$$lim\, u = lim\, (Y - ax) = b + lim\, F\,(x, y) = b\,;$$

e vê-se portanto que, para determinar a, basta substituir Y por zx na equação proposta e procurar depois o limite para que tende z quando x tende para o infinito; e que, para determinar b, basta substituir Y por $ax + u$ na equação proposta (ou z por $a + \frac{u}{x}$ na primeira transformada) e procurar depois o limite para que tende u quando x tende para o infinito.

A equação de qualquer asymptota parallela ao eixo das ordenadas é $x = \alpha$, onde α representa evidentemente o limite para que tende a abscissa do ramo da curva considerado quando y tende para o infinito.

Exemplo. — Para determinar as asymptotas da hyperbole

$$\alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2 = - \alpha^2 \beta^2$$

ponhamos $y = zx$, o que dá

$$\alpha^2 z^2 - \beta^2 = - \frac{\alpha^2 \beta^2}{x^2},$$

e portanto

$$\alpha^2 (lim\ z)^2 - \beta^2 = 0,$$

ou

$$a = lim\, z = \pm \frac{\beta}{\alpha}.$$

Pondo em seguida $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x + u$, vem a equação

$$u \left(\frac{u}{x} \pm 2 \frac{\beta}{\alpha} \right) = - \frac{\beta^2}{x},$$

que, fazendo $x = \infty$, dá $lim\ u = 0$; portanto $b = 0$.

Logo as equações das asymptotas da hyperbole são

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x.$$

88. — *Curvatura.* — Chama-se *curvatura média d'um arco de curva* comprehendido entre os pontos (x, y) e $(x + h, y + k)$ a razão entre o angulo formado pelas tangentes ás extremidades do arco e o comprimento do arco.

Chama-se *curvatura da curva no ponto* (x, y) o limite para que tende a razão precedente quando o arco tende para zero.

Seja $y = f(x)$ a equação da curva em coordenadas rectangulares, θ o angulo das tangentes nas extremidades do arco e l o comprimento do arco; a curvatura no ponto (x, y) será igual a $lim \frac{\theta}{l}$, e vamos determinal-a em funcção das coordenadas do ponto.

Por serem $f'(x)$ e $f'(x + h)$ os coefficientes angulares das tangentes, a applicação d'uma formula bem conhecida de Geometria Analytica dará

$$\operatorname{tang} \theta = \pm \frac{f'(x + h) - f'(x)}{1 + f'(x) \cdot f'(x + h)},$$

d'onde se deduz (n.º 53)

$$\frac{\operatorname{tang} \theta}{h} = \pm \frac{f''(x) + \varepsilon}{1 + f'(x) \cdot f'(x + h)}.$$

Por outra parte, por ser (n.º 53) $\lim \frac{l}{ds} = 1$, temos (n.º 81 — II)

$$\lim \frac{h}{l} = \lim \frac{h}{ds} = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \lim \frac{\theta}{\operatorname{tang} \theta} = 1,$$

e

$$\lim \frac{\theta}{l} = \lim \frac{\theta}{\operatorname{tang} \theta} \cdot \lim \frac{\operatorname{tang} \theta}{h} \cdot \lim \frac{h}{l}.$$

Logo virá

$$curvatura = \lim \frac{\theta}{l} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$(3) \qquad curvatura = \frac{1}{R}, \; R = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

onde se deve empregar aquelle dos signaes a que corresponde um valor positivo de R.

I — Applicando a formula precedente á circumferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

vem $R = r$, e portanto a curvatura da circumferencia é constante e inversa do raio.

Vê-se pois que, se pelo ponto (x, y) da curva dada fizermos passar uma circumferencia cujo centro esteja sobre a normal á curva n'este ponto, do lado para onde ella volta a concavidade, e cujo raio seja igual a R, esta circumferencia é tangente á curva e tem em toda a sua extensão a mesma curvatura que a curva considerada tem no ponto (x, y). Ao circulo assim obtido dá-se o nome de *circulo de curvatura da curva* no ponto (x, y). E' facil obter as coordenadas (x_1, y_1) do centro d'este circulo, que se chama *centro de curvatura*.

Com effeito, por ser R o raio d'este circulo, temos

$$(4) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2};$$

e por estar o seu centro sobre a normal á curva no ponto (x, y), temos

$$(5) \qquad x_1 - x = - y'(y_1 - y).$$

Eliminando x_1 e y_1 entre estas equações obtêem-se as formulas

$$x_1 = x \mp y' \frac{1+y'^2}{y''}, \; y_1 = y \pm \frac{1+y'^2}{y''}$$

que dão as coordenadas não só do centro de curvatura, collocado do lado da concavidade, mas tambem as do centro do circulo tangente igual, collocado do lado da convexidade. Para distinguir quaes dos signaes das formulas precedentes correspondem ao centro de curvatura, basta comparal-as com as formulas (2) do n.° 85 que dão o ponto (X, Y) collocado do lado da concavidade. Vê-se assim que as coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas formulas:

$$(6) \qquad x_1 = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

D'esta comparação conclue-se tambem, attendendo ao que se disse no n.º 85 — II, que *o centro da curvatura de curva no ponto* (x, y) *é o limite para que tende a intersecção da normal á curva no ponto considerado com a normal n'um ponto infinitamente proximo, quando o segundo ponto tende para o primeiro.*

II — Se em logar da variavel independente x quizermos empregar outra variavel t ligada com x por uma relação dada, transformaremos as formulas (3) e (6) por meio das formulas (1) do n.º 83, e teremos

$$x_1 = x + \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{y'x'' - x'y''}, \quad y_1 = y - \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{y'x'' - x'y''}, \quad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'x'' - x'y''}$$

onde x' e y' representam agora as derivadas de x e y relativamente a t. No exemplo do n.º 83 vem a expressão de R em coordenadas polares.

III — A cada ponto (x, y) da curva proposta corresponde um centro de curvatura. Quando o ponto (x, y) descreve a curva proposta, o centro de curvatura descreve uma curva cuja equação se acha eliminando x e y entre as equações (6) e a equação proposta. A esta curva dá-se o nome de *evoluta* da curva proposta (que se chama *evolvente*), e a respeito d'ella demonstraremos as duas proposições importantes seguintes:

1.º — *A normal a uma curva dada no ponto* (x, y) *é tangente á sua evoluta no ponto* (x_1, y_1) *correspondente.*

Com effeito, differenciando as equações (6), considerando y, x_1 e y_1 como funcções de x, vem

$$dx_1 = dx - (1 + y'^2)\,dx - y'd\,\frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$dy_1 = y'\,dx + d\,\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

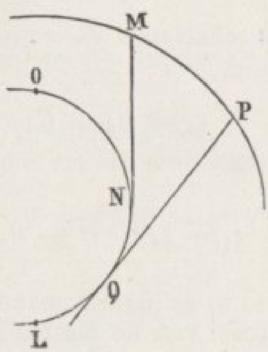
Multiplicando a segunda d'estas equações por y' e sommando o resultado com a primeira, obtem-se a equação

$$(7) \qquad y' \frac{dy_1}{dx_1} + 1 = 0$$

que, por ser y' o coefficiente angular da tangente á curva proposta no ponto (x, y) e $\frac{dy_1}{dx_1}$ o coefficiente angular da tangente á evoluta no ponto (x_1, y_1) correspondente, mostra que estas duas linhas são perpendiculares.

2.° — *A differença entre os raios de curvatura correspondentes a dous pontos de uma curva dada é igual ao comprimento do arco da evoluta comprehendido entre os seus respectivos centros de curvatura, quando entre os dous pontos o raio de curvatura cresce ou decresce sempre.*

Seja MP o arco da curva considerada, NQ o arco correspondente da evoluta e O um ponto fixo a partir do qual se



contam os comprimentos dos arcos da evoluta. Chamando s_1 o comprimento do arco OQ, teremos:

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2.$$

Differenciando a equação (4), considerando x como variavel independente e y, x_1 e y_1 como funcções de x, e attendendo á equação (5), vem

$$(x - x_1)\, dx_1 + (y - y_1)\, dy_1 = - RdR.$$

A equação (7) dá tambem, attendendo a (5),

$$(x - x_1)\, dy_1 - (y - y_1)\, dx_1 = 0.$$

Elevando ao quadrado os dous membros das equações precedentes e sommando, vem

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

Temos pois

$$\frac{ds_1}{dx} = \pm \frac{dR}{dx},$$

onde se deve empregar o signal + ou — segundo o raio R cresce ou diminue com s_1 no intervallo considerado (n.° 61).

No primeiro caso (o da figura) temos (n.° 62 th. 3.°—2.°)

$$s_1 = R + C,$$

e do mesmo modo, chamando R_0 o raio MN e s_0 o comprimento do arco ON,

$$s_0 = R_0 + C;$$

e portanto

$$s_1 - s_0 = R - R_0.$$

No segundo caso (o da figura quando se toma o ponto L para origem dos arcos) vem do mesmo modo

$$s_0 - s_1 = R - R_0.$$

89. — Exemplos. — **I** — Consideremos primeiro a parabola cuja equação é

$$y^2 = 2px.$$

1) A equação da tangente no ponto (x, y) é

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x).$$

2) As expressões da subtangente, da subnormal e da normal são

$$subt = 2x,\ subn = p,\ norm = N = \sqrt{2px + p^2}.$$

3) As formulas (3) e (6) dão as expressões do raio de curvatura e das coordenadas do centro de curvatura:

$$R = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{(2px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N^3}{p^2},$$

$$x_1 = x + \frac{p^2 + y^2}{p} = 3x + p,$$

$$y_1 = y - \frac{(p^2 + y^2)\,y}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

4) Eliminando x e y entre as duas ultimas equações e a da parabola, vem a equação da evoluta:

$$y_1^2 = \frac{8}{27p}(x_1 - p)^3,$$

que representa uma parabola cubica.

II — Consideremos em segundo logar a ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Temos

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y},\ y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

e portanto:

1) A equação da tangente é

$$Y - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(X - x).$$

2) A expressão da normal definida é

$$N = \sqrt{\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}}.$$

Do mesmo modo se acha a subtangente, subnormal, etc.

3) A expressão que dá o raio de curvatura é

$$R = \frac{\left(\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2}} = \frac{N^3}{p^2},$$

$2p$ representando o parametro.

Mudando b em $b\sqrt{-1}$ vê-se que esta expressão de R tem tambem logar no caso da hyperbole. Comparando-a com a expressão do raio de curvatura da parabola, conclue-se que em todas as secções conicas o raio de curvatura é igual ao cubo da normal dividido pelo quadrado do semiparametro.

As coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas formulas:

$$x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4},\ y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

pondo $c^2 = a^2 - b^2$.

4) A equação da evoluta acha-se eliminando x e y entre as ultimas equações e a da ellipse, o que dá

$$\left(\frac{by_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ax_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Como esta equação não se altera pela mudança de x_1 em $-x_1$ e de y_1 em $-y_1$, vê-se que a curva é composta de quatro ramos iguaes, symetricos relativamente aos eixos coordenados. Basta portanto para conhecer a sua fórma discutir o ramo correspondente ás coordenadas positivas, para o que se deve attender á equação da curva e ás igualdades:

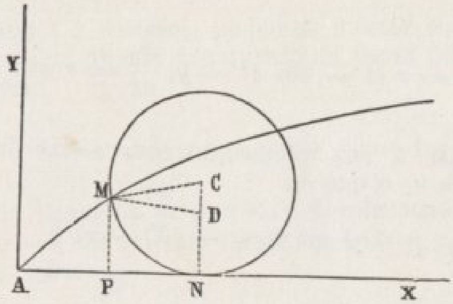
$$y'_1 = -\left(\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)^{\frac{1}{3}},\ y''_1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{y'_1 x_1 - y_1}{x_1^2}\right).$$

1.° — A curva corta o eixo das abscissas positivas no ponto $\left(+\frac{c^2}{a},\ 0\right)$ e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y'_1 = 0$.

2.° — Quando x_1 diminue, y_1 augmenta, e a curva affastase do eixo das abscissas conservando sempre a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, visto que y''_1 é positivo.

3.° — A curva corta o eixo das ordenadas positivas no ponto $\left(0\,,\,\frac{c^2}{b}\right)$ e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y'_1 = \infty$.

4.° — Quando o valor absoluto de x_1 é maior de que $\frac{c^2}{a}$, y_1 é imaginario. Logo a estes valores de x_1 não correspondem pontos da curva. Do mesmo modo aos valores de y_1 maiores do que $\frac{c^2}{b}$ não correspondem pontos da curva.



III — Chama-se *cycloide* a curva gerada pelo ponto M de uma circumferencia que róla sem escorregar sobre uma recta dada.

Seja M um ponto da curva, C a posição correspondente do centro do circulo gerador, r o raio d'este circulo, A o ponto de partida de M, que tomaremos para origem das coordenadas, AN a recta dada que tomaremos para eixo das abscissas, e MD uma parallela a esta recta.

Para achar a equação da curva exprimamos as coordenadas de um ponto qualquer M em funcção do angulo MCN, que chamaremos t. Para isso notemos que é por definição

$$AN = MN = rt,$$

e portanto teremos

$$x = AN - PN = r\,(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = CN - CD = r\,(1 - \cos t).$$

Estas duas equações dariam, pela eliminação de t, a equação da curva, mas vamos discutil-a sem fazer esta eliminação.

1) A equação da normal

$$y'\,(Y - y) = -\,(X - x)$$

dá, tomando t para variavel independente,

$$\frac{dy}{dt}\,(Y - y) = -\,(X - x)\,\frac{dx}{dt},$$

onde é

$$\frac{dx}{dt} = r\,(1 - \cos t) = y,\ \frac{dy}{dt} = r \operatorname{sen} t.$$

Para achar a sua intersecção com o eixo das abscissas façamos $Y = 0$, o que dá

$$-\,ry \operatorname{sen} t = -\,(X - x)\,y$$

e portanto

$$X = x + r \operatorname{sen} t = AN.$$

Logo *a normal á cycloide n'um ponto dado passa pelo ponto onde o circulo gerador correspondente toca a recta sobre que gyra.*

2) O valor da normal definida é dada pela formula

$$N^2 = y^2 + PN^2 = y^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 t$$

e vem portanto

$$N = r\sqrt{2\,(1 - \cos t)} = 2r \operatorname{sen} \frac{t}{2}.$$

3) As formulas do n.º 88 — II dão, tomando t para variavel independente, as expressões do raio de curvatura e do centro de curvatura. Para isso basta substituir n'essas formulas x', y', x'', y'' pelos valores seguintes:

$$x' = r(1 - \cos t),\ x'' = r \operatorname{sen} t$$

$$y' = r \operatorname{sen} t,\ y'' = r \cos t,$$

e teremos a expressão do raio de curvatura

$$R = 2r\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2N,$$

que mostra que *o raio de curvatura é igual ao dobro da normal*; e as coordenadas do centro de curvatura

$$x_1 = r(t + \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(-1 + \cos t).$$

Estas equações dão, pela eliminação de t, a equação da evoluta da cycloide.

4) Como t é variavel, podemos n'estas equações mudar t em $t + \pi$ sem alterar a natureza da curva que ellas representam, e vem

$$x_1 = r(t + \pi - \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(-1 - \cos t).$$

Mudando depois a origem das coordenadas para o ponto $(\pi r, -2r)$, isto é, mudando x_1 em $x_1 + \pi r$ e y_1 em $y_1 - 2r$, vêem as equações:

$$x_1 = r(t - \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(1 - \cos t),$$

d'onde se conclue que *a evoluta da cycloide é outra cycloide igual á primeira, cujo vertice está no ponto* $(\pi r, -2r)$ *e cujo circulo gerador gyra sobre uma recta parallela áquella sobre que gyra o circulo gerador da cycloide proposta.*

II

Curvas no espaço

90. — *Tangentes e normaes.* — Consideremos a curva representada pelas equações

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

I — *A tangente* a esta curva no ponto (x, y, z) define-se, como no caso das curvas planas, como limite das posições da secante que passa pelo (x, y, z) e pelo ponto infinitamente proximo $(x + h, y + k, z + l)$.

Como a secante é uma recta que passa pelos dous pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$ as suas equações são (chamando X, Y, Z as suas coordenadas correntes)

$$Y - y = \frac{k}{h}(X - x)$$

$$Z - z = \frac{l}{h}(X - x);$$

e portanto as equações da tangente serão

$$(2) \qquad \begin{cases} Y - y = \dfrac{dy}{dx}(X - x) \\ Z - z = \dfrac{dz}{dx}(X - x). \end{cases}$$

As derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ devem ser tiradas das equações da curva.

II — Os cosenos dos angulos α, β, γ formados pela tangente á curva no ponto (x, y, z) com os eixos coordenados rectangulares são, em virtude de formulas bem conhecidas da Geometria Analytica,

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dx}{ds} \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dy}{ds} \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dz}{ds}. \end{cases}$$

III — Chama-se *plano normal á curva* no ponto (x, y, z) o plano que passa por este ponto perpendicularmente á tangente.

Applicando as formulas conhecidas de Geometria Analytica que dão a equação do plano perpendicular a uma recta dada, vem, suppondo as coordenadas rectangulares,

$$(4)\qquad X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) + \frac{dz}{dx}(Z - z) = 0$$

onde X, Y e Z representam as coordenadas correntes do plano.

Chama-se *normal á curva* no ponto (x, y, z) toda a recta que passa por este ponto e existe no plano normal.

IV — Chama-se *plano tangente á curva* no ponto (x, y, z) todo o plano que passa pela tangente á curva n'este ponto. Entre estes planos vamos especialmente considerar aquelle para que tende o plano que passa por esta tangente e por uma parallela á tangente á curva no ponto $(x + h, y + k, z + l)$, infinitamente proximo do ponto (x, y, z), quando aquelle ponto tende para este.

Por serem y e z funcções de x, podemos pôr

$$y = \varphi(x),\ z = \psi(x).$$

A equação geral do plano que passa pelo ponto (x, y, z) é

$$X - x = A(Y - y) + B(Z - z),$$

onde A e B são constantes arbitrarias. Vamos determinal-as pelas condições de o plano passar pela tangente

$$Y - y = \varphi'(x)(X - x), \quad Z - z = \psi'(x)(X - x),$$

e pela recta

$$Y - y = \varphi'(x + h)(X - x), \quad Z - z = \psi'(x + h)(X - x),$$

tirada pelo ponto (x, y, z) parallelamente á tangente no ponto $(x + h, y + k, z + l)$ infinitamente proximo do primeiro. Estas condições são:

$$A\,\varphi'(x) + B\,\psi'(x) = 1$$

$$A\,\varphi'(x + h) + B\,\psi'(x + h) = 1,$$

ou (n.° 52)

$$A\,\varphi'(x) + B\,\psi'(x) = 1$$

$$A\,\varphi''(x) + B\,\psi''(x) + A\,\varepsilon + B\,\varepsilon_1 = 0,$$

onde ε e ε_1 representam quantidades infinitamente pequenas com h.

Tirando d'ellas os valores de A e B, substituindo-os na equação do plano e fazendo tender h para zero, vem a equação

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi''(x)(Z - z) = {} & [\psi'(x)\,\varphi''(x) - \varphi'(x)\,\psi''(x)](X - x) \\ & + \psi''(x)(Y - y), \end{aligned} \right.$$

que representa o plano procurado. A este plano dá-se o nome de *plano osculador da curva* no ponto (x, y, z).

A' equação (5) póde dar-se uma fórma mais symetrica tomando para variavel independente uma nova variavel t ligada com x, y e z por uma equação dada. Chamando x', y' e z' as derivadas de x, y e z relativamente a t, as formulas do n.° 83 dão as relações

$$\varphi'(x) = \frac{y'}{x'}, \quad \psi'(x) = \frac{z'}{x'}, \quad \varphi''(x) = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \text{ etc.}$$

que transformam a equação (5) na seguinte:

$$(6)\quad (z' y'' - y' z'')(X - x) + (x' z'' - z' x'')(Y - y) + (y' x'' - x' y'')(Z - z) = 0.$$

91. — *Curvatura e torsão.* — Consideremos uma curva no espaço, e supponhamos que tomamos para variavel independente uma variavel t, de modo que as coordenadas da curva se exprimam em funcção d'esta variavel por meio das equações:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \pi(t).$$

Se pelo ponto (x, y, z) fizermos passar uma recta n'uma direcção determinada, de modo que, chamando a, b e c os cosenos dos angulos formados por ella com os eixos coordenados, seja

$$a = f_1(t),\ b = f_2(t),\ c = f_3(t);$$

os cosenos a', b', c' dos angulos formados com os mesmos eixos pela recta correspondente que passa pelo ponto infinitamente proximo $(x + h, y + k, z + l)$ serão dados (n.º 53) pelas formulas:

$$a' = f_1(t + dt) = f_1(t) + dt\,[f'_1(t) + \varepsilon_1]$$

$$b' = f_2(t) + dt\,[f'_2(t) + \varepsilon_2]$$

$$c' = f_3(t) + dt\,[f'_3(t) + \varepsilon_3]$$

onde ε_1, ε_2 e ε_3 são quantidades infinitamente pequenas com dt.

Posto isto, procuremos o limite para que tende a razão do angulo formado pelas duas rectas para o comprimento do arco comprehendido entre os pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$, quando o segundo ponto tende para o primeiro.

Chamando θ o angulo formado pelas duas rectas, temos

$$\cos\theta = aa' + bb' + cc',$$

d'onde se deduz

$$\operatorname{sen}\theta = [(cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo n'esta formula os valores de a', b', c' achados precedentemente, representando para brevidade $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ por f_1, f_2 e f_3, e attendendo ao primeiro principio do n.º 57, vem

$$\lim \frac{\theta}{ds} = \lim \frac{\operatorname{sen} \theta}{ds}$$

$$= \frac{[(f_3 f'_2 - f_2 f'_3)^2 + (f_1 f'_3 - f_3 f'_1)^2 + (f_2 f'_1 - f_1 f'_2)^2]^{\frac{1}{2}}}{\frac{ds}{dt}}.$$

I — Supponhamos que as linhas dadas são as tangentes á curva nos pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$, de modo que (n.º 90 — II)

$$a = f_1(t) = \frac{x'}{s'},\ b = f_2(t) = \frac{y'}{s'},\ c = f_3(t) = \frac{z'}{s'},$$

representando por s', x', y', z', x'', y'', etc. as derivadas de s, x, y, z relativamente a t. Teremos

$$f'_1 = \frac{x'' s' - s'' x'}{s'^2},\ f'_2 = \frac{y'' s' - s'' y'}{s'^2},\ f'_3 = \frac{z'' s' - s'' z'}{s'^2},$$

e (n.º 81)

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Logo, chamando ω o angulo formado pelas duas tangentes infinitamente proximas, virá,

$$\lim \frac{\omega}{ds} = \frac{[(z' y'' - y' z'')^2 + (x' z'' - z' x'')^2 + (y' x'' - x' y'')^2]^{\frac{1}{2}}}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{s'^3},$$

pondo

$$A = z' y'' - y' z'',\quad B = x' z'' - z' x'',\quad C = y' x'' - x' y''.$$

Ao limite, dado por esta formula, para que tende a razão do angulo formado pelas tangentes á curva dada nos pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$ para o comprimento do arco comprehendido entre estes pontos dá-se o nome de *curvatura da curva no ponto* (x, y, z); a ω dá-se o nome de *angulo de contingencia*; e a $\lim \frac{ds}{\omega}$ dá-se o nome de *raio de curvatura*. Esta formnla contém evidentemente a formula dada no n.° 88 para as curvas planas.

II — Supponhamos agora que as linhas dadas são as perpendiculares ao plano osculador.

A equação d'este plano é (n.° 90 — IV)

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

e, em virtude de formulas bem conhecidas de Geometria Analytica, temos

$$a = f_1(t) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$b = f_2(t) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$c = f_3(t) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Estas formulas dão

$$f_3 f'_2 - f_2 f'_3 = \frac{CB' - BC'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$f_1 f'_3 - f_3 f'_1 = \frac{AC' - CA'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$f_2 f'_1 - f_1 f'_2 = \frac{BA' - AB'}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Logo, chamando τ o angulo formado pelas perpendiculares aos planos osculadores infinitamente proximos, temos a formula

$$\lim \frac{\tau}{ds} = \frac{[(CB' - BC')^2 + (AC' - CA')^2 + (BA' - AB')^2]^{\frac{1}{2}}}{(A^2 + B^2 + C^2)\, s'}.$$

Pondo em logar de A, B, C e s' os seus valores e notando que é

$$CB' - BC' = Dx',\ AC' - CA' = Dy',\ BA' - AB' = Dz',$$

onde

$$D = Ax''' + By''' + Cz''',$$

vem emfim

$$(8) \qquad \lim \frac{\tau}{ds} = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Ao limite, dado pela formula precedente, para que tende a razão do angulo formado pelos planos osculadores nos pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$ para o comprimento do arco comprehendido entre estes dous pontos dá-se o nome de *torsão da curva no ponto* (x, y, z); ao angulo τ dá-se o nome de angulo de torsão e ao $\lim \frac{ds}{\tau}$ dá-se o nome de *raio de torsão*.

Exemplo. — Consideremos a *helice*, gerada por um ponto que se move sobre a superficie d'um cylindro recto de base circular, de modo que a sua distancia á base seja proporcional ao comprimento do arco da base comprehendido entre um ponto fixo e o pé da generatriz do cylindro que passa pelo ponto gerador.

Tomando o centro da base para origem das coordenadas, o eixo do cylindro para eixo dos z, e chamando ρ o raio da base, as equações da curva são:

$$x = \rho \cos t,\ y = \rho\, \mathrm{sen}\, t,\ z = at,$$

que dão

$$x' = -\rho \operatorname{sen} t,\ x'' = -\rho \cos t,\ x''' = \rho \operatorname{sen} t,$$
$$y' = \rho \cos t,\ y'' = -\rho \operatorname{sen} t,\ y''' = -\rho \cos t,$$
$$z' = a,\ z'' = 0,\ z''' = 0.$$

Logo temos as formulas

$$\lim \frac{\omega}{ds} = \frac{\rho}{\rho^2 + a^2},\quad \lim \frac{\tau}{ds} = \frac{a}{\rho^2 + a^2},$$

que dão a curvatura e a torsão da helice traçada na superficie do cylindro considerado.

Vê-se por estas formulas que a *curvatura e a torsão da helice traçada sobre um cylindro de base circular são constantes.*

III

Superficies

92. — *Plano tangente. Normal.* — **I** — Seja $z = f(x, y)$ a equação d'uma superficie dada, e pelo ponto (x, y, z) tracemos uma curva qualquer sobre a superficie, cujas equações sejam a equação proposta e a equação $\varphi(x, y, z) = 0$. Em virtude do que se disse no n.º 90 — I acha-se as equações da tangente a esta curva eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ entre as equações

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),\ Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

o que leva a duas equações, uma das quaes é

$$(9)\qquad Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y).$$

Esta equação pertence a um plano, e é independente da equação $\varphi(x, y, z) = 0$; portanto *todas as tangentes ás curvas traçadas n'uma superficie, que passam pelo ponto* (x, y, z), *estão assentes sobre um plano*. A este plano dá-se o nome de *plano tangente á superficie* no ponto (x, y, z).

As derivadas $\frac{\partial z}{\partial z}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ obtêem-se derivando a equação da superficie proposta, que póde ser explicita ou implicita. Se a equação da superficie é $F(x, y, z) = 0$, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Nota 1.ª — Se fôr

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

o plano tangente é parallelo á recta

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \beta,$$

em virtude d'um theorema bem conhecido da Geometria Analytica.

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies cylindricas (n.º 73), cujas generatrizes são parallelas á recta.

Nota 2.ª — Se fôr

$$z - c = \frac{\partial z}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - b),$$

o plano tangente passa pelo ponto (a, b, c).

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies conicas (n.º 73), cujo vertice é (a, b, c).

II — Os cosenos dos angulos α, β, γ que o plano tangente fórma com os planos coordenados xy, xz e yz são, em virtude de formulas bem conhecidas de Geometria Analytica:

$$\cos\alpha = K\frac{\partial F}{\partial z},\ \cos\beta = K\frac{\partial F}{\partial y},\ \cos\gamma = K\frac{\partial F}{\partial x}$$

onde é

$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

III—Chama-se *normal á superficie* no ponto (x, y, z) a perpendicular n'este ponto ao plano tangente. As suas equações são, em virtude das condições de perpendicularidade de uma recta a um plano conhecidas da Geometria Analytica,

$$(10)\quad X - x = -\frac{\partial z}{\partial x}(Z - z),\ Y - y = -\frac{\partial z}{\partial y}(Z - z).$$

Se a equação da curva é $F(x, y, z) = 0$, as equações da normal tomam a fórma symetrica

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Nota.—A condição para que a normal a uma superficie corte o eixo dos z obtem-se eliminando X, Y, Z entre as equações da normal e as equações $X = 0$ e $Y = 0$ do eixo, o que dá

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies da revolução (n.° 73), cujo eixo coincide com o eixo dos z.

A mesma eliminação dá

$$Z = z + \frac{x}{\frac{\partial z}{\partial x}},$$

ou, por ser $z = \varphi(x^2 + y^2)$ a equação da superficie,

$$Z = z + \frac{1}{2\varphi'(x^2 + y^2)} = z + \frac{1}{2\varphi'(r)},$$

chamando r o raio do parallelo; o que mostra que todas as normaes correspondentes aos pontos do mesmo parallelo encontram o eixo dos z no mesmo ponto.

Temos pois o theorema seguinte:

Todas as normaes a uma superficie de revolução nos pontos do mesmo parallelo encontram o eixo da superficie no mesmo ponto.

93. — *Curvatura das secções planas das superficies.* — **I** — A curvatura da secção feita n'uma superficie por um plano qualquer obtém-se pela formula geral do n.° 91 — I. Aqui vamos procurar as relações que ha entre as secções feitas por planos que passam por um ponto dado da superficie, considerando primeiro as secções feitas por planos que passam pela normal á superficie no ponto dado, e em seguida as secções obliquas.

Seja $z = f(x, y)$ a equação da superficie, ponhamos para brevidade

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

e representemos por p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 os valores que tomam p, q, r, s, t no ponto dado.

Para comparar a curvatura das secções feitas n'esta superficie por planos normaes que passam por um ponto dado, tomemos para eixo dos z a normal no ponto dado e para plano xy o plano tangente no mesmo ponto. N'este caso a equação do plano tangente será $Z = 0$, e portanto teremos (n.° 92)

$$p_0 = 0, \; q_0 = 0.$$

Um plano qualquer que passe pela normal tem para equação $y = Ax$, onde A representa a tangente trigonometrica do angulo θ formado por elle com o plano xz; e portanto, tomando x para variavel independente e representando por y', z', y'', z'' as derivadas de y e z relativamente a x, tiradas d'esta equação e da equação da superficie, teremos

$$y' = A, \; y'' = 0, \; z' = p + Aq,$$

$$z'' = r + 2\,As + A^2 t.$$

Logo a expressão da curvatura c_n da secção normal será (n.º 91—I)

$$(11) \qquad c_n = \frac{r_0 + 2As_0 + A^2 t_0}{1 + A^2},$$

onde r_0, s_0 e t_0 são tiradas da equação da superficie, e A depende da posição do plano normal considerado.

Derivando c_n relativamente a A, vem

$$c'_n = -\frac{2\left[s_0 A^2 - (t_0 - r_0) A - s_0\right]}{(1 + A^2)^2},$$

ou

$$c'_n = -\frac{2s_0 (A - m_1)(A - m_2)}{(1 + A^2)^2},$$

pondo

$$m_1 = \frac{(t_0 - r_0) + \sqrt{(t_0 - r_0)^2 + 4s_0^2}}{2s_0}$$

$$m_2 = \frac{(t_0 - r_0) - \sqrt{(t_0 - r_0)^2 + 4s_0^2}}{2s_0}.$$

Vê-se pois que c'_n muda de signal quando A passa pelos valores m_1 e m_2, e portanto a curvatura c_n passa (n.º 61) de crescente a decrescente e de decrescente a crescente, isto é, passa por um valor *maximo* e por um valor *minimo*.

De ser $m_1 . m_2 = -1$ conclue-se que *as duas secções de curvatura maxima e minima são perpendiculares uma á outra.*

Tomando os planos d'estas duas secções para plano zx e zy teremos de fazer na formula (11) $\theta = 0$ e $\theta = 90°$, e portanto $A = 0$ e $A = \infty$, para obter as suas curvaturas que designaremos por c_1 e c_2; o que dá $c_1 = r_0$, e $c_2 = t_0$. Vem pois

$$c_n = \frac{1}{1 + A^2} c_1 + \frac{2A}{1 + A^2} s_0 + \frac{A^2}{1 + A^2} c_2.$$

Por outra parte, devendo ser uma das quantidades m_1 e

m_2 igual a zero, as expressões que dão os valores d'estas quantidades mostram que deve ser $s_0 = 0$. Logo

$$c_n = \frac{1}{1+A^2}c_1 + \frac{A^2}{1+A^2}c_2$$

ou

$$c_n = c_1 \cos^2\theta + c_2 \operatorname{sen}^2\theta. \tag{12}$$

Temos pois o theorema seguinte devido a Euler:

Entre as secções feitas n'uma superficie por planos que passam por uma mesma normal ha duas de curvaturas maxima e minima, perpendiculares entre si; e a curvatura d'aquellas está ligada com a curvatura d'estas por meio da relação (12).

As secções de curvatura maxima e minima dá-se o nome de *secções principaes*.

D'este theorema deduzem-se os corollarios seguintes:

1.°—*Se uma secção cuja curvatura é c'_n fôr perpendicular á secção cuja curvatura é c_n, teremos*

$$c_n + c'_n = c_1 + c_2.$$

Deduz-se este resultado sommando com a igualdade (12) a igualdade

$$c'_n = c_1 \operatorname{sen}^2\theta + c_2 \cos^2\theta.$$

2.°—*Se fôr $c_1 = c_2$ será a curvatura c_n constante, qualquer que seja o plano secante.* Aos pontos que estão n'este caso dá-se o nome de *pontos umbilicaes*.

II—Consideremos agora uma secção feita por um plano que passe pelo ponto (x, y, z) mas não contenha a normal á superficie n'este ponto.

Tomando para plano xy o plano tangente, para eixo dos xx a intersecção do plano considerado com o plano tangente, e para eixo dos zz a normal, a equação do plano considerado será

$$y = z \operatorname{tang} i = Bz,$$

chamando i o angulo formado por este plano com o plano normal zx. Teremos pois, em virtude d'esta equação e da equação da superficie, tomando x para variavel independente,

$$y' = Bz',\ y'' = Bz'',\ z' = p + qy'$$
$$z'' = r + 2s\,y' + ty'^2 + qy'',$$

ou, pondo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e notando que p_0 e q_0 são nullos,

$$x' = 1,\ x'' = 0,\ y' = 0,\ y'' = Br_0,\ z'' = r_0.$$

Logo a curvatura c_0 da secção obliqua será (91 — I) dada pela formula:

$$c_0 = r_0\,(1 + B^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_0}{\cos i}.$$

Por outra parte a formula (11) dá, pondo $\theta = 0$ ou $A = 0$, o valor r_0 para a curvatura da secção c_m feito na superficie pelo plano zx; logo teremos a formula seguinte, devida a Meusnier:

$$c_0 = \frac{c_m}{\cos i},$$

que liga a curvatura de qualquer secção obliqua com a da secção normal que passa pela mesma tangente.

IV

Curvas e superficies envolventes

94. — *Curvas envolventes.* — **I** — Consideremos a familia de curvas cuja equação é

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

onde a representa um parametro arbitrario, e f representa uma funcção cujas derivadas relativamente a x, y e a são funcções continuas d'estas variaveis.

*

Se dermos a a os valores a_0, $a_0 + h$, $a_0 + 2h$, etc. obtem-se uma série de curvas representadas pelas equações

$$(2) \qquad f(x, y, a_0) = 0, \; f(x, y, a_0 + h) = 0, \text{ etc.}$$

Duas d'estas equações consecutivas tomadas simultaneamente representam os pontos d'intersecção das curvas correspondentes. Estes pontos approximam-se indefinidamente á medida que h diminue, e tendem a formar uma curva, que se chama *envolvente* da curva dada (*envolvida*), cuja equação vamos achar.

Consideremos para isso duas curvas consecutivas da série (2), isto é, as curvas cujas equações são

$$(3) \qquad f(x, y, a) = 0, \; f(x, y, a + h) = 0.$$

A segunda d'estas equações dá (n.º 62)

$$f(x, y, a + h) = f(x, y, a) + h \frac{\partial f(x, y, a + \theta h)}{\partial a} = 0,$$

e portanto póde ser substituida pela equação

$$\frac{\partial f(x, y, a + \theta h)}{\partial a} = 0.$$

Esta equação simultaneamente com a primeira das equações (3) representam os pontos d'intersecção de duas curvas consecutivas da série (2), correspondentes ao valor que se dá a a, e pela eliminação de a dão uma equação a que todas estas intersecções devem satisfazer. Logo, fazendo tender h para zero, vêem as equações

$$(4) \qquad f(x, y, a) = 0, \; \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0$$

que dão pela eliminação de a a equação da envolvente da curva proposta.

II — Theorema. — *A tangente á envolvente n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando a primeira das equações (4) considerando a como funcção de x e y determinada pela segunda, vem a equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} y'\right) = 0,$$

que dá o coefficiente angular y' da tangente á envolvente. Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, esta equação reduz-se á equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

que coincide com a que dá o coefficiente angular da tangente á envolvida. Logo as duas tangentes coincidem.

Exemplo — Procuremos a envolvente das normaes á parabola cuja equação é

$$y^2 = 2px.$$

A equação da normal é

$$p\,(Y - y) + y\left(X - \frac{y^2}{2p}\right) = 0.$$

Temos pois a procurar a envolvente das rectas representadas por esta equação, considerando X e Y como coordenadas correntes e y como parametro arbitrario.

Derivando esta equação relativamente a y e resolvendo a equação resultante relativamente a y^2, vem

$$y^2 = \frac{2p}{3}(X - p).$$

Eliminando y entre esta equação e a anterior, vem a equação da envolvente pedida

$$Y^2 = \frac{8}{27p}(X - p)^3,$$

resultado que concorda com o que se disse no n.º 89.

95. — *Superficies envolventes.* — **I** — Do mesmo modo que no caso das curvas, chama-se *superficie envolvente* das superficies representadas pela equação

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0$$

o logar geometrico das intersecções successivas de cada uma das superficies representadas por esta equação com a que corresponde a um valor infinitamente proximo do parametro a. Ás superficies representadas pela equação (1) chama-se *envolvidas*, e ás intersecções das envolvidas successivas chama-se *caracteristicas*.

Acha-se a equação da superficie envolvente eliminando a entre a equação (1) e a equação

$$(2) \qquad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0.$$

II — Theorema. — *O plano tangente á superficie envolvente n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á superficie envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x e y a primeira das equações (1) considerando a como funcção de x e y determinada pela equação (2), temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

que dão os coefficientes $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ da equação (n.º 92) do plano tangente á envolvente. Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, estas equações reduzem-se ás equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

que são as mesmas que dão os coefficientes da equação do plano tangente á superficie envolvida. Logo os dous planos tangentes coincidem.

III — A' linha envolvente das caracteristicas dá-se o nome de *aresta de reversão*. Acha-se a sua equação procedendo como no caso das curvas planas. As equações d'uma caracteristica são

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0;$$

e as da seguinte são

$$f(x, y, z, a + h) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a + h)}{\partial a} = 0,$$

e podem ser substituidas pelas equações

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a + \theta h)}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z, a + \theta_1 h)}{\partial a^2} = 0,$$

que no limite dão

$$(3) \quad f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z, a)}{\partial a^2} = 0.$$

Estas equações dão portanto pela eliminação de a as equações da aresta de reversão.

THEOREMA. — *A tangente á aresta da reversão n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á caracteristica correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x as duas primeiras equações (3) considerando a como funcção de x, y e z determinada pela terceira, vêem as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \right) = 0,$$

que dão os coefficientes $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ que entram nas equações da tangente á envolvente (n.º 90). Mas por ser $\frac{df}{da} = 0$ e $\frac{d^2 f}{da^2} = 0$, estas equações reduzem-se a

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

que são as mesmas que dão os coefficientes das equações da tangente á caracteristica. Logo as duas tangentes coincidem.

IV — Se a equação da superficie envolvida

$$f(x, y, z, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

contiver n parametros $c_1, c_2, \ldots, c_n$, podemos pôr

$$c_2 = \varphi_2(c_1),\ c_3 = \varphi_3(c_1),\ \ldots,\ c_n = \varphi_n(c_1),$$

representando por φ_2, φ_3, etc. funcções arbitrarias; e procurar depois, pelo processo anterior, a envolvente das superficies

$$f[x, y, z, c_1, \varphi_2(c_1), \ldots, \varphi_n(c_1)] = 0.$$

Chega-se assim a uma equação que contém tambem as funcções arbitrarias φ_2, φ_3, etc., e que representa porisso uma familia de superficies envolventes.

V — *Applicações.* — 1.ª — Consideremos, como primeira applicação, as superficies de revolução, que se podem considerar como envolventes de uma esphera cujo centro se move sobre uma recta dada, e cujo raio varia de grandeza segundo uma lei dada.

Tomando a recta dada para eixo dos z, a equação da esphera é

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

ou, pondo $c = \varphi(R)$,

$$x^2 + y^2 + [z - \varphi(R)]^2 = R^2.$$

Derivando, vem

$$-[z - \varphi(R)]\,\varphi'(R) = R.$$

Esta ultima equação mostra que R é funcção arbitraria de z, e a anterior mostra portanto que z é funcção arbitraria de $x^2 + y^2$. Logo a equação pedida é

$$z = \psi(x^2 + y^2),$$

onde ψ representa uma funcção arbitraria. Esta equação é a equação geral da familia das superficies de revolução, cujas especies se distinguem pelas differentes fórmas da funcção ψ.

2.ª — Chama-se *superficies planificaveis* as superficies envolventes das posições que toma um plano que se move segundo uma lei qualquer. Procuremos a equação geral d'esta familia de superficies.

1) Seja

$$z = Ax + \varphi(A)\,y + \psi(A)$$

a equação do plano gerador, onde φ e ψ representam funcções arbitrarias.

Para achar a equação geral das superficies planificaveis é necessario eliminar A entre esta equação e a sua derivada

$$x + \varphi'(A)\,y + \psi'(A) = 0.$$

Como porém esta eliminação se não póde effectuar sem especificar a fórma das funcções φ e ψ, considera-se estas duas equações simultaneas como representando a familia das superficies planificaveis, e effectua-se sómente a eliminação quando é dada a especie da superficie planificavel, isto é, quando são dadas as funcções φ e ψ.

2) Podemos achar facilmente a equação ás derivadas parciaes das superficies planificaveis. Com effeito, derivando a

primeira das equações precedentes relativamente a x e y e attendendo á segunda, temos as equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(A),$$

que dão

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Derivando esta equação relativamente a x e a y, obtemos as equações

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},$$

d'onde se deduz

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Esta equação, independente de funcções arbitrarias, é a equação ás derivadas parciaes das superficies planificaveis.

3) As superficies planificaveis gozam da seguinte propriedade importante:

Nas superficies planificaveis o plano tangente n'um ponto é tambem tangente em todos os outros pontos da mesma caracteristica.

Resulta esta propriedade do theorema II.

4) As superficies cylindricas e conicas estão comprehendidas na familia das superficies planificaveis. As primeiras são as envolventes das posições que toma um plano que se move parallelamente a uma recta dada. As segundas são as envolventes das posições que toma um plano que passa por um ponto dado. Para applicar a equação das superficies planificaveis, vamos procurar a equação da familia das superficies conicas.

Sendo (a, b, c) o ponto fixo por onde deve passar o plano gerador, temos as equações de condição

$$c = Aa + \varphi(A)\, b + \psi(A)$$

$$a + \varphi'(A)\, b + \psi'(A) = 0,$$

entre as quaes e as equações geraes das superficies planificaveis se deve eliminar uma das funcções arbitrarias, $\psi(A)$ e $\psi'(A)$ por exemplo. Vem pois

$$z - c = A(x - a) + \varphi(A)(y - b)$$

$$x - a + \varphi'(A)(y - b) = 0.$$

A primeira d'estas equações dá

$$\frac{z - c}{x - a} = A + \varphi(A)\frac{y - b}{x - a},$$

e como a segunda mostra que A é funcção de $\frac{y - b}{x - a}$, vem a equação geral das superficies conicas

$$\frac{z - c}{x - a} = \Psi\left(\frac{y - b}{x - a}\right)$$

onde Ψ representa uma funcção arbitraria.

3.ª — Procuremos a superficie envolvente dos planos osculadores de uma curva dada, cujas equações são

$$y = \varphi(x),\ z = \psi(x).$$

A equação do plano osculador é (n.º 90 — IV)

$$y''(Z - z) = (z'y'' - y'z'')(X - x) + z''(Y - y),$$

e portanto a equação da superficie pedida resulta de eliminar o parametro arbitrario x entre esta equação e a sua derivada relativamente a x:

$$y'''(Z - z) = (z'y''' - y'z''')(X - x) + z'''(Y - y).$$

Esta eliminação não póde ser effectuada sem se especificar primeiro as funcções φ e ψ.

Para achar as equações da aresta de reversão, temos de empregar, além das equações precedentes, a equação que resulta de derivar a segunda relativamente a x:

$$y^{(4)}(Z - z) = (z''y''' + z'\,y^{(4)} - y''z''' - y'z^{(4)})\,(X - x)$$
$$+ z^{(4)}\,(Y - y),$$

e de eliminar depois x entre as tres equações. Como a estas tres equações se satisfaz pondo

$$X = x,\ Y = y,\ Z = z$$

segue-se que a curva proposta é aresta de reversão da superficie considerada.

CAPITULO IV

DERIVADAS E DIFFERENCIAES D'ORDEM QUALQUER

I

Formação das derivadas d'ordem qualquer

96. — Por meio das regras dadas no capitulo II pode-se formar successivamente as derivadas y', y'', etc. da funcção $y = f(x)$. Ha porém questões em que é necessario conhecer a lei d'estas derivadas, isto é, a funcção de x e n que representa a derivada $y^{(n)}$; vamos pois agora achar esta funcção, considerando os mesmos casos que nos n.os 59 e 60, por ordem diversa.

97. — *Derivadas d'algumas funcções simples.* — 1) Formando as derivadas successivas da funcção $y = x^k$, acha-se

$$y' = kx^{k-1},\ y'' = k(k-1)x^{k-2},\ \text{etc.};$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n},$$

2) A funcção $y = e^x$ dá

$$y' = e^x,\ y'' = e^x,\ y''' = e^x,\ \ldots;$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = e^x .$$

Nota. — Se fôr $y = e^{kx}$, e k constante, teremos do mesmo modo $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Esta formula, dando a n valores negativos ou fraccionarios, define as derivadas d'ordem negativa ou fraccionaria da funcção e^{kx}. Esta noção estende-se depois a todas as funcções que forem susceptiveis de serem desenvolvidas em série convergente da fórma:

$$y = \Sigma A e^{kx},$$

onde A e k são constantes, pondo

$$y^{(n)} = \Sigma A k^n e^{kx},$$

se todavia esta série fôr tambem convergente. A respeito d'este assumpto, que aqui só podemos indicar, podem-se consultar varias memorias notaveis de Liouville (*Journal de l'École Polytechnique de Paris*).

3) A funcção $y = \log x$ dá $y' = x^{-1}$, e portanto, derivando $n - 1$ vezes y',

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)!\, x^{-n},$$

representando por $(n-1)!$ o producto $1 . 2 . 3 \ldots (n-1)$.

4) A funcção $y = \operatorname{sen} x$ dá

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\; y'' = \operatorname{sen}\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right), \text{ etc.};$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

5) A funcção $y = \cos x$ dá do mesmo modo

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

98. — *Theoremas geraes.* — **I** — Seja

$$y = u_1 + u_2 + \dots + u_m,$$

onde u_1, u_2, etc. representam funcções de x. Teremos evidentemente

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + \dots + u_m^{(n)}.$$

Nota. — A derivada de ordem n da somma

$$y = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k$$

é

$$y^{(n)} = \sum_{k=n}^{m} A_k k (k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n}.$$

Fazendo $x = 0$ e chamando $y_0^{(n)}$ o valor correspondente da derivada $y^{(n)}$, vem o resultado

$$y_0^{(n)} = A_n n!.$$

II — Procuremos a derivada de ordem n do producto $y = u_1 u_2$ de duas funcções dadas.

Temos

$$y' = u'_1 u_2 + u_1 u'_2$$

$$y'' = u''_1 u_2 + 2u'_1 u'_2 + u_1 u''_2$$

$$y''' = u'''_1 u_2 + 3u''_1 u'_2 + 3u'_1 u''_2 + u_1 u'''_2$$

....

Observa-se n'estas igualdades que os coefficientes são os mesmos que os coefficientes dos desenvolvimentos das potencias 1.ª, 2.ª, 3.ª do binomio $u_1 + u_2$, e que os indices superiores são os mesmos que os expoentes de u_1 e u_2 nos mesmos desenvolvimentos. Somos pois levados, por inducção, a escrever a formula:

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i-1)}$$

$$+ \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)} + \ldots + u_1 u_2^{(n)}$$

ou

$$(1) \qquad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)},$$

representando por $\binom{n}{i}$ o numero de combinações de n lettras tomadas a i a i.

Para demonstrar esta formula basta provar que, se é verdadeira para o indice n, tambem é verdadeira para o indice $n+1$. Para isso derivemos outra vez, o que dá

$$y^{(n+1)} = u_1^{(n+1)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)}$$

$$+ \binom{n}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)} + \ldots + u_1 u_2^{(n+1)}$$

ou

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)},$$

por ser

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

A formula (1), devida a Leibnitz, póde ser escripta *symbolicamente* do modo seguinte:

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2)^n,$$

que significa que se deve desenvolver $(u_1 + u_2)^n$ pela formula do binomio e substituir no resultado os expoentes por indices de derivação.

Do mesmo modo, no caso da funcção

$$y = u_1 u_2 \ldots u_m$$

temos *symbolicamente*

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_m)^n = \Sigma \frac{n!\, u_1^{(i_1)}\, u_2^{(i_2)} \ldots u_m^{(i_m)}}{i_1!\, i_2! \ldots i_m!}$$

em que o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação:

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n.$$

Deduz-se esta formula da anterior por um processo analogo ao que se emprega em Algebra para passar da lei do desenvolvimento do binomio para a lei do desenvolvimento dos polynomios.

III — Consideremos agora a funcção $y = \frac{u_1}{u_2}$. Temos

$$u_1 = yu_2$$

$$u'_1 = y'u_2 + yu'_2$$

. . . .

$$u_1^{(n)} = y^{(n)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i} y^{(n-i)} u_2^{(i)} + \ldots + y\, u_2^{(n)}.$$

Por meio d'estas igualdades obtem-se successivamente as derivadas y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ da fracção proposta; ou directamente a derivada $y^{(n)}$ expressa por um determinante.

IV — Seja y uma funcção de x determinada pelas equações:

$$(A) \qquad y = f(u),\ u = \varphi(x)$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x.

Temos

$$y' = \frac{dy}{du} u'$$

$$y'' = \frac{d^2y}{du^2} u'^2 + \frac{dy}{du} u''$$

$$y''' = \frac{d^3y}{du^3} u'^3 + 3 \frac{d^2y}{du^2} u' u'' + \frac{dy}{du} u'''$$

. . . .

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n de y é uma somma da fórma:

$$y^{(n)} = \Sigma A \frac{d^i y}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda,$$

A, α, β, γ, ..., λ, i sendo numeros inteiros que vamos determinar. Para isso, appliquemos a formula precedente á funcção:

$$y = u^n,\ u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n representam constantes arbitrarias; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n (n-1) \ldots (n-i+1) u^{n-i} (u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda,$$

e, pondo $x = 0$ e notando que é (n.° 98 — I) $u_0^{(k)} = k!\, a_k$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma A n (n-1) \ldots (n-i+1) (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda a_0^{n-i} a_1^\alpha a_2^\beta \ldots a_n^\lambda,$$

Por outra parte, temos

$$y = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)^n$$

$$= \Sigma \frac{n!\, a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n} x^{h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots + nh_n}}{h_0!\, h_1!\, h_2! \ldots h_n!}$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de h_0, h_1, etc. que satisfazem a equação

$$h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n = n,$$

devendo substituir-se $h_0!$, $h_1!$, $h_2!$, etc. pela unidade quando é $h_0 = 0$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, etc.

Derivando esta igualdade e pondo $x = 0$, vem (n.° 98—I)

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{(n!)^2 a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n}}{h_0!\, h_1!\, h_2! \ldots h_n!},$$

onde o sommatorio se refere agora a todos os valores inteiros positivos de h_0, h_1, h_2, etc. que satisfazem ás equações

$$h_0+h_1+h_2+\ldots+h_n=n,\ h_1+2h_2+3h_3+\ldots+nh_n=n.$$

Os dous valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de achar, devem ser identicos, quaesquer que sejam os valores de a_0, a_1, a_2, etc.; portanto vem

$$\alpha=h_1, \beta=h_2, \ldots, \lambda=h_n, h_0=n-i=n-(\alpha+\beta+\ldots+\lambda),$$

$$A=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\ldots\,\lambda!\,(2!)^\beta\,(3!)^\gamma\,\ldots\,(n!)^\lambda}.$$

Temos pois a formula (¹)

$$(3)\qquad y^{(n)}=\Sigma\,\frac{n!\,\dfrac{d^iy}{du^i}\,(u')^\alpha\,(u'')^\beta\,\ldots\,(u^{(n)})^\lambda}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots\,\lambda!\,(2!)^\beta\,(3!)^\gamma\,\ldots\,(n!)^\lambda},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores de α, β, γ, ..., λ que satisfazem á equação:

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+n\lambda=n,$$

e onde é

$$i=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

Deve observar-se que na formula (3) deve substituir-se nos denominadores os factores que forem nullos pela unidade, como se faz na lei do desenvolvimento dos polynomios d'onde a formula é tirada.

Nota — A respeito dos coefficientes numericos

$$A=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\ldots\,\lambda!\,(2!)^\beta\,(3!)^\gamma\,\ldots\,(n!)^\lambda}$$

faremos algumas observações (²).

(¹) Veja-se o nosso artigo *Sur les dérivées d'ordre quelconque* publicado no tomo XVIII do *Giornale di Matematiche* de Napoles, d'onde é tirada a demonstração precedente da formula (3)

(²) Veja-se o nosso artigo—*Ueber einen Satz der Zahlentheorie* publicado nos *Archiv der Mathematik und Physik* de Leipzig (1885)

1.° — *Estes coefficientes são numeros inteiros.*

Esta propriedade resulta da demonstração precedente, e constitue um theorema interessante de Arithmetica a que se póde tambem chegar por considerações relativas á theoria das com binações [1].

2.° — Sendo $y = u^k$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{dy}{du} = ku^{k-1}, \frac{d^2y}{du^2} = k(k-1)u^{k-2}, \ldots, \frac{d^ky}{du^k} = k\,!,$$

$$\frac{d^{k+1}y}{du^{k+1}} = 0, \ldots, u' = u'' = \ldots = e^x;$$

e, pondo $x = 0$,

$$\left(\frac{dy}{du}\right)_0 = 0, \ldots, \left(\frac{d^ky}{du^k}\right)_0 = k\,!, \ldots$$

$$u'_0 = u''_0 = \ldots = 1.$$

Substituindo em (3), vem a formula seguinte, de que adiante faremos uso:

$$\frac{1}{k\,!}\left(\frac{d^n(e^x-1)^k}{dx^n}\right)_0 = \Sigma' A,$$

que dá a somma de todos os coefficientes da formula (3) que correspondem ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = k.$$

3.° — Sendo $y = e^u$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{d^iy}{du^i} = e^u, u' = u'' \ldots = e^x,$$

e portanto

$$\left(\frac{d^iy}{du^i}\right)_0 = 1, u' = u'' = \ldots = 1.$$

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*—tomo XCIII.

Logo, applicando (3), virá a formula

$$\left(\frac{d^n\left(e^{e^x}-1\right)}{dx^n}\right)_0=\Sigma A,$$

que dá a somma de todos os coefficientes da formula (3).

4.º—O quociente $\frac{\Sigma A}{n\,!}$ tende para o limite zero quando n augmenta indefinidamente ([1]).

V — Seja

$$y=f(u_1, u_2, \ldots, u_i), u_1=\varphi_1(x), u_2=\varphi_2(x), \ldots, u_i=\varphi_i(x),$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x.

Para resolver esta questão seguiremos o mesmo caminho que no nosso artigo publicado no *Giornale di Matematiche* (tomo XVIII), que passamos a expôr.

Temos

$$y'=\frac{\partial f}{\partial u_1}u'_1+\frac{\partial f}{\partial u_2}u'_2+\ldots$$

$$y''=\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(u'_1)^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u_1\,\partial u_2}u'_1\,u'_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_1}u''_1+\ldots$$

....

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n é uma somma da fórma:

$$(b)\quad\begin{cases} y^{(n)}=\Sigma A\,\dfrac{\partial^m f}{\partial u_1{}^a\,\partial u_2{}^b\ldots}(u'_1)^\alpha\,(u''_1)^\beta\ldots(u_1{}^{(n)})^\lambda \\ \quad\times(u'_2)^{\alpha'}\,(u''_2)^{\beta'}\ldots(u_2{}^{(n)})^{\lambda'}\times\ldots, \end{cases}$$

onde

$$m=a+b+c+\ldots,$$

([1]) Para a demonstração d'esta propriedade veja-se: Oliveira Ramos e C. J. de Faria — *Sobre os coefficientes* etc. (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomo VII).

e onde A, a, b, ..., α, β, ..., α', β', ... são numeros inteiros que vamos determinar. Para isso appliquemos esta formula ás funcções:

$$y = u_1^n u_2^n \ldots u_i^n$$

$$u_1 = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$u_2 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

onde a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ... representam constantes arbitrarias; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n(n-1)\ldots(n-a+1) \times n(n-1)\ldots(n-b+1) \times \ldots$$

$$\times u_1^{n-a} (u'_1)^{\alpha} (u''_1)^{\beta} \ldots \times u_2^{n-b} (u'_2)^{\alpha'} \ldots,$$

e, pondo $x = 0$,

$$y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} A n(n-1)\ldots(n-a+1) \times n(n-1)\ldots(n-b+1) \times \ldots \\ \times (2\,!)^{\beta+\beta'+\ldots} (3\,!)^{\gamma+\gamma'+\ldots} \ldots (n\,!)^{\lambda+\lambda'+\ldots} \\ \times a_0^{n-a} a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \ldots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \ldots \times \ldots \end{array} \right\}.$$

Por outra parte, applicando a formula de Leibnitz ao producto considerado, vem

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n\,!}{h_1\,!\, h_2\,! \ldots h_n\,!} (u_1^n)^{(h_1)} (u_2^n)^{(h_2)} \ldots,$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros e positivos de h_1, h_2, etc. que satisfazem á equação

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_i = n;$$

ou, substituindo as derivadas $(u_1^n)^{(h_1)}$, $(u_2^n)^{(h_2)}$, etc. pelos seus valores, que se obtéem pela formula (3), e pondo $x = 0$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{n!\, n(n-1)\ldots(n-a+1)\, n(n-1)\ldots(n-b+1)\ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, \alpha'!\, \beta'! \ldots \lambda'! \ldots}$$

$$\times\, a_0^{n-a}\, a_1^{\alpha}\, a_2^{\beta} \ldots \times b_0^{n-b}\, b_1^{\alpha'}\, b_2^{\beta'} \ldots \times \ldots,$$

onde o sommatorio se refere aos valores inteiros e positivos de α, β, ..., α' β', ... que satisfazem ás equações

$$\alpha + 2\beta + \ldots + h_1 \lambda = h_1,$$

$$\alpha' + 2\beta' + \ldots + h_2 \lambda' = h_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + h_l \lambda^{(l-1)} = h_l,$$

isto é, á equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda' + \ldots$$
$$+ \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,\ b = \alpha' + \beta' + \ldots + \lambda', \text{ etc.}$$

Os dous valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de obter, devem ser identicos qualquer que seja o valor das quantidades a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...; portanto os inteiros α, β, ..., α', β', ... devem ter os mesmos valores nas duas expressões de $y_0^{(n)}$, e deve ser

$$A = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times \alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'! \times \ldots \times (2!)^{\beta+\beta'\ldots} \ldots (n!)^{\lambda+\lambda'+\ldots}}.$$

Estão pois determinadas as constantes que entram na formula (b), e temos a formula seguinte, que resolve a questão proposta:

$$(4)\quad y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times \alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'! \times \ldots} \cdot \dfrac{\partial^m f}{\partial u_1^{a}\, \partial u_2^{b} \ldots} \\ \times (u'_1)^{\alpha} \left(\dfrac{u''_1}{2!}\right)^{\beta} \ldots \left(\dfrac{u^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda} \times (u'_2)^{\alpha'} \ldots \left(\dfrac{u_2^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'} \times \ldots \end{array} \right.$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda'$$
$$+ \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,\ b = \alpha' + \ldots + \lambda',\ \text{etc.},$$

e

$$m = a + b + c + \ldots$$

VI — Consideremos agora a funcção implicita y definida pela equação

$$f(x, y) = 0.$$

Temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

por meio das quaes se obtem successivamente y', y'', etc.

A lei d'estas equações obtem-se applicando á funcção $f(x, y)$ a formula (4), pondo $u_2 = x$, $u_1 = y$ e considerando y como funcção de x, o que dá

$$(5)\quad \Sigma \frac{n!}{\alpha'!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{m-\alpha'}} (y')^{\alpha} (y'')^{\beta} \ldots (y^{(n)})^{\lambda} = 0,$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha' + \alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$m = \alpha' + \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

A formula que precede dá a derivada de ordem n em funcção das anteriores. A formula que dá directamente $y^{(n)}$ é muito complicada e porisso não a exporemos aqui [1].

II

Applicações

99.— *Derivada da funcção* arc tang x.— **I** — A funcção $y = \text{arc tang}\, x$ dá $y' = (1 + x^2)^{-1}$, d'onde se deduz (n.º 98 — IV)

$$y^{(n)} = \Sigma\, (-1)^i . \frac{(n-1)\,!\; i\,!\; (2x)^\alpha\, (1 + x^2)^{-1-i}}{\alpha\,!\; \beta\,!}$$

onde $\alpha + 2\beta = n - 1$, $i = \alpha + \beta$; e portanto

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\, (n-1)\,!\; \Sigma\, (-1)^\beta \binom{n-1-\beta}{\beta}$$
$$+ (2x)^{n-1-2\beta}\, (1 + x^2)^{\beta - n},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de β desde 0 até ao maior inteiro contido em $\frac{n-1}{2}$.

A' expressão da derivada de ordem n da funcção considerada póde dar-se uma fórma differente da precedente. Pondo $x = \cot \varphi$, o que dá $\frac{d\varphi}{dx} = -\,\text{sen}^2\, \varphi$, vem

$$y' = \frac{1}{1 + \cot^2 \varphi} = \text{sen}^2\, \varphi,\; y'' = -\,\text{sen}\, 2\varphi\, \text{sen}^2\, \varphi, \text{ etc.}$$

---

(1) Vid. Duarte Leite — *Sobre as derivadas* etc. (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomo IV).

Em geral

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \operatorname{sen}^n \varphi \operatorname{sen} n\varphi.$$

Demonstra-se facilmente esta formula mostrando que, se é verdadeira para a derivada da ordem n, tambem é verdadeira para a derivada da ordem $n+1$.

II—A comparação das duas expressões de $y^{(n)}$, que vimos de achar, dá a igualdade importante:

$$\operatorname{sen} n\varphi = \operatorname{sen}\varphi \Sigma (-1)^{\beta} \binom{n-1-\beta}{\beta} (2 \cos \varphi)^{n-1-2\beta}.$$

III — Se quizermos o valor de $y_0^{(n)}$ poremos $x=0$ na formula que dá $y^{(n)}$.

1.º — Se n é *impar*, todos os termos da formula se annullam, excepto aquelle que corresponde a $n-1-2\beta=0$; e teremos portanto

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!.$$

2.º — Se n é *par*, o expoente $n-1-2\beta$ não póde ser nullo, e teremos $y_0^{(n)}=0$.

100. — *Numeros de Bernoulli.* — **I** — Consideremos a funcção

$$y = (1+e^x)^{-1},$$

e procuremos o valor que toma $y^{(n)}$ quando é $x=0$.

Pondo

$$\varphi(x) = y - \frac{1}{2} = \frac{1-e^x}{2(1+e^x)},$$

vem

$$\varphi(-x) = \frac{e^x-1}{2(e^x+1)},$$

e portanto

$$\varphi(x) = -\varphi(-x),$$

e

$$\varphi'(x) = \varphi'(-x),\ \varphi''(x) = -\varphi''(-x), \text{ etc.}$$

Estas igualdades mostram que as derivadas de ordem par de $\varphi(x)$ se devem annullar quando se faz $x = 0$, porque, se assim não fosse, teriam dous valores differentes para $x = 0$, o que não póde ter logar.

As derivadas de y são iguaes ás derivadas de $\varphi(x)$, e portanto temos $y_0^{(n)} = 0$, quando n é par.

As derivades d'ordem impar acham-se pondo $x = 0$ na formula (n.° 98 — IV)

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \frac{n!\, i!\, e^{ix} (1 + e^x)^{-i-1}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda}$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n,\ i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda;$$

o que dá

$$y_0^{(n)} = \Sigma (-1)^i \frac{n!\, i!}{2^{i+1} \alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda}.$$

Os *numeros de Bernoulli* B_n definem-se pela igualdade

$$(a) \qquad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1} - 1} y_0^{(n)};$$

de modo que *são nullos quando n é par*, e quando n é impar podem ser calculados por meio da formula [1]:

$$(6) \quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{(n+1)!}{2^{n+1} - 1} \Sigma (-1)^i \frac{i!}{2^{i+1} \alpha!\beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta \ldots (n!)^\lambda}$$

---

[1] Veja-se o nosso artigo *Sur les nombres de Bernoulli* publicado no *American Journal of Mathematics* de Baltimore — tomo VII.

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

II — De ser

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta\ldots(n!)^\lambda}$$

um numero inteiro (n.° 98 — IV) e de ser $n+1$ par resulta que *os numeros de Bernoulli não podem conter em denominador factores primos differentes de 2 e dos factores primos de $2^{n+1}-1$, e que 2 não póde entrar em denominador com expoente superior a n.*

III — Da formula (6) vamos tirar outra mais propria para o calculo dos numeros de Bernoulli.

Com effeito, aquella formula dá

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} \left[(-1)^i \frac{i!}{2^{i+1}} \right.,$$

$$\left. \times \Sigma' \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta\ldots(n!)^\lambda} \right],$$

onde o sommatorio Σ' se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n$$

que dão a i o mesmo valor; e portanto (n.° 98 — IV — *nota*)

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left(\frac{d^n (e^x - 1)^i}{dx^n} \right)_0,$$

ou substituindo a derivada que entra no segundo membro pelo valor que se obtem desenvolvendo o binomio $(e^x - 1)^i$ e derivando n vezes o resultado,

$$(7)\quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \Big[i^n - i(i-1)^n$$
$$+ \binom{i}{2}(i-2)^n - \binom{i}{3}(i-3)^n + \ldots \pm \binom{i}{i-1} 1^n \Big].$$

Ou por meio d'esta formula, ou por meio da formula (6) obtem-se

$$B_1 = \frac{1}{6}\,,\; B_3 = \frac{1}{30}\,,\; B_5 = \frac{1}{42}\,,\; B_7 = \frac{1}{30}\,,\; B_9 = \frac{5}{66}\,, \ldots$$

IV — Derivando n vezes a igualdade

$$y\,(e^x + 1) = 1$$

vem

$$y^{(n)}(e^x + 1) + e^x \Big[n y^{(n-1)} + \binom{n}{2} y^{(n-2)} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1} y' + y \Big] = 0.$$

Pondo $x = 0$ e attendendo á formula (a), resulta

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2\, \frac{2^{n+1}-1}{n+1} B_n + (-1)^{\frac{n}{2}}\, n\, \frac{2^n - 1}{n} B_{n-1}$$
$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2} \frac{2^{n-1}-1}{n-1} B_{n-2}$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{3} \frac{2^{n-2}-1}{n-2} B_{n-3} + \ldots$$
$$+ (-1) \binom{n}{n-1} \frac{2^2-1}{2} B_1 + \frac{1}{2} = 0$$

que, pondo $n = 2p - 1$, dá

$$2\,\frac{2^{2p}-1}{p}\,B_{2p-1} - \binom{2p-1}{2}\frac{2^{2(p-1)}-1}{p-1}\,B_{2p-3} + \dots$$
$$\pm \binom{2p-1}{2p-2}\frac{2^2-1}{1}\,B_1 \mp 1 = 0;$$

e, pondo $n = 2p$, dá

$$2p\,\frac{2^{2p}-1}{p}\,B_{2p-1} - \binom{2p}{3}\frac{2^{2p-2}-1}{p-1}\,B_{2p-3} + \dots$$
$$\pm \binom{2p}{2p-1}\frac{2^2-1}{1}\,B_1 \mp 1 = 0.$$

Temos assim duas relações *lineares recorrentes* entre os numeros de Bernoulli, por meio de qualquer das quaes se póde calcular successivamente B_1, B_3, B_5, etc.

V—Os numeros de Bernoulli apparecem em muitas questões d'Analyse. Assim, por exemplo, os valores das derivadas da funcção

$$y = f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

correspondentes a $x = 0$ exprimem-se em funcção d'estes numeros.

Com effeito, derivando n vezes a igualdade

$$\frac{x}{e^x+1} = \frac{x}{e^x-1} - \frac{2x}{e^{2x}-1} = f(x) - f(2x)$$

vem (n.º 98—II) a equação

$$x\,\frac{d^n\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)}{dx^n} + n\,\frac{d^{n-1}\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)}{dx^{n-1}} = f^n(x) - 2^n f^n(2x)$$

que, pondo $x = 0$ e attendendo á formula (a), dá

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} B_{n-1}.$$

Vê-se por esta formula que as derivadas de ordem impar de y são nullas.

A formula que precede não dá os valores de y_0 e y'_0. Para os achar, parte-se da equação

$$(e^x - 1)\, y = x,$$

que dá

$$(e^x - 1)\, y' + e^x y = 1$$

$$(e^x - 1)\, y'' + 2e^x y' + e^x y = 0$$

e (pondo $x = 0$) $y_0 = 1$, $y'_0 = -\frac{1}{2}$.

VI — Do mesmo modo a funcção

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

dá para valor de $y_0^{(n)}$

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2\, \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} B_n,$$

que é *nullo* quando n é *par*,

VII — Consideremos finalmente uma questão d'Algebra em que entram os numeros de Bernoulli.

Seja

$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}$$

$$= \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1},$$

e portanto

$$xy = (e^{nx} - 1)\,\frac{x}{e^x - 1}.$$

Derivando $k + 1$ vezes esta igualdade e pondo $z = \frac{x}{e^x - 1}$, vem

$$\begin{aligned} xy^{(k+1)} + (k+1)\,y^{(k)} = n^{k+1} e^{nx} z + (k+1)\,n^k e^{nx} z' \\ + \binom{k+1}{2} n^{k-1} e^{nx} z'' + \ldots + \binom{k+1}{k} n e^{nx} z^{(k)} \\ + (e^{nx} - 1)\, z^{(k+1)}, \end{aligned}$$

e, pondo $x = 0$,

$$\begin{aligned} y_0^{(k)} = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + \frac{kn^{k-1}}{2} B_1 \\ - k(k-1)(k-2)\, n^{k-3} \frac{B_3}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

Por outra parte, derivando k vezes y, vem

$$y^{(k)} = e^x + 2^k e^{2x} + \ldots + (n-1)^k e^{(n-1)x},$$

e portanto

$$y_0^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (n-1)^k.$$

Temos pois a formula

$$\begin{aligned} 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + k\,\frac{n^{k-1}}{2} B_1 \\ - k(k-1)(k-2)\, n^{k-3} \frac{B_3}{4} + \ldots \end{aligned}$$

que dá o desenvolvimento, ordenado segundo as potencias de n, da somma das potencias de grão k dos $n - 1$ primeiros numeros inteiros.

101. — *Formula de Jacobi.* — Procuremos a derivada de ordem $n-1$ da funcção

$$y=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Applicando a formula (3), vem

$$y^{(n-1)}=\Sigma\frac{(n-1)!(n-\frac{1}{2})\ldots(n-\frac{1}{2}-i+1)(-2x)^{\alpha}(-2)^{\beta}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}-i}}{\alpha\,!\;\beta\,!\;(2\,!)^{\beta}}$$

onde $\alpha+2\beta=n-1$, $i=\alpha+\beta$; ou

$$y^{(n-1)}=\Sigma\frac{(-1)^{n-1-\beta}(n-1)!(2n-1)\ldots(2\beta+3)x^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n-1-2\beta)\,!\,\beta\,!\,2^{\beta}}$$

$$=(-1)^{n-1}.\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}\Sigma(-1)^{\beta}\frac{n\,!\,x^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2\beta+1)(n-1-2\beta)\,!\,\beta\,!\,2^{\beta}},$$

que, por ser

$$2^{\beta}\times 1.2.3\ldots\beta\times 1.3\ldots(2\beta+1)=(2\beta+1)\,!,$$

dá

$$y^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}$$

$$\times\,\Sigma(-1)^{\beta}\frac{(n-2\beta)\ldots nx^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(2\beta+1)\,!},$$

onde Σ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros positivos de β desde 0 até $\frac{n-1}{2}$.

Pondo $x=\cos\omega$, vem

$$y^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}$$

$$\times\,\Sigma(-1)^{\beta}\frac{(n-2\beta)\ldots n\cos^{n-1-2\beta}\omega\,\mathrm{sen}^{2\beta+1}\omega}{(2\beta+1)\,!}$$

ou, em virtude de uma formula bem conhecida de Trigonometria,

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \ldots (2n-1)}{n} \cdot \operatorname{sen} n \operatorname{arc\,cos} x,$$

resultado devido a Jacobi.

102. — *Formula de Waring.* — Seja [1]

$$U = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

uma equação dada e $x_1, x_2, \ldots, x_m$ as m raizes d'esta equação.

Por ser

$$\log U = \log A_0 + \Sigma \log (x - x_\omega),$$

temos, derivando n vezes,

$$\Sigma \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^n \log U}{dx^n}.$$

Substituindo no segundo membro d'esta igualdade U pelo seu valor, applicando a formula (3) e attendendo ás igualdades $U^{(m+1)} = 0$, $U^{(m+2)} = 0$, etc., vem

$$\Sigma \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = (-1)^n n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)!\, U^{-i} U'^{\alpha} U''^{\beta} \ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^\beta \ldots (m!)^\lambda}$$

e portanto, pondo $x = 0$,

$$\Sigma \frac{1}{x_\omega^n} = n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)!\, U_0^{-i} U_0'^{\alpha} U_0''^{\beta} \ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^\beta \ldots (m!)^\lambda}$$

$$= n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)!\, A_m^{-i} A_{m-1}^{\alpha} \ldots A_0^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!}.$$

---

(1) Esta demonstração é tirada do artigo intitulado — *Demonstration de la formule de Waring*, que publicámos nos *Nouvelles Annales des mathématiques* (3.ª série, tomo VII, pag. 382).

Applicando agora esta formula á equação

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

cujas raizes são reciprocas das raizes da equação primeiramente considerada, temos a *formula de Waring*

$$\sum_{\omega=1}^{p} x^n_\omega = n\Sigma(-1)^i \frac{(i-1)!\, A_0^{-i} A_1^\alpha A_2^\beta \ldots A_m^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

onde α, β, ..., λ são as soluções inteiras positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + m\lambda = n$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Esta formula dá a somma das potencias de grão n das raizes da equação proposta.

103. — *Derivadas das funcções compostas de funcções lineares de x.* — Seja na formula (4)

$$u_1 = A_1 + B_1 x,\ u_2 = A_2 + B_2 x,\ \ldots,\ u_l = A_l + B_l x;$$

teremos

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\alpha'!\ldots\alpha^{(l-1)}!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial u_1^\alpha\, \partial u_2^{\alpha'} \ldots} B_1^\alpha B_2^{\alpha'} \ldots,$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \alpha^{(l-1)} = n.$$

A formula que precede póde ser escripta *symbolicamente* da maneira seguinte:

$$y^{(n)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} B_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_l} B_l\right)^n,$$

devendo depois do desenvolvimento substituir-se $(\partial f)^n$ por $\partial^n f$.

*

III

Differenciaes d'ordem superior

104. — A differencial dy de $y = f(x)$, que está ligada com a derivada de y pela equação

$$dy = y'\,dx,$$

é uma funcção de x, cuja differencial $d\,(dy)$, que se representa por d^2y, se obtem differenciando o producto $y'dx$, o que dá

$$d^2y = y''\,dx^2,$$

suppondo dx constante qualquer que seja x, o que é sempre possivel, visto que x representa a variavel independente, e que portanto o seu augmento dx é arbitrario.

Do mesmo modo se acha

$$d^3y = y'''\,dx^3,\ d^4y = y^{(4)}\,dx^4, \text{ etc.}$$

As differenciaes dy, d^2y, d^3y, etc. têem respectivamente os nomes de *differenciaes de primeira ordem*, de *segunda ordem*, etc. de y.

Seja h um augmento dado a x e $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ o augmento correspondente de y. Teremos (n.º 62)

$$\Delta y = h\,f'(x + \theta_1\,h)$$

onde θ_1 representa uma quantidade comprehendida entre 0 e 1.

Chamando $\Delta^2 y$ o augmento $\Delta\,(\Delta y)$ da funcção Δy, correspondente ao augmento h de x, vem do mesmo modo

$$\Delta^2 y = h^2\,f''(x + \theta_1\,h + \theta_2\,h).$$

Continuando do mesmo modo obtem-se a formula geral

$$\Delta^n y = h^n f^n (x + \theta_1 h + \theta_2 h + \ldots + \theta_n h)$$

ou, pondo $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = \theta$,

$$\Delta^n y = h^n f^n (x + \theta h),$$

θ representando uma quantidade comprehendida entre 0 e n.

A Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc. dá-se respectivamente os nomes de *differença primeira*, *differença segunda*, etc. da funcção $f(x)$.

Se a derivada $f^n(x)$ é continua, temos

$$\Delta^n y = h^n [f^n (x) + \varepsilon] = d^n y + \varepsilon h^n,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h; logo a differencial de ordem n é a parte proporcional a h^n da differença de ordem n da funcção y, e é a parte principal d'esta differença quando h é sufficientemente pequeno.

105. — Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes $z = f(x, y)$, cuja *differencial total* é definida pela igualdade (n.° 67)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Esta differencial dz é uma funcção de x e y que, sendo differenciada, dá a *differencial total de segunda ordem :*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dx \, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

ou *symbolicamente*

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^2.$$

Continuando do mesmo modo acha-se, por inducção, a formula symbolica

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)^n,$$

que se demonstra por meio de um calculo análogo ao do n.° 98 — II.

Do mesmo modo, no caso da funcção de muitas variaveis

$$z = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_l)$$

se acha

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_l}\,dx_l\right)^n.$$

IV

Relações entre as funcções e suas derivadas

106. — Theorema 1.° — *Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^m(x)$ finitas em todos os pontos do intervallo de x_0 a x, teremos a relação:*

$$\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\dfrac{(x-x_0)^2}{2\,!}f''(x_0)-\ldots-\dfrac{(x-x_0)^l}{l\,!}f^l(x_0)}{F(x)-F(x_0)-(x-x_0)F'(x_0)-\dfrac{(x-x_0)^2}{2\,!}F''(x_0)-\ldots-\dfrac{(x-x_0)^k}{k\,!}F^k(x_0)}$$

$$= \frac{\dfrac{(x-x_0)^{l+1}}{(l+1)\,!}f^{l+1}(x_0)+\ldots+\dfrac{(x-x_0)^{n-1}}{n-1\,!}f^{n-1}(x_0)+R_n}{\dfrac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)\,!}F^{k+1}(x_0)+\ldots+\dfrac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)\,!}F^{m-1}(x_0)+R'_m}$$

onde

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n\,(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,f^n\left[x_0+\theta\,(x-x_0)\right]$$

$$R'_m = \frac{(x - x_0)^m (1 - \theta)^{m-1}}{(m-1)!} F^m [x_0 + \theta (x - x_0)],$$

(θ *representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade* [1]), *se o denominador do segundo membro se conservar differente de zero quando* θ *varia entre* 0 *e* 1.

Para demonstrar este theorema appliquemos á funcção

$$\varphi(z) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^l(x_0)$$

$$- f(z) - (x - z) f'(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(z)$$

$$- \Big[F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)$$

$$- F(z) - (x - z) F'(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(z) \Big]$$

$$\times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)}$$

a formula conhecida (n.º 62—3.º)

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0) \varphi' [x_0 + \theta (x - x_0)];$$

o que dá, suppondo $n \geqq l + 1$ e $m \geqq k + 1$,

$$0 = - \frac{(x - x_0)^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0)$$

$$- \Big[- \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(x_0) \Big]$$

---

(1) Este theorema é extrahido do nosso artigo *Sur une formule d'Analyse* publicado nos *Nouvelles Annales de Matématiques* de Paris (tomo V da 3.ª série).

$$\times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)}$$

$$+ (x - x_0) \left\{ - \frac{(x - x_0)^{n-1} (1 - \theta)^{n-1}}{(n - 1)!} f^n [x_0 + \theta (x - x_0)] \right.$$

$$\left. + \frac{(x - x_0)^{m-1} (1 - \theta)^{m-1}}{(m - 1)!} F^m [x_0 + \theta (x - x_0)] \frac{f(x) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^l(x_0)}{F(x) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)} \right\}.$$

D'esta formula tira-se o theorema enunciado.

Deve-se observar que o theorema que vimos de demonstrar ainda tem logar quando é $l = 0$ ou $k = 0$, convencionando substituir n'estes casos $\frac{f^0(x)}{0}$ por $f(x)$ e $\frac{F^0(x_0)}{0}$ por $F(x_0)$.

Theorema 2.° — *Se a funcção $f(x)$ admittir derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$ finitas em todos os pontos do intervallo de x_0 a x, temos*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n - 1)!\, m} f^n [x_0 + \theta (x - x_0)],$$

θ representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade.

A formula precedente, conhecida pelo nome de *formula de Taylor*, do nome do geometra que a descobriu [1], póde ser deduzida do theorema anterior pondo

(1) Taylor não deu a expressão de R_n. Foi Lagrange o primeiro geometra que deu uma expressão d'este resto.

$$F(x) = (x - x_0)^m,\ k = m - 1,\ l = n - 1,$$

e por consequencia,

$$F(x_0) = 0,\ F'(x_0) = 0,\ \ldots\ F^{m-1}(x_0) = 0,$$

$$F^m(x_0) = m!,\ F^m[x_0 + \theta(x - x_0)] = m!.$$

A respeito d'esta formula faremos as seguintes observações:

1.°— Pondo $x - x_0 = h$, a formula de Taylor póde ser escripta debaixo da fórma seguinte:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{h^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} f^n(x_0 + \theta h).$$

2.°— A R_n chama-se *resto da série de Taylor*. Da expressão d'este resto que vimos de achar, e que é devida a Schlömilch (1), deduz-se, pondo $m = n$, a formula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n[x_0 + \theta(x - x_0)] = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + \theta h),$$

devida a *Lagrange;* e, pondo $m = 1$, a formula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n[x_0 + \theta(x - x_0)]$$

$$= \frac{h^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x_0 + \theta h),$$

devida a *Cauchy*.

---

(1) *Journal de Liouville*, 2.ª série, tomo III.

3.° — Se R_n tender para zero á medida que n tende para o infinito, a funcção $f(x)$ póde ser desenvolvida em série convergente ordenada segundo as potencias de $x - x_0$ por meio da formula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^a}{a!} f^a(x_0) + \ldots$$

4.° — Se na formula de Taylor pozermos $x_0 = 0$, vem a formula

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{x^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} f^n(\theta x),$$

conhecida pelo nome de *formula de Maclaurin.*

5.° — *Se tiver logar o desenvolvimento em série*

$$f(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ A_a (x - x_0)^a + \ldots$$

e as funcções $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^a(x)$ *forem continuas no ponto* x_0, *será*

$$A_a = \frac{f^a(x_0)}{a!}.$$

Para demonstrar este theorema, notemos primeiro que, pondo $x = x_0$, vem $A_0 = f(x_0)$.

Notemos em segundo logar que, pondo $x - x_0 = h$, temos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A_1 h + A_2 h^2 + \ldots,$$

d'onde se deduz

$$f'(x_0 + \theta h) = A_1 + A_2 h + \ldots,$$

e portanto

$$A_1 = f'(x_0).$$

Para completar a demonstração do theorema, basta notar que, se é verdadeiro para o coefficiente A_n, ainda é verdadeiro para o coefficiente A_{a+1}. Com effeito, temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \ldots + \frac{h^a}{a!} f^a(x_0)$$

$$+ A_{a+1} h^{a+1} + A_{a+2} h^{a+2} + \ldots,$$

e portanto

$$\frac{1}{(a+1)!} f^{a+1}(x_0 + \theta h) = A_{a+1} + A_{a+2} h + \ldots$$

d'onde se tira, fazendo tender h para zero,

$$A_{a+1} = \frac{f^{a+1}(x_0)}{(a+1)!}.$$

6.° — Do theorema 1.° pode-se deduzir a formula de Taylor com uma expressão do resto devida ao sr. Peano [1], professor na Universidade de Turin, suppondo sómente que a funcção $f(x)$ admitte derivadas até á ordem $n - 2$ finitas em todos os pontos desde x_0 até $x_0 + h$, e que admitte uma derivada de ordem $n - 1$ finita no ponto x_0.

Para isso, mudemos n'este theorema n e m em $n - 2$, e ponha-se depois $x = h$, $x_0 = 0$, $l = n - 3$, $k = n - 3$. Teremos

$$\frac{f(h) - f(0) - h f'(0) - \ldots - \dfrac{h^{n-3}}{(n-3)!} f^{n-3}(0)}{F(h) - F(0) - h F'(0) - \ldots - \dfrac{h^{n-3}}{(n-3)!} F^{n-3}(0)}$$

$$= \frac{f^{n-2}(\theta h)}{F^{n-2}(\theta h)}.$$

---

(1) *Mathesis*, tomo IX, pag. 182.

Appliquemos agora esta igualdade ás funcções

$$f(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - h\varphi'(x_0) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(x_0)$$

$$F(h) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Como é

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ \ldots,\ f^{n-3}(0) = 0$$

$$f^{n-2}(h) = \varphi^{n-2}(x_0 + h) - \varphi^{n-2}(x_0) - h\,\varphi^{n-1}(x_0)$$

$$F(0) = 0,\ F'(0) = 0,\ \ldots,\ F^{n-3}(0) = 0,\ F^{n-2}(h) = h,$$

temos

$$f(h) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{\varphi^{n-2}(x_0 + \theta h) - \varphi^{n-2}(x_0)}{\theta h} - \varphi^{n-1}(x_0)\right]$$

Mas, em virtude da definição de derivada, temos

$$\frac{\varphi^{n-2}(x_0 + \theta h) - \varphi^{n-2}(x_0)}{\theta h} = \varphi^{n-1}(x_0) + \varepsilon,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena ao mesmo tempo que h.

Logo é

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) - h\varphi'(x_0) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(x_0) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon,$$

e portanto, mudando φ em f,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x_0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon,$$

ε representando uma quantidade que tende para 0 com h.

107. — Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes:

$$z = f(x.\ y),$$

para estender a estas funcções a formula de Taylor.

Pondo

$$x_0 + t(x - x_0) = u,\ y_0 + t(y - y_0) = v$$

$$\varphi(t) = f(u, v) = f[x_0 + t(x - x_0), y + t(y - y_0]$$

e applicando a formula de Maclaurin a esta funcção de t, vem

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{t^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m}\varphi^n(\theta t).$$

Para calcular os coefficientes d'esta formula empregam-se as formulas

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(y - y_0)$$

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(y - y_0)^2$$

....

que, pondo $t = 0$, dão

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0)$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0 \partial y_0}(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y_0^2}(y - y_0)^2$$

....

Para achar o termo geral da expressão de φ (t) pode-se recorrer á formula symbolica demonstrada no n.° 103, que dá

$$\varphi^i(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(y - y_0)\right]^i,$$

e portanto

$$\varphi^i(0) = \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0)\right]^i;$$

e para achar o resto R_n pode-se recorrer á mesma formula, que dá

$$\varphi^n(\theta t) = \left[\frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1}(y - y_0)\right]^n$$

onde é

$$u_1 = x_0 + \theta(x - x_0)t,\; v_1 = y_0 + \theta(y - y_0)t.$$

Pondo agora nas formulas precedentes $t = 1$ vem a formula

$$z = f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}\left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0)\right]^i$$
$$+ \frac{(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m}\left[\frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1}(y - y_0)\right]^n$$

que tem os mesmos usos que a formula de Taylor.

Deve observar-se que, por ser baseada a doutrina precedente nos theoremas dos n.os 66 e 106 deve impôr-se á funcção $f(u, v)$ a condição de admittir derivadas parciaes relativas a u e v, até á ordem n, continuas nos intervallos de $u = x_0$ a $u = x$ e de $v = y_0$ a $v = y$.

CAPITULO V

APPLICAÇÕES ANALYTICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I

Desenvolvimento em série do binomio e de algumas funcções algebricas

108. — Consideremos em primeiro logar o binomio

$$y = (1 + x)^k,$$

onde k representa uma quantidade real qualquer.

Temos

$$y' = k(1 + x)^{k-1}$$

$$y'' = k(k - 1)(1 + x)^{k-2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = k(k - 1)\dots(k - n + 1)(1 + x)^{k-n},$$

e portanto

$$y_0 = 1,\ y'_0 = k,\ \dots,\ y_0^{(n-1)} = k(k - 1)\dots(k - n + 2).$$

Logo applicando a formula de Maclaurin com a expressão do resto de Cauchy, virá

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{k-n}$$

$$= \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{k-1}.$$

1) Supponhamos primeiro que o valor absoluto de x é inferior á unidade.

Por ser a razão dos dous termos consecutivos de ordem $n-1$ e $n-2$ da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n$$

igual a $\left(\frac{k}{n-1} - 1\right)x$, esta razão tende para o limite $-x$, cujo valor absoluto é inferior á unidade, quando n tende para o infinito; e portanto a série é (n.° 19 — III) convergente. Logo o termo geral

$$\frac{k(k-1)\dots(h-n+1)}{(n-1)!}x^n$$

tende para 0, quando n tende para o infinito. Como, além d'isso, o factor $(1+\theta x)^{k-1}$ é finito e o factor $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ é inferior á unidade, o resto R_n tende para 0, e a série

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-a+1)}{a!}x^a + \dots$$

converge para o limite $(1+x)^k$.

2) Se o valor absoluto de x fôr superior á unidade, a série precedente é divergente, visto que a razão de dous termos consecutivos:

$$\frac{k-a+1}{a}x = \left(\frac{k+1}{a} - 1\right)x$$

tende para um limite — x, cujo valor absoluto é superior á unidade, quando n tende para o infinito (n.º 19 — III).

109. — Do desenvolvimento em série do binomio, que vimos de obter, pode-se tirar o desenvolvimento em série de muitas outras funcções.

Assim, suppondo $f(x)$ uma funcção racional de x, da igualdade (n.º 39)

$$f(x) = \Sigma \frac{A}{(x-a)^k} = \Sigma (-1)^k \frac{A}{a^k}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-k}$$

tira-se o desenvolvimento em série

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x}{a} + A_2 \frac{x^2}{a^2} + \ldots$$

onde é

$$A_0 = \Sigma (-1)^k \frac{A}{a^k}, \ldots, A_n = \Sigma (-1)^k \binom{k}{n} \frac{A}{a^k}, \ldots,$$

quando x é uma quantidade real cujo valor absoluto é inferior ao menor dos valores absolutos das quantidades designadas por a.

110. — Desenvolvamos agora a funcção

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

em série ordenada segundo as potencias de u.

Pondo esta funcção debaixo da fórma

$$\begin{aligned} y &= (u - u_1)^{-\frac{1}{2}} (u - u_2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -(u_1 u_2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

onde u_1 e u_2 representam as raizes da equação

$$u^2 - 2ux + 1 = 0,$$

vê-se que um dos casos em que ella é susceptivel de ser desenvolvida em série convergente ordenada segundo as potencias de u, é quando u_1 e u_2 são reaes e o valor absoluto de u é inferior ao de u_1 e u_2.

Em todos os casos em que y é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de u, o desenvolvimento é da fórma

$$y = X_0 + X_1 u + X_2 u^2 + \ldots + X_k u^k + \ldots$$

onde X_0, X_1, etc. representam funcções de x que vamos determinar.

Por ser (n.° 98—IV)

$$y^{(k)} = \Sigma \frac{k!(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-i+1)(-2x+2u)^\alpha 2^\beta y^{2i+1}}{\alpha!\,\beta!\,2^\beta}$$

$$= \Sigma (-1)^\beta . \frac{k!\,1.3.5\ldots(2i-1)(x-u)^\alpha y^{2i+1}}{\alpha!\,\beta!\,2^\beta}$$

onde

$$\alpha + 2\beta = k,\ i = \alpha + \beta,$$

teremos, representando por m o maior inteiro contido em $\frac{k}{2}$,

$$X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!} = \sum_{\beta=0}^{m} (-1)^\beta . \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{\alpha!\,\beta!\,2^\beta} x^\alpha .$$

ou, eliminando α,

$$X_k = \sum_{\beta=0}^{m} (-1)^\beta . \frac{1.3.5\ldots(2k-2\beta-1)}{(k-2\beta)!\,\beta!\,2^\beta} x^{k-2\beta} .$$

Esta formula serve para calcular os polynomios X_k, conhecidos pelo nome de *polynomios de Legendre*, do nome do geometra celebre que primeiro os considerou. Vamos estudar algumas das suas propriedades mais elementares.

I — Derivando k vezes a identidade

$$(x^2 - 1)^k = \sum_{\beta = 0}^{k} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} x^{2k - 2\beta}$$

vem

$$\frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} = \sum_{\beta = 0}^{m} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} (2k - 2\beta) \ldots (k - 2\beta + 1) x^{k-2\beta}$$

$$= \sum_{\beta = 0}^{m} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} . \frac{(2k - 2\beta)\,!}{(k - 2\beta)\,!} x^{k - 2\beta}$$

$$= \sum_{\beta = 0}^{m} (-1)^\beta . \frac{k \ldots (k-\beta+1) \times 1.3 \ldots (2k-2\beta-1) \times 2.4 \ldots (2k-2\beta)}{\beta\,!\,(k - 2\beta)\,!} x^{k-2\beta}$$

$$= \sum_{\beta = 0}^{m} (-1)^\beta . \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2k - 2\beta - 1)\, 2^{k - \beta} k\,!}{\beta\,!\,(k - 2\beta)\,!} x^{k - 2\beta} .$$

Comparando esta igualdade com a expressão de X_k anteriormente achada deduz-se a formula notavel

$$X_k = \frac{1}{2^k . k\,!} . \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} .$$

II — Derivando a funcção

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

relativamente a u, vem

$$y' = (x - u)(1 - 2ux + u^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ou

$$y' (1 - 2ux + u^2) = (x - u)\, y.$$

Derivando agora k vezes esta equação, temos

$$y^{(k+1)} (1 - 2ux + u^2) + k y^{(k)} (-2x + 2u) + 2\binom{k}{2} y^{(k-1)}$$
$$= y^{(k)} (x - u) - k y^{(k-1)}$$

e portanto, pondo $u = 0$,

$$y_0^{(k+1)} - (2k+1)\, x y_0^{(k)} + k^2 y_0^{(k-1)} = 0.$$

Esta equação, pondo $X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!}$, dá

$$(k+1)\, X_{k+1} - (2k+1)\, x\, X_k + k\, X_{k-1} = 0.$$

Temos assim uma relação *linear recorrente* entre tres polynomios consecutivos de Legendre, por meio da qual se póde formar successivamente estes polynomios a partir do terceiro.

III — Como a equação $(x^2 - 1)^k = 0$ tem k raizes iguaes a $+1$ e k raizes iguaes a -1, a equação $\frac{d\,(x^2-1)^k}{dx} = 0$ terá $k-1$ raizes iguaes a $+1$, $k-1$ raizes iguaes a -1, e (em virtude do theorema de Rolle) uma raiz real comprehendida entre $+1$ e -1.

Pela mesma razão a equação

$$\frac{d^2\,(x^2-1)^k}{dx^2} = 0$$

terá $k-2$ raizes iguaes a $+1$. $k-2$ raizes iguaes a -1 e duas raizes desiguaes comprehendidas entre $+1$ e -1.

Continuando o mesmo raciocinio conclue-se emfim que *a equação $X_k = 0$ tem k raizes reaes e desiguaes, comprehendidas entre $+1$ e -1.*

IV — Pondo $(x^2-1)^k = z$, temos

$$k \log (x^2 - 1) = \log z,$$

e, derivando,

$$(x^2 - 1)\, z' - 2k\, xz = 0.$$

Derivando $k+1$ vezes esta equação, vem

$$(x^2-1)\, z^{(k+2)} + 2\,(k+1)\, xz^{(k+1)} + k\,(k+1)\, z^{(k)}$$
$$- 2k\,[xz^{(k+1)} + (k+1)\, z^{(k)}] = 0,$$

ou, pondo $z^{(k)} = 2^k\, k!\, X_k$ e fazendo as reducções,

$$(x^2-1)\, X''_k + 2x\, X'_k - k\,(k+1)\, X_k = 0.$$

Os polynomios de Legendre são pois soluções de uma equação differencial linear de segunda ordem.

V — Da relação entre tres polynomios de Legendre consecutivos (II) vamos tirar o limite para que tende a razão $\frac{X_k}{X_{k+1}} = A_k$ quando k augmenta indefinidamente, suppondo $|x| > 1$.

Pondo primeiro n'esta relação $k = h + h_0$ e dividindo por $(h + h_0) X_{h+h_0+1}$, vem

$$1 + \frac{1}{h+h_0} - \left(2 + \frac{1}{h+h_0}\right) x A_{h+h_0} + A_{h+h_0} \cdot A_{h+h_0-1} = 0.$$

Consideremos em seguida a equação

$$1 - 2x B_{h+h_0} + B_{h+h_0} \cdot B_{h+h_0-1} = 0$$

que determina uma série de funcções B_0, B_1, etc., dada uma d'ellas, que supporemos ser B_{h_0} e ser igual a A_{h_0}.

Chamando z_1 e z_2 as raizes da equação

$$1 - 2x z + z^2 = 0,$$

e notando que é $z_1 + z_2 = 2x$, $z_1 z_2 = 1$, podemos escrever a equação precedente debaixo da fórma

$$B_{h+h_0} B_{h+h_0-1} - B_{h+h_0}(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0,$$

ou, multiplicando todos os termos por $z_2 - z_1$,

$$B_{h+h_0-1} B_{h+h_0} z_2 - B_{h+h_0} z_2^2 - B_{h+h_0-1} z_1 z_2 + z_1 z_2^2$$
$$= B_{h+h_0-1} B_{h+h_0} z_1 - B_{h+h_0} z_1^2 - B_{h+h_0-1} z_1 z_2 + z_1^2 z_2$$

ou

$$\frac{B_{h+h_0} - z_1}{B_{h+h_0} - z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{B_{h+h_0-1} - z_1}{B_{h+h_0-1} - z_2}.$$

Mudando n'esta equação successivamente h em $h - 1$, $h - 2$, ..., 2, 1 vem uma série de equações das quaes se deduz

$$\frac{B_{h+h_0} - z_1}{B_{h+h_0} - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h \cdot \frac{B_{h_0} - z_1}{B_{h_0} - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h \frac{A_{h_0} - z_1}{A_{h_0} - z_2}.$$

Esta equação mostra que B_{h+h_0} tende para o limite z_1 quando h augmenta indefinidamente, se o valor absoluto de z_2 é maior do que o valor absoluto de z_1; e que B_{h+h_0} tende para o limite z_2 se o valor absoluto de z_2 é menor do que o de z_1.

Por outra parte, as igualdades

$$A_{h_0+1} = \frac{1 + \frac{1}{h_0+1}}{\left(2 + \frac{1}{h_0+1}\right)x - A_{h_0}} = \frac{1 + \frac{1}{h_0+1}}{\left(2 + \frac{1}{h_0+1}\right)x - B_{h_0}}$$

$$A_{h_0+2} = \frac{1 + \frac{1}{h_0+2}}{\left(2 + \frac{1}{h_0+2}\right)x - A_{h_0+1}}$$

....

e as igualdades

$$B_{h_0+1} = \frac{1}{2x - B_{h_0}},\ B_{h_0+2} = \frac{1}{2x - B_{h_0+1}},\ \text{etc.}$$

mostram que A_{h_0+1}, A_{h_0+2}, etc. tendem para os limites B_{h_0+1}, B_{h_0+2}, etc. quando h_0 augmenta indefinidamente.

Logo *a razão A_k de dous polynomios de Legendre consecutivos tenderá para aquella das quantidades $x + \sqrt{x^2-1}$ e $x - \sqrt{x^2-1}$ que tiver menor valor absoluto, quando k augmenta indefinidamente.*

111.—Terminaremos o que temos a dizer sobre as funcções algebricas demonstrando um theorema notavel, devido ao eminente geometra allemão Eisenstein:

A série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

onde a_0, a_1, a_2, ..., representam fracções reduzidas á sua expressão mais simples, não póde ser o desenvolvimento de uma funcção y, definida por uma equação algebrica com coefficientes inteiros

$$(2) \qquad F(x, y) = 0,$$

se augmentar indefinidamente o numero dos factores primos differentes contidos nos denominadores de $a_0, a_1, a_2, \ldots$

A demonstração que vamos dar d'este theorema foi por nós publicada nos *Annales de l'École Normale supérieure de Paris* (3.ª série - tomo III) (¹).

Notemos primeiro que, se a série (1) satisfaz á equação algebrica (2), tambem a série

$$(1') \qquad y = a_m x^m + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

satisfará a uma equação algebrica que resulta de mudar na precedente y em $y + a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$. Podemos pois em logar da série (1) considerar a série (1′).

Posto isto, escrevamos esta ultima equação debaixo da fórma

$$(3) \qquad \Sigma A_a^{(b)} x^a y^b = 0,$$

onde $A_a^{(b)}$, a, b representam numeros inteiros, e a e b são positivos; e derivemol-a n vezes (n.º 98—II), o que dá

$$\Sigma A_a^{(b)} \binom{n}{i} (x^a)^{(i)} (y^b)^{(n-i)} = 0,$$

ou

$$\Sigma A_a^{(b)} \binom{n}{i} a(a-1) \ldots (a-i+1) x^{a-1} (y^b)^{(n-i)} = 0,$$

onde se deve substituir $\binom{n}{i} a(a-1) \ldots (a-i+1)$ pela unidade quando é $a = 0$.

Pondo agora $x = 0$, vem

$$\Sigma A_a^{(b)} n(n-1) \ldots (n-a+1) (y^b)_0^{(n-a)} = 0$$

ou (n.º 98 — II)

$$\Sigma A_a^{(b)} n(n-1) \ldots (n-a+1) S \frac{(n-a)! y_0^{(\alpha)} y_0^{(\beta)} \ldots y_0^{(\lambda)}}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!} = 0,$$

(¹) No nosso artigo — *Ueber den Eisenstein'schen Satz*, impresso nos *Archiv der Mathematik* de Leipzig (1886), publicámos uma demonstração do mesmo theorema fundada na formula (5) do n.º 98.

onde a somma S se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n - a,$$

e onde o numero das quantidades α, β, ..., λ é igual a b.

Separemos n'esta equação os termos que contêem a derivada d'ordem mais elevada, para o que se deve dar a a o valor zero, e a α, β, ..., λ os systemas de soluções

$$\alpha = n,\ \beta = 0,\ \ldots,\ \lambda = 0$$

$$\alpha = 0,\ \beta = n,\ \ldots,\ \lambda = 0$$

....

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \ldots,\ \lambda = n.$$

Teremos

$$\Sigma A_a^{(b)} S \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha\,!} \cdot \frac{y_0^{(\beta)}}{\beta\,!} \ldots \frac{y_0^{(\lambda)}}{\lambda\,!} + \Sigma A_0^{(b)}\, b y_0^{b-1} \frac{y_0^{(n)}}{n\,!} = 0,$$

ou, pondo

$$a_1 = y'_0,\ a_2, = \frac{y''_0}{2\,!},\ a_3 = \frac{y'''_0}{3\,!},\ \text{etc.},$$

e notando que o coefficiente a_0 da série (1') é nullo,

$$A_0^{(1)}\, a_n = - \Sigma A_a^{(b)}\, S a_\alpha\, a_\beta \ldots a_\lambda.$$

Se $A_0^{(1)}$ é differente de zero, d'esta igualdade tira-se immediatamente que a_n não póde contêr em denominador factores primos differentes dos que entram nos denominadores dos coefficientes anteriores a_α, a_β, etc., e d'aquelles que entram em $A_0^{(1)}$. Logo o numero dos factores primos differentes que entram nos coefficientes da série (1) é limitado, como queriamos demonstrar.

Se porém é $A_0^{(1)} = 0$, a ultima equação da pagina anterior dá, separando os termos que contêem $y_0^{(n-1)}$, e notando que o coefficiente a_1 da série (1') é nullo,

$$A_1^{(1)}\, a_{n-1} = - \Sigma A_a^{(b)}\, S a_\alpha\, a_\beta \ldots a_\lambda$$

d'onde se tira ainda, como no caso anterior, o theorema enunciado, se $A_1^{(1)}$ é differente de zero.

Se é $A_1^{(1)} = 0$ recorre-se aos termos que contéem $y_0^{(n-2)}$, e assim successivamente.

Em principios análogos se funda o theorema seguinte [1]:

Se os denominadores dos coefficientes a_n, a_{n+1}, etc. da série (1) *contéem indefinidamente factores primos respectivamente superiores a n, $n+1$, etc., esta série não póde ser o desenvolvimento de uma funcção definida por uma equação*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)}) = 0,$$

onde F representa uma funcção inteira de x, y, y', ..., $y^{(i)}$ com coefficientes inteiros, sem annullar ao mesmo tempo $\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}\right)_{x=0}$.

II

Desenvolvimento em série de algumas funcções transcendentes

112. — *Exponencial.* — **I** — Principiemos pela funcção exponencial $y = e^x$, que dá $y^{(n)} = e^x$, e portanto $y_0^{(n)} = 1$.

Applicando a formula de Maclaurin, vem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

Suppondo x comprehendido entre os dois inteiros m e $m+1$, o resto R_n é o producto dos tres factores

(1) Este theorema foi por nós publicado nos tomos II e IV dos *Annales de l'École Normale Supérieure de Paris*. Um erro de calculo levou-nos a enuncial-o de um modo inexacto que aqui corregimos.

$$\frac{x^m}{m!}, \frac{x}{m+1} \cdot \frac{x}{m+2} \cdots \frac{x}{n}, e^{\theta x},$$

dos quaes o primeiro e o terceiro são finitos, e o segundo, por ser menor do que $\frac{x}{n}$, tende para zero quando n tende para o infinito. Logo R_n tende tambem para 0, quando n tende para o infinito, e temos o desenvolvimento em série

$$(1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^a}{a!} + \ldots$$

II — Se x fôr positivo e menor do que $n+1$, temos

$$R_n = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots < \frac{x^n}{n!}\left[1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \ldots\right]$$

e portanto

$$R_n < \frac{(n+1)\, x^n}{n!\,(n+1-x)}.$$

Se x fôr negativo e inferior, em valor absoluto, a $n+1$, temos (n.° 19 — VII)

$$R_n < \frac{|x|^n}{n!}.$$

Por meio d'estas formulas calcula-se um limite superior do erro que se commette quando se toma para valor de e^x a somma dos n primeiros termos do seu desenvolvimento.

III — Applicando a esta série o theorema de Eisenstein conclue-se que a funcção e^x é transcendente, visto que os coefficientes contêem um numero illimitado de factores primos differentes.

IV — Pondo na formula (1) $x = 0$, vem

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{a!} + \ldots$$

Por esta série calcula-se o valor de e mais rapidamente do que pelo processo do n.° 27.

Este numero e é irracional. Com effeito, se e fosse igual a uma fracção $\frac{m}{n}$, teriamos

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

e portanto

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots$$

$$< \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right]$$

ou

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!\,n},$$

ou

$$(n-1)!\,m - 2\,(n!) - \dots - 1 < \frac{1}{n};$$

e portanto o numero inteiro positivo, que o primeiro membro d'esta igualdade representa, seria menor do que uma fracção, o que é absurdo.

Lambert demonstrou que todas as potencias inteiras de e são irracionaes, e modernamente o sr. Hermite demonstrou que este numero é transcendente, isto é, que não póde ser raiz de uma equação algebrica com coefficientes racionaes (1).

IV — Appliquemos agora a formula de Maclaurin á funcção

$$y = e^x + e^{-\frac{1}{x}},$$

onde $x > 0$, considerada por Cauchy para mostrar a necessidade da discussão do seu resto, ainda que a série a que se chegue, quando n augmenta indefinidamente, seja convergente.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, tomo LXXVII.

Vamos vêr, com effeito, que póde esta série ser convergente e todavia o resto não tender para zero.

Derivando n vezes a funcção y, vem (n.º 98 — IV)

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma \frac{n!\,(x^{-2})^\alpha\,(-2x^{-3})^\beta \ldots}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!\,(2!)^\beta \ldots (n)^\lambda}\, e^{-\frac{1}{x}},$$

resultado da fórma

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma A \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^a}$$

onde A representa uma constante, e a é um numero inteiro positivo.

Pondo depois $\frac{1}{x} = z$, vem

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma A \frac{z^a}{e^z}$$

$$= e^x + \Sigma A \frac{1}{z^{-a} + z^{-a+1} + \ldots + \frac{1}{a!} + \frac{z}{(a+1)!} + \ldots}$$

e, para $x = 0$ ou $z = \infty$, $y_0^{(n)} = 1$.

Applicando pois a formula de Maclaurin, vem

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n.$$

Quando n augmenta indefinidamente, no segundo membro apparece uma série convergente cujo limite e^x é differente de y; e portanto o limite do resto R_n é differente de zero.

113. — *Logarithmo de* $1 + x$. — Consideremos agora a funcção

$$y = \log(1 + x).$$

Por ser

$$y' = (1 + x)^{-1},\ y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1 + x)^{-n},$$

a formula de Maclaurin dá

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1}.\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n} = (-1)^{n-1}x^n\frac{x}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1},$$

empregando a expressão do resto dada por Cauchy.

1) Se x estiver comprehendido entre $+1$ e -1, a fracção $\frac{1}{1+\theta x}$ é finita, a fracção $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ é menor do que a unidade, e x^n tende para zero quando n tende para o infinito. Logo R_n tem por limite zero quando n augmenta indefinidamente, e a funcção proposta póde ser desenvolvida em série pela formula

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^a}{a} \mp \dots$$

2) Se o valor absoluto de x fôr superior á unidade, esta série é divergente (n.º 19 — III), visto que a razão dos dous termos consecutivos $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ e $\frac{x^n}{n}$ tende para o limite x, superior á unidade, quando n tende para ∞.

Nota. — A formula precedente converge muito lentamente, e além d'isso por meio d'ella só podem ser calculados os logarithmos dos numeros comprehendidos entre 0 e 2; é portanto necessario obter uma formula mais propria para o calculo numerico dos logarithmos e applicavel a todos os casos. Ponhamos para isso

$$x = \frac{p-q}{p+q}$$

o que dá

$$\frac{p}{q} = \frac{1+x}{1-x}$$

e portanto

$$\log p - \log q = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right)$$

$$= 2\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^n + \dots\right],$$

onde n é impar.

Esta série é tanto mais convergente quanto menor fôr $p - q$ e maior fôr $p + q$, e serve para calcular $\log p$ quando $\log q$ é conhecido. Pondo $q = 1$ dá immediatamente $\log p$.

O erro que se commette parando no termo de gráo $n - 2$ d'esta série é inferior á somma da progressão

$$\frac{2}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^n \left[1 + \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 + \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4 + \dots\right],$$

isto é, a

$$\frac{(p-q)^n}{2npq\,(p+q)^{n-2}}.$$

114. —*Funcções circulares.*—**I**—Consideremos a funcção $y = \operatorname{sen} x$. Temos, applicando a formula de Maclaurin,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \operatorname{sen}\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Visto que *sen* $\left(\theta x + n\frac{\pi}{n}\right)$ é finito e $\frac{x^n}{n!}$ tende para zero quando n augmenta indefinidamente, a formula precedente dá a série:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \pm \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!} \mp \dots,$$

que tem logar qualquer que seja x.

II — Do mesmo modo se acha o desenvolvimento em série de *cos* x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots \pm \frac{x^{2a}}{(2a)\,!} \mp \ldots$$

NOTA. — As funcções *sen* x e *cos* x appareceram pela primeira vez na Trigonometria, e ahi foram deduzidas geometricamente as suas propriedades. Definindo estas funcções pelas séries precedentes, pode se constituir analyticamente toda a sua theoria [1].

III — Applicando a formula de Maclaurin á funcção

$$y = \text{arc tang } x$$

vem (n.º 99), considerando o valor de y comprehendido entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$,

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \text{ sen}^n \varphi_1 \text{ sen}\, n\, \varphi_1,$$

onde φ_1 é dado pela igualdade $\theta x = \cot \varphi_1$. Logo, quando $|\,x\,|$ é igual ou inferior á unidade, R_n tende para zero quando n tende para o infinito, e temos a série

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^a}{a} \mp \ldots$$

Se é $x > 1$ a série precedente é divergente.

---

[1] Tannery: — *Introduction à la théorie des fonctions*, pag. 153.

III

Interpolação

115. — O fim da interpolação é procurar uma funcção $f(x)$ que, quando a x se dá os valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, toma valores $y_1, y_2, \ldots, y_k$ dados.

Este problema é indeterminado, emquanto se não dá a fórma da funcção. Aqui supporemos que se quer que a funcção $f(x)$ seja inteira e do grão $k - 1$, e n'este caso satisfaz evidentemente ao problema a formula seguinte, devida a Lagrange:

$$
\begin{aligned}
f(x) = & \frac{(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_k)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_k)} y_1 \\
& + \frac{(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_k)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_k)} y_2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{k-1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \ldots (x_k - x_{k-1})} y_k
\end{aligned}
$$

116. — Consideremos agora o caso mais geral de serem dados os valores que toma a funcção $f(x)$ e suas derivadas, quando á variavel x se dá valores particulares.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ os valores dados a x, e sejam os valores correspondentes da funcção e suas derivadas os seguintes:

$$
\begin{gathered}
y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(\alpha - 1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_i, y'_i, \ldots, y_i^{(\beta - 1)}
\end{gathered}
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_k,\ y'_k,\ \ldots,\ y_k^{(\lambda)}.$$

Ponhamos (1)

$$F(x) = (x - x_1)^\alpha \ldots (x - x_i)^\beta \ldots (x - x_k)^\lambda$$

e (n.º 39 — I)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{M_1}{x - x_i} + \frac{M_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{M_\beta}{(x - x_i)^\beta} \right],$$

onde M_1, M_2, ..., M_β são os coefficientes de $h^{\beta-1}$, $h^{\beta-2}$, ..., h^0 no quociente $\dfrac{h^\beta f(x_i + h)}{F(x_i + h)}$.

Por outra parte, chamando A_1, A_2, ..., A_α; ...; B_1, B_2, ..., B_β; etc. os numeradores das fracções simples em que se decompõe a fracção $\dfrac{1}{F(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{A_1 f(x)}{x - x_1} + \frac{A_2 f(x)}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha f(x)}{(x - x_1)^\alpha} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{B_1 f(x)}{x - x_i} + \frac{B_2 f(x)}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta f(x)}{(x - x_i)^\beta} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{P_1 f(x)}{x - x_k} + \frac{P_2 f(x)}{(x - x_k)^2} + \ldots + \frac{P_\lambda f(x)}{(x - x_k)^\lambda}. \end{aligned}$$

Pondo $x = x_i + h$, multiplicando por h^β e ordenando segundo as potencias de h, vem

(1) A analyse que segue é tirada do nosso artigo — *Sur une formule d'interpolation* publicado nas *Memorias da Sociedade Real das Sciencias de Liège* — (2.ª série, tomo X).

$$\frac{h^\beta f(x_i + h)}{F(x_i + h)} = B_1 \left[h^{\beta - 1} f(x_i) + h^\beta \; f'(x_i) + \cdots \right]$$

$$+ B_2 \left[h^{\beta - 2} f(x_i) + h^{\beta - 1} f'(x_i) + \frac{1}{2} h^\beta f''(x_i) + \ldots \right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ B_\beta \left[f(x_i) + h f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta - 1)!} h^{\beta - 1} f^{\beta - 1}(x_i) + \ldots \right]$$

$$+ R h^\beta,$$

onde o termo Rh^β contém as potencias de h, iguaes e superiores a β, que resultam dos outros termos:

$$\frac{A_1 f(x_i + h)}{x_i - x_1 + h}, \frac{A_2 f(x_i + h)}{(x_i - x_1 + h)^2}, \text{ etc.}$$

da funcção considerada.

Temos pois

$$M_1 = B_1 f(x_i) + B_2 f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta - 1)!} B_\beta f^{\beta - 1}(x_i)$$

$$M_2 = B_2 f(x_i) + B_3 f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta - 2)!} B_\beta f^{\beta - 2}(x_i)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_\beta = B_\beta f(x_i);$$

e portanto

$$f(x) = F(x) \sum_{i=1}^{k} \left\{ \left[\frac{B_1}{x - x_i} + \frac{B_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x - x_i)^\beta} \right] y_i \right.$$

$$+ \left[\frac{B_2}{x - x_i} + \frac{B_3}{(x - x_i)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x - x_i)^{\beta - 1}} \right] y'_i$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{(\beta - 1)!} \cdot \frac{B_\beta}{x - x_i} y_i^{(\beta - 1)} \Big\} .$$

Esta formula dá uma funcção inteira do grão $\alpha + \beta + \ldots + \lambda - 1$ que resolve a questão proposta. Vê-se que, para a applicar, é necessario decompôr em fracções simples a fracção $\frac{1}{F(x)}$.

Nota.—Tanto esta formula, como a de Lagrange, quando algumas das quantidades k, α, β, ... se tornam infinitas, dão séries, cuja convergencia será estudada n'outra parte d'este Curso.

IV

Desenvolvimento em série das funcções implicitas

117.—A formula de Maclaurin applica-se tanto ás funcções explicitas, como ás funcções implicitas. Aqui vamos fazer applicação d'ella á funcção implicita y definida pelas equações

$$y = f(u), \; u = t + x \varphi_1(u) + x^2 \varphi_2(u) + \ldots + x^k \varphi_k(u),$$

que vamos desenvolver em série ordenada segundo as potencias de x.

Derivando a segunda equação relativamente a x e a t, vem

$$\frac{du}{dx} = \varphi_1(u) + 2x \varphi_2(u) + \ldots + kx^{k-1} \varphi_k(u)$$

$$+ [x \varphi'_1(u) + x^2 \varphi'_2(u) + \ldots + x^k \varphi'_k(u)] \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dt} = 1 + [x \varphi'_1(u) + \ldots + x^k \varphi'_k(u)] \frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} [\varphi_1(u) + 2x \varphi_2(u) + \ldots + k x^{k-1} \varphi_k(u)]$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \theta_1 \frac{du}{dt},$$

pondo

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + 2x \varphi_2(u) + \ldots + kx^{k-1} \varphi_k(u).$$

Mas é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \; \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt};$$

logo teremos

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1 \frac{dy}{dt}.$$

Derivando esta equação relativamente a x e a t e chamando θ_2 a derivada de θ_1 relativamente a x, considerando u como constante, vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx\,dt} \theta_1 + \frac{dy}{dt} \left[\theta_2 + \theta_1 \frac{d\theta_1}{du} \cdot \frac{du}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx\,dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \theta_1 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\theta_1}{du} \cdot \frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \theta_1^2 + \frac{dy}{dt} \left[\theta_2 + 2\theta_1 \frac{d\theta_1}{du} \frac{du}{dt}\right]$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\,\theta_1^2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\theta_2.$$

Derivando esta equação relativamente a x obtem-se do mesmo modo

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2\left(\frac{dy}{dt}\,\theta_1^3\right)}{dt^2} + 3\,\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\,\theta_1\,\theta_2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\theta_3,$$

e assim successivamente.

Em geral, podemos pôr

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma A\,\frac{d^{i-1}\left(\frac{dy}{dt}\,\theta_1^{\alpha}\,\theta_2^{\beta}\,\ldots\,\theta_k^{\lambda}\right)}{dt^{i-1}},$$

sendo A, i, α, β, etc. numeros inteiros que vamos determinar.

Para isso, appliquemos a formula precedente á funcção definida pelas equações

$$y = f(u),\ u = t + x + x^2 + \ldots + x^k,$$

o que dá

$$\theta_1 = 1 + 2x + \ldots + kx^{k-1} = \frac{du}{dx},\ \theta_2 = \frac{d^2u}{dx^2},\ \theta_3 = \frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.};$$

e teremos

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma A\,\frac{d^iy}{dt^i}\left(\frac{du}{dx}\right)^{\alpha}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^{\beta}\ldots\left(\frac{d^ku}{dx^k}\right)^{\lambda}.$$

Por outra parte, temos (n.º 98 — IV)

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma\,\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}\ldots(k!)^{\lambda}}\cdot\frac{d^iy}{du^i}\left(\frac{du}{dx}\right)^{\alpha}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^{\beta}\ldots$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + k\lambda = n,$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Comparando as duas formulas precedentes obtem-se o valor de A e os de α, β, ..., e vem pois

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta\ldots(k!)^\lambda} \cdot \frac{d^{i-1}\left[\frac{dy}{dt}\,\theta_1{}^\alpha\,\theta_2{}^\beta\ldots\theta_k{}^\lambda\right]}{dt^{i-1}}.$$

Pondo agora $x = 0$ nas formulas

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + \ldots + kx^{k-1}\varphi_k(u)$$

$$\theta_2 = 2\varphi_2(u) + 2 \cdot 3x\,\varphi_3(u) + \ldots + k(k-1)\,x^{k-2}\varphi_k(u)$$

....

$$\theta_k = k!\,\varphi_k(u),$$

vem

$$\theta_1 = \varphi_1(u),\ \theta_2 = 2!\,\varphi_2(u),\ \ldots,\ \theta_k = k!\,\varphi_k(u),$$

$$\theta_{k+1} = \theta_{k+2} = \ldots = 0;$$

e portanto

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{d^{i-1}\left[f'(t)\,(\varphi_1(t))^\alpha\,(\varphi_2(t))^\beta\ldots(\varphi_k(t))^\lambda\right]}{dt^{i-1}}$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \ldots + k\lambda = n,\ i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Applicando ás funcções propostas a formula de Maclaurin vem pois o desenvolvimento pedido:

$$y=f(t)+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{x^n}{n!}\sum\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\frac{d^{i-1}\left[f'(t)\,\varphi_1(t)^\alpha\ldots\varphi_k(t)^\lambda\right]}{dt^{i-1}}+R.$$

D'esta formula, que publicámos no nosso artigo *Sur le développement des fonctions implicites* (*Journal de Mathématiques de Liouville*—3.ª série, tomo VII), tira-se, pondo $k=1$, a formula notavel

$$y=f(t)+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{x^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}\left[f'(t)\,\varphi_1(t)^n\right]}{dt^{n-1}}+R,$$

devida a Lagrange (¹), que dá o desenvolvimento em série da funcção y definida pelas equações

$$y=f(u),\ u=t+x\varphi_1(y).$$

As condições de convergencia das séries precedentes, que se não podem tirar da consideração do resto, por ser muito complicado, serão dadas n'outra parte d'este Curso.

V

Maximos e minimos

118. — Diz-se que a funcção $y=f(x)$ é *maxima* ou tem um valor *maximo* no ponto $x=x_1$ quando o valor $f(x_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella tem nos pontos visinhos de x_1; isto é, quando existe um valor h_1 tal que a desigualdade

$$f(x_1+h)-f(x_1)<0$$

é satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$.

(¹) *Oeuvres*, tomo III.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* ou tem um valor *minimo* no ponto $x = x_1$ se a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

é satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$.

Se a funcção dada tem uma derivada finita no ponto x_1 a funcção cresce com x na visinhança do ponto x_1 se o numero $f'(x_1)$ é positivo e decresce se este numero é negativo (n.º 61). Logo, para que no ponto x_1 a funcção tenha um valor maximo ou minimo, deve ser $f'(x_1) = 0$.

Supponhamos pois que é $f'(x_1) = 0$ e que a funcção $f(x)$ tem no ponto x_1 uma derivada de segunda ordem finita e differente de zero. Temos (n.os 62 e 53)

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = hf'(x_1 + \theta h) = \theta h^2 [f''(x_1) + \varepsilon_1],$$

onde ε_1 representa uma quantidade infinitamente pequena com h, e θ uma quantidade positiva menor do que a unidade; e esta formula (attendendo a que, por ε_1 tender para zero quando h tende para zero, existe um numero positivo h_1 tal que a desigualdade $|\varepsilon_1| < |f''(x_1)|$ é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$) mostra que é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$ a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

se o numero $f''(x_1)$ é positivo, ou a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

se o numero $f''(x_1)$ é negativo. Logo a $x = x_1$ corresponde um valor minimo de y quando $f''(x_1)$ é positivo, e um valor maximo quando $f''(x_1)$ é negativo.

Se fôr $f''(x_1) = 0$ e a funcção $f(x)$ tiver uma derivada de terceira ordem finita e differente de zero no ponto x_1, temos a igualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \frac{1}{2} h^2 f''(x_1 + \theta h)$$

$$= \frac{1}{2} \theta h^3 [f'''(x_1) + \varepsilon_2],$$

onde ε_2 representa uma quantidade infinitamente pequena com h; e esta igualdade, attendendo a que existe um numero h_1 tal qual que a desigualdade $| \varepsilon_2 | < | f'''(x_1) |$ é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $- h_1$ e h_1, mostra que o signal da differença $f(x_1 + h) - f(x_1)$ muda com o signal de h quando h varia desde $- h_1$ até h_1. Logo no ponto x_1 a funcção $f(x)$ não póde ter valor maximo nem minimo.

Continuando do mesmo modo, chega-se á regra seguinte para achar os valores de x que tornam a funcção y maxima ou minima:

Resolve-se a equação $f'(x) = 0$, e substitue-se cada um dos valores obtidos para x nas derivadas seguintes $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^n(x)$ até encontrar uma $f^n(x)$ que não se annulle. Se esta derivada fôr d'ordem impar, ao valor de x considerado não corresponde nem maximo nem minimo; se fôr de ordem par, ao valor de x considerado corresponde um maximo se este valor tornar $f^n(x)$ negativa, e um minimo se tornar $f^n(x)$ positiva.

Substituindo depois estes valores de x na funcção proposta obtéem-se os valores maximos e minimos procurados.

Exemplo 1.° — Para achar os valores de x que tornam maxima ou minima a funcção

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

temos de resolver a equação

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

que dá $x = 1$ e $x = 2$.

Substituindo o valor $x = 1$ na derivada

$$y'' = 12x - 18$$

vem um resultado negativo, e portanto a $x = 1$ corresponde um maximo $y = 1$ da funcção considerada.

Substituindo o valor $x = 2$ na mesma derivada vem um resultado positivo e portanto a $x = 2$ corresponde um minimo $y = 0$.

Exemplo 2.° — Achar os pontos da cycloide onde o raio de curvatura é maximo, e onde é minimo.

Para isso basta procurar os valores de t que tornam (n.° 89 — III) a funcção

$$f(t) = 1 - \cos t$$

maxima ou minima.

Temos para isso, considerando uma arcada da cycloide, $f'(t) = \operatorname{sen} t = 0$, o que dá $t = 0, \pi, 2\pi$; e portanto os pontos onde o raio de curvatura póde ser maximo ou minimo são:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = \pi r \\ y = 2r \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = 2\pi r \\ y = 0 \end{array}\right\}.$$

A derivada $f''(t) = \cos t$ é alternadamente igual a $+1$ e a -1; logo no primeiro ponto o raio de curvatura é minimo, no segundo é maximo e no terceiro é minimo.

Substituindo os valores de t na expressão de R vê-se que o maximo valor do raio de curvatura é $4r$ e o minimo valor é zero, como já sabiamos.

Exemplo 3.° — No caso da funcção $y = \cos \frac{1}{x}$ temos de resolver a equação

$$y' = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

que dá, considerando só os valores positivos de x, $x = \frac{1}{k\pi}$, onde $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

A derivada segunda

$$y'' = -\frac{2}{x^3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x}$$

dá $y'' = k^4 \pi^4 \cos k\pi$; logo a $x = \frac{1}{\pi}$, $x = \frac{1}{2\pi}$, etc. correspondem alternadamente o minimo -1 e o maximo $+1$.

Temos aqui o primeiro exemplo d'uma funcção que, quando x se approxima indefinidamente de zero, oscilla entre $+1$ e -1; de modo que, entre zero e um outro valor determinado dado a x, tem um numero infinito de maximos e minimos. No ponto $x = 0$ a funcção é indeterminada.

Exemplo 4.° — Consideremos a funcção $y = X_n$, X_n representando um polynomio de Legendre (n.° 110).

Como as n raizes da equação $X_n = 0$ são reaes e desiguaes e estão comprehendidas entre $+1$ e -1, a equação $X'_n = 0$ tem (n.° 62) $n - 1$ raizes reaes e desiguaes comprehendidas entre os mesmos limites, e nenhuma d'ellas annulla X''_n. Logo o polynomio X_n terá $n - 1$ maximos e minimos comprehendidos no intervallo de $x = +1$ a $x = -1$. No caso, por exemplo, do polynomio

$$X_3 = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

a equação $X'_3 = 0$ dá $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$ e $x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$. A primeira raiz torna X''_3 positiva e a segunda torna-a negativa; logo á primeira corresponde um minimo $-\sqrt{\frac{1}{5}}$ e á segunda um maximo $+\sqrt{\frac{1}{5}}$.

119. — Pela regra precedente acham-se os pontos em que a funcção $f(x)$ é maxima ou minima e admitte uma derivada finita. Para achar pois todos os pontos em que $f(x)$ é maxima ou minima, é necessario considerar ainda os pontos em que esta funcção não admitte derivada, e os pontos em que a derivada é infinita.

Seja x_1 um d'estes pontos. Para vêr se n'elle a funcção é maxima ou minima, basta vêr se a derivada $f'(x_1 + h)$ muda ou não de signal com h, quando h varia desde $-h_1$ até $+h_1$. Com effeito, se $f'(x_1 + h)$ muda de signal com h e passa de negativa para positiva, a funcção $f(x)$ passa de (n.° 61) decrescente para crescente, e portanto no ponto x_1 é minima. Se $f'(x_1 + h)$ muda de signal como h e passa de positiva para negativa, a funcção $f(x)$ é maxima no ponto x_1. Se $f'(x_1 + h)$ não muda de signal com h, a funcção $f(x)$ não é maxima nem minima no ponto x_1.

Applica-se este mesmo methodo quando se procuram os maximos e minimos correspondentes aos pontos que satisfazem á equação $f'(x) = 0$, se á funcção $f(x)$ não admitte no ponto x_1 algumas das derivadas a que é necessario recorrer no methodo exposto no numero anterior, ou se alguma d'estas derivadas é infinita n'este ponto, e ainda se o methodo anterior leva a calculos complicados.

EXEMPLO. — A funcção

$$y = f(x) = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}$$

dá

$$y' = \frac{2}{3}(x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

A derivada y' torna-se pois infinita quando é $x = a$, e póde portanto a funcção ser maxima ou minima no ponto a.

Pondo $x = a + h$ em $f'(x)$ vem o resultado $\frac{2}{3} h^{-\frac{1}{3}}$, e portanto $f'(a + h)$ passa no ponto a de negativa para positiva. A $x = a$ corresponde pois um valor minimo b da funcção dada.

120. — Se a funcção cujos maximos e minimos queremos achar, fôr a funcção implicita y definida pela equação $F(x, y) = 0$, determinaremos, pela eliminação de x e y entre esta equação e a equação

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0,$$

os valores de x que tornam y maximo ou minimo e os valores de y correspondentes. Substituindo depois estes valores nas derivadas y'', y''', etc., vê-se, pela ordem da primeira derivada que não se annulla e pelo signal do resultado, quaes d'estes valores de y são maximos ou minimos.

EXEMPLO. — Procuremos as ordenadas maxima e minima da hyperbole cuja equação é

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 50 = 0.$$

Eliminando x e y entre a equação precedente e a equação

$$y' = \frac{4x + 3y}{4y - 3x} = 0,$$

ou

$$4x + 3y = 0,$$

vem $x = \pm 3$, $y = \mp 4$.

Derivando y' e pondo no resultado $x = 3$ e $y = -4$, vem para y'' um valor negativo; logo á abscissa $x = 3$ corresponde uma ordenada maxima $y = -4$, ou uma ordenada minima negativa cujo valor absoluto é igual a 4. Os valores $x = -3$, $y = 4$ dão a y'' um valor positivo; logo á abscissa $x = -3$ corresponde uma ordenada minima $y = 4$.

121. — *Funcções de duas variaveis independentes.* — Diz-se que a funcção de duas variaveis $z = f(x, y)$ é *maxima* no ponto $x = x_1$, $y = y_1$, se o valor $f(x_1, y_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella toma nos pontos visinhos de (x_1, y_1); isto é, se existe um valor δ tal que a desigualdade $f(x_1 + h, y_1 + k) < f(x_1, y_1)$ seja satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* no ponto (x_1, y_1) se a desigualdade

$$f(x_1 + h, y_1 + k) > f(x_1\ y_1)$$

é satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Supponhamos agora que $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ são funcções continuas de x e y, e procuremos os valores de x e y que podem tornar z maximo ou minimo. Para isso, podemos considerar a variavel independente y como funcção arbitraria de x, e portanto será condição necessaria para que z seja maximo ou minimo que seja satisfeita a equação

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' = 0,$$

que, por ser y' arbitraria, dá

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Estas equações determinam os valores de x e y que podem dar a z um valor maximo ou minimo. Seja x_1, y_1 um systema dos valores de x e y que satisfazem a estas equações.

Derivando z' e attendendo á segunda das equações precedentes, vem o trinomio

$$z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}y'^2,$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[\left(y' + \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\right)^2 + \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}\right],$$

que, para aos valores x_1 e y_1 de x e y corresponder um valor maximo ou minimo de z, deve ser nullo ou ter sempre o mesmo signal, qualquer que seja o valor de y' (mesmo infinito), quando se substitue x e y por x_1 e y_1. Para isso é necessario evidentemente que uma das condições

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) \geqq 0$$

seja satisfeita por estes valores de x e y; e o signal de z'' será o mesmo que o signal que toma $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

A segunda d'estas condições é mesmo sufficiente para que no ponto (x_1, y_1) a funcção z seja maxima ou minima, porque, quando ella tem logar, z'' é differente de zero e tem sempre o mesmo signal, qualquer que seja y'.

Se fôr $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 x}{\partial x\,\partial y} \gtrless 0$ no ponto (x_1, y_1), a expressão

$$z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}y'$$

mostra que o signal de z'' muda com o valor de y', e portanto a funcção z não é maxima nem minima no ponto (x_1, y_1).

Se fôr no ponto (x_1, y_1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \gtrless 0,$$

z'' é nullo quando a y' se dá o valor α que tem a fracção $\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} : \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ no ponto considerado. Recorrendo n'este caso ás derivadas seguintes, ponha-se $x = x_1$, $y = y_1$, $y' = \alpha$, $y'' = y''' = \ldots = 0$ nas expressões de z''', $z^{(4)}$, etc., até encontrar uma que não seja nulla. Se esta derivada fôr d'ordem impar, a funcção z não póde ser maxima nem minima no ponto (x_1, y_1); se esta derivada fôr d'ordem par e o seu signal fôr differente do signal de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, tambem z não é maxima nem minima no ponto considerado; finalmente se esta derivada fôr d'ordem par e tiver o signal de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, a funcção será maxima ou minima no ponto (x_1, y_1) segundo este signal é $-$ ou $+$.

Se os valores x_1 e y_1 satisfizerem ás equações $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$, sem que annullem $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, o calculo anterior não é applicavel, mas pode-se em todo elle trocar x por y e obtéem-se as formulas applicaveis a este caso.

Se fôr $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$ no ponto (x_1, y_1), z'' é identicamente nulla, e é portanto necessario recorrer á derivada z''' que deve ser nulla, qualquer que seja y', para que n'este ponto possa z ser maxima ou minima, e depois á derivada $z^{(4)}$, que deve ser nulla ou ter sempre o mesmo signal qualquer que seja y', etc.

Podemos resumir a parte principal d'esta discussão na regra seguinte:

Para achar os valores maximos e minimos de z, resolva-se relativamente a x e a y as equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

e substitua-se cada systema dos valores resultantes na expressão

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Os systemas de valores que dão $A > 0$ tornam z ma-

ximo se o valor correspondente de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *é negativo, e minimo se este valor é positivo.*

Os systemas de valores que dão $A < 0$ *não tornam* z *maximo nem minimo.*

Para estudar o que acontece nos pontos em que é $A = 0$, *é necessario recorrer ás derivadas de* z *de ordem superior á segunda.*

Exemplo. — Achar a mais curta distancia entre um ponto (x_0, y_0, z_0) e um plano

$$z = Ax + By + C.$$

Temos de achar os valores de x e y que tornam maxima ou minima a funcção

$$D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

onde z é dado em funcção de x e y pela equação do plano.

As equações que determinam x e y são pois

$$\frac{\partial D^2}{\partial x} = 2(x - x_0) + 2A(z - z_0) = 0, \quad \frac{\partial D^2}{\partial y} = 2(y - y_0) + 2B(z - z_0) = 0;$$

e como estas equações são as de uma recta perpendicular ao plano, segue-se que o ponto pedido é o pé da perpendicular abaixada do ponto sobre o plano, como já se sabia.

Tirando d'estas equações e da equação do plano os valores de x, y e z e substituindo na expressão de D, vem a formula

$$D = \frac{Ax_0 + By_0 + C - z_0}{(1 + A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}},$$

que dá a minima distancia pedida.

Podemos verificar que o precedente valor de D é um minimo. Com effeito, pondo na expressão

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 D^2}{\partial x \, \partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} = 2(A^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} = 2(B^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 D^2}{\partial x \, \partial y} = 2AB$$

vem o resultado $4(1 + A^2 + B^2)$, que, por ser positivo assim como a derivada $\frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2}$, mostra que o valor precedente de D^2 é um minimo.

VI

Indeterminações

122.—Se a funcção $f(x)$ é indeterminada quando $x = a$, chama-se *verdadeiro valor da funcção* no ponto a o limite para que tende $f(x)$ quando x tende para a. Vamos procurar este limite em alguns casos mais importantes.

I — Se fôr

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

e as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ se annullarem quando $x = a$, a funcção reduz-se a $\frac{0}{0}$ e vamos achar o seu verdadeiro valor. Por ser (n.° 62)

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)},$$

quando as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são continuas no ponto a e admittem derivadas de primeira ordem finitas nos pontos visinhos de a, temos, n'este caso,

$$f(a) = \lim_{h=0} f(a+h) = \lim_{h=0} \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)}.$$

Se fôr $\varphi'(a) = 0$, $\psi'(a) = 0$, temos do mesmo modo

$$f(a) = \lim_{h=0} \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)} = \lim_{h=0} \frac{\varphi''(a+\theta_2 h)}{\psi''(a+\theta_2 h)}.$$

Em geral, se forem nullas as funcções $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{n-1}(a)$ e $\psi(a)$, $\psi'(a)$, ..., $\psi^{n-1}(a)$, teremos

$$f(a) = \lim_{h=0} \frac{\varphi^n(a + \theta_n h)}{\psi^n(a + \theta_n h)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi^n(x)}{\psi^n(x)}.$$

Por esta formula calcula-se o valor de $f(a)$ quando se sabe achar o limite para que tende o seu segundo membro.

Se as funcções $\varphi^n(x)$ e $\psi^n(x)$ forem continuas no ponto a, esta formula dá

$$f(a) = \frac{\varphi^n(a)}{\psi^n(a)}.$$

No caso de ser $a = \infty$, podemos pôr $x = \frac{1}{t}$ e depois fazer tender t para 0. Temos d'este modo

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{t=0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t=0} \frac{\frac{1}{t^2}\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}\psi'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

e a regra anterior é ainda applicavel.

Exemplo. — A funcção

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \operatorname{sen} x}$$

é indeterminado quando $x = 0$, assim como a funcção

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x}.$$

A fracção

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{-\cos x}{e^x + \operatorname{sen} x}$$

é igual a -1 quando é $x = 0$; logo -1 é o verdadeiro valor de y correspondente a $x = 0$.

II — Seja agora $f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$ e procuremos o verdadeiro valor d'esta fracção, isto é, o limite para que tende $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando x tende para a.

Representando por x_0 um numero tal que x esteja comprehendido entre x_0 e a, e suppondo que as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ admittem derivadas finitas no ponto x_0 e nos pontos comprehendidos entre x_0 e a e que $\psi'(x)$ é differente de zero n'aquelles pontos, temos

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{[\varphi(x) - \varphi(x_0)]\left[1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}\right]}{[\psi(x) - \psi(x_0)]\left[1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right]} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta h)\left(1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}\right)}{\psi'(x_0 + \theta h)\left(1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right)},$$

onde é $h = x - x_0$.

Suppondo agora que a fracção $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ tende para um limite determinado A, quando x tende para a, tambem a fracção $\frac{\varphi'(x_0 + \theta h)}{\psi'(x_0 + \theta h)}$ tende para o mesmo limite quando x_0 tende para a, visto que $x_0 + \theta h$ está comprehendido entre x_0 e x e portanto entre x_0 e a. Podemos pois dar a x_0 um valor tão proximo de a que esta fracção diffira tão pouco quanto se queira de A.

Depois de escolher d'este modo x_0, por ser

$$\lim_{x = a} \frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} = 1,$$

podemos dar a ε um valor tão pequeno que, para os valores de x comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, a fracção $\frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}$ diffira da unidade tão pouco quanto se queira.

Podemos pois dar a x_0 um valor tão proximo de a e a ε um valor tão pequeno que, para todos os valores de x comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, a fracção $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ diffira tão pouco quanto se queira de A; e temos portanto (1)

$$f(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

e, se $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ são continuas no ponto a,

$$f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Logo acha-se o verdadeiro valor da fracção considerada pela mesma regra que no caso anterior.

Se fôr $A = \infty$, teremos

$$\lim_{x=a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = 0,$$

e portanto $\lim\limits_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$. O theorema é pois ainda applicavel.

Exemplo. — A funcção

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\log x}{x^{-n}},$$

dá $\frac{\infty}{\infty}$ quando é $x = 0$. Mas o quociente

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n}$$

é nullo quando $x = 0$; logo é tambem nulla a funcção considerada.

III — Se a funcção

(1) A demonstração precedente é tirada do *Calcolo differentiale* de Genocchi e Peano (Turin, 1884).

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

se reduzir a $0 \times \infty$ quando $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á fracção $\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$, que se reduz a $\dfrac{0}{0}$, ou a fracção $\dfrac{\psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$, que se reduz a $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemplo. — A funcção

$$y = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

dá $0 \times \infty$ quando é $n = \infty$. Para achar o seu verdadeiro valor, consideremos a fracção

$$y = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\dfrac{1}{n}}$$

que se reduz a $\dfrac{0}{0}$, e que dá, derivando o numerador e o denominador relativamente a n, a fracção

$$\frac{-\dfrac{1}{n^2}\, x^{\frac{1}{n}} \log x}{-\dfrac{1}{n^2}},$$

que se reduz a $\log x$ quando é $n = \infty$. Logo temos a formula notavel

$$\log x = \lim_{n=\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

IV — Se a funcção $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ se reduzir a

$\infty - \infty$ quando é $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á fracção

$$\frac{\dfrac{1}{\psi(x)} - \dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$.

V — Se a funcção $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$ se reduzir a 0^0, 1^∞, ∞^0 quando é $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á funcção

$$\log y = \psi(x) \log \varphi(x)$$

que se reduz a $0 \times \infty$.

Exemplo. — A funcção

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

quando $n = \infty$, dá 1^∞. Para achar o seu verdadeiro valor, determinemos o verdadeiro valor da funcção

$$\log y = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$, o que dá $\log y = x$, e portanto $y = e^x$. Temos pois a formula

$$e^x = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I

Curvas planas

123. — *Contacto das curvas planas.* — Sejam

$$y = f(x),\ Y = F(X)$$

as equações de duas curvas que passam por um ponto cujas coordenadas são x_0 e y_0. Se a differença $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ de duas ordenadas das curvas, correspondentes á mesma abscissa $x_0 + h$, fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h, diz-se que as curvas têem no ponto (x_0, y_0) um *contacto de ordem n.*

Se pelo ponto (x_0, y_0) passar uma terceira curva $y = \varphi(x)$ que tenha com a curva $y = f(x)$ um contacto de ordem m e se fôr $n > m$, a segunda das curvas consideradas approxima-se mais da curva $y = f(x)$, na visinhança do ponto (x_0, y_0), do que a terceira curva $y = \varphi(x)$. Com effeito, representando por β e α as differenças $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ e $\varphi(x_0 + h) - f(x_0 + h)$, é por definição

$$\beta = h^n (A + \varepsilon),\ \alpha = h^m (B + \varepsilon'),$$

onde A e B representam quantidades finitas differentes de zero, e ε e ε' quantidades infinitamente pequenas com h; e portanto temos a igualdade

$$\alpha - \beta = h^m [B + \varepsilon' - h^{n-m} (A + \varepsilon)],$$

a qual faz vêr que se póde dar a h_1 um valor tão pequeno que $\alpha - \beta$ tenha o signal de $h^m (B + \varepsilon')$, isto é o signal de α, quando $|h| < h_1$. Será pois, para todos os valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e $+h_1$, $\beta < \alpha$.

124. — As condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n decorrem immediatamente da formula de Taylor, que dá

$$F(x_0 + h) - f(x_0 + h) = F(x_0) - f(x_0)$$

$$+ h [F'(x_0) - f'(x_0)] + \ldots + \frac{h^n}{n!} [F^n(x_0) - f^n(x_0)]$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} [F^{n+1}(x_0 + \theta h) - f^{n+1}(x_0 + \theta h)].$$

Com effeito, se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ admittirem derivadas até á ordem $n+1$ continuas no ponto x_0, para que a differença $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ seja infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h, é necessario e sufficiente que as differenças

$$F(x_0) - f(x_0),\ F'(x_0) - f'(x_0),\ \ldots,\ F^n(x_0) - f^n(x_0)$$

sejam nullas, e que a differença $F^{n+1}(x_0) - f^{n+1}(x_0)$ seja differente de zero, o que dá o seguinte:

Theorema. — *Se as funcções $F(x)$ e $f(x)$ admittirem derivadas até á ordem $n+1$ continuas no ponto x_0, as condições necessarias e sufficientes para que as curvas consideradas tenham no ponto (x_0, y_0) um contacto de ordem n são:*

$$f(x_0) = F(x_0),\ f'(x_0) = F'(x_0),\ \ldots,\ f^n(x_0) = F^n(x_0),$$

e que $f^{n+1}(x_0) - F^{n+1}(x_0)$ seja differente de zero.

125. — Seja $y = f(x)$ a equação de uma curva dada e $Y = F(X)$ uma equação com $n+1$ parametros arbitrarios, que representa uma familia de curvas. A curva d'esta familia que tem com a curva dada um contacto de ordem mais elevada no ponto (x_0, y_0) diz-se *osculadora* da curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0). Para obter esta curva deve-se dispôr dos $n + 1$ parametros de modo que sejam satisfeitas as $n + 1$ equações de condição precedentes, e o contacto das duas curvas será de ordem n ou de ordem superior a n, segundo a differença $f^{n+1}(x_0) - F^{n+1}(x_0)$ é differente de zero ou igual a zero.

126. — A doutrina precedente, devida a Lagrange [1], vae-nos apresentar, debaixo de um novo ponto de vista, alguns dos resultados obtidos no Capitulo III.

I — Se quizermos achar a *recta osculadora* da curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0), temos de determinar as constantes A e B que entram na equação

$$Y = AX + B$$

da recta, de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de primeira ordem:

$$y_0 = Ax_0 + B,\ f'(x_0) = A.$$

A equação da recta pedida é pois

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0),$$

e portanto é tangente á curva dada.

Por ser $Y'' = Y''' = \ldots = 0$, a tangente tem com a curva proposta um contacto de segunda ordem nos pontos que satisfazem ás condições $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \gtrless 0$; um contacto de terceira ordem nos pontos que satisfazem ás condições $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^4(x_0) \gtrless 0$; etc.

II — Se quizermos achar o *circulo osculador* da curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0), temos de determinar as constantes arbitrarias a, b, R que entram na equação

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

---

[1] Lagrange: — *Théorie des fonctions analytiques.*

de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de segunda ordem:

$$f(x_0) = F(x_0),\ f'(x_0) = F'(x_0),\ f''(x_0) = F''(x_0);$$

que, por serem as funcções $F(x_0)$, $F'(x_0)$ e $F''(x_0)$ dadas pelas equações:

$$(x_0 - a)^2 + [F(x_0) - b]^2 = R^2$$

$$x_0 - a + [F(x_0) - b]\, F'(x_0) = 0$$

$$1 + [F'(x_0)]^2 + [F(x_0) - b]\, F''(x_0) = 0,$$

se reduzem a [pondo y_0, y'_0, y''_0 em logar de $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$]

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$$

$$x_0 - a + (y_0 - b)\, y'_0 = 0$$

$$1 + y'^2_0 + (y_0 - b)\, y''_0 = 0.$$

D'estas equações tiram-se os valores das coordenadas a e b do centro e o valor do raio R do circulo osculador:

$$R = \frac{(1 + y'^2_0)^{\frac{3}{2}}}{y''_0},\ a = x_0 - y'_0 \frac{1 + y'^2_0}{y''_0},\ b = y_0 + \frac{1 + y'^2_0}{y''_0}.$$

Da comparação d'estas formulas com as que dão as coordenadas do centro e o raio do circulo de curvatura (n.º 88 — I), conclue-se que *o circulo de curvatura e o circulo osculador, correspondentes ao mesmo ponto de uma curva dada, coincidem.*

127.— *Pontos d'inflexão.*— A determinação dos *pontos d'inflexão* da curva $y = f(x)$ é facil de conseguir por meio do theorema do n.º 86 — III. Com effeito, se $f''(x)$ é uma funcção continua no ponto x_0, da igualdade

$$f''(x_0 + h) = f''(x_0) + \varepsilon_1,$$

onde ε_1 representa uma quantidade infinitamente pequena com

h, conclue-se que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto x_0, é necessario que seja $f''(x_0) = 0$. N'este caso, suppondo a funcção $f'''(x)$ finita no ponto x_0, a igualdade (n.º 52)

$$f''(x_0 + h) = h\,[f'''(x_0) + \varepsilon_2],$$

onde ε_2 representa uma quantidade infinitamente pequena com h, mostra que $f''(x_0 + h)$ muda de signal com h, e portanto que (x_0, y_0) é um ponto d'inflexão, se $f'''(x_0)$ é differente de zero.

No caso de ser $f'''(x_0) = 0$ e de a funcção $f^4(x)$ ser finita no ponto x_0, a igualdade (n.os 62 e 52)

$$f''(x_0 + h) = \frac{h^2}{2\,!} f^4(x_0 + \theta h) = \frac{\theta h^3}{2\,!}\,[f^4(x_0) + \varepsilon_3]$$

mostra que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto (x_0, y_0), é necessario que seja $f^4(x_0) = 0$. Logo, se esta igualdade não é satisfeita, (x_0, y_0) não é ponto d'inflexão.

Continuando do mesmo modo, conclue-se a regra seguinte:

Para achar os pontos de inflexão de uma curva cuja equação é dada, determinem-se x e y por meio da equação da curva e da equação $y'' = 0$.

Substitua-se depois cada grupo (x_0, y_0) de valores resultantes nas derivadas seguintes de y. Se a primeira derivada que não se annulla fôr de ordem impar, o ponto (x_0, y_0) é um ponto de inflexão, se fôr d'ordem par o ponto não é de inflexão.

Exemplo 1.º — Consideremos a curva cuja equação é

$$y = A \operatorname{sen}(ax + b) + B.$$

Teremos

$$y' = Aa \cos(ax + b),\ y'' = -\,Aa^2 \operatorname{sen}(ax + b);$$

e como os valores de x que tornam y'' nulla são dados pela relação $ax + b = k\pi$, onde k representa um inteiro qualquer positivo, negativo ou nullo, e como estes valores de x não annullam a terceira derivada

$$y''' = -\,Aa^3 \cos(ax + b),$$

os pontos $\left(\frac{-\,b + k\pi}{a},\ B\right)$ serão os pontos d'inflexão da curva considerada.

Exemplo 2.° — A funcção $y = x + (x - 1)^7$ dá

$$y' = 1 + 7\,(x - 1)^6,\ y'' = 7\,.\,6\,(x - 1)^5,\ \ldots,\ y^{(7)} = 7\,!$$

Como o valor $x = 1$ annulla a derivada y'', e como a primeira das derivadas seguintes que este valor de x não annulla é d'ordem impar, o ponto $(1, 1)$ é um ponto d'inflexão.

128. — No processo anterior para achar os pontos d'inflexão parte-se da hypothese que a derivada y'' é continua. Logo póde ainda haver outros pontos d'inflexão em que esta derivada não exista ou seja discontinua. Além d'isso, se y'' é continua no ponto (x_0, y_0), mas alguma das derivadas y''', $y^{(4)}$, etc., a que é necessario recorrer, não existe ou é infinita n'este ponto, não se póde distinguir pelo processo anterior se o ponto (x_0, y_0) é ou não d'inflexão. N'estes casos, para achar os pontos d'inflexão, recorre-se principalmente ao theorema do n.° 86 — II.

Exemplo 1.° — A funcção $y = b + (x - a)^{\frac{5}{3}}$ dá

$$y' = \frac{5}{3}\,(x - a)^{\frac{2}{3}},\ y'' = \frac{10}{9}\,(x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

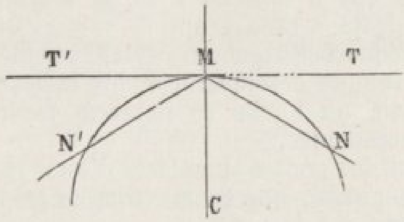
Como $x = a$ torna y'' infinita, vamos vêr se o ponto (a, b) póde ser d'inflexão. Para isso, notemos que y'' é positiva quando é $x > a$ e é negativa quando é $x < a$; logo á direita do ponto (a, b) estando a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, e á esquerda d'este ponto estando a concavidade voltada no sentido contrario, o ponto é d'inflexão (n.° 86 — II).

Exemplo 2.° — A funcção $y = b + (x - a)^{\frac{7}{3}}$ dá

$$y'' = \frac{28}{9}\,(x - a)^{\frac{1}{3}},\ y''' = \frac{28}{27}\,(x - a)^{-\frac{2}{3}}.$$

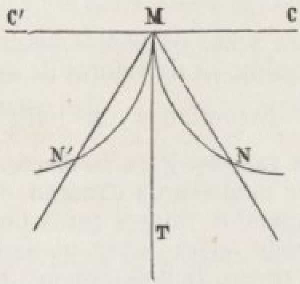
No ponto (a, b) annulla-se y'', mas y''' torna-se infinita, e o methodo anterior não é applicavel. Raciocinando porém como no exemplo anterior conclue-se que o ponto é de inflexão.

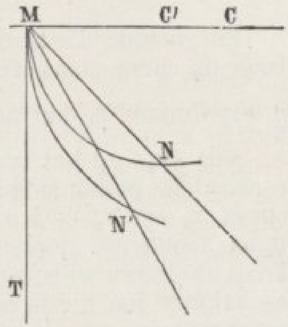
129. — *Pontos singulares das curvas planas.* — Chama-se *ponto ordinario* de uma curva plana o ponto M onde se reunem dois arcos de curva cujas secantes MN e MN' tendem para direcções oppostas da mesma tangente TT', quando N e N' tendem para M.



Aos pontos que não estão n'estas condições, chama-se *pontos singulares*. Taes são os pontos seguintes:

1.º — O *ponto de reversão de primeira especie*, que é aquelle d'onde partem dois arcos de curva cujas secantes MN e MN' tendem para a mesma direcção MT da tangente, ficando uma de cada lado da tangente.





2.º — O *ponto de reversão de segunda especie*, isto é, o ponto d'onde partem dois arcos de curva cujas secantes tendem para a mesma direcção da tangente, ficando ambas do mesmo lado da tangente.

3.º — O *ponto de suspensão*, que é aquelle d'onde parte só um arco de curva.

4.º — O *ponto anguloso*, que é aquelle d'onde partem dois arcos de curva cujas tangentes são differentes.

5.º — O *ponto isolado*, que é aquelle que está completamente separado do resto da curva.

6.° — O ponto em que se cortam dois ou mais arcos de curva.

130. — Supponhamos que $F(x, y) = 0$ é a equação da curva dada, e que a funcção $F(x, y)$ tem um unico valor real correspondente a cada grupo de valores de x e y. Estão n'este caso as equações algebricas relativamente a x e y, visto que se podem sempre desembaraçar dos radicaes. Estão tambem n'este caso, ou a elle se reduzem facilmente, muitas equações transcendentes.

A indagação dos pontos singulares d'estas curvas baseia-se no theorema seguinte, que é uma simples traducção geometrica do theorema 1.° do n.° 75:

Se a funcção $F(x, y)$ e as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ forem continuas, os pontos singulares da curva dada satisfazem ás equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Em virtude d'este theorema, para achar os pontos singulares da curva plana dada, deve procurar-se os valores de x e y que tornam as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ discontinuas ou nullas.

Seja (x_0, y_0) um systema d'estes valores. Para conhecer a especie do ponto singular (x_0, y_0), mude-se na equação da curva x_0 em $x_0 + h$ e procure-se quantos valores reaes tem y na visinhança do ponto considerado, para saber quantos arcos de curva se encontram n'este ponto. Depois procure-se os valores que n'este ponto tem y', para vêr se os arcos que se encontram no ponto (x_0, y_0) téem, ou não, a mesma tangente. Finalmente pelo signal de y''_0 veja-se a direcção da concavidade de cada arco (n.° 86).

Vamos agora dar alguns exemplos de determinação de pontos singulares, considerando sómente equações que se podem resolver relativamente a y ou a x, enviando, para um estudo desenvolvido do methodo para achar estes pontos nos outros casos, para o *Cours de Calcul différentiel* de J. A. Serret.

Exemplo 1.° — A equação da *lemniscata*

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0$$

dá, para a determinação dos pontos singulares, as equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 4x^3 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0.$$

Logo esta curva tem um unico ponto singular (0, 0).

Derivando a equação dada vem

$$yy' - x + 2x^3 = 0, \quad yy'' + y'^2 - 1 + 6x = 0,$$

e portanto no ponto (0, 0) temos $y' = \pm 1$.

Por outra parte a equação da curva, escripta debaixo da fórma

$$y = \pm x \sqrt{1 - x^2}$$

mostra que do ponto (0, 0) partem quatro arcos da curva.

Logo o ponto (0, 0) é um ponto singular onde se cortam dois arcos de curva, e as tangentes a estes arcos fazem angulos de 45° com o eixo das abscissas.

Exemplo 2.º — A equação da *cissoïde*

$$(a - x)\, y^2 = x^3$$

dá

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,(x - a)\, y = 0,$$

e portanto esta curva só póde ter um ponto singular (0, 0).

Por ser

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$$

conclue-se que, na visinhança do ponto (0, 0), a cada valor negativo de x correspondem dois valores imaginarios de y, e a cada valor positivo de x correspondem dois valores reaes, iguaes e de signaes contrarios de y. Como, por outra parte, se obtem para y'_0 dois valores iguaes a zero, segue-se que no ponto (0, 0) se reunem dois arcos de curva tangentes ao eixo das abscissas positivas. Logo o ponto (0, 0) é um ponto de reversão de primeira especie.

Exemplo 3.º — A curva

$$y^2 - 2x^2y + x^4 + x^5 = 0$$

tem um ponto singular unico, que é a origem das coordenadas. Escrevendo esta equação debaixo da fórma

$$y = x^2 \pm x^2\sqrt{-x}$$

vê-se que na origem se reunem dois arcos e que estão collocados do lado das abscissas negativas. Derivando-a e pondo nas equações resultantes $x = 0$ e $y = 0$, obtem-se para y'_0 dois valores iguaes a zero, e para y''_0 dois valores iguaes a $+ 2$, d'onde se conclue que ambos os arcos são tangentes ao eixo das abscissas e que téem a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas. Logo o ponto (0, 0) é de reversão de segunda especie.

Exemplo 4.º — A curva

$$y^2 - x^3 + x^2 = 0$$

tem um ponto singular, que é a origem das coordenadas. Derivando duas vezes esta equação e pondo no resultado $x = 0$, $y = 0$, obtem-se para y'_0 dois valores imaginarios e portanto a origem das coordenadas é um ponto solitario.

131. — *Pontos multiplos.* — Consideremos ainda a curva cuja equação é $F(x, y) = 0$ e o ponto (x_0, y_0) d'esta curva, e supponhamos que a funcção $F(x, y)$ admitte derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a x e a y continuas no ponto (x_0, y_0). Se uma d'estas derivadas, pelo menos, não é nulla no ponto (x_0, y_0), este ponto diz-se *ponto simples*.

Supponhamos agora que $F(x, y)$ admitte as derivadas $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ continuas no ponto (x_0, y_0). Se uma d'estas derivadas, pelo menos, não é nulla no ponto (x_0, y_0) e as derivadas de primeira ordem $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ são nullas n'este ponto, diz-se que o ponto (x_0, y_0) é um *ponto duplo*.

Em geral, supponhamos que as derivadas parciaes da funcção $F(x, y)$ até á ordem n são todas continuas no ponto (x_0, y_0). Se uma, pelo menos, das derivadas de ordem n não é nulla no ponto (x_0, y_0) e se as derivadas de ordem inferior a n são todas nullas n'este ponto, diz-se que o ponto (x_0, y_0) é um ponto *multiplo* cujo gráo de multiplicidade é n.

Supponhamos que a equação proposta é algebrica e do gráo m, e que $f(x, y) = 0$ é outra equação algebrica do gráo m' cujos coefficientes são constantes arbitrarias, excepto um que é determinado pela condição de a curva passar pelo ponto (x_0, y_0). Supponhamos tambem que se excluem dos valores dados a estas constantes aquelles que annullam $\frac{\partial f}{\partial y}$. A equação $f(x, y) = 0$ determina y como funcção de x na visinhança do ponto x_0, e esta funcção admitte derivada (n.° 75). Temos pois, pondo $x - x_0 = h$, representando por $\varphi(x)$ esta funcção e attendendo á igualdade $F(x_0, y_0) = 0$,

$$F[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi'(x_0)\right] h$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \varphi'^2(x_0)\right] h^2 + \ldots = 0.$$

Esta equação leva á determinação dos pontos em que se cortam as duas curvas consideradas na visinhança do ponto (x_0, y_0), visto que determina h e depois as equações $x = x_0 + h$, $y = \varphi(x)$ determinam as coordenadas d'estes pontos. Um d'estes pontos é o ponto (x_0, y_0).

Se o ponto (x_0, y_0) é um ponto simples, uma das quantidades $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ é differente de zero, e portanto a equação anterior tem, em geral, uma unica raiz igual a zero. Logo, em virtude de um theorema bem conhecido da theoria da eliminação algebrica [1], as curvas cortam-se, *em geral*, em $mm' - 1$ pontos, reaes ou imaginarios, differentes do ponto (x_0, y_0).

Se o ponto (x_0, y_0) é um ponto duplo, as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ e $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ são nullas, e a equação precedente tem, em geral, duas raizes iguaes a zero. Logo as curvas consideradas cortam-se,

[1] Serret: — Algèbre, tomo I, pag. 165.
Longchamps — Algèbre, Paris, 1889, pag. 431.

em geral, em $mm' - 2$ pontos, reaes ou imaginarios, differentes do ponto (x_0, y_0).

Continuando do mesmo modo, vê-se que se o ponto (x_0, y_0) é um ponto multiplo cujo grão de multiplicidade é n, as curvas consideradas cortam-se, *em geral*, em $mm' - n$ pontos, differentes do ponto (x_0, y_0).

Vê-se pois que nas questões em que se procura o numero de pontos em que se cortam duas curvas, cada ponto duplo equivale a dois pontos simples, cada ponto triplo equivale a tres pontos simples, etc. Estas considerações téem uma importancia consideravel no *Calculo Integral*.

A doutrina que precede tem logar quando o ponto (x_0, y_0) é imaginario. Veremos, com effeito, n'outro logar que o theorema 1.º do n.º 75, que lhe serve de base, tem logar no caso das variaveis imaginarias.

II

Curvas no espaço

132. — *Contacto de duas curvas no espaço.* — Sejam

$$y = f(x),\ z = f_1(x);\ Y = F(X),\ Z = F_1(X)$$

as equações de duas curvas no espaço, que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0). A distancia d de dois pontos d'estas curvas, correspondentes á mesma abscissa $x_0 + h$, será dada pela formula

$$d = \sqrt{[F(x_0 + h) - f(x_0 + h]^2 + [F_1(x_0 + h) - f_1(x_0 + h)]^2}.$$

Se d fôr infinitamente pequeno de ordem $n + 1$ relativamente a h, diz-se que as curvas consideradas téem no ponto (x_0, y_0, z_0) um contacto de ordem n. Vê-se, como no n.º 123, que n'este caso as curvas approximam-se na visinhança do ponto considerado mais uma da outra do que de qualquer outra curva com a qual tenham um contacto de ordem inferior.

Procuremos as condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n no ponto considerado. Para isso, notemos que é condição necessaria e sufficiente para que d seja infinitamente pequeno de ordem $n+1$ relativamente a h que as differenças

$$F(x_0+h) - f(x_0+h) = \alpha,\ F_1(x_0+h) - f_1(x_0+h) = \beta$$

o sejam, ou que uma seja da ordem $n+1$ e a outra de ordem superior. Com effeito, suppondo que uma das differenças é da ordem $n+1$ e que a outra é da ordem $n+1+i$, temos (n.° 50)

$$\beta = h^{n+1}(A+\varepsilon),\ \alpha = h^{n+i+1}(B+\varepsilon'),$$

onde A e B são quantidades finitas differentes de zero, e ε e ε' são quantidades infinitamente pequenas com h; e portanto

$$d = h^{n+1}\sqrt{(A+\varepsilon)^2 + h^{2i}(B+\varepsilon')^2},$$

d'onde se deduz que d é da ordem $n+1$ relativamente a h.

Reciprocamente, se d fôr da ordem $n+1$ relativamente a h, uma das quantidades α ou β será da ordem $n+1$ e a outra da mesma ordem ou de ordem superior; porque, se aquella das quantidades que é de menor ordem fosse de ordem m differente de $n+1$, tambem d seria da ordem m, em virtude do que vimos de demonstrar.

Para achar pois as condições analyticas do contacto de ordem n basta exprimir que uma das quantidades α ou β é infinitamente pequena da ordem $n+1$ relativamente a h, e que a outra é da mesma ordem ou de ordem superior. Raciocinando para isso como no caso das curvas planas (n.° 124) acha-se as equações de condição

$$f(x_0) = F(x_0),\ f'(x_0) = F'(x_0),\ \ldots,\ f^n(x_0) = F^n(x_0)$$

$$f_1(x_0) = F_1(x_0),\ f'_1(x_0) = F'_1(x_0),\ \ldots,\ f_1^n(x_0) = F_1^n(x_0).$$

Se uma das curvas fôr completamente dada e as equações $Y = F(X)$, $Z = F_1(X)$ representarem uma familia de curvas, a curva d'esta familia que tem com a curva dada um contacto de ordem mais elevada diz-se *osculadora* da primeira. Para obter esta curva deve-se determinar os $2(n+1)$ parametros arbitrarios que entram nas equações $Y = F(X)$, $Z = F_1(X)$ por meio das equações de condição precedentes.

133. — Appliquemos estes principios á linha recta, isto é, procuremos a recta que passa pelo ponto (x_0, y_0) da curva $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ e que tem um contacto de ordem a mais elevada possivel com esta curva.

As equações da recta são de fórma $Y = AX + B$, $Z = CX + D$, e podemos portanto determinar as quatro constantes A, B, C, D de modo a satisfazer ás quatro equações necessarias para o contacto de primeira ordem:

$$y_0 = Ax_0 + B,\ z_0 = Cx_0 + D,\ f'(x_0) = A,\ f'_1(x_0) = C.$$

Logo as equações da recta pedida são

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0),\ Z - z_0 = f'_1(x_0)(X - x_0),$$

e a recta é portanto tangente á curva no ponto (x_0, y_0) (n.º 90).

134. — Procuremos em segundo logar o *circulo osculador* da curva $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ no ponto (x_0, y_0).

Como toda a circumferencia póde resultar da intersecção de uma esphera com um plano que passa pelo seu centro, as equações da circumferencia serão

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2,\ Z = AX + BY + C.$$

N'estas equações ha sete constantes arbitrarias, que vamos determinar de modo a satisfazer ás seis equações necessarias para que a circumferencia e a curva dada tenham no ponto (x_0, y_0) um contacto de segunda ordem, e á condição de passar o plano pelo centro da esphera; isto é, ás sete equações seguintes:

$$(b)\quad \begin{cases} z_0 = Ax_0 + By_0 + C,\ c = Aa + Bb + C, \\ z'_0 = A + By'_0,\ z''_0 = By''_0. \\ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2, \\ x_0 - a + (y_0 - b)\,y'_0 + (z_0 - c)\,z'_0 = 0, \\ 1 + (y_0 - b)\,y''_0 + y'^2_0 + (z_0 - c)\,z''_0 + z'^2_0 = 0. \end{cases}$$

Eliminando A, B e C entre a primeira, terceira e quarta das equações precedentes e a equação do plano, vem a equação

$$y''_0 (Z - z_0) = (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)(X - x_0) + z''_0 (Y - y_0),$$

que pertence (n.º 90—IV) ao plano osculador da curva no ponto (x_0, y_0).

Logo *o circulo osculador n'um ponto da curva está no plano osculador da curva, correspondente ao mesmo ponto.*

Eliminando agora A, B e C entre as quatro primeiras equações (b), o que dá

$$y''_0 (z_0 - c) = (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)(x_0 - a) + z''_0 (y_0 - b),$$

e em seguida, eliminando a, b e c entre esta equação e as duas ultimas equações (b), vêem as formulas

$$a = x_0 - \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)(y'_0 y''_0 + z'_0 z''_0)}{y''^2_0 + z''^2_0 + (z'_0 y'_0 - y'_0 z'_0)^2}$$

$$b = y_0 + \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)[z''_0 + y'_0 (y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)]}{y''^2_0 + z''^2_0 + (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)^2}$$

$$c = z_0 + \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)[y''_0 + z'_0 (z'_0 y'_0 - y'_0 z'_0)]}{y''^2_0 + z'^2_0 + (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)^2},$$

que dão as coordenadas do centro do circulo osculador.

Substituindo depois os valores de $x_0 - a$, $y_0 - b$ e $z_0 - c$ na quinta das equações (b) vem, depois de algumas reducções, a formula

$$R = \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)^{\frac{3}{2}}}{[y''^2_0 + z''^2_0 + (y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

que dá o raio do circulo osculador. Da comparação d'esta formula com a que dá (n.º 91—I) o raio de curvatura, tomando n'esta x para variavel independente (ponto $x' = 1$ e $x'' = 0$), conclue-se que *o raio do circulo osculador de uma curva n'um ponto dado é igual ao raio de curvatura da curva no mesmo ponto.*

III

Superficies

135. — *Contacto de uma curva com uma superficie.* — Sejam

$$Z = F(X, Y)$$

$$y = \varphi(x), \; z = \psi(x)$$

as equações de uma superficie e de uma curva que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0). Se pelo ponto $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ da curva, infinitamente proximo do ponto (x_0, y_0, z_0), tirarmos uma parallela ao eixo dos zz, que encontra a superficie n'um ponto cujas coordenadas são

$$x_0 + h, \; \varphi(x_0 + h), \; F[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)],$$

a differença entre as ordenadas correspondentes da curva e da superficie é

$$F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - \psi(x_0 + h).$$

Se esta differença fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h, diz-se que *a curva e a superficie têem no ponto* (x_0, y_0) *um contacto de ordem* n.

Raciocinando como no n.º 124 e pondo $F[x_0, \varphi(x_0)] = f(x_0)$, acha-se que as condições para que a curva e a superficie tenham um contacto de ordem n são

$$f(x_0) = \psi(x_0), \; f'(x_0) = \psi'(x_0), \ldots, f^n(x_0) = \psi^n(x_0).$$

Se a curva fôr completamente dada assim como a especie da superficie, a superficie da especie considerada, que tem com a curva um contacto de ordem mais elevada no ponto (x_0, y_0), diz-se *osculadora* da curva dada no ponto (x_0, y_0).

Para achar esta superficie basta determinar as constantes arbitrarias, cujo numero supporemos igual a $n+1$, que entram na equação $Z = F(X, Y)$, de modo que as $n+1$ condições precedentes sejam satisfeitas.

I — Procuremos a equação do *plano osculador* da curva $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Temos para isso de determinar as constantes A, B e C que entram na equação do plano

$$Z = AX + BY + C$$

de modo que sejam satisfeitas as equações de condição:

$$z_0 = Ax_0 + By_0 + C,\ A + B\varphi'(x_0) = \psi'(x_0),\ B\varphi''(x_0) = \psi''(x_0),$$

o que leva a uma equação que coincide com a equação (5) do n.º 90, justificando assim a designação que foi dada ao plano estudado n'esse numero.

136. — *Contacto de duas superficies.* — Sejam

$$z = f(x, y),\ Z = F(X, Y)$$

as equações de duas superficies que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0), e $x_0 + h$, $y_0 + k$, $z_0 + l$ as coordenadas de um ponto infinitamente visinho de (x_0, y_0, z_0).

Por serem y e x variaveis independentes, ponhamos $y = \varphi(x)$, representando por φ uma funcção arbitraria. Se a differença de duas ordenadas das duas superficies, correspondentes aos mesmos valores de $x_0 + h$ e $y_0 + k$ de x e y, isto é a differença

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0 + k)$$

$$= F[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)] - f[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)]$$

fôr infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h, qualquer que seja φ, diz-se que *as duas superficies têem no ponto (x_0, y_0, z_0) um contacto de ordem n.*

Vê-se como no n.º 124 que, para que a differença precedente seja infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h, é necessario e sufficiente que as funcções $F[x_0, \varphi(x_0)]$ e $f[x_0, \varphi(x_0)]$ e as suas n primeiras derivadas sejam respectivamente iguaes, e que as derivadas de ordem $n+1$ sejam desiguaes, o que dá

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0}\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0}\varphi'(x_0)$$

. . . .

Devendo estas equações ter logar qualquer que sejam as funcções $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, etc., conclue-se que *as condições para que as duas superficies tenham um contacto de primeira ordem no ponto* (x_0, y_0) *são:*

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0), \; \frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_0}, \; \frac{\partial F}{\partial y_0} = \frac{\partial f}{\partial y_0};$$

que as condições para que as duas superficies tenham um contacto de segunda ordem no ponto (x_0, y_0) *são, além das precedentes, as seguintes:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}, \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}, \; \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2};$$

e assim successivamente.

137. — Uma superficie de especie dada $Z = F(X, Y)$ diz-se *osculadora* de uma superficie dada $z = f(x, y)$ se a primeira tem com a segunda o contacto de ordem mais elevada que as superficies da especie considerada podem ter com a superficie dada. Se a superficie $Z = F(X, Y)$ contém m constantes arbitrarias, podemos determinar estas constantes de modo que as superficies tenham, em geral, um contacto de ordem n, se m fôr igual ao numero de equações necessarias para haver contacto de ordem n. Se fôr menor, pode-se estabelecer só um contacto de ordem inferior a n, e a equação fica ainda com algumas constantes arbitrarias.

I — A equação do plano $Z = AX + BY + C$ contendo tres constantes arbitrarias, póde esta superficie ter um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$. Para achar o plano que satisfaz esta condição, determine-se as constantes arbitrarias por meio das tres equações de condição para haver contacto de primeira ordem, que dão

$$z_0 = Ax_0 + By_0 + C, \; A = \frac{\partial f}{\partial x_0}, \; B = \frac{\partial f}{\partial y_0};$$

portanto a equação do *plano osculador* da superficie é

$$Z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_0} (X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0} (Y - y_0),$$

e coincide com a equação do plano tangente (n.º 92).

II — Consideremos, em segundo logar, a esphera

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2.$$

Podemos dispôr de tres das constantes arbitrarias que contém esta equação, de modo a satisfazer ás tres equações de condição necessarias para que esta superficie tenha um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$.

Para obter um contacto de segunda ordem é necessario que a equação da superficie osculadora contenha seis constantes arbitrarias, e portanto a esphera não póde ter um contacto de segunda ordem com a superficie dada, excepto em alguns pontos particulares da superficie, como vamos vêr.

Para haver contacto de segunda ordem, os valores de $Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$ e $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ tirados da equação da esphera e das equações

$$X - a + (Z - c) \frac{\partial Z}{\partial X} = 0, \; Y - b + (Z - c) \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0, \; 1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial X} + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = 0$$

devem ser iguaes respectivamente a $f(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$ quando n'ellas se faz $X = x_0$ e $Y = y_0$, o que dá as equações de condição:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2,$$

$$x_0 - a + (z_0 - c) \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \; y_0 - b + (z_0 - c) \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0,$$

$$1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2+(z_0-c)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=0,\ 1+\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2+(z_0-c)\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_0}+(z_0-c)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}=0.$$

As quatro primeiras equações servem para determinar as constantes arbitrarias a, b, c e R. As duas ultimas, eliminando $z_0 - c$ por meio da quarta, dão as equações

$$\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0},$$

a que deve satisfazer o ponto (x_0, y_0, z_0) da superficie $z=f(x, y)$, para que n'elle a superficie possa ter uma esphera osculadora.

Tomando o ponto (x_0, y_0, z_0) para origem das coordenadas, o plano tangente para plano dos xy e os planos das secções principaes para planos dos xz e yz, e chamando $z = f_1(x, y)$ a nova equação da superficie, as equações precedentes dão [representando por p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 os valores que tomam as derivadas $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}$ no ponto $(0, 0, 0)$] $r_0 = t_0$, $s_0 = 0$, visto ser (n.º 93) $p_0 = 0$, $q_0 = 0$. Mas as curvaturas c_1 e c_2 das secções principaes que passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0) são (n.º 93) dadas pelas formulas $c_1 = r_0$, $c_2 = t_0$. Portanto teremos $c_1 = c_2$; o que prova que *os pontos em que a superficie tem um contacto de segunda ordem com uma esphera, coincidem com os pontos umbilicaes* (n.º 93).

Para um estudo mais desenvolvido e profundo da theoria do contacto consulte-se o bello *Cours d'Analyse* do sr. Hermite.

CAPITULO VII

FUNCÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES. SINGULARIDADES DAS FUNCÇÕES

I

Funcções definidas por séries

138. — Vamos n'este Capitulo estudar as funcções definidas por séries para estabelecer as condições da sua continuidade, e achar as suas derivadas. Em seguida, formaremos por meio d'estas funcções exemplos das singularidades mais importantes relativamente á continuidade e ás derivadas, que as funcções apresentam.

139. — *Continuidade das funcções definidas por séries.* — A este respeito vamos demonstrar o seguinte:

Theorema. — *Se a série*

$$(1) \qquad f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

onde $f_1(x)$, $f_2(x)$, etc. representam funcções continuas de x n'um intervallo comprehendido entre dois numeros dados, fôr uniformemente convergente n'este intervallo, a funcção $f(x)$ é continua no mesmo intervallo.

Seja a um numero pertencente ao intervallo considerado. Por ser uniformemente convergente a série anterior, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, deve corresponder (n.º 24) um numero m tal que será

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(a) \right| \overline{<} \frac{\delta}{3}, \quad \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(a+h) \right| \overline{<} \frac{\delta}{3}.$$

Mas por ser continua a somma (n.º 33 — 2.º)

$$P_m(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

pode-se sempre dar a ε um valor tal que a desigualdade

$$\left| P_m(a+h) - P_m(a) \right| < \frac{1}{3}\delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h inferiores a ε (n.º 33 — 1.º).

D'estas desigualdades e da igualdade

$$f(x+h) - f(x) = P_m(x+h) - P_m(x)$$
$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$$

conclue-se pois que, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a δ, ha sempre um valor de ε tal que a desigualdade

$$\left| f(a+h) - f(a) \right| < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a ε. Logo a funcção é continua n'um ponto qualquer a do intervallo considerado.

140. — *Derivadas das funcções definidas por séries.* — Principiaremos o que temos a dizer sobre as derivadas das funcções definidas por séries, fazendo notar que as séries, cujos termos são as derivadas dos termos de uma série convergente, póde ser divergente. E' o que mostra claramente a série $\Sigma (-1)^n \frac{x^n}{n}$, que é convergente quando é $x = 1$, em quanto que a série $\Sigma (-1)^n x^{n-1}$, formada pelas derivadas dos seus termos, é divergente quando é $x = 1$.

Posto isto, vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. — *Se a série* (1) *fôr convergente n'um intervallo comprehendido entre dois numeros dados, e se no mesmo intervallo fôr uniformemente convergente a série* $\Sigma f'_n(x)$, *formada com as derivadas dos termos da precedente, a funcção* $f(x)$ *admitte derivada e é*

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x) + \ldots$$

no intervallo considerado.

Seja a um valor qualquer de x pertencente ao intervallo considerado, e ponhamos para brevidade

$$R(x) = \sum_{m+p+1}^{\infty} f_n(x), \quad R_1(x) = \sum_{m+p+1}^{\infty} f'_n(x).$$

Teremos

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \sum_1^{\infty} f'_n(a) = \sum_1^{m+p}\left[\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} - f'_n(a)\right]$$

$$+ \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a)$$

$$= \sum_1^{m}\left[\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} - f'_n(a)\right] + \sum_{m+1}^{m+p}[f'_n(a+\theta h) - f'_n(a)]$$

$$+ \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a),$$

onde θ representa uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Por ser uniformemente convergente a série $\Sigma f'_n(x)$ no intervallo considerado, se dermos a δ um valor tão pequeno quanto se queira, podemos determinar um valor correspondente para m tal que as desigualdades

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a)\right| \overline{<} \frac{\delta}{10}, \quad \left|\sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a+\theta h)\right| \overline{<} \frac{\delta}{10}$$

sejam satisfeitas por qualquer valor de p. Logo no mesmo intervallo, a desigualdade

$$\left|\sum_{m+1}^{m+1}[f'_n(a+\theta h)-f'_n(a)]\right|<\frac{\delta}{5}$$

será tambem satisfeita.

Por outra parte, por ser

$$\sum_1^m f'_n(a)=\lim\sum_1^m\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h},$$

podemos concluir que ha um valor h_1 tal que a desigualdade

$$\left|\sum_1^m\left[\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h}-f'_n(a)\right]\right|<\frac{\delta}{5}$$

(onde m tem um valor finito anteriormente determinado) será satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1.

Finalmente, por serem convergentes as séries $\Sigma f_n(x)$ e $\Sigma f'_n(x)$, a cada valor de h corresponderá um valor de p tal que será

$$\left|\frac{R(a+h)}{h}\right|<\frac{\delta}{5},\left|\frac{R(a)}{h}\right|<\frac{\delta}{5},|R_1(a)|<\frac{\delta}{5}.$$

Das desigualdades precedentes conclue-se que, dando a δ um valor tão pequeno quando se queira, ha sempre um valor correspondente h_1 tal que a desigualdade

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\sum_1^\infty f'_n(a)\right|<\frac{\delta}{5}+\frac{\delta}{5}+\frac{\delta}{5}+\frac{\delta}{5}+\frac{\delta}{5}$$

será satisfeita pelos valores de h inferiores a h_1; e portanto teremos

$$\lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\sum_1^\infty f'_n(a),$$

que é o que se queria demonstrar.

II

Singularidades d'algumas funcções

141. — *Funcções descontinuas em pontos isolados.* — Uma funcção $f(x)$, definida na visinhança do ponto a, é descontinua no ponto $x = a$ quando n'este ponto se torna infinita ou passa de um valor a outro que differe do primeiro d'uma quantidade finita. Da primeira especie de descontinuidade temos até aqui encontrado muitos exemplos nas funcções racionaes, quando a é raiz do denominador, na funcção $\operatorname{tang} x$ quando é $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, etc. Para exemplo da segunda especie de descontinuidade, da qual não offerecem exemplo as funcções que até aqui temos estudado, apresentarei a funcção definida pela série seguinte:

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)} + \ldots + \frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})} + \ldots$$

Com effeito, temos evidentemente

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = -1 + \frac{2}{1+x^m}$$

$$\frac{1}{1+x^m} = \frac{1}{1+x^{m-1}} + \frac{x^{m-1}(1-x)}{(1+x^m)(1+x^{m-1})}$$

$$\frac{1}{1+x^{m-1}} = \frac{1}{1+x^{m-2}} + \frac{x^{m-2}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^{m-2})}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} + \frac{1-x}{2(1+x)},$$

× Decompondo o Σ em dois Σ, comprehendendo um os termos em que m tem expoente par, e outro os termos em que m é impar

d'onde se tira $\Sigma = \Sigma + \Sigma$

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = \frac{2(1-x)}{2(1+x)} + \frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)} + \ldots + \frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

e

$$\lim_{m=\infty} \frac{1-x^m}{1+x^m} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}(1-x)}{(1+x^{k-1})(1+x^k)}.$$

D'esta igualdade conclue-se que a funcção considerada é igual a $+1$ se o valôr absoluto de x é menor do que a unidade, que é igual a -1 se o valôr absoluto de x é maior do que a unidade, que é igual a zero se é $x = 1$ e que é igual ao infinito se é $x = -1$× A funcção é pois descontinua no ponto $x = 1$, onde passa do valôr $+1$ ao valôr -1, e no ponto $x = -1$ onde é infinita.

142. — *Condensação das singularidades.* — As funcções que até aqui temos encontrado apresentam n'um intervallo finito um numero finito de pontos em que são descontinuas. Ha porém funcções que, n'um intervallo finito, são descontinuas em um numero infinito de pontos separados por outros em que são continuas, e ha funcções que n'um intervallo finito são descontinuas em todos os pontos. Para formar funcções d'esta natureza pode-se seguir um methodo devido a Hankel [1] e por elle chamado *methodo da condensação das singularidades*, por meio do qual, partindo de uma funcção com um numero limitado de singularidades, se fórma uma funcção com infinitas singularidades. Vamos aqui expôr o principio fundamental d'este methodo, que se póde estudar desenvolvidamente no excellente livro de Dini: *Fundamenti per la teorica delle funzione di variabili reali.*

I — Represente-se por $\varphi(y)$ uma funcção de y que no intervallo entre $y = -1$ e $y = +1$, o ponto 0 sendo exceptuado, seja continua e menor do que uma quantidade M, que no ponto $y = 0$ seja nulla e que, quando y tende para zero passando por valores positivos e negativos, tenda para um limite differente de zero, ou para dois limites dos quaes um, pelo menos, seja differente de zero.

---

(1) Hankel: — *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unsteligen Functionen* — Tubingue, 1870.

$$\sum_1^m \left(\frac{1-x^\mu}{1+x^\mu} - \frac{1-x^{\mu-1}}{1+x^{\mu-1}}\right) = \sum_1^m 2\frac{x^{\mu-1}(1-x)}{(1+x^{\mu-1})(1+x^\mu)} = \frac{1-x^m}{1+x^m} - \frac{2x}{1+x}$$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1-x^m}{1+x^m}\right) = \sum_1^\infty \left\{\sum_1^m \left(\frac{1-x^\mu}{1+x^\mu} - \frac{1-x^{\mu-1}}{1+x^{\mu-1}}\right)\right\} = 2 + \ldots$$

A funcção φ (sen $px\pi$), onde p é inteiro, será nulla e descontinua nos pontos onde $x = \frac{m}{p}$ (m inteiro), e será continua nos outros pontos.

N'estes ultimos pontos, a funcção

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{1}^{\infty} A_n \varphi (\text{sen } nx\pi)$$

é tambem continua se A_1, A_2, etc. representarem quantidades positivas taes que seja convergente a série $\sum_{1}^{\infty} A_n$. Com effeito, n'este caso, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valor α_1 de α tal que a desigualdade

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} MA_n < \delta$$

será satisfeita quando $\alpha > \alpha_1$. Logo *à fortiori* a desigualdade

$$\left| \sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} A_n \varphi (\text{sen } nx\pi) \right| < \delta$$

será satisfeita pelos mesmos valores de α. A série (1) é pois uniformemente convergente nos pontos considerados, e portanto a funcção $f(x)$ é continua (n.º 139) nos mesmos pontos.

Consideremos agora os pontos em que a funcção φ (sen $p\pi x$) é descontinua; e seja primeiramente m um numero par.

Pondo $n = ap + b$, onde b representa um numero inteiro menor do que p, teremos

$$f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,\, b} A_{ap+b}\, \varphi \left[\text{sen } (ap + b) \frac{m}{p} \pi\right]$$

onde $\sum\limits_{a,\, b}$ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros e positivos de a e b, excluindo os termos correspondentes a $b = 0$, que são nullos.

Do mesmo modo teremos

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \sum A_{ap+b}\, \varphi \left[\text{sen } (ap + b)\left(\frac{m}{p} + h\right) \pi\right]$$

ou, separando os termos correspondentes a $b = 0$,

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \Sigma A_{ap+b}\, \varphi\left[\text{sen}\,(ap + b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right]$$

$$+ \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,[\text{sen}\,(am\pi + aph\pi)].$$

Logo será

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,b} A_{ap+b}\left\{\varphi\left[\text{sen}\,(ap + b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right]\right.$$

$$\left. - \varphi\left[\text{sen}\,(ap + b)\,\frac{m}{p}\,\pi\right]\right\} + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\, aph\pi),$$

e, por ser a funcção $\sum_{a,b} A_{ap+b}\, \varphi\left[\text{sen}\,(ap + b)\,\frac{m}{p}\,\pi\right]$ continua quando b é differente de zero,

$$\lim_{h=0}\left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right)\right] = \lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\, aph\pi).$$

Quer h tenda para zero passando por valores positivos, quer h tenda para zero passando por valores negativos, da uniformidade de convergencia da série

$$\sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\, aph\pi)$$

na visinhança do ponto $h = 0$ conclue-se que, por mais pequeno que seja o valor que se dê a δ, ha sempre um valor α_1 tal que a desigualdade

$$\left|\sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\, aph\pi)\right| < \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita pelos valores de α superiores a α_1.

Por outra parte, por ser convergente a série ΣA_{ap}, existe um numero α_2 tal que a desigualdade

NB O limite corresp. a h=0 é sempre o mesmo qualquer que seja α, e q. tanto pode tirar-se para fora do signal Σ a expressão ou factor φ (sen aphπ)

NB X $$\left| \lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) \sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap} \right| < M \left| \sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap} \right| < \delta ? \quad \frac{\delta}{3} ?$$

é satisfeita quando $\alpha > \alpha_2$.

Logo as duas desigualdades precedentes são satisfeitas simultaneamente pelos valores de m superiores a α_1 e α_2. ? α ou δ

Determinando assim α, ha sempre um valor h_1 tal que a desigualdade (n.º 12, 1.º), isto pela propria noção de limite

$$\left| \sum_{a=1}^{\alpha} A_{ap}\, \varphi(\text{sen}\, aph\pi) - \lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) \sum_{a=1}^{\alpha} A_{ap} \right| < \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita quando $|h| < h_1$.

D'estas tres desigualdades resulta, sommando-as,

$$\left| \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi(\text{sen}\, aph\pi) - \lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \right| < \delta$$

quando $|h| < h_1$; e portanto temos

$$\lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi(\text{sen}\, aph\pi) = \lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap},$$

d'onde

$$\lim_{h=0} \left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) \right] = \lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) \, . \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}.$$

Como, por hypothese, um pelo menos dos dois valores $\lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi)$ e $\lim_{h=0} \varphi(-\text{sen}\, aph\pi)$, correspondentes um a valores positivos e outro a valores negativos de h, é differente de zero, a funcção $f(x)$ é descontinua nos pontos $x = \dfrac{m}{p}$.

Por uma analyse semelhante se mostra que a funcção $f(x)$ é descontinua nos pontos $x = \dfrac{m}{p}$, quando m é impar.

Logo a funcção $f(x)$ é continua quando a x se dá valores incommensuraveis, e é descontinua em todos os pontos em que x é commensuravel.

Para applicar o methodo anterior é necessario formar uma funcção $\varphi(y)$ que satisfaça ás condições impostas anteriormente a esta funcção. Póde servir para este fim a funcção

$$\varphi(y) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k+1][(y+1)^{k-1}+1]},$$

que se deduz da série que considerámos no n.º 141 pondo $x = y + 1$.

Com effeito, sendo aquella série igual a $+1$, 0, ou -1 segundo é $x < 1$, $x = 1$ ou $x > 1$, será esta igual a $+1$, 0, ou -1 segundo é $y < 0$, $y = 0$ ou $y > 0$.

Temos pois a funcção

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} n\pi x (\operatorname{sen} n\pi x + 1)^{k-1}}{[(\operatorname{sen} n\pi x + 1)^k + 1][(\operatorname{sen} n\pi x + 1)^{k-1} + 1]}$$

que é continua quando a x se dá valores incommensuraveis, e que é descontinua nos pontos onde x é commensuravel.

II — Partindo da série que vimos de empregar podemos formar agora uma funcção totalmente descontinua n'um intervallo finito. Com effeito, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,[\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)]^2}$$

é igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ quando x é incommensuravel e é infinita quando x é commensuravel, porque no primeiro caso a funcção $[\varphi(\operatorname{sen} n\pi x]^2$ é igual a $+1$, e no segundo caso é nulla quando $n = p$ e $x = \frac{m}{p}$.

Logo a funcção

$$f(x) = \frac{e-1}{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!\,[\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)]^2}}$$

é igual a zero quando x é commensuravel, e é igual a $+1$ quando x é incommensuravel; e portanto é totalmente descontinua n'um intervallo qualquer.

143. — *Exemplo de uma funcção continua que não tem derivada.* — Pelo methodo de Hankel pode-se formar funcções continuas com um numero infinito de pontos onde não têem derivada. Não entraremos porém aqui n'esta parte do methodo de condensação das singularidades, e limitar-nos-hemos a apresentar um exemplo (¹) de uma funcção continua que não tem derivada em ponto algum, devido ao sr. Weierstrass, que tractaremos pela mesma analyse que o eminente geometra (*Jornal de Crelle*—tomo 79). Esta funcção é a seguinte:

$$f(x) = \sum_0^\infty b^n \cos a^n x\pi,$$

onde a que representa um inteiro impar, e b que representa um numero positivo menor do que a unidade, devem ser escolhidos de modo que seja $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

A série que define $f(x)$ é uniformemente convergente qualquer que seja o valor de x. Com effeito, por ser convergente a progressão Σb^n, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor m_1 tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n < \delta$$

é satisfeita quando $m > m_1$. Logo a desigualdade

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} b^n \cos a^n x\pi \right| < \delta$$

é *à fortiori* satisfeita pelos mesmos valores de m, qualquer que seja x, e a série é portanto uniformemente convergente.

D'aqui e de ser cada termo da série uma funcção continua de x conclue-se (n.º 139) que a funcção $f(x)$ é continua.

Posto isto, vejamos como o sr. Weierstrass demonstra que esta funcção não tem derivada.

Represente x_0 um valor qualquer de x, m um numero inteiro positivo e α_m um numero inteiro tal que seja

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \overline{\gtrless} \frac{1}{2}.$$

(¹) Veja-se outros exemplos na memoria importante de Darboux intitulada — *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris*, 1875).

Representando esta differença por x_{m+1} e pondo

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \; x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

vem

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \; x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

d'onde se conclue que x_0 está comprehendido entre x' e x'', e que se póde dar a m um valor tão grande que x' e x'' diffiram de x_0 tão pouco quanto se queira.

Por outra parte, temos

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^n \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{x' - x_0} \right) = A + B,$$

pondo

$$A = \sum_0^{m-1} \left(a^n b^n . \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{a^n (x' - x_0)} \right)$$

$$B = \sum_0^{\infty} \left(b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} x' \pi - \cos a^{m+n} x_0 \pi}{x' - x_0} \right).$$

Por ser

$$\frac{\cos(a^n x')\pi - \cos(a^n x_0)\pi}{a^n (x' - x_0)} = -\pi \operatorname{sen}\left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi\right) \frac{\operatorname{sen}\left(a^n \frac{x' - x_0}{2}\right)\pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi},$$

$$\left| \operatorname{sen}\left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi\right) \right| < 1, \; \left| \frac{\operatorname{sen}\left(a^n \frac{x' - x_0}{2}\right) \pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi} \right| < 1,$$

temos

$$| A | < \pi \sum_0^{m-1} a^n b^n < \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^m.$$

Como é

$$\cos a^{m+n} x'\pi = \cos a^n (\alpha_m - 1)\pi = -(-1)^{\alpha_m}$$

$$\cos a^{m+n} x_0 \pi = \cos(a^n \alpha_m + a^n x_{m+1})\pi = (-1)^{\alpha_m} \cos a^n x_{m+1}\pi,$$

temos tambem

$$B = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \cos a^n x_{m+1}\pi}{1 + x_{m+1}} b^n;$$

e, por serem positivos todos os termos da somma

$$\sum_0^\infty \frac{1 + \cos a^n x_{m+1}\pi}{1 + x_{m+1}} b^n,$$

e o primeiro termo não ser menor do que $\frac{2}{3}$ (visto que x_{m+1} está comprehendido entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$),

$$(-1)^{\alpha_m} B > \frac{2}{3} (ab)^m.$$

Logo

$$B = (-1)^{\alpha_m} \frac{2}{3} \eta (ab)^m, \; A = (-1)^{\alpha_m} \cdot \frac{\eta \varepsilon \pi}{ab - 1} (ab)^m,$$

onde η representa um numero positivo maior do que a unidade, e ε uma quantidade comprehendida entre $+1$ e -1.

Temos pois

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \frac{\pi}{ab - 1}\right).$$

Do mesmo modo se acha

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1 \frac{\pi}{ab - 1}\right).$$

Dando pois a a e b valores taes que seja $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, ou

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1},$$

conclue-se das igualdades precedentes que as razões

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}, \quad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

que entram nos seus primeiros membros, tendem para $+\infty$ e $-\infty$ quando m tende para o infinito, e portanto quando x' e x'' tendem para x_0. Logo a funcção $f(x)$ não tem derivada em ponto algum x_0.

CAPITULO VIII

FUNCÇÕES DE VARIAVEIS IMAGINARIAS

I

Definições e principios geraes

144. — Tendo de tractar agora das funcções de variaveis imaginarias, recordemos primeiro que toda a variavel imaginaria $z = x + iy$ póde ser representada por um ponto cujas coordenadas cartesianas são x e y; e portanto que podemos fallar no ponto z, quando nos quizermos referir ao ponto (x, y), e reciprocamente que podemos fallar no imaginario representado pelo ponto (x, y) quando quizermos fallar no imaginario z.

Toda a funcção da variavel imaginaria $z = x + iy$ que tem uma derivada finita em todos os pontos $x + iy$ do plano diz-se uma *funcção monogenea* ou *funcção analytica* da variavel z em todo o plano. Assim, por exemplo, são funcções monogeneas em todo o plano as funcções racionaes inteiras, as funcções transcendentes e^z, sen z, cos z, etc.

Se entre cada grupo de dois pontos de uma região A do plano, onde estão representados os valores de z, se poder traçar uma linha continua em todos os pontos da qual a funcção $f(z)$ tenha uma derivada finita, diz-se que $f(z)$ é uma *funcção monogenea* ou uma *funcção analytica de z na área A*.

A funcção monogenea $f(z)$ diz-se *uniforme* na área A

quando a cada ponto z da área corresponde um unico valor da funcção.

A respeito das definições precedentes faremos as observações seguintes:

1.ª — Suppondo que $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ admittem derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a x e y, e que estas derivadas são funcções continuas d'estas variaveis, para que uma expressão $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ seja funcção monogenea de uma variavel imaginaria $z = x + iy$ é necessario e sufficiente que $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ satisfaçam ás condições seguintes (n.º 68):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

2.ª — Uma funcção de uma variavel imaginaria z póde ser monogenea só em parte da área em que é determinada. Tem, por exemplo, esta propriedade a funcção [1]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n}$$

quando a, que representa um numero inteiro positivo impar, e b, que representa uma quantidade positiva menor do que a unidade, satisfazem á condição $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Com effeito, a série considerada é convergente quando é $|z| < 1$ e quando é $|z| = 1$. Em todos os pontos que satisfazem á primeira condição, a funcção tem uma derivada finita, como adiante veremos. Nos pontos que satisfazem á segunda condição, a funcção não tem derivada, visto que, substituindo a variavel z por $\cos\omega + i\ \mathrm{sen}\ \omega$, vem

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} b\ [\cos(a^n\omega) + i\ \mathrm{sen}\ (a^n\omega)],$$

e a funcção $\sum_{0}^{\infty} b^n \cos(a^n\omega)$ não tem derivada (n.º 143) relativamente a ω.

3.ª — Uma funcção monogenea n'uma área A póde ser

---

(1) Weierstrass: — *Zur Functionen-Lehre* (*Monatsbericht der K. Akademie zu Berlin*, 1880).

uma parte de outra funcção monogenea n'uma área que contenha a primeira. Assim, por exemplo, a funcção definida pela série

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

convergente quando é $|z| < 1$, faz parte da funcção $\frac{1}{1-z}$ monogenea em todo o plano, excepto no ponto $z = 1$.

Do mesmo modo, a funcção definida pela série [1]

$$f(z) = F(z) - \frac{1}{z-a} + (z-a-1)\left[\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z-a)^3} + \dots\right]$$

é igual a $F(z)$ quando $|z-a| > 1$, e é igual ao infinito quando $|z-a| < 1$. Logo se $F(z)$ representa uma funcção monogenea em todo o plano, $f(z)$ representa uma parte d'essa funcção monogenea.

4.ª — Quando a região do plano em que uma expressão analytica $f(z)$ é determinada se compõe de muitas áreas separadas, $f(z)$ póde representar, n'estas differentes áreas, differentes funcções monogeneas completamente independentes. Esta observação importante foi demonstrada pelo sr. Weierstrass da maneira seguinte:

Seja $\varphi(z)$ uma expressão igual a $+1$ quando $|z| < 1$, e igual a -1 quando $|z| > 1$. Pondo

$$F_0(z) = \frac{f_1(z) + f_2(z)}{2}, \quad F_1(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)}{2},$$

a expressão

$$F_0(z) + F_1(z)\,\varphi(z)$$

é igual a $f_1(z)$ quando $|z| < 1$, e é igual a $f_2(z)$ quando $|z| > 1$.

---

[1] Veja-se o nosso artigo: — *Exemples de fonctions à espaces lacunaires* publicado nos *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª série, tomo VI.

Ha varias expressões analyticas satisfazendo ás condições impostas a $\varphi(z)$; aqui empregaremos a expressão [1]

$$\varphi(z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}(1-z)}{(1+z^{k-1})(1+z^k)}$$

estudada no n.º 141, no caso das variaveis reaes, e que tem logar tambem no caso das variaveis imaginarias. Com effeito, por ser

$$\varphi(z) = \lim_{m=\infty} \frac{1-z^m}{1+z^m}$$

conclue-se que $\varphi(z) = 1$ quando $|z| < 1$, e que $\varphi(z) = -1$ quando $|z| > 1$.

Ha muitos outros meios de formar expressões analyticas satisfazendo ás condições do theorema enunciado. Aqui exporemos ainda um, devido ao sr. Lerch, professor na Escola Polytechnica de Praga [2].

Sejam u_1 e u_2 duas funcções monogeneas independentes, e consideremos a fracção continua

$$f(z) = u_1 + u_2 - \cfrac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \cfrac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \dots}}$$

cujas convergentes c_{n+1} e c_n estão ligadas pela relação

$$c_{n+1} = u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{c_n},$$

ou

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_n - u_1}{c_n - u_2},$$

d'onde resulta

$$\frac{c_n - u_1}{c_n - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2}, \quad \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-2} - u_1}{c_{n-2} - u_2}, \text{ etc.},$$

(1) Esta expressão é reciproca d'outra considerada pelos srs. Schröder e Tannery. Veja-se um artigo que a este respeito publiquei no *Bulletin des Sciences mathématiques* (tomo XXII).

(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2.ª série, tomo X.

e portanto

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+1} \cdot \frac{c_0 - u_1}{c_0 - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+2},$$

visto ser $c_0 = u_1 + u_2$.

D'esta igualdade conclue-se que $\lim_{n=\infty} c_{n+1} = u_1$, se $|u_2| < |u_1|$, e que $\lim_{n=\infty} c_{n+1} = u_2$, se $|u_2| > |u_1|$; isto é, que a expressão $f(z)$ representa u_1 na área onde é $|u_2| < |u_1|$, e que representa u_2 na área onde é $|u_2| > |u_1|$.

II

Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias

145. — Theorema. — *Se a funcção $f(z)$ tiver uma derivada finita para todos os valores que toma z, quando passa de z_0 para Z descrevendo a recta que une estes dois pontos, será* (1)

$$(1)\quad f(Z) - f(z_0) = \mathfrak{R}[(Z - z_0)f'(z_1)] + \mathfrak{I}[(Z - z_0)f'(z_2)],$$

z_1 e z_2 representando dois valores de z comprehendidos no caminho seguido por z para ir de z_0 e Z. Será tambem (2)

$$(2)\quad f(Z) - f(z_0) = \lambda\sqrt{2}\, e^{ai}(Z - z_0) f'[z_0 + \theta(Z - z_0)],$$

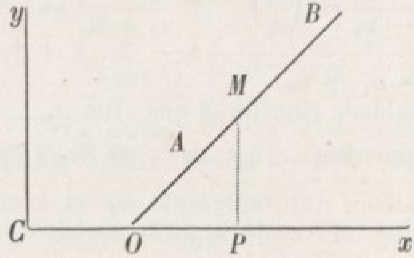
λ e θ representando quantidades reaes positivas comprehendidas entre 0 e 1.

---

(1) Pelas notações $\mathfrak{R}[A]$ e $\mathfrak{I}[A]$ representa-se a parte real e a parte imaginaria de A.

(2) Esta formula importante é devida ao sr. Darboux (*Jornal de Liouville*, 3.ª série, tomo II). A demonstração que vamos dar d'ella é devida ao sr. Mansion (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3.ª série, tomo X).

Sejam AB a recta descripta pelo ponto z; A, M e B os pontos correspondentes aos imaginarios z_0, z e Z; ω o angulo



BOx da recta com o eixo das abscissas; e ρ_0, ρ, ρ', b as distancias OA, OM, OB, CO. Será

$$z = CP + iMP = b + \rho(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega) = b + \rho e^{i\omega},$$

e do mesmo modo

$$z_0 = b + \rho_0 e^{i\omega},\ Z = b + \rho' e^{i\omega}.$$

Logo temos

$$f(z) = f\left(b + \rho e^{i\omega}\right) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

e, derivando relativamente a ρ,

$$e^{i\omega} f'(z) = \varphi'(\rho) + i\psi'(\rho).$$

Applicando agora ás funcções $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ o theorema 3.° do n.° 62, vem

$$\varphi(\rho') = \varphi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\varphi'(\rho_1),\ \psi(\rho') = \psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\psi'(\rho_2),$$

ρ_1 e ρ_2 representando dois valores de ρ correspondentes a dois valores z_1 e z_2 de z, comprehendidos no intervallo AB. Temos pois a igualdade

$$\begin{aligned} f(Z) &= \varphi(\rho') + i\psi(\rho') \\ &= \varphi(\rho_0) + i\psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\left[\varphi'(\rho_1) + i\psi'(\rho_2)\right] \\ &= f(z_0) + (\rho' - \rho_0)\left\{\mathfrak{R}\left[e^{i\omega} f'(z_1)\right] + \mathfrak{I}\left[e^{i\omega} f'(z_2)\right]\right\}, \end{aligned}$$

que, por ser

$$(\rho' - \rho_0)\, e^{i\omega} = Z - z_0,$$

dá a relação (1).

Pondo na formula (1)

$$Z - z_0 = B\, e^{ib},\ f'(z_1) = C\, e^{ic},\ f'(z_2) = D\, e^{id}$$

vem

$$f(Z) - f(z_0) = BC \cos(b + c) + BDi \operatorname{sen}(b + d) = H\, e^{ih},$$

onde $H^2 = B^2 C^2 \cos^2(b + c) + B^2 B^2 \operatorname{sen}^2(b + d)$.

Suppondo agora $C \geqq D$, temos $H^2 \lesseqgtr 2B^2 C^2$ e portanto $H = \lambda BC \sqrt{2}$, onde λ representa um factor positivo igual ou inferior á unidade.

Logo temos a formula

$$f(Z) - f(z_0) = \lambda \sqrt{2}\, e^{i(h-b-c)} (Z - z_0)\, f'(z_1)$$

que dá a formula (2) pondo $h - b - c = a$ e notando que das relações

$$Z - z_0 = (\rho' - \rho_0)\, e^{i\omega},\ z_1 - z_0 = (\rho_1 - \rho_0)\, e^{i\omega},\ \rho_1 - \rho_0 < \rho' - \rho_0$$

se tira $\rho_1 - \rho_0 = \theta(\rho' - \rho_0)$, e portanto $z_1 - z_0 = \theta(Z - z_0)$, θ representando uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Se fôr $D > C$, demonstra-se o theorema do mesmo modo, pondo $H = \lambda BD \sqrt{2}$.

146. — Do theorema que vimos de demonstrar deduz-se, applicando-o á funcção

$$\varphi(z) = f(Z) - \left[f(z) + \frac{Z - z}{1} f'(z) + \ldots + \frac{(Z - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(z) \right],$$

o theorema seguinte:

Se as funcções $f(z)$, $f'(z)$, ..., $f^n(z)$ forem finitas para todos os valores que toma z quando passa de z_0 a Z descrevendo a recta que une estes dois pontos, será

$$f(Z)=f(z_0)+(Z-z_0)f'(z_0)+\ldots+\frac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(z_0)+R_n,$$

$$R_n=\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^n[z_0+\theta(Z-z_0)].$$

A formula precedente é, como se vê, a *formula de Taylor*, que foi demonstrada primeiro no caso das variaveis reaes, e que foi estendida por Cauchy ao caso das variaveis imaginarias. A expressão que vimos de achar, do resto R_n é a expressão devida ao sr. Darboux ([1]), com a fórma que lhe deu o sr. Mansion ([2]).

Nota.—Baseando-se no theorema demonstrado no n.º 145, pode-se estender ao caso das variaveis imaginarias o theorema 1.º do n.º 106. Pondo depois no resultado $F(z)=(z-z_0)^{k+1}$ acha-se o theorema que vimos de demonstrar.

147. — *Desenvolvimento do binomio.* — Applicando a formula de Taylor á funcção $y=(1+z)^k$, onde k é real, e considerando o ramo que dá $y=1$ quando $z=0$, vem como no n.º 108,

$$(1+z)^k=1+\sum_{a=1}^{n-1}\binom{k}{a}z^a+R_n,$$

$$R_n=\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}z^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1}(1+\theta z)^{k-1}.$$

1) Se o módulo ρ de $z=\rho\,e^{i\omega}$ é menor do que a unidade, a quantidade

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}\rho^n$$

tende (n.º 108) para zero quando n tende para o infinito. Além d'isso é

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right|=\frac{1-\theta}{\sqrt{1+\theta^2\rho^2+2\theta\rho\cos\omega}}\overline{<}\frac{1-\theta}{1-\theta\rho}<1.$$

([1]) Loc. cit.
([2]) Loc. cit.

Logo R_n tende para 0 quando n tende para o infinito, e o binomio considerado póde ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de z pela formula

$$(1+z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \binom{k}{a} z^a.$$

2) Se o módulo de z é maior do que a unidade, a série precedente é divergente. Com effeito, o módulo do quociente de dois termos consecutivos d'esta série tende para ρ, quando a tende para o infinito. Logo ha um valor de a a partir do qual os módulos dos termos da série crescem indefinidamente.

Para o estudo do caso em que o módulo de z é igual á unidade, assim como para o estudo do caso em que k é imaginario, pode-se consultar uma excellente memoria do sr. Mansion publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (tomo IX).

Appliquemos agora a formula que vimos de obter á deducção d'algumas formulas de que teremos de fazer uso.

I — A igualdade

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

dá

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = e^{kiz} (1 - e^{-2iz})^k.$$

Se k é um numero inteiro positivo, vem

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a . \binom{k}{a} e^{(k-2a)iz}$$

$$= \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} [\cos (k-2a) z + i \operatorname{sen} (k-2a) z].$$

D'esta igualdade tira-se, se k é par, attendendo a que os temos dependente do seno se reduzem dois a dois,

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} \cos (k-2a) z,$$

e, se k é impar,

$$2^k i^{k-1} \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} \operatorname{sen}(k-2a) z.$$

Estas formulas importantes dão os desenvolvimentos da potencia k de sen z ordenados segundo os senos e os cosenos dos arcos multiplos de z. O numero de termos d'estes desenvolvimentos é finito e os termos equidistantes dos extremos são iguaes, como é facil de vêr.

II — Por uma analyse semelhante á que vem de ser empregada se acha, quando k é inteiro e positivo:

$$2^k \cos^k z = \sum_{a=1}^{k} \binom{k}{a} \cos(k-2a) z.$$

III — Reciprocamente, das igualdades

$$(\cos z + i \operatorname{sen} z)^k = (e^{iz})^k = e^{ikz} = \cos kz + i \operatorname{sen} kz$$

$$(\cos z - i \operatorname{sen} z)^k = \cos kz - i \operatorname{sen} kz,$$

onde k é inteiro e positivo, deduz-se, devolvendo a potencia dos binomios que entram no primeiro membro e depois sommando-as e subtraindo-as,

$$\operatorname{sen} kz = k \cos^{k-1} z \operatorname{sen} z - \binom{k}{3} \cos^{k-3} z \operatorname{sen}^3 z$$

$$+ \binom{k}{5} \cos^{k-5} z \operatorname{sen}^5 z - \ldots$$

$$\cos kz = \cos^k z - \binom{k}{2} \cos^{k-2} z \operatorname{sen}^2 z$$

$$+ \binom{k}{4} \cos^{k-4} z \operatorname{sen}^4 z - \ldots$$

148. — *Desenvolvimento de e^z, sen z, cos z.* — Applicando a formula de Taylor á funcção e^z, vem

$$e^z = 1 + z + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda\sqrt{2}\, e^{\alpha i} \frac{(1-\theta)^{n-1} z^n}{n-1\,!} e^{\theta z}.$$

Por $\frac{|z|^{n-1}}{n-1\,!}$ tender para zero quando n tende para o infinito, esta formula mostra que e^z é sempre susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z pela formula

$$e^z = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{z^a}{a\,!}.$$

Por uma analyse semelhante se vê que as séries achadas no n.° 114 para o seno e o coseno d'uma variavel real ainda téem logar no caso das variaveis imaginarias.

149. — *Desenvolvimento do log* $(1+z)$. — Applicando a formula de Taylor a esta funcção, vem, como no caso das variaveis reaes,

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{z^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1}\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\cdot\frac{z^n}{1+\theta z}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1},$$

considerando sómente aquelle ramo de log $(1+z)$ cujo valor inicial é igual a zero. E' facil de vêr que, se o módulo de z é menor do que a unidade, temos o desenvolvimento em série

$$\log(1+z) = \sum_{a=1}^{\infty} (-1)^{a-1}\frac{z^a}{a},$$

e que, se o módulo de z é maior do que a unidade, esta série é divergente.

150. — O processo anterior para achar o desenvolvimento das funcções em série é raras vezes applicavel por causa da complicação da expressão do resto R_n, que é necessario discutir, para saber se R_n tende para zero quando n tende para o infinito. Recorre-se porisso n'este caso a um theorema célebre de Cauchy, que será demonstrado no *Calculo Integral*, e ainda a um theorema importante, devido ao sr. Weierstrass, que aqui vamos demonstrar.

*

Demonstraremos porém primeiramente o seguinte:

Lemma — *Se a série*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \; z = x + iy$$

fôr convergente n'um circulo de raio dado, e se, em todos os pontos do interior d'este circulo que téem o mesmo módulo ρ, *o módulo de* $F(z)$ *fôr menor do que uma quantidade positiva* L, *o módulo de cada termo da série será tambem menor do que* L.

Com effeito, multiplicando a série proposta por z^{-m}, vem

$$z^{-m} F(z) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} + R,$$

R representando uma quantidade cujo módulo tende para zero quando k tende para o infinito.

Mas, como por hypothese é $|z^{-m} F(z)| < L\rho^{-m}$, e como, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a uma quantidade positiva δ, ha sempre um valor k_1 tal que é $|R| < \delta$, quando $k > k_1$, teremos (n.º 8 — I)

$$|z^{-m} F(z) - R| < L\rho^{-m} + \delta,$$

ou

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta.$$

Dando agora n'esta desigualdade a z os valores

$$z = \rho, \; \rho e^{i\theta}, \; \rho e^{2i\theta}, \; \ldots, \; \rho e^{(a-1)i\theta}$$

e a k um valor maior do que os differentes valores de k_1 correspondentes a estes valores de z, temos as desigualdades

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta$$

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta}\right|$$
$$< L\rho^{-m} + \delta$$

....

que dão, sommando e attendendo ao theorema I do n.º 8,

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m}\left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta}\right)\right.$$
$$+ \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m}\left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta}\right)$$
$$\left. + ac_m\right| < a\,(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou, pondo

$$1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} = \frac{1 - e^{ia(n-m)\theta}}{1 - e^{i(n-m)\theta}} = A$$

e dando á quantidade θ um valor que não seja raiz da equação $1 - e^{i(n-m)\theta} = 0$, isto é, um valor tal que A seja finito,

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} c_n A\rho^{n-m} + ac_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n A\rho^{n-m}\right| < a\,(L\rho^{-m} + \delta)$$

ou

$$\left|c_m + \frac{B}{a}\right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B a parte da desigualdade precedente independente de c_m.

D'esta desigualdade tira-se

$$(a) \qquad | c_m | \lesseqgtr L\rho^{-m} + \delta;$$

porque, se fosse

$$| c_m | > L\rho^{-m} + \delta,$$

podia dar-se a a um valor tão grande que fosse

$$| c_m | - \frac{|B|}{a} > L\rho^{-m} + \delta$$

ou *à fortiori*

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| > L\rho^{-m} + \delta,$$

visto ser (n.º 8—I)

$$\frac{|B|}{a} + \left| c_m + \frac{B}{a} \right| \geqq \left| c_m \right|.$$

Da desigualdade (a) tira-se o theorema enunciado; porque, se fosse $| c_m | > L\rho^{-m}$, podia dar-se a δ um valor tão pequeno que fosse $| c_m | > L\rho^{-m} + \delta$.

151.—Theorema.—*Se uma funcção $f(z)$ fôr susceptivel de ser desenvolvida na série uniformemente convergente dentro de um circulo de raio R:*

(1) $$f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) + \ldots,$$

e se as funcções $P_0(z)$, $P_1(z)$, etc. forem susceptiveis de ser desenvolvidas nas séries ordenadas segundo as potencias de z, convergentes dentro do mesmo circulo:

(2) $$P_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} z + A_2^{(n)} z^2 + \ldots + A_m^{(n)} z^m + \ldots,$$

a funcção $f(z)$ será tambem susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z:

(3) $$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m + \ldots,$$

e será

(4) $$A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} + \ldots$$

Este theorema foi demonstrado pelo sr. Weierstrass da maneira seguinte [1]:

[1] *Monatsberichte der Kön. Akademie de Wissenschaften zu Berlin*—1880.

Seja ρ uma quantidade positiva menor do que R; por ser uniformemente convergente a série (1) na circumferencia de raio ρ, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valor n_1 de n tal que a desigualdade

$$| P_{n+1}(z) + P_{n+2}(z) + \ldots + P_{n+p}(z) | < \delta$$

será satisfeita por todo o valor de n superior a n_1 e por todos os valores de z que téem o módulo ρ, qualquer que seja p.

Mas temos (n.º 22)

$$P_{n+1}(z) + \ldots + P_{n+p}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left(A_m^{(n+1)} + \ldots + A_m^{(n+p)}\right).$$

Logo, em virtude do lemma precedente, temos a desigualdade

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}| < \delta\rho^{-m},$$

d'onde se conclue a convergencia da série (4).

Considerando agora outro numero positivo ρ_1 tal que seja $R > \rho_1 > \rho$, podemos dar a n um valor tal que seja tambem

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}| < \delta\rho_1^{-m}$$

por maior que seja p; e portanto

$$\left| \lim_{p=\infty} \left(A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}\right) \right| \overline{\gtrless} \delta\rho_1^{-m}.$$

Pondo para brevidade

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} = A'_m,$$

$$\lim_{p=\infty} \left(A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}\right) = A''_m,$$

o que dá

$$A_m = A'_m + A''_m, \quad | A''_m | \overline{\gtrless} \delta\rho_1^{-m},$$

vem, para os valores de z cujo módulo ρ é inferior a ρ_1, a desigualdade

$$|A'_0| + |A''_1 z| + \ldots + |A''_m z^m| + \ldots$$

$$< \delta \left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \ldots + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m + \ldots\right] < \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

da qual se conclue que (n.° 20 — 2.°) a série:

$$A''_0 + A''_1 z + \ldots + A''_m z^m + \ldots$$

é absolutamente convergente.

Por outra parte, é tambem convergente (n.° 22) a série

$$P_0(z) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)})$$

$$= A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_m z^m + \ldots$$

Temos pois

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (A'_m + A''_m) z^m = \sum_{a=0}^{n} P_a(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m,$$

d'onde se tira

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{a=n+1}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m$$

e portanto (n.° 8 — I)

$$\left| \sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right| < \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

Como a δ se póde dar um valor tão pequeno quanto se queira, tira-se d'esta desigualdade

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m,$$

isto é, a igualdade (3), que se queria demonstrar.

Exemplo 1.° — A funcção $f(z) = \text{sen}(\text{sen}\, z)$ dá a série

$$f(z) = \text{sen}\, z - \frac{\text{sen}^3 z}{3\,!} + \frac{\text{sen}^5 z}{5\,!} - \dots$$

que é uniformemente convergente qualquer que seja z (n.° 24). A funcção

$$\text{sen}^n z = \left(z - \frac{z^3}{3\,!} + \frac{z^5}{5\,!} - \dots\right)^n$$

póde ser desenvolvida (n.° 22) em série ordenada segundo as potencias de z, qualquer que seja z. Logo, em virtude do theorema precedente, tambem a funcção sen (sen z) póde ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z, qualquer que seja z.

Exemplo 2.° — Vê-se do mesmo modo que a funcção

$$f(z) = \text{sen}\,[\log\,(z+1)]$$

póde ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z quando o módulo de z é menor do que a unidade.

152. — Applicando o theorema precedente ás séries ordenadas segundo as potencias de $z - a$, sendo z variavel e a constante, deduz-se, como vamos vêr, o seguinte:

Theorema. — *Se a série*

$$(1) \quad f(z) = c_0 + c_1 (z - a) + \dots + c_n (z - a)^n + \dots$$

fôr convergente no interior d'um circulo de centro a e raio R, isto é quando $|\, z - a \,| < R$, e se z_0 representar um ponto do interior d'este circulo, as derivadas $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, etc. existem e são finitas e respectivamente iguaes ás sommas das derivadas de primeira ordem, de segunda ordem, etc. dos termos da série proposta, isto é:

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f''(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n (z_0 - a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Em segundo logar, se fôr $|\, z_0 - a \,| + |\, z - z_0 \,| < R$, teremos

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^n(z_0) + \ldots$$

Com effeito, pondo na série proposta $z = z_0 + h$, teremos

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 + h - a)^n.$$

Esta série, considerada como funcção de h, é uniformemente convergente quando é $| z_0 + h - a | < R$, ou *à fortiori* (n.° 8—I) quando é $| z_0 - a | + | h | < R$. Desenvolvendo pois os binomios que n'ella entram e ordenando o resultado segundo as potencias de h, teremos, em virtude do theorema precedente,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h f_1(z_0) + h^2 f_2(z_0) + \ldots,$$

onde é

$$f_1(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f_2(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z_0 - a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Pondo agora $h = z - z_0$, vem

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f_1(z_0) + \ldots + (z - z_0)^n f_n(z_0) + \ldots,$$

com a condição $| z_0 - a | + | z - z_0 | < R$.

Para das formulas precedentes tirar o theorema enunciado, basta notar que a ultima dá (passando $f(z_0)$ para o primeiro membro, dividindo depois os dois membros por $z - z_0$ e fazendo finalmente tender z para z_0) $f_1(z_0) = f'(z_0)$, e que, como cada uma das funcções $f_1(z)$, $f_2(z_0)$, $f_3(z_0)$, etc. se deduz da anterior como $f'(z_0)$ se deduz de $f(z_0)$, temos $f_2(z_0) = f''(z_0)$, $f_3(z_0) = f'''(z_0)$, etc.

Corollario. — *Se a série* (1) *fôr convergente no interior do circulo de raio R e centro a, a funcção é continua dentro do mesmo circulo.*

Com effeito, em todos os pontos do interior d'este circulo $f(z)$ tem uma derivada finita.

153. — A respeito das derivadas das séries enunciaremos ainda o theorema seguinte, que se demonstra do mesmo modo que o theorema analogo relativo ás funcções de variaveis reaes (n.º 140):

Se a série $\Sigma f_n(z)$ fôr convergente n'uma área dada, e se na mesma área fôr uniformemente convergente a série $\Sigma f'_n(z)$ formada com as derivadas dos termos da precedente, é $f'(z) = \Sigma f'_n(z)$ na mesma área.

III

Funcções regulares n'uma região do plano

154. — *Definição.* — Se a funcção $f(z)$, na visinhança do ponto z_0, fôr susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, de modo que haja um numero positivo R tal que seja

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

quando $|z - z_0| < R$, diz-se que *a funcção $f(z)$ é regular no ponto z_0*.

E' facil de vêr que $(1 + z)^k$, e^z, $\log(1 + z)$, etc. são funcções regulares em todo o plano excepto em pontos isolados.

1) O binomio $(1 + z)^k$ dá

$$(1 + z)^k = (1 + z_0)^k \left[1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right]^k$$

$$= (1 + z_0)^k \Sigma \binom{k}{n} \left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^k$$

quando $|z - z_0| < |1 + z_0|$; e portanto é regular em todo o plano, exceptuando-se o ponto $z_0 = -1$ quando k não é inteiro e positivo.

2) Da série

$$e^z = e^{z-z_0} \cdot e^{z_0} = e^{z_0}\left[1 + z - z_0 + \ldots + \frac{(z-z)^n}{n!} + \ldots\right]$$

conclue-se que a funcção e^z é regular em todo o plano.

3) Da igualdade

$$\log(1+z) = \log(1+z_0) + \log\left(1 + \frac{z-z_0}{1+z_0}\right)$$

$$= \log(1+z_0) + \frac{z-z_0}{1+z_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^2 + \ldots,$$

que tem logar quando é $|z - z_0| < |1 + z_0|$, conclue-se que $\log(1+z)$ é uma funcção regular em todo o plano excepto no ponto $z_0 = -1$.

4) Do mesmo modo se mostra que sen z e cos z são funcções regulares em todo o plano.

155. — Theorema 1.º — *Se uma funcção uniforme, regular em todos os pontos de uma área A, fôr constante em todos os pontos de uma linha finita contida na área A, é constante em toda a área.*

Este theorema é devido a Neumann, e foi por elle demonstrado do modo seguinte:

Representando por a o valor de z correspondente a um ponto qualquer da linha dada, teremos, para todos os valores de z representados pelos pontos de um circulo de centro a e raio R,

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

ou (n.º 152)

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!}f^n(a) + \ldots$$

Mas por ser constante a funcção $f(z)$ em todos os pontos da linha dada, temos $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, etc. Logo será $f(z) = f(a)$ em todo o circulo considerado.

Tomando em seguida um ponto b do circulo anterior e repetindo o raciocinio precedente demonstra-se do mesmo modo que $f(z) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um segundo circulo, que é em parte distincto do anterior. Tomando um ponto c d'este circulo acha-se do mesmo modo $f(z) = f(c) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um terceiro circulo. Continuando do mesmo modo até ao contôrno da área A demonstra-se completamente o theorema.

THEOREMA 2.º—*Se duas funcções uniformes, regulares em todos os pontos de uma área A, forem iguaes em todos os pontos de uma linha finita contida na área A, são iguaes em toda a área.*

Este theorema é consequencia immediata do anterior, pois que a differença das duas funcções sendo nulla em todos os pontos da linha dada, será nulla em toda a área A.

THEOREMA 3.º—*Se uma funcção uniforme, regular no ponto a, se annulla assim como as suas derivadas até á ordem $m - 1$, quando é $z = a$, teremos*

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

onde $\varphi(z)$ é uma funcção uniforme regular na visinhança do ponto a.

Com effeito, sendo por hypothese

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_m(z - a)^m + \ldots$$

e $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, etc., temos

$$f(z) = (z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{(z - a)}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \ldots\right],$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

THEOREMA 4.º—*Os pontos em que uma funcção uniforme, regular n'uma área A, tem um mesmo valor, estão separados por intervallos finitos, se a funcção não é constante.*

Com effeito, por não ser constante a funcção $f(z)$ na área A, as derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, etc. não podem ser todas iguaes a zero. Chamando pois $f^m(a)$ a primeira derivada que não é nulla, teremos a differença

$$f(z) - f(a) = (z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{z - a}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \ldots\right],$$

onde é possivel dar a $|z - a|$ um valor tão pequeno δ, que o módulo do seu primeiro termo seja maior que o módulo da somma dos seguintes quando $|z - a| \lesseqgtr \delta$. Logo no circulo de centro a e raio δ a differença $f(z) - f(a)$ não póde ser nulla em ponto differente de a.

Theorema 5.º—*A somma de duas expressões uniformes, regulares em todos os pontos da área A, é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Este theorema é uma consequencia immediata do theorema 4.º do n.º 22. Com effeito, chamando $f(z)$ e $F(z)$ as duas expressões dadas e a um ponto da área A, teremos

$$f(z) = \Sigma c_n (z - a)^n, \quad F(z) = \Sigma C_n (z - a)^n,$$

e portanto

$$f(z) + F(z) = \Sigma (c_n + C_n)(z - a)^n.$$

Theorema 6.º—*O producto de duas expressões uniformes, regulares em todos os pontos da área A, é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o anterior, partindo do theorema 5.º do n.º 22.

Theorema 7.º—*O quociente de duas expressões $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, uniformes e regulares na área A, é regular nos pontos da mesma área em que o denominador $\psi(z)$ se não annulla.*

Com effeito, pondo

$$\psi(z) = c_0 + c_1 (z - a) + \ldots + c_n (z - a)^n + \ldots,$$

onde c_0 é differente de zero, teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \left[1 + \frac{(z - a)(c_1 + c_2 (z - a) + \ldots)}{c_0}\right]^{-1}$$

$$= c_0 [1 + P(z - a)]^{-1},$$

pondo

$$\frac{(z - a)[c_1 + c_2 (z - a) + \ldots]}{c_0} = P(z - a).$$

Dando a $|z - a|$ um valor tão pequeno que seja $|P(z - a)| < 1$, podemos desenvolver $[\psi(z)]^{-1}$ em série ordenada segundo as potencias de $z - a$, e teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \left\{ 1 - P(z-a) + [P(z-a)]^2 - [P(z-a)]^3 + \ldots \right\}.$$

Esta série é uniformemente convergente na visinhança do ponto a assim como (n.º 22) as séries que resultam de $P(z-a)$, $[P(z-a)]^2$, etc.; logo (n.º 151) a funcção $\frac{1}{\psi(z)}$ é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de $z-a$ na visinhança do ponto a. Esta funcção é pois regular no ponto a, assim como, em virtude do theorema anterior, a funcção $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(z) \cdot \frac{1}{\psi(z)}$.

IV

Funcções regulares em todo o plano

156. — A toda a funcção uniforme $f(z)$ regular em todos os pontos do plano chama-se *funcção inteira* ou *holomorpha*. Taes são, entre as funcções algebricas, os polynomios racionaes inteiros relativamente a z, e, entre as funcções transcendentes, as funcções e^z, sen z, cos z e, em geral, as funcções que podem ser desenvolvidas na série ordenada segundo as potencias inteiras positivas de z:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

qualquer que seja z. Com effeito, estas funcções são regulares em todos os pontos do plano, pois que, desenvolvendo segundo as potencias de $z-a$ os termos da série

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a+a) + \ldots + c_n(z-a+a)^n + \ldots,$$

obtem-se, em virtude do theorema do n.º 151, o desenvolvimento de $f(z)$ com série ordenada segundo as potencias de $z-a$, qualquer que seja a.

A theoria das funcções transcendentes inteiras é a continuação natural da theoria das funcções racionaes inteiras, estudada na Algebra, e as suas propriedades são, em parte, análogas ás propriedades d'estas. São tambem susceptiveis de se exprimir por um producto de factores que tornam explicitas as raizes da funcção. Este resultado importante, demonstrado primeiro por Euler, Cauchy, Gauss, etc., em alguns casos particulares, foi completamente estabelecido pelo sr. Weierstrass (1). Antes porém de expôr o bello theorema devido ao eminente geometra de Berlim, vamos considerar as duas funcções sen z e cos z cuja decomposição em factores, devida a Euler, se obtém por considerações particulares.

157.—*Decomposição do seno e do coseno em factores.* —Da expressão de sen kz dada no n.º 147—III tira-se, quando k é impar, pondo $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$,

$$\operatorname{sen} kz = f(\operatorname{sen} z),$$

onde f representa uma funcção inteira do grão k. Os k valores de sen z, que annullam esta funcção, devem corresponder aos valoros de z que satisfazem á equação sen $kz = 0$ e que dão para sen z valores distinctos, isto é, aos valores de z seguintes:

$$0, \pm \frac{\pi}{k}, \pm \frac{2\pi}{k}, \ldots, \pm \frac{(k-1)\pi}{2k}.$$

Logo temos

$$\operatorname{sen} kz = A \operatorname{sen} z \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{k}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right),$$

onde A é uma constante que vamos determinar. Para isso, divida-se os dois membros da igualdade precedente por kz e faça-se depois tender z para zero. O primeiro membro tendendo para a unidade e o segundo para $\frac{A}{k}$, teremos $A = k$.

---

(1) Weierstrass:—*Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veranderlichen* (*Abhandlungen der K. Akademie zu Berlin*—1876).

Mudando na igualdade precedente z em $\frac{\pi z}{k}$, temos

$$\operatorname{sen}\pi z = k\operatorname{sen}\frac{\pi z}{k}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{k}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2\frac{(k-1)\pi}{2k}}\right).$$

Vamos agora procurar o limite para que tende o segundo membro d'esta igualdade quando k tende para o infinito.

Por tender para a unidade a razão do seno para o arco quando o arco tende para zero, é facil de vêr que, quando k tende para o infinito, teremos

$$\operatorname{sen}\pi z = \pi z\left(1-\frac{z^2}{1}\right)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(m-1)^2}\right)\lim_{k=\infty} R_m$$

$$R_m = \prod_{n=m}^{\frac{1}{2}(k-1)}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{k}}\right).$$

Por ser (em virtude do que se disse no n.° 148 e de ser $\frac{1}{2}(k-1)$ o maior valor que póde ter n)

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} - \frac{\left(\frac{n\pi}{k}\right)^2}{3\,!}\cos\theta\,\frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k}\left(1-\theta_n\frac{\pi^2}{24}\right),$$

onde θ_n representa uma quantidade inferior á unidade em valor absoluto; e por ser

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{k} = \frac{\pi^2 z^2}{k^2}(1+\varepsilon)^2,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena quando k é infinitamente grande, teremos

$$1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{k}} = 1-\frac{z^2(1+\varepsilon)^2}{n^2\left(1-\theta_n\frac{\pi^2}{24}\right)^2} = 1+\frac{u_n}{n^2},$$

onde u_n representa uma quantidade cujo módulo não póde ser infinito, qualquer que seja n. Logo

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_1^{m-1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) . \prod_m^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right).$$

Por outra parte, chamando L um numero maior do que as quantidades u_1, u_2, etc., a série $\sum_1^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$ é convergente, visto que os seus termos são menores do que os termos correspondentes da série (n.° 17) $\sum_1^{\infty} \frac{L}{n^2}$; e portanto é tambem convergente o producto infinito $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)$, e temos

$$\lim_{m=\infty} \prod_m^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right) = \frac{\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)}{\lim_{m=\infty} \prod_1^{m-1} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)} = 1.$$

Vem pois a formula d'Euler

$$(a) \qquad \operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Do mesmo modo se decompõe $\cos \pi z$ em factores, o que dá

$$\cos \pi z = \prod_0^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right).$$

158. — Theorema de Weierstrass. — *Sendo dada a série de quantidades* $0, a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, *collocadas segundo a ordem crescente dos seus módulos e satisfazendo á condição* $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *pode-se construir uma funcção transcendente inteira, pela formula*

$$(1) \quad f(z) = z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c}, \; S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

cujas raizes são $0, a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, *e cujos respectivos gráos de multiplicidade são* $n_0, n_1, \ldots, n_c, \ldots$

Reciprocamente, se $f_1(z)$ representar uma funcção inteira cujas raizes são $0, a_1, a_2, \ldots, a_e, \ldots$ e os respectivos grãos de multiplicidade $n_0, n_1, \ldots, n_e, \ldots$, esta funcção póde ser decomposta em factores, que tornam explicitas estas raizes, por meio da formula

$$(2) \qquad f_1(z) = e^{\varphi(z)}\, z^{n_0} \prod_{e=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_e}\right)^{n_e} e^{n_e S_e},$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira.

A demonstração que aqui vamos dar d'este importante theorema é devida ao sr. Mittag-Leffler, professor na Universidade de Stockholm (1).

Da série (n.º 149)

$$\log\left(1 - \frac{z}{a_e}\right)^{n_e} = -\, n_e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_e}\right)^k,$$

que tem logar quando é $\left|\frac{z}{a_e}\right| < 1$, deduz-se

$$(A) \qquad \left(1 - \frac{z}{a_e}\right)^{n_e} = e^{-\, n_e S_e(1,\, \infty)}$$

pondo para brevidade

$$S_e(u, \nu) = \sum_{k=u}^{\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_e}\right)^k.$$

Logo temos

$$(B) \qquad \left(1 - \frac{z}{a_e}\right)^{n_e} e^{n_e S_e(1,\, m_e)} = e^{-\, n_e S_e(m_e + 1,\, \infty)}$$

onde m_e representa um numero inteiro ou zero, devendo n'este ultimo caso considerar-se $e^{n_e S(1,\, m_e)}$ como representando a unidade.

Considere-se agora uma série de quantidades positivas ε_1,

(1) *Acta Mathematica*, tomo IV.

*

$\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_c, \ldots$ taes que a somma $\sum_1^\infty \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valor tão grande que seja

$$(C) \qquad n_c \mid S_c(m_c + 1, \infty) \mid < \varepsilon_c$$

qualquer que seja o valor que se dê a z, que satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$; o que é sempre possivel por ser n'este caso uniformemente convergente a série $S_c(1, \infty)$. O producto $\Pi\, E_c$, pondo

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c\, S_c(1,\, m_c)} = E_c,$$

representa uma funcção regular em todos os pontos do plano e que se annulla nos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, como vamos vêr.

Consideremos um ponto qualquer z_0 do plano e os pontos visinhos d'este, isto é, os pontos que satisfazem á condição $| z - z_0 | \leqq \rho$, onde ρ é uma quantidade tão pequena quanto se queira.

Por ser $\lim_{c = \infty} a_c = \infty$, é sempre possivel dar a c_1 um valor tão grande que a desigualdade $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$ seja satisfeita por todos os valores de c maiores do que c_1, e por todos os valores de z que satisfaçam á condição $| z - z_0 | \leqq \rho$.

Por outra parte, por ser convergente a série $\sum_1^\infty \varepsilon_c$, é sempre possivel dar a c_2 um valor tão grande que, dando a δ um valor tão pequeno quanto se queira, a desigualdade

$$\sum_{t = c}^{c + p} \varepsilon_t < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de c superiores a c_2, qualquer que seja p.

Logo as duas desigualdades precedentes são satisfeitas ao mesmo tempo pelos valores de c maiores do que a maior das quantidades c_1 e c_2, na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | \leqq \rho$.

Das desigualdades precedentes e da desigualdade (C) conclue-se que a desigualdade

$$(D) \qquad \sum_{t=c}^{c+p} \left| n_t \, S_t\,(m_t + 1, \infty) \right| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de c superiores a c_1 e c_2, na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | \overline{\overline{<}} \rho$.

Por outra parte, a formula (B) dá

$$\prod_{t=c}^{c+p} E_t = e^{-\sum\limits_{t=c}^{c+p} n_t \, S_t\,(m_t + 1, \infty)}$$

d'onde se tira

$$\sum_{t=c}^{c+p} \log E_t = - \sum_{t=c}^{c+p} n_t \, S_t\,(m_t + 1, \infty),$$

e, em virtude da desigualdade (D),

$$\left| \sum_{t=c}^{c+p} \log E_t \right| < \delta.$$

Logo a série $\sum\limits_{t=1}^{\infty} \log E_t$ é uniformemente convergente na região considerada do plano.

Posto isto, supponhamos primeiramente que z_0 é differente de a_c e que a ρ se dá um valor tão pequeno que seja $|z - z_0| < | z_0 - a_c |$. O segundo membro da igualdade

$$\log E_c = n_c \log\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

$$= n_c \log\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right) + n_c \log\left(1 - \frac{z_0}{a_c}\right)$$

$$+ n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z_0 + z - z_0}{a_c}\right)^k$$

é susceptivel de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, e temos [1] $\log E_c = P(z - z_0)$; e portanto, applicando o theorema do n.° 151,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \log E_c = P_1(z - z_0),$$

d'onde se tira

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = e^{P_1(z - z_0)}.$$

D'esta formula tira-se depois

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = 1 + P_1(z - z_0) + \ldots + \frac{P_1^n(z - z_0)}{n!} + \ldots$$

ou (n.° 151)

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = P_2(z - z_0),$$

o que prova que a funcção $\prod_1^{\infty} E_c$ é regular no ponto z_0, como se queria demonstrar.

Supponhamos agora que z_0 representa uma raiz a_j da funcção que queremos formar. Dando n'este caso a ρ um valor tão pequeno que na área plana determinada pela condição $|z - a_j| \leqq \rho$ não exista outra raiz da funcção considerada, teremos

$$\frac{\prod_1^{\infty} E_c}{\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)^{n_j}} = e^{P_3(z - a_j)}$$

visto que o primeiro membro não tem a raiz a_j; e portanto

$$\prod_1^{\infty} E_c = \frac{(-1)^{n_j}}{a_j}(z - a_j)^{n_j} e^{P_3(z - a_j)},$$

(1) Empregaremos, como o sr. Weierstrass, as notações $P(z - z_0)$, $P_1(z - z_0)$, etc. para representar séries ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - z_0$.

d'onde se conclue, como no caso anterior, que a funcção $\prod_1^\infty E_c$ é regular no ponto a_j.

As raizes a_1, a_2, etc. da funcção que vimos de formar, são todas differentes de zero. Para que a funcção tenha tambem a raiz 0 basta multiplicar $\prod_1^\infty E_c$ por z^{n_0}. Com effeito, temos (n.° 22)

$$z^{n_0} \prod_1^\infty E_c = (z_0 + z - z_0) P_2 (z - z_0) = P_4 (z - z_0),$$

e portanto a nova funcção que se obtém é ainda regular em todo o plano.

De tudo o que precede conclue-se a primeira parte do theorema de Weierstrass, isto é, que se póde constituir pela formula (1) uma funcção que se comporta regularmente em todo o plano e que se annulla nos pontos 0, a_1, a_2, etc.

Para demonstrar a segunda parte d'este theorema, basta notar que o quociente da funcção $f_1(z)$ dada pela funcção $f(z)$, que vimos de formar, não póde ser nullo nem infinito em ponto algum do plano. Logo este quociente representa (n.° 155—7.°) uma funcção $F(z)$ regular em todo o plano, que não se annulla em ponto algum.

Por ser, na visinhança do ponto z_0,

$$F(z) = b_0 + b_1 (z - z_0) + b_2 (z - z_0)^2 + \dots,$$

onde b_0 é differente de zero, teremos

$$\log F(z) = \log b_0 + \log \left[1 + \frac{(z - z_0)(b_1 + b_2 (z - z_0) + \dots)}{b_0}\right].$$

Logo se a $|z - z_0|$ se der um valor tão pequeno que seja

$$\frac{|z - z_0| \, |b_1 + b_2 (z - z_0) + \dots|}{|b_0|} < 1,$$

teremos, em virtude do theorema do n.° 151,

$$\log F(z) = P(z - z_0),$$

e portanto a funcção $\log F(z)$ é inteira. Temos pois, representando por $\varphi(z)$ esta funcção, $F(z) = e^{\varphi(z)}$, e portanto

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} . f(z),$$

que é o que se queria demonstrar.

159. — *Determinação dos factores primarios das funcções inteiras.* — A cada um dos factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) e^{n_c S_c},$$

que entram nas formulas (1) e (2), chama o sr. Weierstrass um *factor primario* das funcções consideradas $f(z)$ e $f_1(z)$. Tanto para decompôr uma funcção inteira dada em factores primarios, como para achar uma funcção inteira que tenha raizes dadas, é necessario conhecer, para cada valor de c, um valor de m_c que satisfaça á desigualdade (C), e para isso basta, como vamos vêr, dar a m_c valores taes que seja convergente a série

$$(E) \qquad \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|.$$

Com effeito, se esta série é convergente, podemos dar a ε_c o valor

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|,$$

chamando λ uma quantidade independente de z e de c.

Mas, por ser

$$n_c \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k$$

e

$$\sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k = \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| . \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|},$$

a desigualdade (C) póde ser substituida pela seguinte:

$$\left|\frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}}\right| \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|} < \varepsilon_c,$$

que é satisfeita, visto que se póde dar a λ o valor maximo $\frac{1}{1-\varepsilon}$ que toma $\frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|}$ quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

Se houver pois um valor de m_c, constante qualquer que seja c, tal que a série (E) seja convergente, emprega-se este valor em todos os termos das formulas (1) ou (2). No caso contrario, põe-se $m_c = c$; com effeito, a série (E) transforma-se então na série $\sum_{c=1}^{\infty} \left|\frac{n_c z^{c+1}}{a_c^{c+1}}\right|$, que é convergente (n.° 19—IV), visto que a raiz $\sqrt[c]{n_c \left|\frac{z}{a_c}\right|^{c+1}}$ tende para zero quando c tende para o infinito.

Exemplo.—Procuremos a fórma geral das funcções inteiras cujas raizes são 0, 1, — 1, 2, — 2, ..., c, — c, etc.

Como a série $\sum_{c=1}^{\infty} \left|\frac{z^2}{a_c^2}\right| = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{c^2}$ é convergente qualquer que seja z (n.° 17), podemos pôr $m_c = 1$, e temos

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty} \left[\left(1-\frac{z}{c}\right) e^{\frac{z}{c}} \left(1+\frac{z}{c}\right) e^{-\frac{z}{c}}\right],$$

ou

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira de z.

Faz parte das funcções comprehendidas na fórma precedente a funcção sen πz. N'este caso é $e^{\varphi(z)} = \pi$ (n.° 157).

160.—Fundados no que precede pode-se achar um desenvolvimento em série da funcção $\frac{f'_1(z)}{f_1(z)}$, em que se tornam explicitos os pontos onde esta funcção é infinita.

Derivando os logarithmos dos dois membros da formula (2) vem (n.º 153)

$$\frac{f'_1(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left[\frac{n_c}{z-a_c} + \sum_{k=1}^{m_c} \frac{n_c}{a_c}\left(\frac{z}{a_c}\right)^{k-1}\right]$$

ou

$$(F) \qquad \frac{f'_1(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z-a_c)},$$

visto ser

$$\frac{1}{z-a_c} = -\frac{1}{a_c}\left[1 + \frac{z}{a_c} + \ldots + \left(\frac{z}{a_c}\right)^{m_c-1}\right] + \frac{z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z-a_c)}.$$

Para completar a demonstração d'esta formula (F) vamos mostrar que a série que entra no seu segundo membro é uniformemente convergente, quando a série (E) é uniformemente convergente. Com effeito, por esta série ser uniformemente convergente e por $|a_t|$ tender para o infinito com t, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valor t_1 tal que as desigualdades (n.º 124)

$$\lambda \sum_{c=t}^{t+p} \left|\frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}}\right| < \delta, \quad \left|\frac{z}{a_t}\right| < \varepsilon$$

serão satisfeitas quando $t > t_1$ e $|z| < \rho$, ρ representando uma quantidade tão grande quanto se queira. Logo *à fortiori* teremos

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left|\frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}}\right| \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|} < \delta.$$

depois

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c\, z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}} \right| \frac{1}{\left|1 - \frac{z}{a_c}\right|} < \delta,$$

e finalmente

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c\, z^{m_c}}{a_c^{m_c}\,(z - a_c)} \right| < \delta,$$

d'onde se conclue que a série que entra no segundo membro de (F) é uniformemente convergente em qualquer área, por maior que seja.

161.—*Caso em que m_c é constante.*—No caso de m_c ser constante, a funcção (2) tem propriedades notaveis que foram estudadas por Laguerre, Cesáro, etc. Aqui limitar-nos-hemos a demonstrar, no caso de $\varphi(z)$ ser constante e $n_0 = 0$, o theorema seguinte:

Se todas as raizes de $f_1(z)$ são reaes, tambem as raizes de $f'_1(z)$ o são.

Este theorema foi demonstrado por F. Chio nos casos de ser $m_c = 0$ e $m_c = 1$, e em seguida pelo sr. Cesáro no caso de m_c representar uma constante qualquer (1).

Seja $z_1 = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ uma qualquer das raizes da equação $f'_1(z) = 0$. Substituindo este valor em logar de z na igualdade (F) e pondo $m_c = m$, vem

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \cdot \frac{n_c(\cos m\omega + i \operatorname{sen} m\omega)}{\rho\cos\omega - a_c + i\rho \operatorname{sen}\omega} = 0.$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes, das quaes uma determina ρ e a outra ω:

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c} \left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \left\{\rho\cos(m-1)\omega - a_c \cos m\omega\right\} = 0$$

(1) *Giornale di Mathematiche*, tomo XXII.

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c} \left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \left\{\rho \text{ sen } (m-1)\,\omega - a_c \text{ sen } m\omega\right\} = 0$$

pondo $d_c = (\rho \cos \omega - a_c)^2 + \rho^2 \text{ sen}^2 \omega$.

Se m é impar, multiplicando a primeira d'estas igualdades por sen $(m-1)\,\omega$, a segunda por cos $(m-1)\,\omega$ e subtrahindo, vem

$$\text{sen } \omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c\, a_c^{m-1}} = 0,$$

d'onde se tira $\omega = 0$.

Se m é par, multiplicando a primeira equação por sen $m\omega$, a segunda por cos $m\omega$ e subtrahindo, vem

$$\text{sen } \omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c\, a_c^{m}} = 0,$$

d'onde se tira tambem $\omega = 0$.

Logo, em qualquer dos casos, será $z_1 = \rho$. As raizes de $f'_1(z) = 0$ são portanto reaes, como se queria demonstrar.

V

Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados

162. — Das funcções uniformes não inteiras limitar-nos-hemos a estudar as que são regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, taes que seja $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, e na visinhança dos quaes tenhamos

$$(1) \qquad f(z) = P(z - a_c) + G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right)$$

onde

$$(2) \qquad G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{m} A_t \left(\frac{1}{z - a_c}\right)^t.$$

Estes pontos são os *pontos singulares* da funcção, e foram chamados pelo sr. Weierstrass *pólos* quando m é finito, *pontos singulares essenciaes* quando m é infinito.

As funcçoes consideradas resultam naturalmente da generalisação das funcções racionaes. Na verdade, toda a funcção racional $f(z)$ é susceptivel da decomposição (n.° 39)

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z-a_1)^a} + \Sigma \frac{B_b}{(z-a_2)^b} + \ldots;$$

se agora z_0 representar um ponto differente de a_1, a_2, etc., temos

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z_0-a_1)^a}\left(1+\frac{z-a_0}{z_0-a_1}\right)^{-a} + \ldots,$$

d'onde resulta (n.^{os} 147 e 22)

$$f(z) = P(z-z_0),$$

e a funcção é portanto regular na visinhança de z_0; se porém z_0 representa um dos pontos a_1, a_2, etc., a_1 por exemplo, applicando a decomposição anterior só ás parcellas correspondentes a a_2, a_3, etc. vem um resultado da fórma

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z-a_1)^a} + P_1(z-a_1),$$

e o ponto a_1 é portanto um pólo.

Pertencem tambem ao grupo de funcções que estamos considerando as funcções $f_1(z)$ que são o quociente de duas funcções transcendentes inteiras $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$. Com effeito, sendo a_1, a_2, ..., a_c, ... as raizes do denominador e n_1, n_2, ..., n_c, ... os seus respectivos gráos de multiplicidade, a funcção $f_1(z)$ será regular em qualquer ponto z_0 do plano, differente dos pontos a_1, a_2, etc. (n.° 155—7.°); e, na visinhança do ponto a_c, teremos (n.° 158)

$$f_1(z) = \frac{P(z-a_c)}{(z-a_c)^{n_c}\, e^{P_1(z-a_c)}} = \frac{P_2(z-a_c)}{(z-a_c)^{n_c}}$$

$$= G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_3(z-a_c).$$

Logo a funcção considerada é regular em todo o plano excepto nos pontos a_1, a_2, ..., a_c, ..., que são pólos.

163. — Assim como acontece com as funcções racionaes, as funcções que estamos estudando são susceptiveis de uma decomposição que torna explicitos os pólos e os pontos singulares essenciaes da funcção. Esta propriedade importante, estabelecida pelo sr. Weierstrass no caso de ser finito o numero de pontos singulares da funcção, foi em seguida estendida pelo sr. Mittag-Leffler ao caso de a funcção conter um numero infinito de pólos ou pontos singulares essenciaes. Antes porém de demonstrar o bello e importante theorema devido ao sabio professor da Universidade de Stockholm, vamos considerar o caso da funcção cot z, cuja decomposição se obtém de um modo muito simples e dá origem a algumas formulas importantes.

A formula (a) do n.° 157 dá

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{c=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{c^2 \pi^2}\right),$$

e, derivando relativamente a z,

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - c^2 \pi^2},$$

ou

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - c\pi} + \frac{1}{z + c\pi}\right).$$

Esta formula dá a decomposição de $\cot z$ em fracções simples que tornam explicitos os pólos 0, $c\pi$, $-c\pi$ da funcção.

Do que precede tiram-se as seguintes consequencias:

I — Desenvolvendo o binomio que entra no segundo membro da penultima formula, vem

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2 \pi^2} + \frac{z^2}{c^4 \pi^4} + \frac{z^4}{c^6 \pi^6} + \ldots\right)$$

quando é (n.° 147) $|z| < \pi$; e portanto, em virtude do theorema do n.° 151,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c^2} - \frac{2z^3}{\pi^4} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c^4} - \frac{2z^5}{\pi^6} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c^6} - \ldots$$

Esta formula dá o desenvolvimento de $\cot z$ em série ordenada segundo as potencias de z, quando é $|z| < \pi$.

II — Por ser

$$z \cot z = \frac{iz\,({}^{2iz} + 1)}{e^{2iz} - 1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$$

temos (n.° 100 — V), representando $z \cot z$ por u,

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 = (-1)^{\frac{n}{2} - 1} (2i)^n B_{n-1},$$

B_{n-1} designando os numeros de Bernoulli; e portanto, applicando a formula de Maclaurin,

$$z \cot z = 1 - \frac{2^2 B_1}{2\,!} z^2 - \frac{2^4 B_3}{4\,!} z^4 - \frac{2^6 B_5}{6\,!} z^6 - \ldots$$

Igualando os coefficientes das potencias de grão $2m - 1$ de z nos dois desenvolvimentos de $\cot z$ que vimos de obter, resulta a relação importante:

$$\frac{2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m-1}}{(2m)\,!} = \sum_1^\infty \frac{1}{c^{2m}}.$$

III — Do desenvolvimento de $\cot z$ que vimos de obter, póde tirar-se o desenvolvimento de $\operatorname{tang} z$, de $\sec z$ e de $\operatorname{cosec} z$ em série ordenada segundo as potencias de z, desenvolvendo os segundos membros das formulas conhecidas:

$$\operatorname{tang} z = \cot z - 2 \cot 2z,\quad \operatorname{cosec} z = \cot z + \operatorname{tang} \frac{1}{2} z,$$

$$\sec z = \operatorname{tang} z \operatorname{cosec} z;$$

e vê-se que a primeira e a terceira funcção são susceptiveis d'este desenvolvimento quando é $|z| < \frac{\pi}{2}$, e a segunda quando é $|z| < \pi$.

164. — Theorema de Mittag-Leffler. — *Dadas as quantidades* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_c, \ldots$ *collocadas segundo a or-*

dem crescente dos seus módulos e satisfazendo á condição $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *e dadas as funcções*

$$G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),\ G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right),\ \ldots,\ G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right),\ \ldots,$$

que são da fórma (2), *é sempre possivel formar uma funcção* $f(z)$ *da fórma*

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right]$$

que seja regular em todos os pontos do plano differentes de $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, *e da qual estes pontos sejam pólos ou pontos singulares essenciaes.*

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ *regular em todo o plano excepto nos pontos* $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, *que são pólos ou pontos singulares essenciaes, póde ser reduzida á fórma*

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right],$$

onde $\varphi(z)$ *representa uma funcção inteira de* z (¹).

Por ser uniformemente convergente a série

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = -\frac{A_1}{a_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-1} + \frac{A_2}{a^2_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-2} - \ldots$$

quando z é differente de a_c, e por ser cada termo d'esta série susceptivel de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de z quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, teremos em virtude do theorema do n.º 151

$$(A) \qquad G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

(¹) Mittag-Leffler: — *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes*, etc. (*Acta Mathematica* — tomo IV).

Consideremos agora, como no n.º 158, uma série de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_c, \ldots$ taes que a somma $\sum_1^\infty \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valor tão grande que seja

$$B) \qquad \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \varepsilon_c$$

qualquer que seja o valor que se attribua a z que satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, o que é sempre possivel por ser uniformemente convergente a série (A) na região do plano determinada pela condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$. A somma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z),\ F_c(z) = G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

satisfaz ás condições do theorema enunciado, isto é representa a funcção $f(z)$, como vamos vêr.

Seja z_0 um ponto do plano differente dos pontos a_1, a_2, etc., e ρ uma quantidade positiva tão pequena quanto se queira. Por ser $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, e por ser convergente a série $\sum_1^\infty \varepsilon_t$, é sempre possivel dar a c_1 um valor tão grande que as desigualdades

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon,\ \sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

sejam satisfeitas ao mesmo tempo por todos os valores de c superiores a c_1, na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \lesseqgtr \rho$, qualquer que seja p.

D'estas desigualdades e da desigualdade (B) conclue-se que a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \sum_{k=m_t+1}^{\infty} A_k^{(t)} \left(\frac{z}{a_t}\right)^k \right| < \delta$$

ou (form. A)

$$\sum_{t=c}^{c+p} | F_t(z) | < \delta$$

será tambem satisfeita pelos valores de c superiores a c_1, na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | \overline{\gtrless} \rho$.

Logo a série $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é uniformemente convergente na região definida pela condição $| z - z_0 | \overline{\gtrless} \rho$.

Posto isto, como z_0 é differente de a_c, supponhamos que se dá a ρ um valor tão pequeno que seja $|z - z_0| < |z_0 - a_c|$. O segundo membro da igualdade

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{m} \frac{A_t}{z_0 - a_c}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-t}$$

é susceptivel (n.º 151) de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$ na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | \overline{\gtrless} \rho$; logo o mesmo acontece á funcção $F_c(z)$ e temos (n.º 151)

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0).$$

A funcção $\sum_{1}^{\infty} F_c(z)$ é pois regular no ponto z_0.

Consideremos agora um ponto singular a_j de funcção que queremos formar. Dando n'este caso a ρ um valor tão pequeno que na região determinada pela condição $| z - a_j | \overline{\gtrless} \rho$ não exista outro ponto singular da funcção considerada, teremos

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) - F_j(z) = P_1(z - a_j),$$

visto que o primeiro membro não tem o ponto singular a_j, e portanto

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) + P_1(z - a_j),$$

Logo a_j é um pólo ou um ponto singular essencial de $\Sigma F_c(z)$.

Os pontos singulares a_1, a_2, etc. da funcção que vimos de formar são differentes de zero. Para que o ponto 0 seja um ponto singular da funcção, de modo que na visinhança d'este ponto tenhamos

$$f(z) = P_2(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right), \quad G_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{c=1}^{m} \left(\frac{1}{z}\right)^t,$$

basta por

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right).$$

Com effeito, a funcção

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left(\frac{1}{z_0\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)}\right)$$

é (n.° 151) regular na visinhança de qualquer ponto z_0 differente de 0; e na visinhança do ponto 0 a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é regular.

De tudo o que precede conclue-se que a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ tem todas as propriedades enunciadas na primeira parte do theorema do sr. Mittag-Leffler, e representa portanto a funcção $f(z)$ que queriamos formar.

Para demonstrar a segunda parte basta notar que a differença

$$f_1(z) - \sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$$

não tem pontos singulares, e portanto é igual a uma funcção inteira $\varphi(z)$.

165.—*Quociente de duas funcções inteiras.*—Vimos já (n.° 155—7.°) que o quociente de duas funcções inteiras é regular em todo o plano excepto nos pontos que são raizes do denominador, os quaes são pólos (n.° 162). A estas funcções é applicavel pois o theorema de Mittag-Leffler, isto é, podem ser reduzidas á fórma

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = \varphi(z) + \sum_{1}^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) + P_c(z)\right].$$

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano, excepto nos pontos a_1, a_2, ..., a_c, ... que são pólos, é o quociente de duas funcções inteiras. Com effeito, chamando n_1, n_2 etc. os expoentes dos factores $(z - a_1)^{n_1}$, $(z - a_2)^{n_2}$, etc. pelos quaes é necessario multiplicar $f_1(z)$ para fazer desapparecer os pólos, e construindo por meio do theorema de Weierstrass uma funcção inteira $\varphi_2(z)$, cujas raizes sejam a_1, a_2, etc. com os gráos de multiplicidade n_1, n_2, etc., o producto $f_1(z)\,\varphi_2(z)$ é regular em todo o plano, e representa portanto uma funcção inteira $\varphi_1(z)$. Temos pois

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}.$$

INDICE

INTRODUCÇÃO

CAPITULO I

THEORIA DOS NUMEROS IRRACIONAES, DOS NUMEROS NEGATIVOS E DOS NUMEROS IMAGINARIOS. REGRAS PARA O SEU CALCULO

	Paginas
I Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra . . .	1-3
II Theoria dos numeros irracionaes.	3-8
III Numeros negativos e numeros imaginarios	9-17
IV Noção de limite	18-29
V Séries	29-51
VI Productos infinitos	52-59
VII Fracções continuas	59-66

CAPITULO II

PRINCIPIOS GERAES DA THEORIA DAS FUNCÇÕES. FUNCÇÕES ALGEBRICAS, LOGARITHMICAS, ETC.

I Principios geraes	67-77
II Funcções algebricas	77-84
III Funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares	85-99

CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

NOÇÕES PRELEMINARES

I Noção de infinitamente pequeno e de derivada	101-106
II Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do Calculo infinitesimal	107-113

CAPITULO II

DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM DAS FUNCÇÕES

I Theoremas geraes	114-117
II Derivadas das funcções algebricas, logarithmicas, circulares, etc.	118-123
III Relações entre as funcções e suas derivadas	123-126
IV Funcções de muitas variaveis	126-132
V Derivadas das funcções de variaveis imaginarias	133-136
VI Funcções implicitas	136-147

Paginas

VII Derivadas dos determinantes. Determinantes funccionaes . 147-155
VIII Derivada de limites de sommas. Derivada dos arcos de curva 155-160
IX Mudança das variaveis 161-166

CAPITULO III

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DOS PRINCIPIOS PRECEDENTES

I Curvas planas 167-181
II Curvas no espaço 182-189
III Superficies 189-195
IV Curvas e superficies envolventes. 195-204

CAPITULO IV

DERIVADAS E DIFFERENCIAES DE ORDEM QUALQUER

I Formação das derivadas de ordem qualquer 205-217
II Applicações 217-227
III Differenciaes de ordem superior 228-230
IV Relações entre as funcções e suas derivadas 230-238

CAPITULO V

APPLICAÇÕES ANALYTICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I Desenvolvimento em série do binomio e de algumas funcções algebricas. 239-249
II Desenvolvimento em série de algumas funcções transcendentes 249-255
III Interpolação 256-259
IV Desenvolvimento em série das funcções implicitas 259-263
V Maximos e minimos. 263-273
VI Indeterminações 273-278

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I Curvas planas. 279-290
II Curvas no espaço 290-293
III Superficies 294-298

CAPITULO VII

FUNCÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES. SINGULARIDADES DAS FUNCÇÕES

I Funcções definidas por séries 299-302
II Singularidades de algumas funcções 303-312

CAPITULO VIII

FUNCÇÕES DE VARIAVEIS IMAGINARIAS

I Definições e principios geraes. 313-317
II Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias 313-331
III Funcções regulares n'uma região do plano 331-335
IV Funcções regulares em todo o plano 335-348
V Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados 348-356