(\nu-k)\theta}{\nu-k}\right)_0^{2\pi} - i\left(\frac{\cos(\nu-k)\theta}{\nu-k}\right)_0^{2\pi}\right\}, \quad \nu \neq k,$$

Chaque terme de la somme, et par suite la somme elle-même, devient zéro, de sorte que nous avons la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x)}{x^k}\,d\theta = a_k,$$

ce qui démontre le théorème de M. Rouché d'une manière nouvelle.

Berlin, mai 1888.

EXTRACTOS DAS PUBLICAÇÕES RECENTES

I

Sobre a convergencia das series

A serie de termos positivos Σu_n *será convergente se, a partir d'um certo valor do numero inteiro e positivo* n, *for*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu.$$

a_n *sendo uma funcção positiva de* n *e* μ *uma constante positiva.*

Tira-se este theorema da desegualdade

$$u_{n+1} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1})$$

que dá

$$u_{n+1} + \ldots + u_{n+m} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+m} u_{n+m}) < \frac{1}{\mu} a_n u_n.$$

D'este theorema deduz-se:

1.° Pondo $a_n = 1$, o criterio de convergencia de Cauchy

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \mu;$$

2.° Pondo $a_n = n$, o criterio de Duhamel

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] > 1 + \mu;$$

3.° Pondo $a_n = n \log n$, $n \log n \log \log n$, obtêm-se os criterios do sr. Bertrand.

[*J. L. Jensen: Sur un théorème général de convergence* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1888)].

II

Sobre um theorema de Tchébychew

Se U e V representam duas funcções de x, cada uma das quaes varía n'um determinado sentido, quando x varía de 0 a 1, a expressão

$$\int_0^1 \mathrm{UV}\, dx - \int_0^1 \mathrm{U}\, dx \int_0^1 \mathrm{V}\, dx$$

é positiva ou negativa, segundo que U e V variam ou não no mesmo sentido.

Tem-se dado varias demonstrações d'este theorema importante devido a Tchébychew. A seguinte, devida ao sr. G. d'Arone, é muito simples:

Considera-se a expressão

$$n(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$$

onde $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ representam quantidades arbitrarias. Disponham-se os seus termos do modo seguinte:

$$\begin{aligned}
&u_1(v_1 - v_1) + u_1(v_1 - v_2) + \ldots + u_1(v_1 - v_n) \\
&+ u_2(v_2 - v_1) + u_2(v_2 - v_2) + \ldots + u_2(v_2 - v_n) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ u_n(v_n - v_1) + u_n(v_n - v_2) + \ldots + u_n(v_n - v_n).
\end{aligned}$$

Os termos da diagonal principal são nullos, e os termos symetricos relativamente a esta diagonal podem ser agrupados de modo a reduzir esta expressão á fórma

$$\begin{aligned}(u_1-u_2)(v_1-v_2)+(u_1-u_3)(v_1-v_3)+\ldots+(u_1-u_n)(v_1-v_n)\\ +(u_2-u_3)(v_2-v_3)+\ldots+(u_2-u_n)(v_2-v_n)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(u_{n-1}-u_n)(v_{n-1}-v_n).\end{aligned}$$

Temos pois

$$n\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i,j}^{n} (u_i-u_j)(v_i-v_j).$$

Supponhamos agora que os u e os v representam os valores tomados pelas funcções U e V nos extremos superiores de n intervallos eguaes em que se devida o intervallo de 0 a 1. Teremos

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} u_i = \int_0^1 \mathrm{U}\,dx$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} v_i = \int_0^1 \mathrm{V}\,dx$$

e portanto a egualdade precedente dará, depois de dividida por n^2,

$$\int_0^1 \mathrm{UV}dx - \int_0^1 \mathrm{U}dx \int_0^1 \mathrm{V}dx = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}^{n} (u_i-u_j)(v_i-v_j).$$

D'esta egualdade deduz-se o theorema enunciado, visto que os productos $(u_i-{}_j)(v_i-v_j)$ são positivos ou negativos segundo que U e V variam ou não no mesmo sentido quando x varía desde 0 até 1.

[*Giovanni d'Arone: Intorno ad un teorema di Tchebychew* (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, t. XXVI)].

III

Uma propriedade da transversal do triangulo

Seja ABC um triangulo dado, M um ponto da superficie d'este triangulo cujas coordenadas normaes são x, y, z; Δ uma transversal que passa pelo ponto M e corta o lado BC no ponto A_1, o lado AB no ponto C_1 e o lado AC no ponto B_1; e N um outro ponto da transversal cujas coordenadas normaes são x_1, y_1, z_1.

Temos pois

$$\frac{x_1}{x}=\frac{A_1N}{A_1M},\quad \frac{y_1}{y}=\frac{B_1N}{B_1M},\quad \frac{z_1}{z}=\frac{C_1N}{C_1M};$$

d'onde se tira, pondo $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$,

$$ax_1=\frac{A_1N}{A_1M}ax,\quad by_1=\frac{B_1N}{B_1M}by,\quad cz_1=\frac{C_1N}{C_1M}cz.$$

Por outra parte temos, as coordenadas sendo tomadas em valor absoluto,

$$ax_1+cz_1+by_1=2S,\quad ax+by+cz=2S,$$

e portanto

$$\left(\frac{A_1N}{A_1M}-1\right)ax-\left(\frac{B_1N}{B_1M}+1\right)by+\left(\frac{NC_1}{MC_1}-1\right)cz=0.$$

Mas

$$A_1N-A_1M=MN,\quad B_1N+B_1M=MN,\quad NC_1-MC_1=MN,$$

logo

$$\frac{ax}{MA_1}+\frac{by}{MB_1}+\frac{cz}{MC_1}=0,$$

que é a relação que se pretendia achar.

[*H. Plamenewsky: Une propriété nouvelle de la transversale du triangle* (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1888)].

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. Lerch

(à Prague)

... Le théorème que j'ai en vue est le suivant: La somme de tous les produits possibles de la forme $q_1 q_2 q_3 \dots q_n$, où les q sont des nombres entiers positifs satisfaisant aux conditions

$$q_1 = \leqq 2, \quad q_{\alpha+1} \leqq 1 + q_\alpha,$$

est égale au nombre $1.3.5\dots(2n+1)$.

Ce théorème résulte en évaluant de deux manières différentes la dérivée

$$\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0},$$

où

$$x = 1 - \sqrt{1-2u} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} 2^\nu u^\nu.$$

On a évidemment

$$\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0} = 1.3.5\dots(2n+1);$$

ensuite, la fonction x satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

il en résulte que l'on a

$$\frac{d^2x}{du^2} = \left[\sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \alpha_0 x^{\alpha_0-1}\right]\frac{dx}{du} = \sum_{\alpha_0, \alpha_1} \alpha_0 x^{\alpha_0+\alpha_1-1},$$

où

$$\alpha_0, \alpha_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

De là on tire, en différentiant de nouveau,

$$\frac{d^3x}{du^3} = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1) x^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-2}, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

et ainsi de suite. De cette manière on trouve aisément la formule générale

$$\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}} = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n+1}} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2) \ldots$$

$$\ldots (\alpha_0 + \alpha_1 \ldots \alpha_n - n) x^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n+1}-n-1},$$

d'où

$$\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0} = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n+1}} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2) \ldots$$

$$\ldots (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - n),$$

les symboles $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ représentant des nombres de la série 0, 1, 2, ... assujettis à la condition

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n + 1.$$

Or en posant

$$\alpha_0 = q_n, \quad \alpha_0 + \alpha_1 - 1 = q_{n-1},$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2 = q_{n-2}, \quad \ldots, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - n = q_0 = 1,$$

de sorte que $1+q_\alpha \geqq q_{\alpha+1}$, on aura

$$\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0}=\sum q_0\, q_1\, q_2 \ldots q_n, \quad q_0=1,$$

les q étant des nombres entiers positifs assujettis à la condition $1+q_\alpha \geqq q_{\alpha+1}$. On a donc

$$\sum q_1\, q_2 \ldots q_n = 1.3.5\ldots(2n+1),$$

c. qu. f. d.

Cerhovice, le 6 juin 1888.

SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES HYPERELLIPTIQUES (*)

(Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch)

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

Soit X un polynôme entier du dégré impair n et $f(x, \sqrt{X})$ une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{X}$. Vous savez, Monsieur, qu'on peut toujours mettre cette fonction sous la forme

$$G+\frac{H}{\sqrt{X}},$$

G et H représentant des fonctions rationnelles de x, et qu'on peut décomposer $\frac{H}{\sqrt{X}}$ en termes de la forme $\frac{x^m}{\sqrt{X}}$ et en termes de la forme $\frac{1}{(x-a)^m\sqrt{X}}$. Donc, pour intégrer la fonction $f(x, \sqrt{X})$, on est conduit à considérer des intégrales de la forme

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{X}}$$

et des intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{X}}.$$

(*) Esta carta foi apresentada pelo sr. Lerch á *Sociedade Real das Sciencias da Bohemia* na sessão de 27 de abril de 1888, e publicada em seguida no Boletim d'esta sociedade.

Notre objet est ramener ces intégrales aux *intégrales hyperelliptiques* de *première espèce*, de *seconde espèce* et de *troisième espèce*.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}},$$

et soit

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

Nous avons

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}$$

$$-\frac{1}{2(m-1)}\int \frac{X'dx}{(x-a)^{m-1} X \sqrt{X}}.$$

Si a est différent de $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, nous avons

$$\frac{X'}{2(m-1)(x-a)^{m-1} X} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda}$$

$$+\frac{M_1}{x-a} + \frac{M_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{M_{m-1}}{(x-a)^{m-1}},$$

où A, B, ... L, M_1, etc. représentent des constantes; et par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}$$

$$-A\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} - B\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} - \ldots - L\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

$$-M_1\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}} - M_2\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}} - \ldots$$

$$-M_{m-1}\int \frac{dx}{(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}.$$

Au moyen de cette formule et des formules analogues qu'on obtient en y posant $m=2, \ldots, m-1$, on ramène l'étude de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}}$ à celle des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}.$$

Si a est égal à une des racines de l'équation $X=o$, par exemple $a=\alpha$, on a

$$\frac{X'}{2(m-1)(x-a)^m(x-\beta)\ldots(x-\lambda)} = \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda} + \frac{M_1}{x-a} + \frac{M_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{M_m}{(x-a)^m},$$

où B, C, ... L, M_1, ... représentent des constantes. On obtient la constante M_m, la seule qu'il nous faut connaître, en déterminant la vraie valeur de la fraction

$$\frac{X'(x-\alpha)}{2(m-1)X}$$

quand $x=\alpha$; on a alors

$$M_m = \lim_{x=\alpha} \frac{X'(x-\alpha)}{2(m-1)X} = \frac{1}{2(m-1)}.$$

Donc

$$\frac{2m-3}{2(m-1)} \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}\sqrt{X}} - B\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} - \ldots - L\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} - M_1 \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}} - M_2 \int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}} - \ldots - M_{m-1} \int \frac{dx}{(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}.$$

Au moyen de cette formule et des formules analogues qu'on obtient en y posant $m=2, 3, \ldots m-1$ on ramène encore l'étude de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}}$ à celles des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \quad \ldots \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

quand $a=\alpha$.

Déterminons maintenant les intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \quad \ldots \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}.$$

De l'identité

$$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\ldots+\frac{1}{x-\lambda}=\frac{X'}{X}$$

on tire

$$(1) \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}+\ldots+\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} = -\frac{2}{\sqrt{X}}.$$

D'un autre côté, de la formule

$$\int \frac{x^k dx}{\sqrt{X}} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)\sqrt{X}}+\frac{1}{2(k+1)}\int \frac{x^{k+1}X' dx}{X\sqrt{X}}$$

et de la formule

$$\frac{x^{k+1}X'}{X}=\frac{x^{k+1}}{x-\alpha}+\frac{x^{k+1}}{x-\beta}+\ldots+\frac{x^{k+1}}{x-\lambda}$$
$$= nx^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k$$
$$+\frac{\alpha^{k+1}}{x-\alpha}+\frac{\beta^{k+1}}{x-\beta}+\ldots+\frac{\lambda^{k+1}}{x-\lambda}$$

on tire

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(2k+2-n)\int\frac{x^k dx}{\sqrt{X}}-a_1\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{X}}-\ldots-a_k\int\frac{dx}{\sqrt{X}}\\
&=\frac{2x^{k+1}}{\sqrt{X}}+\alpha^{k+1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\beta^{k+1}\int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}+\\
&\qquad+\ldots+\lambda^{k+1}\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}
\end{aligned}
\right.
$$

et, en posant $k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-2,$

$$\alpha\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\ldots+\lambda\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

$$=-(n-2)\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{2x}{\sqrt{X}}$$

$$\alpha^2\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\ldots+\lambda^2\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

$$=-(n-4)\int\frac{xdx}{\sqrt{X}}-a_1\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{2x^2}{\sqrt{X}}$$

....

$$\alpha^{n-1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\ldots+\lambda^{n-1}\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}=$$

$$(n-2)\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{X}}-a_1\int\frac{x^{n-3}dx}{\sqrt{X}}-\ldots-a_{n-2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{2x^{n-1}}{\sqrt{X}}.$$

Au moyen de ces équations et de l'équation (1) on ramène l'étude des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

à celle des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{X}}$$

parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha & \beta & \ldots & \lambda \\ \alpha^2 & \beta^2 & \ldots & \lambda^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{n-1} & \beta^{n-1} & \ldots & \lambda^{n-1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

La formule (2) permettra aussi d'exprimer l'intégrale

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}$$

quand $m > n-2$, au moyen des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{X}}.$$

Donc, en dernière analyse, les intégrales considerées

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{X}}, \int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}$$

peuvent être exprimées au moyen des intégrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}},\ \int\frac{xdx}{\sqrt{X}},\ \ldots\ \int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{X}}$$

et de l'intégrale

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

PROBLÈME D'ALGÈBRE

(Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne à M. Gomes Teixeira)

... Vous savez que les nombres que j'ai étudiés dans l'*American Journal of Mathematics* (vol. IX, p. 353) sous le nom de nombres K_m^p, et dont je me suis efforcée de faire ressortir l'importance au point-de-vue de l'analyse (qui m'ont permis, en particulier, de donner des expressions explicites très simples [formules (54), (55), (56)] des nombres de Bernoulli) sont définis par les formules

$$K_m^1 = 1, \quad K_m^m = 1,$$

$$K_m^p = pK_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1},$$

formules qui se traduisent, ainsi que je l'ai fait voir, par un tableau à double entrée analogue au triangle arithmétique de Pascal.

Le nombre K_m^p est d'ailleurs donné explicitement par la formule (5′) de mon Mémoire

$$K_m^p = \frac{p^m - C_p^1 (p-1)^m + C_p^2 (p-2)^m - \dots}{p!}$$

$$\frac{+(-1)^{p-2} C_p^{p-2} 2^m + (-1)^{p-1} C_p^{p-1} 1^m}{p!}.$$

Voici, à titre de nouvelle application des nombres K_m^p, un problème d'algèbre que je résous par l'emploi de ces nombres:

Étant donné un polynôme entier et rationnel en x

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

on se propose de le mettre sous la forme

$$F(x)=h_0+h_1x+h_2x(x+1)+\ldots+h_nx(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1).$$

Donner l'expression explicite des coefficients h *en fonction des coefficients* a.

Un calcul facile montre que pour des différences de la variable x égales à l'unité, la $p^{\text{ième}}$ différence de la fonction $F(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\Delta^p F(x)=1.2.3\ldots p.h_p&+2.3.4\ldots(p+1)\,h_{p+1}(x+p)\\&+3.4.5\ldots(p+2)\,h_{p+2}(x+p)(x+p+1)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta^p F(-p)=p!\,h_p,$$

et

$$(1)\qquad h_p=\frac{\Delta^p F(-p)}{p!}.$$

Or, la formule (15) de mon Mémoire de l'*American Journal*, transformée d'une formule de M. Cesarò, donne

$$\Delta^p F(x)=\sum_{i=0}^{i=n-p}\frac{K^p_{p+i}}{A^i_{p+i}}\,.\,F^{(p+i)}(x)$$

A^i_{p+i} représentant le nombre $(p+i)(p+i-1)\ldots(p+1)$ des arrangements de $p+i$ objets pris i à i.

D'ailleurs

$$\begin{aligned}F^{(m)}(x)=1.2\ldots m.a_m&+2.3\ldots(m+1)\,a_{m+1}x\\&+3.4\ldots(m+2)\,a_{m+2}x^2+\ldots;\end{aligned}$$

donc

$$\Delta^p F(x) = \frac{K_p^p}{A_p^0}[1.2\ldots p.a_p + 2.3\ldots(p+1)\,a_{p+1}x$$
$$+3.4\ldots(p+2)\,a_{p+2}x^2+\ldots]$$
$$+\frac{K_{p+1}^p}{A_p^1}[1.2\ldots(p+1)a_{p+1}+2.3\ldots(p+2)\,a_{p+2}x$$
$$+3.4\ldots(p+3)\,a_{p+3}x^2+\ldots]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{K_{n-1}^p}{A_{n-1}^p}[1.2\ldots(n-1)\,a_{n-1}+2.3\ldots n.a_n x]$$
$$+\frac{K_n^p}{A_n^p}1.2\ldots n.a_n.$$

Faisant, dans cette formule, $x=-p$, e divisant par $p!$, on a, en vertu de (1),

$$h_p = a_p\,.\,C_p^p K_p^p$$
$$-a_{p+1}\left(C_{p+1}^p K_p^p\,.\,p - C_p^p K_{p+1}^p\right)$$
$$+a_{p+2}\left(C_{p+2}^p K_p^p p^2 - C_{p+1}^p K_{p+1}^p \frac{p+2}{p+1}p + C_p^p K_{p+2}^p\right)$$
$$-a_{p+3}\left(C_{p+3}^p K_p^p p^3 - C_{p+2}^p K_{p+1}^p \frac{p+3}{p+1}p^2\right.$$
$$\left.+C_{p+1}^p K_{p+2}^p \frac{(p+2)(p+3)}{(p+2)(p+1)}p - C_p^p K_{p+3}^p \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+3)(p+2)(p+1)}\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n-p}a_n\left(C_p^p K_p^p p^{n-p} - C_{n-1}^p K_{p+1}^p \frac{n}{p+1}p^{n-p-1}+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-p}C_p^p K_n^p \frac{(p+1)(p+2)\ldots n}{n\ldots(p+2)(p+1)}\right),$$

formule qui résout le problème que nous nous étions proposé, et où, bien entendu, C_m^n réprésente le nombre

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$$

des combinaisons de m objets pris n à n.

NOTE DE CALCUL INTÉGRAL

PAR

H. LE PONT

Dans un précédent article, nous avons indiqué une méthode qui permet d'intégrer un système de n équations linéaires simultanées aux différentielles totales et à coefficients constants, et qui donne en même temps les conditions de compabilité de ce système. Nous nous proposons dans cette note de développer la même analyse dans le cas d'un système de deux équations à m variables indépendantes et à coefficients quelconques.

Prenons, pour plus de simplicité, les deux équations

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} dy_1 = (a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2)\, dx_1 + (a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2)\, dx_2 \\ dy_2 = (b_{1,1}\, y_1 + b_{1,2}\, y_2)\, dx_1 + (b_{2,1}\, y_1 + b_{2,2}\, y_2)\, dx_2 \end{cases}$$

les coefficients a et b étant des fonctions quelconques des variables indépendantes x_1 et x_2.

Multiplions la seconde équation par une fonction indéterminée λ de x_1 et de x_2, et ajoutons ce produit à la première, il vient

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} d(y_1 + \lambda y_2) = \left[(a_{1,1} + \lambda b_{1,1})\, y_1 + \left(a_{1,2} + \lambda b_{1,2} + \dfrac{d\lambda}{dx_1} \right) y_2 \right] dx_1 \\ \qquad + \left[(a_{2,1} + \lambda b_{2,1})\, y_1 + \left(a_{2,2} + \lambda b_{2,2} + \dfrac{d\lambda}{dx_2} \right) y_2 \right] dx_2 \end{cases}$$

ou

$$\text{(B)} \quad d\, \mathrm{Log}\, (y_1 + \lambda y_2) = (a_{1,1} + \lambda b_{1,1})\, dx_1 + (a_{2,1} + \lambda b_{2,1})\, dx_2$$

en posant

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dx_1} = b_{1,1}\lambda^2 + (a_{1,1} - b_{1,2})\lambda - a_{1,2} \\ \dfrac{d\lambda}{dx_2} = b_{2,1}\lambda^2 + (a_{2,1} - b_{2,2})\lambda - a_{2,2}. \end{cases}$$

Pour que le système (A) soit compatible, il faut et il suffit évidemment : 1° que le second membre de l'équation (B) soit une différentielle exacte ; 2° que les équations (2) définissent une même fonction λ, intégrale de l'équation aux différentielles totales

$$(C)\quad \begin{cases} d\lambda = [b_{1,1}\lambda^2 + (a_{1,1} - b_{1,2})\lambda - a_{1,2}]\, dx_1 \\ \qquad + [b_{2,1}\lambda^2 + (a_{2,1} - b_{2,2})\lambda - a_{2,2}]\, dx_2. \end{cases}$$

La première condition s'exprime de la manière suivante

$$\frac{d}{dx_2}(a_{1,1} + \lambda b_{1,1}) = \frac{d}{dx_1}(a_{2,1} + \lambda b_{2,1}),$$

ou, en développant et remplaçant $\dfrac{d\lambda}{dx_1}$ et $\dfrac{d\lambda}{dx_2}$ par leurs valeurs

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{da_{2,1}}{dx_1} - \dfrac{da_{1,1}}{dx_2} - a_{1,2}b_{2,1} + b_{1,1}a_{2,2} \\ + \left[\dfrac{db_{2,1}}{dx_1} - \dfrac{db_{1,1}}{dx_2} + (a_{1,1} - b_{1,2})b_{2,1} - (a_{2,1} - b_{2,2})b_{1,1}\right]\lambda = 0, \end{cases}$$

équation qui doit être vérifiée identiquement. Donc

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{da_{2,1}}{dx_1} - \dfrac{da_{1,1}}{dx_2} = a_{1,2}\, b_{2,1} - b_{1,1}\, a_{2,2} \\ \dfrac{db_{2,1}}{dx_1} - \dfrac{db_{1,1}}{dx_2} = (a_{2,1} - b_{2,2})\, b_{1,1} - (a_{1,1} - b_{1,2})\, b_{2,1}. \end{cases}$$

Pour obtenir la seconde condition, égalons les valeurs de $\dfrac{d^2\lambda}{dx_1 dx_2}$

fournies par les équations (2). Nous avons ainsi, en éliminant toujours $\frac{d\lambda}{dx_1}$ et $\frac{d\lambda}{dx_2}$, et en tenant compte de (I)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{da_{2,2}}{dx_1}-\frac{da_{1,2}}{dx_2}=(a_{1,1}-b_{1,2})\,a_{2,2}+(a_{2,1}-b_{2,2})\,a_{1,2}\\ &\qquad+\left(\frac{db_{2,2}}{dx_1}-\frac{db_{1,2}}{dx_2}-b_{1,1}\,a_{2,2}+a_{1,2}\,b_{2,1}\right)\lambda=0\end{aligned}\right.$$

puis, en annulant les coefficients de cette équation

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{da_{2,2}}{dx_1}-\frac{da_{1,2}}{dx_2}=(a_{1,1}-b_{1,2})\,a_{2,2}-(a_{2,1}-b_{2,2})\,a_{1,2}\\ &\frac{db_{2,2}}{dx_1}-\frac{db_{1,2}}{dx_2}=-a_{1,2}\,b_{2,1}+b_{1,1}\,a_{2,2}.\end{aligned}\right.$$

Les quatre relations (I) et (II) sont les conditions de compatibilité du système différentiel proposé. Il est du reste facile de le vérifier directement. En effet, les équations (A) sont équivalentes à celles-ci

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx_1}=a_{1,1}\,y_1+a_{1,2}\,y_2 &\quad &\frac{dy_1}{dx_2}=a_{2,1}\,y_1+a_{2,2}\,y_2\\ &\frac{dy_2}{dx_1}=b_{1,1}\,y_1+b_{1,2}\,y_2 &\quad &\frac{dy_2}{dx_2}=b_{2,1}\,y_1+b_{2,2}\,y_2.\end{aligned}\right.$$

Egalant les valeurs de $\frac{d^2y_1}{dx_1\,dx_2}$ et de $\frac{d^2y_2}{dx_1\,dx_2}$ tirées de ces équations, nous avons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{da_{2.1}}{dx_1}-\frac{da_{1,1}}{dx_2}+b_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}\,b_{2,1}\right)y_1\\ &+\left[\frac{da_{2,2}}{dx_1}-\frac{da_{1,2}}{dx_2}+(a_{2,1}-b_{2,2})\,a_{1,2}-(a_{1,1}-b_{1,2})\,a_{2,2}\right]y_2=0\\ &\left[\frac{db_{2,1}}{dx_1}-\frac{db_{1.1}}{dx^2}+(a_{1,1}-b_{1,2})\,b_{2,1}-(a_{2,1}-b_{2,2})\,b_{1,1}\right]y_1\\ &\qquad+\left(\frac{db_{2,2}}{dx_1}-\frac{db_{1.2}}{dx_2}+a_{1,2}\,b_{2,1}-b_{1,1}\,a_{2,2}\right)y_2=0\end{aligned}\right.$$

ce qui donne, en exprimant que les coefficients de y_1 et de y_2 sont nuls, les relations (I) et (II).

Ces conditions étant supposées satisfaites, nous allons déterminer les deux fonctions λ qui forment nos deux combinaisons linéaires immédiatement intégrables. Posons

$$(5)\quad \begin{cases} h_1 = b_{1,1}\lambda^2 + (a_{1,1} - b_{1,2})\lambda - a_{1,2} \\ h_2 = b_{2,1}\lambda^2 + (a_{2,1} - b_{2,2})\lambda - a_{2,2}; \end{cases}$$

l'équation (C) prend la forme

$$(\gamma)\qquad d\lambda = h_1\, dx_1 + h_2\, dx_2.$$

La condition d'intégrabilité, qui se réduit ici à

$$h_1 \frac{dh_2}{d\lambda} - h_2 \frac{dh_1}{d\lambda} = 0,$$

doit être vérifiée. Nous avons alors, en effectuant

$$(S)\quad \begin{cases} [(a_{1,1} - b_{1,2})b_{2,1} - (a_{2,1} - b_{2,2})b_{1,1}]\lambda^2 - 2(a_{1,2}b_{2,1} - b_{1,1}a_{2,2})\lambda \\ \qquad\qquad + (a_{1,1} - b_{1,2})a_{2,2} - (a_{1,1} - b_{2,2})a_{1,2} = 0, \end{cases}$$

équation qui détermine les deux valeurs de λ satisfaisant à la question.

Soient λ_1 et λ_2 les deux racines de cette équation et

$$(a_{1,1} + \lambda_1 b_{1,1})\, dx_1 + (a_{2,1} + \lambda_1 b_{2,1})\, dx_2 = dt_1$$

$$(a_{1,1} + \lambda_2 b_{1,1})\, dx_1 + (a_{2,1} + \lambda_2 b_{2,1})\, dx_2 = dt_2;$$

nous avons, en appelant c_1 et c_2 les constantes d'intégration,

$$y_1 + \lambda_1 y_2 = c_1 e^{t_1} \quad y_2 + \lambda_2 y_2 = c_2 e^{t_2}$$

et par suite

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2}(c_1\lambda_2 e^{t_1} - c_2\lambda_1 e^{t_2}) \\ y_2 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(c_1 e^{t_1} - c_2 e^{t_2}), \end{cases}$$

système intégrant des équations (A).

Il est facile de voir que l'équation (3) ne peut jamais avoir de racine double. En effet, introduisons dans les valeurs (Σ) de y_1 et y_2 l'hypothèse

$$\lambda_1 = \lambda + \varepsilon \quad \lambda = \lambda$$

il vient en faisant tendre ε vers zéro

$$y_1 + \lambda y_2 = 0.$$

Or la relation

$$(\mathrm{H})\quad \begin{cases} (a_{1,2}b_{2,1} - b_{1,1}a_{2,2})^2 + [(a_{1,1} - b_{1,2})a_{1,2} - (a_{2,1} - b_{2,2})a_{1,2}] \\ \qquad + [a_{1,1} - b_{1,2})b_{2,1} - (a_{2,1} - b_{2,2})b_{1,1}] = 0, \end{cases}$$

qui exprime que l'équation (3) a une racine double λ exprime aussi, comme il est facile de s'en assurer par un calcul direct, que cette valeur λ est une solution commune des équations

$$(6)\qquad h_1 = 0 \quad h_2 = 0,$$

et alors, à cause des formules (2) elle est indépendante à la fois de x_1 et de x_2.

Nous nous trouvons donc dans le cas d'une seule fonction y définie par deux équations différentielles qui se reduisent nécessairement à une seule, ce que nous n'avons pas supposé.

Il est clair aussi que l'équation (3) ne peut pas avoir de racine indépendante à la fois de x_1 et de x_2. Si l'une des racines ne contiene ni x_1, ni x_2, elle est racine commune des équations (6) et racine double de l'équation (S), nous rentrons dans le cas precedent; si les deux racines ne contiennent ni x_1 ni x_2, elles satisfont aux équations (6) et donnent

$$\text{(III)} \qquad \frac{a_{1,2}}{a_{2,2}} = \frac{a_{1,1} - b_{1,2}}{a_{2,1} - b_{2,2}} = \frac{b_{1,1}}{b_{2,1}},$$

relations qui montrent que l'équation (S) est vérifiée identiquement, ce qui est contraire à notre hypothèse.

On voit que le seul cas où la méthode puisse tomber en défaut est celui où l'équation (S) est vérifiée identiquement. Les relations (I) et (II) deviennent alors à cause des équations (III)

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{da_{2,1}}{dx_1} = \dfrac{da_{1,1}}{dx_2} & \dfrac{da_{2,2}}{dx_1} = \dfrac{da_{1,2}}{dx_2} \\[2ex] \dfrac{db_{2,1}}{dx_1} = \dfrac{db_{1,1}}{dx_2} & \dfrac{db_{2,2}}{dx_1} = \dfrac{db_{1,2}}{dx_2}. \end{array} \right.$$

Si nous mettons le système (A) sous la forme

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} dy_1 = (a_{1,1}\,dx_1 + a_{2,1}\,dx_2)\,y_1 + (a_{1,2}dx_1 + a_{2,2}\,dx_2)\,y_2 \\ dy_2 = (b_{1,1}\,dx_1 + b_{2,1}\,dx_2)\,y_1 + (b_{1,2}\,dx_1 + b_{1,2}\,dx_2)\,y_2 \end{array} \right.$$

nous voyons que les coefficients de y_1 et de y_2 sont des différentielles exactes.

L'équation (S) étant vérifiée quelque soit λ, l'est aussi pour les valeurs de λ qui ne contiennent ni x_1 ni x_2; les équations (6) ayant leurs racines indépendantes des variables s'écrivent

$$(10) \qquad a + c\lambda - b\lambda^2 = 0$$

a, b, c étant des constantes; et les équations (A) sont

$$\text{(P)} \quad \left\{ \begin{array}{l} dy_1 = [f_1(x_1, x_2)\,y_1 + aky_2]\,dx_1 + [f_2(x_1, x_2)\,y_1 + ay_2]\,dx \\ dy_2 = [bky_1 + \{f_1(x_1, x_2) + ck\}\,y_2]\,dx_1 \\ \qquad\qquad + [by_1 + \{f_2(x_1, x_2) + c\}\,y_2]\,dx_2 \end{array} \right.$$

en appelant k la valeur commune des rapports (III), $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ deux fonctions de x_1 et x_2 satisfaisant à la relation

$$\text{(V)} \qquad \frac{df_1(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_2}.$$

L'équation (3) devient alors

$$(\alpha) \ d\,\mathrm{Log}(y_1 + \lambda y_2) = f_1(x_1, x_2)\,dx_1 + f_2(x_1, x_2)\,dx_2 + \lambda b(k\,dx_1 + dx_2).$$

Soint $f(x_1, x_2)$ l'intégrale de l'expression

$$f_1(x_1, x_2)\,dx_1 + f_2(x_1, x_2)\,dx_2,$$

Δ le discriminant de l'équation (10), Γ_1 et Γ_2 deux constantes, nous avons pour intégrales des équations (P)

$$\text{(R)} \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \frac{e^{f(x_1, x_2) - \frac{c}{2}(kx_1 + x_2)}}{\sqrt{\Delta}} \left[(\sqrt{\Delta} + c)\Gamma_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(kx_1 + x_2)} + (\sqrt{\Delta} - c)\Gamma_2 e^{\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}(kx_1 + x_2)} \right] \\ y_2 &= \frac{2be^{f(x_1, x_2) - \frac{c}{2}(kx_1 + x_2)}}{\sqrt{\Delta}} \left[\Gamma_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(kx_1 + x_2)} - \Gamma_2 e^{\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}(kx_1 + x_2)} \right]. \end{aligned} \right.$$

Du reste l'équation (10) ne peut avoir ses racines égales sans que le système (P) ne contienne qu'une seule fonction y, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Si les fonctions $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ se réduisent à des constantes, nous retrouvons les systèmes que nous avons considérés dans notre note précédente. Les équations (P) se ramènent à deux équations à coefficients constants par la substitution

$$y_1 = e^{\theta f(x_1, x_2)} z_1$$

$$y_2 = e^{\theta f(x_1, x_2)} z_2$$

θ désignant une constante.

En résumé, l'intégration d'un système de deux équations simultanées aux différentielles totales et à m variables indépendantes ne dépend que de la résolution d'une équation du second degré et à l'intégration de $2m$ différentielles exactes de ces m variables.

Dans un prochain article, nous considérons les systèmes généraux de n équations à m variables indépendantes et à coefficients quelconques.

BIBLIOGRAPHIA

Henrique de Figueiredo. — *Curvas planas algebricas.* — *Coimbra, 1888.*

A theoria geral das curvas planas algebricas tem sido modernamente objecto de trabalhos notaveis, que além de estenderem o campo da Geometria, têem concorrido para progresso de muitos pontos importantes da Analyse. É d'esta theoria geral que se occupa o sr. Henrique de Figueiredo no seu opusculo, apresentado á faculdade de mathematica da universidade de Coimbra como Dissertação para o concurso a uma cadeira da mesma faculdade.

Principia o auctor por expôr algumas noções geraes sobre os dois systemas de coordenadas homogeneas conhecidas pelos nomes de *coordenadas pontos* e de *coordenadas linhas.* Passando em seguida ao assumpto especial do livro, considera successivamente os theoremas relativos á passagem de curvas algebricas por pontos dados, os pontos multiplos d'estas curvas, as suas *hesseanas,* as suas *polares;* define as noções de genero e de classe e mostra a importancia d'estas noções; apresenta as *formulas de Plücker* a que satisfazem os numeros caracteristicos de uma curva; e finalmente estuda a theoria das *curvas unicursaes,* e indica a importancia que tem a consideração d'estas curvas para o problema da integração das funcções algebricas.

E. Cesàro. — *Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazii* (*Memorias da Academia real das sciencias de Lisboa,* 1888).

Na primeira parte d'esta interessante Memoria demonstra o auctor os dois theoremas seguintes:

1.° Existem só dezoito especies de polyedros em que as faces da mesma ordem concorrem em cada vertice no mesmo numero;

2.° Existem só dezoito especies de polyedros em que os vertices da mesma ordem se acham em cada face no mesmo numero.

Deve-se observar que o auctor chama *ordem* de uma face ou de um vertice o numero de lados diminuido de duas unidades.

Na segunda parte mostra o auctor que todos os polyedros de que se occupou na primeira parte podem derivar-se uns dos outros por meio de operações muito simples, cujo estudo o leva a propôr, para os designar, uma nomenclatura simples e clara.

Na terceira parte mostra que as fórmulas empregadas na primeira parte podem levar a rêdes de rectas que satisfazem ás condições dos dois theoremas n'ella demonstrados, e estuda estas rêdes.

Finalmente na quarta parte estuda as fórmas polyedricas no espaço a *n* dimensões.

F. Casorati. — *Sopra le* coupures *del sig. Hermite, i* Querschnitte *e le superficie di Riemann et i concetti d'integrazione si reale che complessa.*

N'esta Memoria importante estuda o sabio professor da Universidade de Pavia a funcção $\Phi(z)$ definida pelo integral

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, z)\, dt$$

para lhe procurar os diversos ramos correspondentes aos differentes caminhos seguidos pela variavel t na passagem de t_0 para t_1, e para os representar por superficies de Riemann.

Principia o auctor por considerar o caso de ser $f(t, z)$ uma funcção racional de t e de z, caso estudado pelo sr. Hermite no caso de ser rectilineo o caminho seguido por t na passagem de t_0 para t_1, e que levou este grande geometra á noção de *coupure*. Mostra que cada ramo da funcção tem uma linha de discontinuidade (*coupure*), mas que a reunião de todos os ramos dá uma só funcção continua.

Estuda em seguida o caso em que $f(z, t)$ representa uma funcção irracional, isto é, uma raiz de uma equação algebrica com coefficientes racionaes relativamente a z e a t.

Finalmente estuda alguns casos em que $f(z, t)$ é uma funcção transcendente.

F. Amorétti e C. Morales. — *Teoria elemental de las determinantes.* — *Buenos Ayres, 1888.*

Esta obra, como outra sobre a theoria dos quaterniões, de que se deu noticia no volume anterior d'este jornal, mostra o desenvolvimento que vai tomando o ensino das mathematicas puras na Universidade de Buenos Ayres, o que é devido principalmente á iniciativa do professor na mesma Universidade, sr. dr. Valentin Balbin. Contém ella o curso feito por este illustre professor no anno de 1884 e é redigida por dois dos seus discipulos, os srs. engenheiros F. Amorétti e C. Morales.

No livro primeiro tractam os auctores da theoria geral dos determinantes. Ahi são estudadas as propriedades fundamentaes dos determinantes, as regras para os calcular, as operações a que se sujeitam, etc.

No livro segundo, o mais interessante da obra, consideram os auctores os determinantes de fórma especial, estudando successivamente os determinantes reciprocos, os determinantes symetricos, os determinantes multiplos, os circulantes, os alternantes, os continuantes e os determinantes funccionaes.

Finalmente no livro terceiro vêem as applicações analyticas da theoria dos determinantes á resolução dos systemas de equações do primeiro grão, á theoria da eliminação entre equações algebricas de qualquer grão, etc., e algumas applicações a questões de Geometria elementar.

Ph. Gilbert. — *Sur la convergence des intégrales à limites infinis* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2.ᵉ série, t. XII).

N'este bello artigo apresenta o auctor exemplos de integraes definidos da fórma

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

que têem valores finitos sem que $f(x)$ tenda para zero quando x tende para o infinito, ou mude indefinidamente de signal.

Apresenta como primeiro exemplo o integral

$$\int_0^\infty (\mathrm{sen}^2 \pi x)^{\varphi(x)}\,dx,$$

onde $\varphi(x)$ representa uma funcção positiva, crescente com x a partir de um valor determinado de x, e tal que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < 1.$$

Considera em seguida o integral

$$\int_0^\infty \psi(x)(\text{sen}^2 \pi x)^{\varphi(x)} dx,$$

onde $\psi(x)$ é uma funcção positiva de x tal que

$$\int^1 \psi(n+x)^2 dx$$

não póde exceder um valor fixo qualquer que seja n. Mostra que este integral é finito, e partindo d'elle chega a este resultado interessante: É possivel determinar a funcção $f(x)$ de tal modo que, conservando-se positiva e tornando-se infinita um numero de vezes tão grande quanto se queira no mais pequeno intervallo dado, a partir de um valor convenientemente escolhido de x, o integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ seja todavia finito e determinado.

D. S. Archilla y Espejo e D. G. Vicuña. — *Discursos leidos ante la real Academia de Ciencias.* — *Madrid, 1888.*

Contém este opusculo os bellos discursos pronunciados pelos srs. Archilla e Vicuña perante a Academia das Sciencias de Madrid na recepção solemne do primeiro d'estes distinctos mathematicos.

Foi o sr. Archilla procurar á Analyse infinitesimal, de que é professor na Universidade de Madrid, o assumpto para o seu discurso, tomando para thema d'elle o modo de conceber esta analyse.

Referindo-se primeiro aos methodos empregados para resolver as questões de Geometria infinitesimal antes da descoberta do Calculo infinitesimal, expõe e examina o methodo empregado por

Archimedes, o maior geometra da antiguidade, que, como o auctor diz, creou a maior parte das noções fundamentaes que deram origem e serviram de base a este calculo; e em seguida o methodo dos indivisiveis de Cavalieri, no qual apparece a applicação immediata da noção de infinitamente pequena a resolução das questões mathematicas.

Occupa-se depois da descoberta do Calculo infinitesimal por Newton e Leibnitz e analysa os modos como estes grandes sabios concebiam este calculo. Segue-se a apreciação dos conceitos que do mesmo calculo faziam Euler, Lagrange, Carnot e Cauchy, demorando-se principalmente na referencia a este ultimo, cujo modo de vêr adopta.

Na resposta ao discurso anterior, o sr. Vicuña, depois de apreciar as altas qualidades do novo academico, occupa-se em indicar as obras escriptas em Hespanha, em que se estuda a analyse infinitesimal, ou em que se faz uso d'esta analyse.

Em seguida aprecia o discurso do sr. Archilla e a obra importante intitulada: *Estudios fundamentales del Calculo diferencial,* onde este illustre professor expõe desenvolvidamente o mesmo assumpto cuja parte philosophica condensa no seu discurso.

G. Tarry. — *Essai sur la Géométrie des figures imaginaires* (*Association française pour l'avancement des sciences,* 1887).

O auctor considera o ponto imaginario como determinado por dois pontos, um ponto origem A e um ponto extremo A′ representando um papel differente do primeiro. Representa o ponto imaginario pelo signal $A\underline{A'}$. O ponto $A\underline{A}$ é o ponto real. A posição que toma o ponto A′ depois de descrever uma circumferencia em roda de A chama posição exterior do ponto $A\underline{A'}$.

Para definir a recta imaginaria o auctor corta por uma transversal tres rectas que passam por um ponto fixo, o que dá tres pontos A, B, C. Construe em seguida um ponto $P\underline{P'}$ determinado pela relação $(\alpha ABC) = K_\lambda$, onde α representa a posição exterior do ponto $P\underline{P'}$ e (αABC) uma quantidade complexa determinada pela razão $\frac{\alpha B}{\alpha C} : \frac{AB}{AC} = K$ e pelo angulo $(C\alpha B - CAB = \gamma)$. Fazendo variar a transversal, o ponto $\overline{PP'}$ descreve uma recta real quando $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm \pi$, e um logar geometrico que o sr. Tarry chama recta imaginaria, nos outros casos.

Na interessante Memoria a que nos estamos referindo, o auctor apresenta uma serie de propriedades dos pontos e rectas imaginarias para justificar a importancia da nova representação dos imaginarios.

M. Lerch. — *Sur une formule d'Arithmétique* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2^e^ série, t. XII).
——— *Théorèmes d'Arithmétique (Item).*

Referem-se á Arithmetica superior estes dois bellos artigos.

No primeiro o auctor demonstra a fórmula seguinte:

$$\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} [\psi(m-\sigma a, k+\sigma-1) - \chi(m-\sigma a, a)]$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{k-1} [\psi(m+\lambda a, \lambda-1) - \chi(m+\lambda a, a)] = 0,$$

onde $\psi(p, q)$ representa o numero de divisores de p superiores a q, $\chi(p, q)$ o numero de divisores de p eguaes ou inferiores a q, e a, m e k numeros positivos dos quaes o ultimo é superior á unidade. D'esta fórmula tira o auctor algumas consequencias interessantes.

No segundo artigo apresenta o auctor a fórmula notavel

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m+\alpha n, \alpha) - \psi(m+\alpha n, a)] = \varphi(a, n)$$

onde $\varphi(a, n)$ representa o numero de termos da serie $1, 2, 3, \ldots, a$ que são primos com n, e m um numero primo com n.

Pondo n'esta fórmula $a = n$ ou $n-1$ obtem o sr. Lerch duas relações que ligam a funcção $\varphi(n)$ de Euler e Gauss com a funcção $\psi(p, q)$.

M. d'Ocagne. — *Quelques propriétés de l'ellipse; déviation, écart normal* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ème série, t. VII).

N'este artigo estuda o auctor a correlação geometrica que existe entre o angulo que a tangente á ellipse em cada ponto faz com a tangente correspondente ao circulo principal, e a anomalia excentrica; e a correlação geometrica que existe entre a inclinação da normal sobre o diametro correspondente e a mesma anomalia, o que o leva a uma serie de theoremas interessantes relativos á ellipse.

A. Lugli. — *Sul numero dei numeri primi da* 1 *ad* n (*Giornale di Matematiche*, t. XXVI).

N'este artigo interessante apresenta o auctor um methodo mais simples do que os methodos de Legendre e Meissel para determinar o numero de numeros primos comprehendidos entre 1 e um inteiro qualquer *n*.

Ed. Weyr. — *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec* n *unités principales* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. XI).

M. Lerch. — *Uber Functionem mit beschränktem Existenzbereich* (*Abhandlungen der K. böhmischen Gesellschaft der Wischenschaften*, 1888).

— *Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 103).

M. d'Ocagne. — *Sur les cordes communes à une conique et à un cercle de rayon nul; Application à la théorie géométrique des foyers dans les coniques* (*Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, t. V).

— *Sur les invariants des formes binaires* (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 1888).

E. Cesàro. — *Sur deux classes remarquables de lignes planes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ème série, t. VII).

——— *Sur les lois asymptotiques des nombres* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lencei*, 1888).

——— *Sur les systèmes de nombres entiers* (*Item*).

S. Pincherle. — *Sur une généralisation des fonctions eulériennes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1888).

R. Guimarães. — *Semelhança e rectificação dos arcos ellipticos.*— *Porto, 1887*).

Do excellente jornal *Mathesis* (t. VIII, pag. 137) extrahimos a seguinte noticia a respeito d'este opusculo:

«Este interessante trabalho tracta primeiro da associação, e em seguida da rectificação dos arcos ellipticos. Dois arcos são associados, se a sua differença é rectificavel. Dois pontos M e N d'uma ellipse são associados se as normaes á curva n'estes pontos estão egualmente affastadas do centro. Se A e B são os vertices da ellipse, AM e BN são dois arcos associados, e tem-se a egualdade

$$\mathrm{AM} - \mathrm{BN} = \frac{k^2}{a} x_1 x_2 = p,$$

que é a traducção do theorema de Fagnano. O auctor dá duas outras demonstrações d'este celebre theorema; a ultima é uma bella applicação do methodo de que se serviu Talbot para deduzir um grande numero de fórmulas analogas ás de Fagnano. No terceiro paragrapho encontram-se os theoremas de Graves e de Mac-Cullagh, que dão arcos de differença rectificavel sem que seja necessario que os arcos se terminem nos vertices da ellipse; citemos tambem uma generalisação da relação

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\psi) - \mathrm{E}(\mu) = ak^2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\mu,$$

se

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\psi) - \mathrm{E}(\mu) = 0.$$

«A segunda parte d'este trabalho comprehende tambem tres paragraphos. No primeiro o auctor demonstra que existe, sobre um quadrante elliptico, uma infinidade de arcos rectificaveis por meio de rectas, e dá a relação que deve existir entre as coordenadas das extremidades d'estes arcos. D'este theorema conclue que existe uma infinidade de valores para os limites de um integral elliptico de segunda especie, que tornam este integral exprimivel algebricamente. O segundo paragrapho é consagrado ás indagações sobre os limites superiores e inferiores do perimetro E da ellipse. O auctor reproduz a demonstração do theorema

$$\pi(a+b) < E < \pi\sqrt{2a^2+2b^2},$$

dada pelo sr. Mister, assim como a substancia dos artigos dos srs. Barbarin e Mansion sobre os valores approximados de E.

«No ultimo paragrapho o auctor estabelece a impossibilidade de rectificar, de um modo geral, um arco elliptico, e procura a equação da envolvente da ellipse.»

G. T.

ERRATAS

Pag. 116, linh. 5 — em logar de *necessaria para a convergencia* deve ler-se *sufficiente para a divergencia.*

Pag. 116, linh. 7 — deve supprimir-se *differente de.*

Pag. 116, linh. 11 — deve escrever-se *lim* antes do primeiro membro.

Pag. 117, linh. 11 — em logar de $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right)$ deve ler-se $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$.

INDICE