CURSO

DE

ANALYSE INFINITESIMAL

CURSO

DE

ANALYSE INFINITESIMAL

POR

F. GOMES TEIXEIRA

*Director da Academia Polytechnica do Porto,
professor na mesma Academia,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio correspondente das Academias Reaes das Sciencias
de Lisboa, Madrid, etc.*

CALCULO DIFFERENCIAL

(Premiado pela Academia Real das Sciencias de Lisboa com o premio
instituido por El-Rei D. Luiz I)

2.ª EDIÇÃO

PORTO
TYPOGRAPHIA OCCIDENTAL
Rua da Fabrica, 66

1890

INTRODUCÇÃO

CAPITULO I

THEORIA DOS NUMEROS IRRACIONAES, DOS NUMEROS NEGATIVOS E DOS NUMEROS IMAGINARIOS. REGRAS PARA O SEU CALCULO

I

Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra

1. — Os numeros inteiros e os numeros fraccionarios cujos numeradores e denominadores são numeros inteiros, constituem a classe dos numeros *racionaes*, que podem ser *positivos* ou *negativos*. O estudo dos numeros racionaes positivos é o primeiro objecto da Arithmetica. Ahi são definidos, assim como as operações a que se sujeitam, e ahi são estudadas as propriedades fundamentaes d'estas operações.

Em seguida, na Algebra, em logar de numeros consideram-se lettras que os representam, e definem-se as operações algebricas pelas leis fundamentaes das operações arithmeticas, isto é, da maneira seguinte:

1.° — *Addição* dos numeros representados pelas lettras a e b é a combinação d'estes numeros cujas leis fundamentaes são:

1) $a + b = b + a$

2) $(a + b) + c = (a + c) + b$

3) $a + 0 = a$;

2.º — *Subtracção* é a operação inversa da addição.

3.º — *Multiplicação* é a combinação dos numeros, representados pelas lettras a e b, caracterisada pelas leis:

1) $ab = ba$

2) $(ab)\, c = (ac)\, b$

3) $(a + b)\, c = ac + bc$

4) $a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a$.

4.º — *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5.º — *Elevação a potencias* é a multiplicação de factores iguaes.

6.º — *Extracção de raiz* é a operação inversa da elevação a potencias.

Reflectindo um pouco sobre o que se aprendeu na Arithmetica, é facil de vêr que o calculo arithmetico é principalmente fundado nas leis fundamentaes precedentes, e nas leis fundamentaes da transformação das igualdades e desigualdades:

1) Se fôr $a = b$, será $b = a$

2) Se fôr $a = b$ e $a = c$, será $b = c$

3) Se fôr $a > b$ e $b > c$, será $a > c$

4) Se fôr $a = b$ e $c = d$, será $a + c = b + d$, $ac = bd$, etc.

5) Se fôr $a > b$ e $c > d$, será $a + c > b + d$, $a - d > b - c$.

Duas das operações precedentes, isto é a subtracção e a

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Observatorio astronomico

Nouvelle collection scientifique

Directeur Emile Borel

De la Methode dans les sciences — T. 1º

L'introduction des nombres irrationnelles est beaucoup compliquée. Pour la definition d'une fraction, deux nombres entiers suffisent; pour definir un nombre irrationnel il faut une infinité de nombres entiers ou, ce qui revient au meme, une regle qui permette de separer les nombres entiers et fraccionnaires en deux classes, de façon que les nombres de la première classe soient tous plus petits que les nombres de la seconde classe. Tels sont, par exemple, la classe des nombres entiers et fraccionnaires dont le carré est inferieur à deux, et celle des nombres dont le carré est superieur à deux. On demontre facilement qu'il n'y a pas, dans la premiere classe, de nombre plus grand que tous les nombres de cette première classe, qu'il n'y a pas, dans la seconde classe, de nombre plus petit que tous les autres nombres de cette seconde classe; une pareille coupure, pratiquée dans l'ensemble des nombres entiers et fraccionnaires, definit ce qu'on appelle un nombre irrationnel et permet preciser de la façon la plus simple, ce qu'il faut entendre par les valeurs approchées, ~~en particulier~~ de ce nombre irrationnel, par excès ou par défaut; inversement, la connaissance de ces valeurs approchées, en particulier des valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près, permet de retrouver la coupure qui définit le nombre irrationnel.

Il y a souvent lieu de porter l'attention sur un ensemble spécial de nombres, sur l'ensemble des nombres entiers, par exemple, ou des nombres premiers, ou des nombres décimaux, ou des nombres réels compris entre zéro et un.

Si un ensemble contient une infinité de nombres, tous inférieurs à un nombre A, il existe un nombre a, la borne supérieure de l'ensemble, qui jouit des propriétés suivantes : 1° Aucun nombre de l'ensemble n'est plus grand que a : 2° Si a n'appartient pas à l'ensemble, il y a, dans cet ensemble, des nombres aussi voisins de a qu'on le veut.

Si un ensemble contient une infinité de nombres tous compris entre les nombres A et B, il existe au moins un nombre a jouissant de la propriété suivante : il y a dans l'ensemble une infinité de nombres qui diffèrent aussi peu qu'on le veut de a ; ce nombre a peut d'ailleurs appartenir ou ne pas appartenir à l'ensemble, dont il est ce qu'on appelle un élément d'accumulation.

Par exemple, si l'on considère l'ensemble des fractions décimales dont la partie entière est zéro et dont les chiffres décimaux sont des 9, on peut trouver, dans cet ensemble, une infinité de fractions dont la différence avec le nombre 1 est moindre que $\frac{1}{1000}$ ...... que tel nombre qu'on voudra. Le nombre 1 est un élément d'accumulation de l'ensemble considéré: il en est aussi la borne supérieure; il n'appartient pas à l'ensemble.

extracção de raiz, não são sempre possiveis, quando se usa sómente dos numeros racionaes positivos. Para não ter porém de separar os casos em que estas operações são ou não são possiveis, introduzem-se novas especies de numeros, e generalisam-se as definições das operações, tendo sempre em vista que se conservem as propriedades fundamentaes que vimos de indicar, e que as novas definições levem aos mesmos resultados que as antigas, quando se applicam aos numeros para os quaes estas foram primeiramente estabelecidas. Foi o que se viu na Arithmetica, onde appareceram os numeros *irracionaes*, e na Algebra, onde appareceram os numeros *negativos* e os numeros *imaginarios*. Aqui vamos recordar succintamente a theoria d'estas tres especies de numeros.

II

Theoria dos numeros irracionaes [1]

2. — Consideremos um grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e crescentes

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

e outro grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e decrescentes

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

e supponhamos que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os numeros do segundo, e que a differença

(1) Para um estudo mais desenvolvido da theoria dos numeros irracionaes veja-se:
Dedekind — *Stetigkeit und irracionale Zahlen*, (Brunswick, 1872).
Tannery — *Introduction à la théorie des fonctions* (Paris, 1886).

$b_n - a_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se existe um numero racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os numeros do segundo grupo, este numero é completamente determinado pelos dous grupos. Com effeito, se existissem dois numeros A e B que satisfizessem a esta condição, estes numeros deveriam estar comprehendidos entre b_n e a_n, e seria, por maior que fosse n,

$$B - A < b_n - a_n,$$

o que é absurdo, visto que a differença $b_n - a_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se porém não existe numero algum racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os numeros do segundo, diz-se, por definição, que os dous grupos estão separados por um numero *irracional*, maior do que os numeros do primeiro e menor do que os do segundo. Como, n'este caso, qualquer numero racional differente dos precedentes é menor do que um valor de a_n ou maior do que um valor de b_n, vê-se que cada numero irracional divide a totalidade dos numeros racionaes em dous grupos taes que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os numeros do segundo grupo.

E' evidente que a definição precedente comprehende os numeros irracionaes a que se foi conduzido em Arithmetica pela extracção das raizes. Assim, por exemplo, $\sqrt{2}$ representa um numero irracional que separa os numeros racionaes cujos quadrados são menores do que 2 d'aquelles cujos quadrados são maiores do que 2.

Dous numeros irracionaes A e B dizem-se *iguaes* quando todos os numeros racionaes menores do que A são tambem menores do que B, e todos os numeros racionaes maiores do que A são tambem maiores do que B.

Diz-se que A é maior do que B, ou que B é menor do que A, quando existe algum numero racional maior do que B e menor do que A.

3. — Definamos agora as operações sobre numeros irracionaes.

1.º — Sejam dados dous numeros racionaes ou irracionaes A e B determinados pelos grupos

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \\ b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots \\ b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots, \end{cases}$$

e formemos o grupo de numeros crescentes

$$a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \ldots, a_n + a'_n, \ldots$$

e o grupo de numeros decrescentes

$$b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, \ldots, b_n + b'_n, \ldots$$

Como os numeros do primeiro d'estes grupos são menores do que os do segundo, e como a differença entre $b_n + b'_n$ e $(a_n + a'_n)$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande, estes grupos determinam um numero *racional* ou *irracional*, a que se chama *somma* dos numeros dados.

Para justificar esta definição, notemos em primeiro logar que, se os numeros dados A e B forem racionaes, os grupos que vimos de formar determinam o numero racional $A + B$, visto que este numero os separa.

Notemos em seguida que a somma dos numeros A e B, como vimos de a definir, goza das propriedades fundamentaes indicadas no n.º 1, como é facil de verificar.

2.º — Consideremos ainda os numeros A e B e seja $A > B$. Demonstra-se, procedendo como no caso anterior, que os grupos

$$a_1 - b'_1, a_2 - b'_2, \ldots, a_n - b'_n, \ldots$$

$$b_1 - a'_1, b_2 - a'_2, \ldots, b_n - a'_n, \ldots$$

determinam um numero racional ou irracional. A este numero chama-se *differença* dos numeros dados, e representa-se por $A - B$. E' facil, com effeito, de vêr que da sua somma com o numero B resulta um numero igual a A. Para isso, basta notar que esta somma é determinada pelos grupos

$$a_1 - b'_1 + a'_1, \ldots, a_n - b'_n + a'_n, \ldots$$

$$b_1 - a'_1 + b'_1, \ldots, b_n - a'_n + b'_n, \ldots,$$

e que, sendo α um numero racional qualquer menor do que esta somma, temos (para um valor de n sufficientemente grande)

$$\alpha \lesseqgtr a_n - b'_n + a'_n < a_n < A,$$

e que, sendo α maior do que a mesma somma, temos

$$\alpha \geq b_n - a'_n + b'_n > b_n > A;$$

portanto, em virtude da definição de igualdade, é

$$(A - B) + B = A.$$

3.° — Chama-se *producto* dos numeros A e B ao numero definido pelos grupos

$$a_1\, a'_1, a_2\, a'_2, \ldots, a_n\, a'_n, \ldots$$

$$b_1\, b'_1, b_2\, b'_2, \ldots, b_n\, b'_n, \ldots;$$

e chama-se *quociente* d'estes mesmos numeros ao numero definido pelos grupos

$$\frac{a_1}{b'_1}, \frac{a_2}{b'_2}, \ldots, \frac{a_n}{b'_n}, \ldots$$

$$\frac{b_1}{a'_1}, \frac{b_2}{a'_2}, \ldots, \frac{b_n}{a'_n}, \ldots$$

Justificam-se estas definições de um modo semilhante ao que foi empregado no caso da addição e da subtracção.

4.° — Chama-se *potencia* do grão m do numero irracional A ao producto de m factores iguaes a A.

5.° — Chama-se *raiz* de indice m do numero A ao numero que elevado á potencia m dá A. Adiante veremos que existe sempre um numero positivo que satisfaz a esta condição.

4. — E' facil de vêr que as leis relativas á transformação das igualdades e das desigualdades, indicadas no n.° 1, têem logar no caso dos numeros irracionaes, quando se adoptam as definições precedentes. As tres primeiras leis resultam immediatamente das definições de igualdade e desigualdade. A quarta demonstra-se do modo seguinte.

Sejam a, b, c, d quatro numeros determinados pelos grupos

$$\left.\begin{matrix} a_1, \dots, a_n, \dots \\ b_1, \dots, b_n, \dots \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} a'_1, \dots, a'_n, \dots \\ b'_1, \dots, b'_n, \dots \end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix} c_1, \dots, c_n, \dots \\ d_1, \dots, d_n, \dots \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} c'_1, \dots, c'_n, \dots \\ d'_1, \dots, d'_n, \dots \end{matrix}\right\};$$

e seja $a = b$, $c = d$. A somma dos numeros a e c é

$$\left.\begin{matrix} a_1 + c_1, \dots, a_n + c_n, \dots \\ b_1 + d_1, \dots, b_n + d_n, \dots \end{matrix}\right\}$$

e a somma dos numeros b e d é

$$\left.\begin{matrix} a'_1 + c'_1, \dots, a'_n + c'_n, \dots \\ b'_1 + d'_1, \dots, b'_n + d'_n, \dots \end{matrix}\right\}.$$

Para mostrar que estas sommas são iguaes, notemos que das igualdades $a = b$, $c = d$ resulta, quaesquer que sejam os valores que se attribuam a n e m,

$$a_n < b'_m,\ c_n < d'_m,\ b_n > a'_m,\ d_n > c'_m,$$

e portanto

$$a_n + c_n < b'_m + d'_m,\ b_n + d_n > a'_m + c'_m.$$

Sendo pois α um numero racional menor do que $a + c$, existirá um valor de n tal que será, qualquer que seja m,

$$\alpha \leqq a_n + c_n < b'_m + d'_m$$

e portanto $\alpha < b + d$; e sendo α maior do que $a + c$, existirá um valor de n tal que será

$$\alpha \geq b_n + d_n > a'_m + c'_m,$$

e portanto $\alpha > b + d$. Logo, em virtude da definição de igualdade, temos a relação

$$a + c = b + d,$$

que se pretendia demonstrar.

Demonstra-se de uma maneira analoga as outras propriedades fundamentaes das igualdades e desigualdades.

5. — *Representação geometrica dos numeros irracionaes.* Sabe-se pelos Elementos de Geometria que todo o segmento de recta póde ser representado por um numero racional ou irracional, tomando outro segmento de recta para unidade. Vamos agora demonstrar que, reciprocamente, todo o numero irracional A póde representar um segmento de recta. Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de um ponto O, todos os numeros racionaes, menores do que o numero irracional considerado, que entram na sua definição, obtem-se uma série de pontos, que representaremos por M_1, M_2, ..., M_n, ... Do mesmo modo os numeros maiores do que A darão outra série de pontos, que representaremos por N_1, N_2, ..., N_n, ...

$O \quad M_1 \quad M_2 \quad K \quad N_2 \quad N_1$

Por ser $ON_n > OM_n$, qualquer que seja n, vê-se que as duas séries de pontos estão completamente separadas; e por poder tornar-se tão pequena, quanto se queira, a distancia $M_n N_n$, dando a n um valor sufficientemente grande, vê-se que esta separação é feita por meio de um ponto unico K (com effeito, se existissem dous pontos K e K_1, que satisfizessem a esta condição, seria $KK_1 < M_n N_n$, por maior que fosse n, o que é absurdo). Temos assim determinado o segmento OK que o numero irracional considerado representa.

III

Numeros negativos e numeros imaginarios

6. — *Numeros negativos.* — Consideremos a differença $a - b$ entre os dous numeros a e b. Se fôr $b > a$, a subtracção precedente é impossivel, empregando os numeros até aqui estudados. Considera-se porisso $a - b$ como definindo uma nova especie de numeros, a que se chama *numeros negativos.*

Introduzida assim esta especie de numeros, resta definir as operações a realisar com elles de modo que tenham logar as propriedades fundamentaes indicadas no n.º 1.

1.º — Dous numeros $a - b$ e $c - d$ dizem-se iguaes quando é

$$a + d = b + c.$$

Diz-se que $a - b$ é maior do que $c - d$, ou que $c - d$ é menor do que $a - b$, quando é

$$a + d > b + c.$$

D'aqui resulta, pondo $a = 0$, $c = 0$, que é $-b > -d$ quando $d > b$, isto é, que uma quantidade negativa menor do que outra tem maior valor absoluto.

2.º — Chama-se *addição* de dous numeros $a - b$ e $c - d$ a operação definida pela igualdade

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d).$$

3.º — Chama-se *multiplicação* de dous numeros $a - b$ e $c - d$ a operação definida pela igualdade

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (bc + ad).$$

4.° — Chama-se *subtracção* e *divisão* as operações inversas da addição e da multiplicação.

5.° — Chama-se *elevação a potencia* a multiplicação de factores iguaes.

E' muito facil de vêr que as operações assim definidas gozam das propriedades fundamentaes enunciadas no n.° 1, que coincidem com as operações arithmeticas no caso de ser $a > b$ e $c > d$, e que dão origem ás regras bem conhecidas da Algebra.

7. — *Numeros imaginarios.* — A extracção de raiz das quantidades negativas é uma operação impossivel, quando se usa dos numeros precedentemente estudados. D'ahi vem a necessidade de introduzir uma nova especie de numeros da fórma $a + b\sqrt{-1}$, a que se chama *numeros imaginarios* ou *numeros complexos*, e que comprehendem todos os precedentes como caso particular.

Para introduzir estes numeros no calculo é necessario definir as operações que sobre elles se devem executar, de modo que se sujeitem ás leis fundamentaes expostas no n.° 1.

1.° — Dous numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ dizem-se *iguaes* quando é $a = c$, $b = d$.

Diz-se que $a + b\sqrt{-1}$ é maior do que $c + d\sqrt{-1}$, ou que $c + d\sqrt{-1}$ é menor do que $a + b\sqrt{-1}$, quando é $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$.

2.° — Chama-se *addição* dos dous numeros imaginarios $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ á operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = a + c + (b + d)\sqrt{-1}.$$

3.° — Chama-se *subtracção* a operação inversa da addição.

4.° — Chama-se *multiplicação* dos numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ a operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = ac - bd + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

5.° — Chama-se *divisão* do numero $a + b\sqrt{-1}$ pelo numero $c + d\sqrt{-1}$ a operação inversa da multiplicação, isto é a operação que tem por fim achar um numero $x + y\sqrt{-1}$ que multiplicado por $c + d\sqrt{-1}$ dê $a + b\sqrt{-1}$.

Temos pois

$$a + b\sqrt{-1} = (x + y\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}),$$

ou

$$a + b\sqrt{-1} = cx - dy + (dx + cy)\sqrt{-1},$$

d'onde se tira

$$a = cx - dy,$$

$$b = dx + cy.$$

Estas equações dão os valores de x e y que entram no quociente pedido, e vem

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1}.$$

E' facil de vêr que as operações que vimos de definir gozam das propriedades fundamentaes expostas no n.º 1, e que coincidem no caso dos numeros reaes com as definições anteriormente estabelecidas; e portanto os resultados a que se chega, usando dos numeros imaginarios no calculo, são applicaveis ao caso particular dos numeros reaes.

8. — Todo o imaginario $a + b\sqrt{-1}$ póde ser reduzido á fórma trigonometrica

$$\rho\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\theta)$$

pondo

$$a = \rho\cos\theta,\ b = \rho\,\text{sen}\,\theta,$$

o que dá

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}.\ \text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho},\ \cos\theta = \frac{a}{\rho}.$$

A primeira d'estas formulas determina ρ. As duas outras, consideradas simultaneamente, determinam θ. As quantidades ρ e θ chamam-se respectivamente *módulo* e *argumento* do imaginario. E' facil de vêr, pondo $b = 0$, que os módulos das quantidades reaes coincidem com os seus valores absolutos.

Para commodidade representa-se ordinariamente o imaginario $\sqrt{-1}$ pela letra i, e representa-se muitas vezes o módulo do numero z, quando é imaginario, ou o seu valor absoluto, quando é real, pelo signal $|z|$. Estas notações serão adoptadas n'esta obra.

As regras para o calculo dos imaginarios, quando se lhes dá a fórma trigonometrica, conduzem aos resultados seguintes:

I — A somma e a differença dos imaginarios

$$z = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),\ z' = \rho'\,(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')$$

é

$$z \pm z' = \rho\cos\theta \pm \rho'\cos\theta' + i\,(\rho\operatorname{sen}\theta \pm \rho'\operatorname{sen}\theta')$$

ou

$$z \pm z' = R\,(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega),$$

pondo

$$\rho\cos\theta \pm \rho'\cos\theta' = R\cos\omega,\ \rho\operatorname{sen}\theta \pm \rho'\operatorname{sen}\theta' = R\operatorname{sen}\omega,$$

o que dá

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 \pm 2\rho\rho'\cos(\theta - \theta')}.$$

Esta expressão de R mostra que é $R^2 \lesseqgtr (\rho + \rho')^2$, e portanto temos o theorema seguinte:

O módulo de uma somma algebrica de imaginarios não póde ser maior do que a somma dos módulos das parcellas.

II — O producto dos mesmos imaginarios é

$$zz' = \rho\rho'[\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' + i(\cos\theta\operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta')]$$
$$= \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i\operatorname{sen}(\theta + \theta')].$$

Multiplicando este resultado por

$$z'' = \rho'' (\cos \theta'' + i \operatorname{sen} \theta'')$$

vem

$$zz'z'' = \rho\rho'\rho'' [\cos (\theta + \theta' + \theta'') + i \operatorname{sen} (\theta + \theta' + \theta'')].$$

Em geral temos

$$zz' \ldots z^{(n-1)} = \rho\rho' \ldots \rho^{(n-1)} [\cos (\theta + \theta' + \ldots + \theta^{(n-1)}) + i \operatorname{sen} (\theta + \theta' + \ldots + \theta^{(n-1)})],$$

e portanto o *módulo do producto de imaginarios é igual ao producto dos módulos dos factores, e o seu argumento é igual á somma dos argumentos dos factores.*

Se fôr $z = z' = \ldots = z^{(n-1)}$, vem o resultado importante

$$z^n = \rho^n [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

conhecido pelo nome de *formula de Moivre*.

III — Dividindo por z o imaginario

$$u = r (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$$

vem

$$\frac{u}{z} = \frac{r}{\rho} \frac{(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}$$

$$= \frac{r}{\rho} [\cos (\omega - \theta) + i \operatorname{sen} (\omega - \theta)],$$

e portanto o *módulo do quociente de dous imaginarios é igual ao quociente da divisão do módulo do dividendo pelo módulo do divisor, e o seu argumento é igual á differença entre o argumento do dividendo e o argumento do divisor.*

Dividindo este resultado por z', vem

$$\frac{u}{zz'} = \frac{r}{\rho\rho'} [\cos (\omega - \theta - \theta') + i \operatorname{sen} (\omega - \theta - \theta')].$$

Em geral, temos

$$\frac{u}{zz' \ldots z^{(n-1)}} = \frac{r}{\rho\rho' \ldots \rho^{(n-1)}} [\cos(\omega - \theta - \theta' - \ldots - \theta^{(n-1)})$$

$$+ i \operatorname{sen}(\omega - \theta - \ldots - \theta^{(n-1)})].$$

Fazendo $r = 1$, $\omega = 0$, $z = z' = \ldots = z^{(n-1)}$, resulta

$$z^{-n} = \rho^{-n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)],$$

convencionando representar $\frac{1}{z^n}$ por z^{-n}, como no caso das quantidades reaes.

Vê-se pois que a *formula de Moivre* ainda tem logar quando o expoente é um numero inteiro negativo.

IV — Passemos á extracção das raizes.

Vejamos se póde ser

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = r(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega).$$

Para ter logar esta igualdade deve ser

$$\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r^n (\cos n\omega + i \operatorname{sen} n\omega),$$

ou

$$\rho \cos\theta = r^n \cos n\omega, \ \rho \operatorname{sen}\theta = r^n \operatorname{sen} n\omega,$$

d'onde se deduz

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \ n\omega = \theta + 2k\pi,$$

representando por k um inteiro que póde ter todos os valores positivos e negativos desde zero até ao infinito.

Vem pois

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$
$$= \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right]\left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right].$$

O binomio

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

só tem n valores differentes, correspondentes a $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pois é facil de vêr que, quando a k se dá valores maiores ou menores do que estes, o seno e coseno, que entram no binomio, retomam os valores correspondentes aos valores precedentes de k.

Logo *todo o radical de indice n tem n valores differentes, que a formula, que vimos de achar, determina.*

Das consequencias d'este theorema importante faremos notar as seguintes:

1.°—As regras para o calculo dos radicaes foram demonstradas na Arithmetica para o valor unico de cada radical, que ahi se considera. O theorema precedente permitte verificar se estas regras se estendem ou não a todos os n valores do radical. .

Assim, para verificar que é

$$\sqrt[n]{z} \,.\, \sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{zz'},$$

basta attender á igualdade

$$\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$
$$\times \sqrt[n]{\rho'}\left[\cos\left(\frac{\theta'}{n} + \frac{2k'\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta'}{n} + \frac{2k'\pi}{n}\right)\right]$$
$$= \sqrt[n]{\rho\rho'}\left[\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{n} + \frac{2(k+k')\pi}{n}\right)\right.$$
$$\left. + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\theta'}{n} + \frac{2(k+k')\pi}{n}\right)\right],$$

cujo primeiro membro representa $\sqrt[n]{z} \,.\, \sqrt[n]{z'}$ e cujo segundo membro representa $\sqrt[n]{zz'}$.

Do mesmo modo se verifica a relação

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[mn]{z}.$$

Da primeira d'estas igualdades são, como se sabe, consequencias as seguintes:

$$\sqrt[n]{\frac{z}{z'}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{z'}}, \quad \left(\sqrt[n]{z}\right)^m = \sqrt[n]{z^m}.$$

A igualdade, verdadeira em Arithmetica,

$$\sqrt[np]{z^{mp}} = \sqrt[n]{z^m}$$

não tem logar no caso em que se consideram os radicaes com toda a generalidade, visto que o primeiro membro tem np valores e o segundo membro tem sómente n valores.

2.º — Elevando ambos os membros da formula considerada á potencia m, e convencionando representar $\sqrt[n]{z^m}$ por $z^{\frac{m}{n}}$, como no caso das quantidades reaes, vem a formula

$$\sqrt[n]{z^m} = z^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right],$$

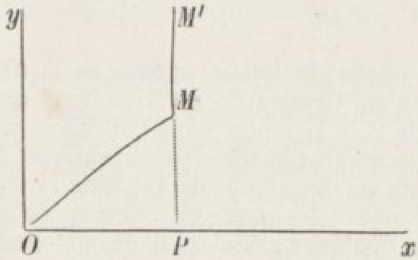
de que adiante faremos uso.

9. — *Representação geometrica dos imaginarios.* — O imaginario $a + bi$ póde ser representado geometricamente pelo ponto M cuja abscissa é a e cuja ordenada é b, visto que a cada valor do imaginario corresponde uma posição determinada do ponto M, e reciprocamente a cada posição do ponto corresponde um valor determinado do imaginario.

Representando por ρ a recta OM e por θ o angulo MOP, temos

$$a + ib = OP + iMP = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Logo a recta OM representa o *módulo* e o angulo MOP representa o *argumento* do imaginario considerado.



Ás operações sobre imaginarios correspondem operações geometricas determinadas. Assim a somma dos imaginarios $a + ib$ e $a' + ib'$, cujos módulos são ρ e ρ' e cujos argumentos são θ e θ', é representada pelo ponto M' que se obtém tirando primeiramente pela origem das coordenadas uma recta OM cujo comprimento seja ρ e cuja inclinação sobre o eixo das abscissas seja θ, e em seguida tirando pela extremidade M d'esta recta outra MM' cujo comprimento seja ρ' e cuja inclinação sobre o eixo das abscissas seja θ'. Com effeito, as coordenadas do ponto M' são

$$\rho \cos \theta + \rho' \cos \theta', \ \rho \operatorname{sen} \theta + \rho' \operatorname{sen} \theta',$$

e portanto o imaginario que M' representa é o seguinte:

$$\rho \cos \theta + \rho' \cos \theta' + i (\rho \operatorname{sen} \theta + \rho' \operatorname{sen} \theta'),$$

que coincide effectivamente com a somma dos imaginarios considerados.

IV

Noção de limite

10. — A noção de *limite* appareceu já na Arithmetica e nos Elementos de Geometria, onde se disse que uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variavel u se os valores successivos da variavel se approximam indefinidamente da constante de tal modo que o valor absoluto da differença $A - u$ possa tomar e conservar um valor menor do que qualquer grandeza dada, por mais pequena que seja.

Em termos mais precisos póde dizer-se que *uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variavel u, que passa por uma infinidade de valores successivos u_1, u_2, etc., quando a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que a desigualdade*

$$(1) \qquad | A - u_n | < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1.

D'esta definição deduzem-se immediatamente as consequencias seguintes:

1.° — *A variavel u não póde tender ao mesmo tempo para dous limites differentes.* Com effeito, se u tendesse tambem para uma quantidade B, differente de A, existiria um numero n_2 tal que seria

$$| B - u_n | < \delta$$

quando $n > n_2$. Logo a desigualdade (n.° 8 — I)

$$| A - B | = | A - u_n + u_n - B |$$
$$\overline{<} | A - u_n | + | B - u_n | < 2\delta$$

seria satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 e n_2; o que é absurdo, visto que δ é tão pequeno quanto se queira e $A - B$ é constante.

2.° — *Se os valores successivos de uma variavel u estão constantemente comprehendidos entre os valores correspondentes de duas quantidades variaveis v e w que tendem para o mesmo limite A, u tende tambem para A.* Com effeito, como as desigualdades

$$|A - v_n| < \delta, \quad |A - w_n| < \delta$$

são satisfeitas, por hypothese, a primeira pelos valores de n superiores a um numero n_1 e a segunda pelos valores de n superiores a n_2, as duas desigualdades são satisfeitas, ao mesmo tempo, pelos valores de n superiores ao maior dos numeros n_1 e n_2. Porisso e porque $A - u_n$ está comprehendido entre $A - v_n$ e $A - w_n$, a desigualdade

$$|A - u_n| < \delta$$

é satisfeita por estes mesmos valores de n, e portanto u tende para A.

3.° — *Se os valores successivos da variavel u são todos inferiores a um numero L, u não póde tender para um numero superior a L.* Com effeito, temos, por hypothese,

$$A - u_n > A - L.$$

Logo, se fosse $A > L$, não podia ter logar a desigualdade (1) quando a δ se dessem valores inferiores a $A - L$.

4.° — *Se os valores successivos da variavel u são todos superiores a um numero L, u não póde tender para um numero inferior a L.* Com effeito, temos

$$u_n - A > L - A.$$

Logo, se fosse $A < L$, a desigualdade (1) não poderia ter logar quando fosse $\delta < L - A$.

11. — O problema que consiste em procurar se uma quantidade variavel tende ou não para um limite, póde ser substituido por outro, em que se procura se uma certa quan-

*

tidade tende ou não para zero, em virtude do seguinte theorema importante, devido a *Cauchy* [1].

Sejam u_1, u_2, ..., u_n, ... os valores successivos que toma a variavel u. E' condição necessaria e sufficiente para que u tenda para um limite, que a cada valor que se dê á quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 tal que a desigualdade

$$(2) \qquad |u_{n+p} - u_n| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1, combinados com todos os valores de p.

Com effeito, se u tende para um limite A, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que as desigualdades

$$|u_{n+p} - A| < \frac{1}{2}\delta, \; |u_n - A| < \frac{1}{2}\delta$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1. Logo tambem é satisfeita pelos mesmos valores de n a desigualdade (2), visto que é

$$|u_{n+p} - u_n| \gtreqless |u_{n+p} - A| + |A - u_n| < \delta.$$

Demonstremos agora que, reciprocamente, quando a desigualdade (2) tem logar, u tende para um limite.

Dê-se a δ um valor particular δ_1 e representa-se por α o valor correspondente de n_1. Por ser, por hypothese,

$$|u_{n+p} - u_{\alpha+1}| < \delta_1$$

quando $n > \alpha$, os valores correspondentes de u_{n+p} estão comprehendidos entre as quantidades $u_{\alpha+1} - \delta_1$ e $u_{\alpha+1} + \delta_1$, que representaremos por v_1 e w_1.

Dê-se em seguida a δ o valor δ_2, menor do que δ_1, e seja β o valor correspondente de n_1. Vê-se do mesmo modo que os valores que toma u_{n+p}, quando $n > \beta$, estão comprehendidos entre $u_{\beta+1} - \delta_2$ e $u_{\beta+1} + \delta_2$. Logo os valores que toma u_{n+p}, quando a n se dá valores que satisfazem ao

[1] Cauchy — *Cours d'Analyse.*

mesmo tempo ás duas condições $n > \alpha$ e $n > \beta$, estão comprehendidos entre v_1 e w_1 e entre $u_{\beta+1} - \delta_2$ e $u_{\beta+1} + \delta_2$, e portanto entre a maior das quantidades v_1 e $u_{\beta+1} - \delta_2$, que representaremos por v_2 e a menor das quantidades w_1 e $u_{\beta+1} + \delta_2$; que representaremos por w_2; e vê-se que é

$$v_2 \geqq v_1, \; w_2 \lesseqgtr w_1, \; w_2 - v_2 \lesseqgtr 2\delta_2.$$

Continuando do mesmo modo, forma-se um grupo de numeros crescentes

$$v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots$$

e um grupo de numeros decrescentes

$$w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots,$$

qne satisfazem á condição

$$w_m - v_m \lesseqgtr 2\delta_m;$$

e vê-se que u_{n+p} está comprehendido entre v_m e w_m quando n é maior do que as m quantidades α, β, etc.

Seja agora

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$$

um grupo de numeros crescentes e

$$b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$$

um grupo de numeros decrescentes, que se formam tomando um numero racional entre cada par de numeros dos grupos anteriores. Como a_m e b_m estão comprehendidos entre v_m e w_m, teremos

$$b_m - a_m \lesseqgtr w_m - v_m \lesseqgtr 2\delta_m.$$

D'esta desigualdade e da circumstancia de δ_m poder ser tão pequeno, quanto se queira, conclue-se que os dous grupos precedentes determinam um numero racional ou irracional c, comprehendido entre a_m e b_m.

Por outra parte, como u_{n+p} está comprehendido entre

v_{m+1} e w_{m+1} quando n é superior ás $m+1$ quantidades α, β, etc., u_{n+p} está tambem comprehendido entre a_m e b_m.

Temos pois a desigualdade

$$| c - u_{n+p} | \overline{\gtrless} b_m - a_m \overline{\gtrless} 2\delta_m,$$

que é satisfeita pelos valores de $n+p$ superior ás $m+1$ quantidades α, β, etc., e da qual se conclue que u tende para c.

Corollarios. — 1.° — *Se a quantidade variavel u cresce constantemente, sem todavia poder exceder um valor determinado L, u tende para um limite.*

Com effeito, se u não tendesse para um limite determinado, existiria, em virtude do theorema precedente, um valor de δ e um valor de p taes que, por maior que fosse o inteiro n_1, a desigualdade

$$u_{n+p} - u_n \geqq \delta$$

seria satisfeita por um valor $n = \alpha$ superior a n_1. Teriamos pois

$$u_{\alpha+p} \geqq u_\alpha + \delta.$$

Do mesmo modo, deveria existir um numero β maior do que $\alpha + p$ tal que

$$u_{\beta+p} \geqq u_\beta + \delta,$$

e portanto teriamos

$$u_{\beta+p} > u_{\alpha+p} + \delta > u_\alpha + 2\delta,$$

visto ser $u_\beta > u_{\alpha+p}$.

Continuando do mesmo modo, achariamos a desigualdade

$$u_{\omega+p} > u_\alpha + k\delta,$$

da qual resultaria o poder $u_{\omega+p}$ tornar-se maior do que L dando a k um valor sufficientemente grande, o que é contra a hypothese.

2.° — *Se a quantidade variavel u decresce constantemente sem todavia poder ser inferior a um numero l determinado, u tende para um limite.*

Demonstra-se este corollario de um modo semilhante ao empregado para demonstrar o anterior.

12. — Seja agora u uma quantidade variavel cujos valores dependem dos valores de outra quantidade variavel x, e supponhamos que x tende para o limite a. A definição de limite leva immediatamente á consequencia seguinte:

E' condição necessaria e sufficiente para que u tenda para o limite A, quando x tende para a, que, a cada valor que se dê á quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um valor ε tal que a desigualdade

$$|A-u|<\delta \tag{3}$$

seja satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição

$$|x-a|<\varepsilon. \tag{4}$$

Com effeito, se u tende para A, a cada valor de δ, por pequeno que seja, corresponde um valor x' tal que a desigualdade (3) é satisfeita pelos valores por que passa successivamente x desde x' até a.

Como porém x tende tambem, por hypothese, para a, a cada valor de ε_1 corresponde um valor x'' tal que a desigualdade

$$|x-a|<\varepsilon_1$$

é satisfeita pelos valores por que passa x desde x'' até a.

Diminuindo ε_1, os valores de x'' approximam-se tanto quanto se queira de a, e podemos portanto dar a ε_1 um valor ε tal que x, na sua passagem para a, encontre x'' depois de x'. Temos achado pois uma quantidade ε tal que todos os valores de x que satisfazem a (4) satisfazem tambem a (3), que é o que se pretendia demonstrar.

Reciprocamente, supponhamos que existe um valor ε tal que a desigualdade (3) é satisfeita pelos valores de x que satisfazem a (4). Se notarmos que a desigualdade (4) é satisfeita, por hypothese, pelos valores por que passa successivamente x quando varia desde um valor x' até até a, conclue-se que (3) é satisfeita pelos mesmos valores de x, e portanto que u tende para A.

Para designar que u tende para A quando x tende para a, escreve-se

$$\lim_{x=a} u = A.$$

Muitas questões importantes de Analyse levam a procurar o limite para que tendem quantidades dadas. Os principios seguintes facilitam esta indagação.

1.° — *O limite para que tende a somma de duas quantidades variaveis, dependentes de x, que tendem para limites determinados, quando x tende para a, existe e é igual á somma dos limites para que tendem as parcellas.*

Sejam u e v as duas quantidades variaveis, dependentes de x, que tendem para os limites A e B quando x tende para a.

Ha, por hypothese, uma quantidade positiva ε' tal que a desigualdade

$$| A - u | < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $| x - a | < \varepsilon'$.

Do mesmo modo, ha uma quantidade positiva ε'' tal que a desigualdade

$$| B - v | < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $| x - a | < \varepsilon''$.

Logo, chamando ε a menor das quantidades ε' e ε'', a desigualdade (n.° 8 — I)

$$| A - u + B - v | < \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $| x - a | < \varepsilon$; e portanto a quantidade $u + v$ tende para o limite $A + B$.

2.° — *O limite para que tende o producto uv existe e é igual ao producto dos limites para que tendem os factores.*

Deduz-se este principio da identidade

$$AB - uv = A\,(B - v) + v\,(A - u).$$

Com effeito, por ser A o limite para que tende u, ha sempre um valor positivo ε' tal que a desigualdade

$$| A - u | < \delta'$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que verificam a condição $| x - a | < \varepsilon'$. Chamando pois M um numero maior do que os valores que toma $| v |$ quando a x se dá todos os valores que satisfazem á condição precedente, vem

$$M | A - u | < M \delta'$$

e *á fortiori*

$$|v| A - u | < M \delta' = \frac{1}{2} \delta.$$

Esta desigualdade é pois satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $| x - a | < \varepsilon'$.

Do mesmo modo se vê que ha sempre um valor ε'' tal que a desigualdade

$$|A| B - v | < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $| x - a | < \varepsilon''$.

Logo a desigualdade

$$| AB - uv | < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $| x - a | < \varepsilon$; e portanto uv tende para o limite AB.

3.° — *O limite para que tende o quociente $\frac{u}{v}$ existe e é igual ao quociente dos limites para que tendem u e v, quando v não tende para zero.*

Com effeito, pondo

$$\frac{u}{v} = w, \; \frac{A}{B} = C,$$

a identidade

$$w - C = \frac{u - A}{v} + \frac{A(B - v)}{Bv}$$

mostra, como no caso anterior, que existe sempre um valor ε tal que as desigualdades

$$\left|\frac{u - A}{v}\right| < \frac{1}{2}\,\delta, \left|\frac{A(B - v)}{Bv}\right| < \frac{1}{2}\,\delta$$

são satisfeitas pelos valores de x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon$.

Logo a desigualdade

$$|w - C| < \delta$$

é satisfeita pelos mesmos valores de x; e portanto $\frac{u}{v}$ tende para $\frac{A}{B}$.

13. — Tudo o que se disse no numero precedente applica-se ao caso de u depender de muitas quantidades variaveis x, y, z, etc. Assim, demonstra-se, procedendo como no caso de uma variavel, o principio seguinte:

E' condição necessaria e sufficiente para que u tenda para o limite A, quando x, y, etc. tendem respectivamente para a, b, etc., que, a cada valor que se dê á quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, correspondam valores ε, ε' etc. taes que a desigualdade

$$|A - u| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de x, y, etc. que verificam as condições

$$|x - a| < \varepsilon, \quad |x - b| < \varepsilon', \text{ etc.}$$

D'este principio deduzem-se, para o caso de muitas variaveis, consequencias semilhantes ás que no numero anterior se deduziram para o caso de uma só variavel.

14. — Diz-se que uma quantidade variavel *tende para* ∞ quando esta quantidade augmenta indefinidamente de tal modo que chega a ser e a conservar-se superior a todo o numero dado, por maior que este seja; e diz-se que uma quantidade *tende para* $-\infty$ quando esta quantidade diminue indefinidamente de tal modo que o seu valor absoluto chega a ser e a conservar-se superior a todo o numero dado, por maior que este seja.

Se uma quantidade variavel u depende de outra quantidade variavel x, e aquella tende para um limite A quando x tende para o infinito, escreve-se

$$\lim_{x=\infty} u = A$$

quando x tende para ∞, e

$$\lim_{x=-\infty} u = A$$

quando x tende para $-\infty$.

Se notarmos que $\frac{1}{x}$ tende para 0, quando x tende para o infinito, e que tende para o infinito, quando x tende para 0, podemos dos theoremas anteriormente demonstrados para o caso de x tender para um limite a deduzir outros correspondentes para o caso de x tender para o infinito. Assim, por exemplo, podemos enunciar o theorema seguinte:

A somma, o producto e o quociente de duas funcções u e v que tendem para os limites A e B, quando x tende para o infinito, tendem respectivamente para $A+B$, AB e $\frac{A}{B}$ (quando B é differente de zero).

Com effeito, u e v tendendo para A e B quando $\frac{1}{x}$ tende para 0, $u+v$, uv, etc. tendem para $A+B$, AB, etc., quando $\frac{1}{x}$ tende para 0, isto é quando x tende para o infinito.

15.—Consideremos agora a quantidade imaginaria $u+iv$, que passa successivamente pelos valores u_1+iv_1, u_2+iv_2, etc. Diz-se que esta quantidade tende para o limite $A+iB$ quando u tende para A e v tende para B.

E' consequencia immediata d'esta definição o principio seguinte:

I—*É condição necessaria e sufficiente para que $u + iv$ tenda para o limite $A + iB$ que o módulo da differença entre a quantidade $u + iv$ e o limite tenda para zero.*

Com effeito, se u e v tendem para A e B, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que as desigualdades

$$| A - u_n | < \delta, \quad | B - v_n | < \delta$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1. Logo a desigualdade

$$| A - u_n + i\,(B - v_n) | = \sqrt{(A - u_n)^2 + (B - v_n)^2} < \delta\,\sqrt{2}$$

é satisfeita pelos mesmos valores de n, e o módulo considerado tende portanto para zero.

Reciprocamente, se é

$$\sqrt{(A - u_n)^2 + (B - v_n)^2} < \delta\,\sqrt{2}$$

quando $n > n_1$, é tambem

$$| A - u_n | < \delta\,\sqrt{2}, \; | B - v_n | < \delta\,\sqrt{2},$$

e portanto u tende para A e v tende para B.

II — *E' condição necessaria e sufficiente para que $u + iv$ tenda para um limite que, a cada valor que se dê á quantidade δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 tal que a desigualdade*

$$(5) \qquad | u_{n+p} - u_n + i\,(v_{n+p} - v_n) | < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p.

Deduz-se facilmente este theorema da igualdade (n.° 8)

$$| u_{n+p} - u_n + i\,(v_{n+p} - v_n) |$$
$$= + \sqrt{(u_{n+p} - u_n)^2 + (v_{n+p} - v_n)^2}.$$

Com effeito, se $u + iv$ tende para um limite, a cada valor da quantidade δ corresponde um valor n_1 tal que as desigualdades (n.° 11)

$$| u_{n+p} - u_n | < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \; | v_{n+p} - v_n | < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p. Logo tambem a desigualdade (5) é satisfeita pelos mesmos valores de n e p, o que demonstra a primeira parte do theorema.

Reciprocamente, se δ representa uma quantidade tão pequena quanto se queira, e é satisfeita a desigualdade (5) quando $n > n_1$, qualquer que seja p, temos

$$(u_{n+p} - u_n)^2 + (v_{n+p} - v_n)^2 < \delta^2;$$

logo as desigualdades

$$| u_{n+p} - u_n | < \delta, \; | v_{n+p} - v_n | < \delta$$

são satisfeitas pelos mesmos valores de n e p. As variaveis u e v tendem pois (n.° 11) para limites determinados, assim como $u + iv$.

V

Séries

16. — Depois de considerar expressões analyticas compostas de um numero finito de operações é natural passar a considerar expressões analyticas compostas d'um numero infinito de operações, isto é, as *séries, os productos infinitos e as fracções continuas*. Vamos pois estudar estas expressões, limitando-nos porém aos casos mais simples e mais usados.

17. — *Séries de termos reaes.* — As séries são expressões da fórma

A serie representa um numero, que é o limite para que tende, $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, quando n cresce indefinidamente.

Nem todas as propriedades das sommas sam applicações ás séries.

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

em que o numero das parcellas é infinito. O termo u_n é o *termo geral* por meio do qual se formam todos os outros dando a n os valores 1, 2, 3, etc. Empregando o signal Σ para designar sommas, esta expressão póde ser escripta do modo seguinte:

$$\sum_1^\infty u_n.$$

Se a somma s_n dos n primeiros termos da série, isto é, a somma

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

tende para um limite determinado quando n augmenta indefinidamente, diz-se que a série é *convergente*. Este limite chama-se *somma da série*.

As séries que não são convergentes chamam-se *divergentes*.

EXEMPLO 1.º — A progressão

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

é convergente quando o valor absoluto de x é menor do que a unidade, pois que a somma dos seus n primeiros termos, isto é

+ porque como $x < 1$ x^n vae aproximando-se de zero, quando n augmenta e portanto $\frac{x}{1-x}$ tende para zero.

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$?

tende para o limite $\frac{1}{1-x}$ quando n augmenta indefinidamente. +

Podemos pois escrever

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Se o valor absoluto de x é maior do que a unidade, a somma s_n augmenta indefinidamente e a série é divergente.

Se é $x = 1$, a série é divergente.
Se é $x = -1$, vem

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

e a série toma alternadamente os valores *zero* e *um*, e portanto é divergente.

Exemplo 2.º — A série importante

$$(2) \qquad \frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots$$

é *convergente* quando $a > 1$, e é *divergente* quando $a \lesseqgtr 1$.

Seja primeiramente $a > 1$. Reunindo os termos em grupos de $1, 2, 4, \ldots, 2^b$, etc. termos, a série considerada póde ser escripta do modo seguinte:

$$\frac{1}{1^a} + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \ldots + \frac{1}{7^a}\right) + \ldots$$
$$+ \left[\frac{1}{(2^b)^a} + \frac{1}{(2^b + 1)^a} + \ldots + \frac{1}{(2^{b+1} - 1)^a}\right] + \ldots$$

Notando agora que a somma dos termos de cada grupo é menor do que o producto do primeiro termo pelo seu numero de termos, temos

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} < \frac{1}{2^{a-1}}$$

$$\frac{1}{4^a} + \ldots + \frac{1}{7^a} < \frac{1}{2^{2(a-1)}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(2^b)^a} + \frac{1}{(2^b + 1)^a} + \ldots + \frac{1}{(2^{b+1} - 1)^a} < \frac{1}{2^{b(a-1)}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

e portanto

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} < 1 + \frac{1}{2^{a-1}}$$

$$+ \frac{1}{2^{2(a-1)}} + \ldots + \frac{1}{2^{b(a-1)}} + \ldots$$

O segundo membro d'esta desigualdade, por ser uma progressão geometrica decrescente, tem um valor determinado; logo o primeiro membro, que augmenta com n sem poder exceder este valor, tende para um limite determinado, e a série proposta é convergente.

No caso de ser $a = 1$, a série (2) tem o nome de *série harmonica* e é divergente. Para o demonstrar basta dispôr os seus termos em grupos de 1, 2, 4, ..., 2^b, etc. termos do modo seguinte:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^b + 1} + \frac{1}{2^b + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{b+1}}\right) + \ldots$$

Com effeito, notando que a somma dos termos de cada grupo é maior do que o producto do ultimo termo do grupo pelo numero de termos, temos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

....

$$\frac{1}{2^b + 1} + \frac{1}{2^b + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{b+1}} > \frac{1}{2}$$

....

Logo a somma s_n dos n primeiros termos da série (2) póde tornar-se maior do que $\frac{m}{2}$, por maior que seja o valor do inteiro m, dando a n um valor sufficientemente grande; e a série é portanto divergente.

Se é $a < 1$, temos

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Quando n tende para o infinito, o segundo membro d'esta desigualdade tende para o infinito; logo tambem tende para o infinito o primeiro membro, e a série proposta é divergente.

18. — Do theorema demonstrado no n.° 11 tira-se immediatamente os dous principios seguintes, conhecidos pelo nome de *principios geraes de convergencia e divergencia:*

1.° — *Se a série* (1) *é convergente, a cada valor que se dá á quantidade positiva* δ, *por mais pequeno que seja, corresponde um valor* n_1 *tal que a desigualdade*

$$| s_{n+p} - s_n | = | u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n *superiores a* n_1, *qualquer que seja* p.

2.° — *Reciprocamente, se a cada valor que se dá á quantidade positiva* δ, *por mais pequeno que seja, corresponde um valor* n_1 *tal que a desigualdade*

$$| s_{n+p} - s_n | < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n *superiores a* n_1, *a série* (1) *é convergente.*

D'estes principios tira-se, pondo $p = 1$, o corollario seguinte:

E' condição necessaria para que a série (1) *seja convergente, que o valor dos seus termos tenda para zero, quando a ordem d'elles augmenta indefinidamente.*

19. — Não ha criterio geral para decidir se uma série dada é convergente; ha apenas regras abrangendo maior ou menor numero de casos. Aqui exporemos apenas as seguintes:

I — *Sejam*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

duas séries compostas de termos positivos, e seja p *um nu-*

mero determinado. Se, a partir do termo de ordem p, é sempre $u_m < v_m$ e a segunda série é convergente, a primeira tambem é convergente; se, pelo contrario, é $u_m > v_m$ e a segunda série é divergente a primeira tambem é divergente.

Com effeito, se é $u_m < v_m$ quando $m \geqq p$, temos

$$u_1 + \ldots + u_{p-1} + u_p + \ldots + u_n$$
$$< u_1 + \ldots + u_{p-1} + v_p + \ldots + v_n,$$

e portanto, chamando s_n e s'_n as sommas dos n primeiros termos da primeira e da segunda série e s' o limite para que tende s'_n quando n augmenta indefinidamente,

$$s_n < s'_n + u_1 + \ldots + u_{p-1} < s' + u_1 + \ldots + u_{p-1}.$$

A somma s_n augmenta pois indefinidamente com n sem poder exceder um valor determinado; logo (n.º 11) tende para um limite determinado.

Se, pelo contrario, é $u_m > v_m$ e a segunda série é divergente, acha-se do mesmo modo a desigualdade

$$s_n > s'_n - (v_1 + \ldots + v_p).$$

cujo segundo membro augmenta indefinidamente com n; logo tambem o primeiro membro augmenta indefinidamente com n, e portanto a primeira série é divergente.

Por exemplo, a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^n} + \ldots$$

é convergente pois que cada termo, a partir do terceiro, é menor do que o termo correspondente da progressão geometrica convergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

II — *Toda a série composta de termos positivos e negativos de que deriva uma série convergente pela mudança dos signaes dos termos negativos, é convergente.*

Com effeito, a série

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

sendo, por hypothese, convergente, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, deve corresponder (18 — 1.º) um numero n_1 tal que seja

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \delta$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p. D'aqui conclue-se que a desigualdade (8 — I)

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \delta$$

tambem é satisfeita pelos mesmos valores de n, e portanto que a série (1) é convergente.

As séries que estão no caso indicado n'este theorema, isto é as séries formadas de termos cujos valores absolutos formam uma série convergente, chamam-se *absolutamente convergentes.*

III — *Se, a partir de um valor determinado p de n, a razão* $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ *dos valores absolutos de dous termos consecutivos da série* (1) *é sempre menor do que uma quantidade L inferior á unidade, a série é convergente; se esta razão é maior do que a unidade, a série é divergente* [1].

Este criterio importante, devido a *Cauchy*, resulta da comparação da série proposta com uma progressão geometrica, como vamos vêr.

Temos, por hypothese,

$$|u_{p+1}| < L\,|u_p|,\ |u_{p+2}| < L\,|u_{p+1}|,\ \text{etc.};$$

logo os termos da série

$$(3) \qquad |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

são, a partir do termo de ordem p, menores do que os termos correspondentes da série

(1) Veja-se nos tomos VII e VIII do *Jornal de Sciencias mathematicas* algumas observações interessantes dos srs. *Lerch, Cesàro, Gützmer* e *Ed. Weyr* a respeito d'este theorema e dos dous seguintes.

$$|u_1| + |u_1| + \dots + |u_{p-1}| + |u_p| (1 + L + L^2 + \dots),$$

que é convergente quando $L < 1$, por ser n'este caso convergente a progressão

$$1 + L + L^2 + \dots$$

? Logo a série (3) é convergente (th. I), assim como a série (1) (th. II)

Se é, pelo contrario,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1,$$

o valor absoluto dos termos da série (1), a partir do termo de ordem p, cresce com n, e portanto a série é divergente (n.° 18).

Corollario. — *Se a razão* $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ *tende para um limite determinado quando* n *augmenta indefinidamente, a série é convergente se este limite é menor do que a unidade, e é divergente se este limite é maior do que a unidade.*

Seja l este limite e L um valor comprehendido entre l e 1.

Se é $l < 1$, a desigualdade (n.° 10)

$$\left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - l \right| < L - l$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a um numero p, e portanto temos $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L < 1$, quando $n > p$. A série é pois convergente, em virtude do theorema precedente.

Se é $l > 1$, a desigualdade

$$\left| l - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right| < l - L$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a um numero p, e portanto temos $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > L > 1$. Logo a série é divergente.

Por exemplo, a série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \dots + \frac{x^n}{2.3\dots n} + \dots$$

é convergente, qualquer que seja o valor que se dê a x, pois que a razão dos valores absolutos de dous termos consecutivos

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right|$$

tende para 0 quando n augmenta indefinidamente.

IV — *Se, para todos os valores de n a partir de um numero determinado p, a raiz $\sqrt[n]{|u_n|}$ é menor do que uma quantidade L inferior á unidade, a série (1) é convergente; se esta raiz é maior do que a unidade, a série é divergente.*

Temos, por hypothese,

$$|u_p| < L^p,\ |u_{p+1}| < L^{p+1},\ \text{etc.};$$

logo os termos da série

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

são, a partir do termo de ordem p; menores do que os termos correspondentes da série convergente

$$|u_1| + \dots + |u_{p-1}| + L^p(1 + L + L^2 + \dots).$$

Logo aquella série é convergente, assim como a série (1).

— Se é $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, é tambem $|u_n| > 1$ quando $n > p$, e portanto a série (1) é divergente.

Do theorema, que vimos de demonstrar, deduz-se um corollario analogo ao que se deduziu do theorema anterior.

V — *Se existir um numero a, maior do que a unidade, tal que, para todos os valores de n a partir de um numero determinado p, o producto $n^a\,|u_n|$ seja menor do que uma quantidade determinada K, a série (1) é convergente.*

Com effeito, por ser

$$|u_p| < \frac{K}{p^a},\ |u_{p+1}| < \frac{K}{(p+1)^a},\ \text{etc},$$

os termos da série

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots,$$

a partir do termo de ordem p, são menores do que os termos correspondentes da série convergente (n.º 17)

$$|u_1| + \dots + |u_{p-1}| + K\left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{(p+1)^a} + \dots\right).$$

Logo aquella série é convergente, e portanto é tambem convergente (th. II) a série (1).

Se existir um numero a, igual ou inferior á unidade, tal que, para todos os valores de n, a partir de um numero determinado p, os termos da série (1) sejam positivos e o producto $n^a u_n$ seja maior do que K, a série (1) é divergente.

Com effeito, temos

$$u_p > \frac{K}{p^a},\ u_{p+1} > \frac{K}{(p+1)^a},\ \text{etc.},$$

e portanto, a partir da ordem p, os termos da série (1) são maiores do que os termos correspondentes da série divergente

$$u_1 + \dots + u_{p-1} + K\left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{(p+1)^a} + \dots\right).$$

Logo a série (1) é divergente.

Assim, por exemplo, a série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

é divergente por ser

$$nu_n = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} > \frac{1}{2}.$$

VI — *Seja L uma quantidade positiva e*

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

um grupo composto de um numero infinito de numeros positivos. Se a desigualdade

$$a_n \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - a_{n+1} > L$$

fôr satisfeita pelos valores de n superiores a p, a série (1) *é convergente.*

Temos, por hypothese,

$$|u_{p+1}| < \frac{1}{L}\,[a_p\,|u_p| - a_{p+1}\,|u_{p+1}|]$$

$$|u_{p+2}| < \frac{1}{L}\,[a_{p+1}\,|u_{p+1}| - a_{p+2}\,|u_{p+2}|]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

e portanto

$$|u_{p+1}| + \ldots + |u_{p+m}|$$
$$< \frac{1}{L}\,[a_p\,|u_p| - a_{p+m}\,|u_{p+m}|] < \frac{a_p\,|u_p|}{L},$$

por maior que seja m. Logo

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| < |u_1| + \ldots + |u_p| + \frac{a_p\,|u_p|}{L}.$$

Quando n tende para ∞, o primeiro membro d'esta desigualdade augmenta sempre sem todavia poder exceder o valor determinado do segundo membro, e portanto tende para um limite. Logo a série

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

é convergente, assim como (II) a série (1).

D'este theorema, devido ao sr. Jensen [1], tira-se como co-

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1888.

rollario, pondo $a_n = n$, $a_{n+1} = n + 1$, etc., o theorema seguinte, devido a *Raabe*.

Se a desigualdade

$$n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1\right) > 1 + L$$

fôr satisfeita por todos os valores de n superiores a um numero p, a série (1) *é convergente.*

VII — *Seja*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Se u_n decresce constantemente e tende para zero quando n cresce indefinidamente, esta série é convergente.

Com effeito, por ser cada termo da série considerada maior do que o seguinte, a differença

$$s_{n+p} - s_n = \pm\,[u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots]$$

tem o signal do primeiro termo. Mas esta differença póde ser escripta do modo seguinte

$$\pm\,[u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots],$$

e vê-se então que o seu valor absoluto é menor do que u_{n+1}, pois que esta expressão deve ter o signal do primeiro termo. Temos pois

$$|s_{n+p} - s_n| < u_{n+1}.$$

Por outra parte, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde, por hypothese, um numero n_1 tal que é $u_{n+1} < \delta$ quando $n > n_1$.

Logo a desigualdade

$$|s_{n+p} - s_n| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a n_1, e a série considerada é portanto (18 — 2.º) convergente.

Por exemplo, a série

$$1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5} + \dots$$

é convergente.

Nota. — Fazendo nas formulas precedentes tender p para o infinito e notando que s_{n+p} tende para a somma s da série considerada, é facil de vêr que o erro que se commette, quando se toma para valor approximado de s a somma dos n primeiros termos da série, é menor do que o primeiro termo desprezado.

20. — *Séries de termos imaginarios.* — Consideremos agora as séries compostas de termos imaginarios, isto é as séries da fórma

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \dots + (x_m + iy_m) + \dots$$

ou

$$(4) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} (x_m + iy_m) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m.$$

Se as séries

$$(5) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} x_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} y_m$$

são convergentes, a série (3) diz-se *convergente*. N'este caso a somma s_n dos seus n primeiros termos, isto é a somma

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} (x_m + iy_m) = \sum_{m=1}^{n} x_m + i \sum_{m=1}^{n} y_m$$

tende para um limite determinado, que se chama *somma da série* (4).

A respeito da convergencia das séries de termos imaginarios vamos demonstrar os theoremas seguintes:

Theorema 1.° — *E' condição necessaria e sufficiente para que a série* (4) *seja convergente que a cada valor que se dê á quantidade positiva* δ, *por mais pequeno que seja, corresponda um numero* n_1 *tal que a desigualdade*

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{n+1}^{n+p} x_m + i \sum_{n+1}^{n+p} y_m \right| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p.

Esta proposição é uma consequencia immediata do theorema II do n.º 15.

THEOREMA 2.º — *Para que a série (4) seja convergente basta que a série formada pelos módulos dos seus termos o seja.*

Com effeito, das desigualdades

$$|x_m| < \sqrt{x^2_m + y^2_m}, \; |y_m| < \sqrt{x^2_m + y^2_m}$$

deduz-se (19 — I) que, quando a série

$$(6) \qquad \sum_1^\infty \sqrt{x^2_m + y^2_m}$$

é convergente, tambem são convergentes as séries

$$(7) \qquad \sum_1^\infty |x_m|, \; \sum_1^\infty |y_m|.$$

Logo as séries (5) são (19 — II) convergentes, assim como a série (4).

O theorema reciproco do precedente não é sempre verdadeiro, isto é, póde ser convergente a série (4) e não o ser a série correspondente dos módulos. Ha porém um caso muito importante em que esta proposição reciproca é verdadeira, que é quando as séries (7) são convergentes. Com effeito, n'este caso temos

$$\sqrt{x^2_m + y^2_m} < |x_m| + |y_m|$$

e portanto

$$\sum_1^n \sqrt{x^2_m + y^2_m} < \sum_1^n |x_m| + \sum_1^n |y_m|.$$

Quando n augmenta indefinidamente, o segundo membro d'esta desigualdade tende, por hypothese, para um limite, e o primeiro membro augmenta constantemente sem poder exceder este limite. Logo tende tambem para um limite e a série (6) é convergente.

21. — *Séries absolutamente convergentes.* — As séries formadas de termos cujos módulos formam uma série convergente chamam-se *séries absolutamente convergentes.* A respeito d'estas séries vamos demonstrar o seguinte theorema importante, devido a *Derichlet:*

Theorema 3.° — *A somma de uma série absolutamente convergente não se altera quando se muda a ordem dos seus termos.*

Seja s_n a somma dos n primeiros termos da série dada e s'_p a somma dos p primeiros termos da nova série, que resulta de mudar a ordem dos termos da primeira. Suppondo que se dá a p um valor sufficientemente grande para que s'_p contenha todos os termos de s_n, e chamando u_α, u_β etc. os termos que aquella somma contém a mais, vem

$$s'_p - s_n = u_\alpha + u_\beta + \ldots + u_p;$$

ou, attendendo ao theorema 1.° do n.° 8,

$$\begin{aligned} | s'_p - s_n | &\lesseqgtr | u_\alpha | + | u_\beta | + \ldots + | u_p | \\ &\lesseqgtr | u_{n+1} | + | u_{n+2} | + \ldots + | u_p |. \end{aligned}$$

Por ser convergente a série $\sum\limits_1^\infty | u_m |$, o segundo membro d'esta desigualdade tende para zero quando n augmenta indefinidamente; logo o módulo da differença $s'_p - s_n$ tende para o limite zero, e portanto s'_p tende para o mesmo limite que s_n.

Corollario. — *N'uma série formada de termos reaes pode-se alterar a ordem das parcellas sem mudar o valor da série se, dando a todos os termos da série o signal $+$, resultar uma série convergente.*

Nota. — A respeito do theorema que precede faremos as seguintes observações importantes:

I — Se a série proposta não fôr absolutamente convergente não se póde mudar sempre a ordem dos seus termos, porque d'esta mudança podem provir, como fez notar *Riemann*, ou novas séries convergentes com valores differentes

Francœur T. 3° pag. 251

da primeira ou séries divergentes. E' o que mostra claramente o exemplo seguinte [1]:

$$U = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \ldots$$

Com effeito, dando outra disposição aos termos d'esta série, vem

$\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{2n}\right) - \frac{2}{2(n+1)}$

$$\left(2 - \frac{2}{2}\right) - \frac{2}{4} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{6}\right) - \frac{2}{8} + \ldots$$

$\left(\frac{2}{i} - \frac{2}{2i}\right) - \frac{2}{2(i+1)}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{2}\,U.$$

II — Se a série dada não fôr absolutamente convergente, é sempre possivel reunir os seus termos em grupos de modo a transformal-a n'uma série absolutamente convergente. Esta observação importante é devida ao sr. *Ed. Weyr*, que a demonstrou do modo seguinte [2]:

Seja $\sum_1^\infty u_n$ a série dada e $\sum_1^\infty b_n$ uma série convergente arbitraria formada de termos positivos. Por ser convergente a série dada, aos numeros b_1, b_2, etc. correspondem (20 — 1.º) numeros n', n'', taes que é

$$\left|\sum_{n_1+1}^{n_1+p_1} u_m\right| < b_1,\ \left|\sum_{n_2+1}^{n_2+p_2} u_m\right| < b_2, \text{ etc.}$$

quando $n_1 > n'$, $n_2 > n''$, etc., qualquer que seja o valor dos numeros p_1, p_2, etc. Logo, se dermos a n_2 um valor maior do que n_1 e n'', a n_3 um valor maior do que n_2 e n''', etc., temos

$$\left|\sum_{n_1+1}^{n_2} u_m\right| < b_1,\ \left|\sum_{n_1+1}^{n_3} u_m\right| < b_2, \text{ etc.},$$

e portanto os termos da série

(1) Longchamps: *Algèbre* (Paris, 1889), pag. 166.
(2) Ed. Weyr—*Deux remarques relatives aux séries* (*Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, tomo VIII).

$$\left|\sum_{1}^{n_1} u_m\right| + \left|\sum_{n_1+1}^{n_2} u_m\right| + \left|\sum_{n_2+1}^{n_3} u_m\right| + \dots$$

são, a partir do segundo, menores do que os termos correspondentes da série convergente

$$\left|\sum_{1}^{n_1} u_m\right| + b_1 + b_2 + \dots,$$

e portanto aquella série é convergente. A série formada por grupos de termos da proposta

$$\left(\sum_{1}^{n_1} u_m\right) + \left(\sum_{n_1+1}^{n_2} u_m\right) + \left(\sum_{n_2+1}^{n_3} u_m\right) + \dots$$

é pois absolutamente convergente.

22. — *Operações sobre séries.* — Passando agora ás operações sobre séries, demonstraremos a este respeito os dous theoremas seguintes, devidos a *Cauchy*:

Theorema 4.° — *Se as séries*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$
$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

forem convergentes e se as suas sommas forem s e s', tambem a série cujo termo geral é $u_n + v_n$ será convergente, e a sua somma será igual a $s + s'$.

Com effeito, a somma dos n primeiros termos da nova série é $\sum_{1}^{n} u_n + \sum_{1}^{n} v_n$, e esta somma tende para o limite $s + s'$.

Theorema 5.° — *Se as séries*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$
$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

forem absolutamente convergentes (1) *e as suas sommas forem s e s', tambem a série*

(1) Veja-se no tomo 79 do *Jornal de Crelle* uma generalisação d'este theorema devida ao sr. *Mertens*.

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n + \ldots,$$

cujo termo geral T_n é a somma de todos os valores de $u_\alpha v_\beta$ correspondentes ás soluções inteiras positivas da equação $\alpha + \beta = n + 1$, é convergente, e a sua somma é igual a ss'.

Com effeito, a somma S_p dos p primeiros termos da nova série contém todos os valores de u_α v_β correspondentes ás soluções inteiras positivas das equações:

$$\alpha + \beta = 2, 3, 4, \ldots, p + 1.$$

Por outra parte o producto s_n s'_n dos n primeiros termos das séries dadas contém como parcellas todos os valores de u_α v_β correspondentes aos valores inteiros positivos de α e β desde 1 até n, isto é, a todas as soluções inteiras positivas das equações

$$\alpha + \beta = 2, 3, \ldots, 2n,$$

que não excederem n em grandeza.

Logo, dando a p um valor maior do que $2n - 1$, vem

$$S_p - s_n s'_n = u_i v_j + u_k v_l + \ldots + u_r v_t,$$

onde cada parcella tem um dos indices superior a n e inferior a $p + 2$, e o outro inferior a $p + 2$.

Portanto, chamando ρ_1, ρ_2, etc. os módulos de u_1, u_2, etc., ρ'_1, ρ'_2, etc. os módulos de v_1, v_2, etc., M a somma dos primeiros e N a somma dos segundos, temos (n.º 8 — I)

$$\begin{aligned} |(S_p - s_n s'_n)| &\overline{\gtrless} \rho_i \rho'_j + \rho_k \rho'_l + \ldots + \rho_r \rho'_t \\ &\overline{\gtrless} (\rho_1 + \rho_2 \ldots + \rho_{p+1}) (\rho'_{n+1} + \rho'_{n+2} + \ldots + \rho'_{p+1}) \\ &+ (\rho'_1 + \rho'_2 + \ldots + \rho'_{p+1}) (\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \ldots + \rho_{p+1}) \\ &< M(\rho'_{n+1} + \rho'_{n+2} + \ldots + \rho'_{p+1}) + N(\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \ldots + \rho_{p+1}). \end{aligned}$$

Como as séries $\rho_1 + \rho_2 + \ldots$, $\rho'_1 + \rho'_2 + \ldots$ são, por hypothese, convergentes, o segundo membro da desigualdade precedente tende para o limite zero á medida que n augmenta; logo S_p tende para o mesmo limite que $s_n s'_n$, isto é, para o limite ss'.

23. — *Séries cujos termos dependem de uma variavel.* — Passando agora a considerar especialmente as séries cujos termos dependem de uma quantidade variavel z, principiemos pelas séries ordenadas segundo as potencias de z, isto é pelas séries da fórma

$$(8) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m, \; z = x + iy,$$

e demonstremos o seguinte theorema, devido a *Abel*:

Theorema 6.º—*Se existe um numero positivo α que, substituido em* (8) *no logar do módulo de z, torna os módulos de todos os termos da série inferiores a uma quantidade finita B, a série* (8) *é absolutamente convergente todas as vezes que se derem a z valores cujos módulos sejam inferiores a α.*

Seja z_1 um valor de z cujo módulo é menor do que α. Por ser, por hypothese,

$$| c_m | \alpha^m < B,$$

temos

$$| c_m | \, | z_1 |^m < B \left| \frac{z_1}{\alpha} \right|^m,$$

e portanto os termos da série

$$\sum_1^{\infty} | c_m | \, | z_1 |^m$$

são menores do que os termos correspondentes da progressão

$$\sum_1^{\infty} B \left| \frac{z_1}{\alpha} \right|^m.$$

Logo a série

$$\sum_1^{\infty} c_m z_1^m$$

é (n.º 19 — I e II) absolutamente convergente.

Nota. — O theorema que vimos de demonstrar mostra que todos os valores de $| z |$ podem ser divididos em dous grupos, separados por um numero R, o primeiro compostos dos valores de $| z |$ para os quaes a série (8) é convergente, e o segundo composto dos valores de $| z |$ para os quaes esta série é divergente. Os numeros do primeiro grupo são menores do que R, e os numeros do segundo grupo são maiores do que R. Como os valores de z cujo módulo é menor do que R, são representados (n.º 9) pelos pontos do interior de um circulo de raio R com o centro na origem das coordenadas, vê-se que a série (1) é convergente quando z representa um ponto do interior d'este circulo e divergente quando z representa um ponto exterior. A este circulo, cuja consideração é devida a *Cauchy*, chama-se *circulo de convergencia* da série (8).

O theorema precedente nada diz relativamente á convergencia ou divergencia da série (8), quando z representa pontos collocados sobre a circumferencia do circulo de convergencia.

Deve-se observar que a série (8) póde ser convergente sómente no ponto $z = 0$, e que n'este caso o raio do circulo de convergencia é nullo; e que póde ser convergente qualquer que seja o valor que se dê a z, e n'este caso diz-se que o raio do circulo de convergencia é infinito.

O estudo das séries ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - a$, isto é, o estudo das séries da fórma

$$\sum_1^\infty c_m (z - a)^m$$

reduz-se, pondo $z - a = t$, ao da série

$$\sum_1^\infty c_m t^m,$$

que vimos de considerar. N'este caso existe ainda um circulo de convergencia cujo centro é o ponto que representa a.

24. — Voltemos a considerar a série

$$\sum_1^\infty u_m = \sum_1^\infty (x_m + iy_m)$$

e supponhamos que os seus termos dependem de uma variavel $z = x + iy$, que toma os valores z', z'', etc.

Se esta série é convergente nos pontos z', z'', etc., a cada valor da quantidade positiva δ e a cada valor de z corresponde um valor de n_1 tal que é (20 — 1.º)

$$| s_{n+p} - s_n | = | u_{n+1} + \dots + u_{n+p} | < \delta$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p.

Sejam a, b, c, etc. os valores de n_1 correspondentes aos valores z', z'', etc. de z. Se existe um numero l maior do que todos os numeros a, b, c, etc., a desigualdade precedente é satisfeita pelos valores de n superiores a l, qualquer que seja z. N'este caso diz-se que a série considerada é *uniformemente convergente nos pontos* z', z'', *etc.*

Se os valores de z considerados são representados geometricamente pelos pontos de uma linha ou de uma área dada, diz-se que a série é *uniformemente convergente na linha* ou *na área dada*. Se é $y = 0$ e os valores x', x'', etc. representam todos os valores de x desde um numero A até um numero B, diz-se que a série é *uniformemente convergente no intervallo de* A *a* B.

Chamando s a somma da série considerada, s_n a somma dos n primeiros termos e R_n a somma dos restantes, e fazendo tender na desigualdade precedente p para o infinito, temos, quando a série é uniformemente convergente,

$$| s - s_n | = | R_n | \lesseqgtr \delta$$

quando $n > l$, qualquer que seja p e qualquer que seja z.

Theorema 7.º — *Toda a série ordenada segundo as potencias de uma variavel real ou imaginaria, é uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro do circulo de convergencia.*

Seja

$$\sum_1^\infty c_m z^m, \; z = x + iy$$

a série proposta, e seja R o maior valor do módulo de z na área considerada.

Por ser esta série (23) absolutamente convergente nos pontos cujo módulo é R, a cada valor de δ, corresponde um numero n_1 tal que é

$$| c_{n+1} | R^{n+1} + \ldots + | c_{n+p} | R^{n+p} < \delta$$

quando $n > n_1$.

Temos porém, qualquer que seja z,

$$\begin{aligned} | s_{n+p} - s_n | &= | c_{n+1} z^{n+1} + \ldots + c_{n+p} z^{n+p} | \\ &< | c_{n+1} | \, | z |^{n+1} + \ldots + | c_{n+p} | \, | z |^{n+p} \\ &< | c_{n+1} | R^{n+1} + \ldots + | c_{n+p} | R^{n+p}. \end{aligned}$$

Logo a desigualdade

$$| s_{n+p} - s_n | < \delta$$

é satisfeita tambem quando $n > n_1$, qualquer que seja z; e a série é uniformemente convergente.

Por exemplo, a série

$$1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

é convergente, qualquer que seja z, visto que a série

$$1 + | z | + \frac{| z |^2}{1.2} + \ldots + \frac{| z |^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

é sempre convergente. Logo o raio do circulo de convergencia d'aquella série é infinito, e a série é uniformemente convergente n'uma área qualquer.

Como segundo exemplo consideremos a série

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n + \ldots$$

e supponhamos que α, β, γ são constantes reaes.

A série correspondente dos módulos è:

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} | z | + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} | z |^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} | z |^n + \ldots,$$

e a razão de dous termos consecutivos:

$$\frac{| u_{n+1} |}{| u_n |} = \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)} \rho$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)\left(1+\frac{\beta-1}{n}\right)}{1+\frac{\gamma-1}{n}} | z |$$

tende para $| z |$ quando n augmenta indefinidamente. Logo esta série é convergente (19 — III) quando $| z | < 1$ e é divergente quando $| z | > 1$.

Logo o raio do circulo de convergencia da série considerada é igual á unidade, e a série é uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro d'este circulo.

A série precedente, que tem sido objecto de trabalhos importantes, tem o nome de série *hypergeometrica*.

VI

Productos infinitos

25. — Consideremos agora as expressões da fórma

$$(1) \qquad (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_m) \ldots,$$

em que o numero de factores é infinito, que, empregando o signal Π para representar productos, podemos escrever do modo seguinte

$$\prod_1^{\infty} (1 + a_m).$$

A cada expressão da fórma precedente chama-se um *producto infinito*, e diz-se que este producto é convergente se o producto

$$\prod_1^{n} (1 + a_m)$$

dos n primeiros factores tende para um limite determinado quando n augmenta indefinidamente. Este limite é o valor do producto infinito.

Antes de procurar as condições de convergencia do producto (1) vamos demonstrar o seguinte lemma, de que teremos de fazer uso:

A média geometrica dos numeros A, B, C, etc. é sempre menor do que a média arithmetica dos mesmos numeros.

Esta proposição é devida a *Cauchy* e foi demonstrada por este eminente geometra do modo que vamos expôr (¹).

Seja n o numero das lettras A, B, C, etc. Queremos provar que é sempre

---

(¹) Cauchy: *Cours d'Analyse.*

Productos infinitos

Sobre as razões por que se denotam os factores $f^{\circ}.\ 1+z_1,\ 1+z_2, \dots$ veja-se o Calculo de Duhamel, T. 1.º pag. 461

Era natural fazer depender as regras da convergencia dos productos infinitos das que já eram conhecidas para o caso das sommas, já anteriormente estudadas, e isso fez Jordan pela consideração dos logarithmos (log. de um producto egual á somma dos log. dos factores); mas isso mesmo consegue o auctor pela consideração de ser a media geometrica de n diversas quantidades menor que a media arithmetica, isto é

$$\sqrt[n]{A.B.C\dots H} < \frac{A+B+C+\dots+H}{n}, \text{ ou } A.B.C\dots H < \left(\frac{A+B+C+\dots+H}{n}\right)^n \dots (1)$$

Se as quantidades forem só duas A e B, teremos

$$(A+B)^2-(A-B)^2=4AB \therefore \sqrt{AB} < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

E agora mostraremos que se a relação (1) for verdadeira no caso de n ~~factores~~ quantidades $A, B, C, \dots H$, tambem será verdadeira para o caso de 2n quantidades $A, B, C, \dots H, A', B', C', \dots H'$.

E com effeito temos

$$A.B.C\dots H \times A'.B'.C'\dots H' < \left(\frac{A+B+C+\dots+H}{n}\right)^n \times \left(\frac{A'+B'+\dots+H'}{n}\right)^n < (x)$$
$$< \left(\frac{A+B+\dots+H+A'+B'+\dots+H'}{2n}\right)^{2n}$$

D'aqui resulta que a formula, já demonstrada para o caso de serem dois os factores, subsistirá egualmente q.do estes forem 4, 8, 16, ... em fim q.do o seu

(x) $\frac{A+B+C+\dots+H}{n} \times \frac{A'+B'+\dots+H'}{n} < \left(\frac{A+B+C+\dots+H+A'+B'+\dots+H'}{2n}\right)^2$

nº. for uma potencia de 2 isto é 2^m

Se porem o nº. n não representar potencia de 2, designando por 2^m a potencia de 2 immediatamente superior a n, elevaremos o nº. ~~dos~~ dos factores até ser 2^m, o que se conseguirá introduzindo novos factores (2^m-n) iguaes cada um a $\frac{A+B+\dots+H}{n}$ e que nós designaremos abreviadamente pela letra K.

Teremos pois

$A.B.C\dots H.K.K\dots$ isto é

$A.B.C\dots H.K^{2^m-n}$

e pois que o nº. dos factores d'este producto é 2^m, ser-lhe-á applicavel a formula (1), e assim teremos

$$A.B.C\dots H.K^{2^m-n} < \left(\frac{A+B+C+\dots+H+K(2^m-n)}{2^m}\right)^{2^m}$$

Ora no 2º membro d'esta desigualdade o termo $-Kn$ reduz-se com o polynomio $A+B+C+\dots+H$, de modo que o numerador fica reduzido a $K2^m$ que, attendendo ao denº. 2^m, se reduz a K, ficando o 2º membro reduzido a K^{2^m}, e assim teremos

$$A.B.C\dots HK^{-n}<1 \text{ ou } A.B.C\dots H<\left(\frac{A+B+C+\dots H}{n}\right)^n.$$

$$\sqrt[n]{A\,B\,C\,\ldots} < \frac{A+B+C+\ldots}{n},$$

ou que é

$$A\,B\,C\,\ldots < \left(\frac{A+B+C+\ldots}{n}\right)^n.$$

Ora, em primeiro logar, temos evidentemente, qnando é $n=2$,

$$A\,B = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2,$$

d'onde se conclue, tomando successivamente $n=4$, $n=8$, $\ldots$, $n=2^m$,

$$A\,B\,C\,D < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4$$

$$< \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

etc.

$$A\,B\,C\,D\ldots < \left(\frac{A+B+C+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}.$$

Em segundo logar, se n não é um termo da progressão geometrica

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \text{etc.},$$

designar-se-ha por 2^m um termo d'esta progressão superior a n, e far-se-ha

$$K = \frac{A+B+C+\ldots}{n};$$

depois, voltando á formula anterior e suppondo no primeiro membro d'esta formula os $2^m - n$ ultimos factores iguaes a K, achar-se-ha

$$A\,B\,C\,D\ldots K^{2^m - n} < \left[\frac{A + B + C + \ldots + (2^m - n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

ou, attendendo ao valor de K,

$$A\,B\,C\,D\ldots < \left(\frac{A + B + C + \ldots}{n}\right)^n,$$

que é o que se queria demonstrar.

26. — Posto isto, vamos procurar as condições de convergencia do producto (1), suppondo primeiramente que as quantidades a_1, a_2, a_3, etc. são reaes e positivas.

Vimos de vêr que a média arithmetica de p quantidades positivas é maior do que a sua média geometrica; portanto, sendo q d'estas quantidades iguaes a A e as restantes iguaes a B, temos

$$\left(\frac{qA + (p - q)B}{p}\right)^p > A^q\,B^{p-q}.$$

Pondo n'esta desigualdade

A

$$A = 1 + \beta\frac{p}{q},\ B = 1,$$

vem

$$(1 + \beta)^p > \left(1 + \beta\frac{p}{q}\right)^q,$$

ou, pondo $\beta = 1$,

$$2^p > \left(1 + \frac{p}{q}\right)^q.$$

Considerando agora p quantidades, das quaes q sejam eguaes, cada uma, a A, e as $p-q$ restantes eguaes a B, e exprimindo que a media geometrica d'essas quantidades é menor que a media arithm.ca, teremos

$$A^q B^{p-q} < \left(\frac{Aq+B(p-q)}{p}\right)^p,$$

donde resulta, suppondo $B=1$ ~~...~~ $\cancel{1+\frac{p}{q}}$

$$\left(\frac{Aq+p-q}{p}\right)^p > A^q$$

e depois, para $A = 1+\frac{p}{q}$

$$\left(\frac{q+p+p-q}{p}\right)^p > \left(1+\frac{p}{q}\right)^q, \text{ ou } 2^{\frac{p}{q}} > 1+\frac{p}{q}$$

ou mais abreviadamente

$$2^r > 1+r \ldots (1)$$

sendo $r = \frac{p}{q} > 1$.

Se r fôr ~~maior~~ menor que 1, $r+1$ ou r' será maior que 1, e portanto ser-lhe-á applicavel a relação (1), e teremos

$$2^{r'} > 1+r'$$

~~isto~~ é

$$2^{r+1} > 1+(r+1) \text{ ou } 2^{r+1} > 2+r, \text{ e logo } 2^r > 1+\frac{r}{2} \quad (2)$$

Assim, se é $r>1$ subsiste a relação (1), se $r<1$, subsiste a relação (2), e ambos os casos será

$$2^r > 1+\frac{1}{2}r \ldots (3)$$

Posto isto, suppondo agora successivamente $\frac{1}{2}r = a_1, a_2, a_3, \ldots$ obteremos respectivam.te $1+a_1 < 2^{2a_1}$, $1+a_2 < 2^{2a_2}$, $1+a_3 < 2^{2a_3}$,

e portanto

$$\prod_{1}^{\infty}(1+a_m) < 2^{2\sum_{1}^{\infty} a_m}$$

É manifesto que n'esta demonstração se suppoz r numero racional visto ser $r = \frac{p}{q}$, sendo p e q n.os inteiros

Temos pois, pondo $\gamma = \frac{p}{q} > 1$,

$$2^\gamma > 1 + \gamma > 1 + \frac{1}{2}\gamma.$$

Se fôr $\gamma < 1$, a formula precedente dá

$$2^{1+\gamma} > 1 + (1 + \gamma),$$

e portanto temos tambem n'este caso

$$2^\gamma > 1 + \frac{1}{2}\gamma.$$

Em virtude d'esta desigualdade virá, pondo $\frac{1}{2}\gamma = a_m$,

$$1 + a_m < 2^{2a_m}$$

e portanto

$$\prod_1^n (1 + a_m) < \prod_1^n 2^{2a_m} = 2^{2\sum_1^n a_m}.$$

Se a série Σa_m é convergente, a sua somma é inferior a um numero racional α, e temos

$$\prod_1^n (1 + a_m) < 2^{2\alpha};$$

portanto $\prod_1^n (1 + a_m)$ tende para um limite determinado quando n augmenta (11 — 1.º) indefinidamente.

O raciocinio que precede só tem logar quando todas as quantidades a_1, a_2, etc. são racionaes. A conclusão porém a que se chegou tem ainda logar quando todas ou algumas d'estas quantidades são irracionaes. Com effeito, representando por b_1, b_2, etc. numeros racionaes respectivamente inferiores a a_1, a_2, etc. e tão proximos d'estes numeros quanto se queira, temos

$$\sum_1^n b_m < \sum_1^\infty a_m < \alpha,$$

e portanto

$$\prod_1^n (1 + b_m) < 2^{2\sum_1^n b_m} < 2^{2\alpha}.$$

Quando b_1, b_2, etc. tendem para a_1, a_2, etc. e n augmenta indefinidamente, o primeiro membro d'esta desigualdade augmenta constantemente; logo tende (11—1.°) para um limite.

Reciprocamente, a desigualdade

$$\prod_1^n (1 + a_m) = 1 + \sum_1^n a_m + \ldots > \sum_1^n a_m$$

mostra que, se $\sum_1^n a_m$ augmenta indefinidamente com n, tambem o producto $\prod_1^n (1 + a_m)$ augmenta indefinidamente com n.

Temos pois o theorema seguinte:

Theorema. — *A condição necessaria e sufficiente para que o producto* (1) *seja convergente é que a série* Σa_m *o seja.*

27. — Podemos ligar com a doutrina precedente a das potencias de grão infinito. A este respeito vamos considerar a expressão

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

que tem grande importancia no *Calculo Differencial*, para procurar o limite para que tende quando n tende para o infinito. Supporemos que o numero n é inteiro e positivo, reservando para mais tarde o caso de n representar um numero qualquer.

A desigualdade

$$(1+\beta)^p > \left(1+\beta\,\frac{p}{q}\right)^q$$

ou

$$(1+\beta)^\gamma > 1+\beta\gamma$$

dá, pondo $\beta = \dfrac{1}{n+1}$, $\gamma = \dfrac{n+1}{n}$ e elevando á potencia n,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Logo a expressão $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ augmenta indefinidamente com n.

Por outra parte temos, pondo $a_m = \dfrac{1}{n}$,

$$1+\frac{1}{n} < 2^{\frac{2}{n}},$$

e portanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2^2,$$

o que mostra que a potencia considerada, que augmenta indefinidamente com n, tende para um limite menor do que 4, quando n tende para o infinito.

Este limite designa-se habitualmente pela lettra e, e serve de base a um systema de logarithmos, que são chamados *neperianos*, por ser a base de que usou Neper, inventor dos logarithmos.

O valor de e póde calcular-se com a approximação que se quizer dando a n os valores 1, 2, 3, ..., o que dá $e = 2,718281\ldots$

28. — Consideremos agora o producto

$$\prod_1^\infty (1+u_m),$$

onde u_1, u_2, etc. representam quantidades reaes ou imaginarias.

A formula conhecida relativa á multiplicação de binomios dá

$$\prod_1^n (1 + u_m) = 1 + \sum_1^n u_m + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n,$$

e do mesmo modo

$$\prod_1^n (1 + a_m) = 1 + \sum_1^n a_m + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n,$$

chamando a_1, a_2, etc. os módulos de u_1, u_2, etc.

Suppondo agora que o producto $\prod_1^\infty (1 + a_m)$ é convergente, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero n_1 tal que é (n.° 11)

$$\prod_1^{n+p} (1 + a_m) - \prod_1^n (1 + a_m) = \Sigma' a_j a_k \ldots < \delta$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p.

Mas temos

$$\prod_1^{n+p} (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) = \Sigma' u_j u_k \ldots$$

e (n.° 8 — I)

$$| \Sigma' u_j u_k \ldots | < \Sigma' a_j a_k \ldots$$

Logo é

$$\left| \prod_1^{n+p} (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) \right| < \delta$$

quando $n > n_1$, e o producto $\prod_1^\infty (1 + u_m)$ é pois (n.° 15 — II) convergente.

Podemos pois enunciar o principio seguinte:

Se o producto $\prod_1^\infty (1 + a_m)$ *é convergente, tambem é convergente o producto* $\prod_1^\infty (1 + u_m)$.

Por exemplo, o producto

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{|z|}{1.2\ldots m}\right),$$

onde $z = x + iy$, é convergente, visto ser convergente a série (n.º 19 — III)

$$\sum_1^\infty a_m = \prod_1^\infty \frac{|z|}{1.2\ldots m}.$$

Logo tambem é convergente o producto

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{1.2\ldots m}\right).$$

VII

Fracções continuas

29. — As fracções continuas são conhecidas desde os Elementos de Algebra, onde se viu a grande importancia que tinham em muitas questões relativas aos numeros. Os principaes resultados lá achados téem logar no caso da fracção continua:

$$(1) \quad u = \frac{a_1}{b_1 + u_1},\ u_1 = \frac{a_2}{b_2 + u_2},\ u_2 = \frac{a_3}{b_3 + u_3},\ \text{etc.},$$

onde a_1, a_2, etc., b_1, b_2, etc. representam polynomios ordenados seguudo as potencias inteiras e positivas de uma variavel x.

I — Formando as convergentes successivas, como no caso das fracções continuas elementares, acha-se os resultados:

$$C_1 = \frac{N_1}{D_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

$$C_2 = \frac{N_2}{D_2} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}$$

....

$$C_n = \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_{n-1} b_n + N_{n-2} a_n}{D_{n-1} b_n + D_{n-2} a_n}.$$

II — As tres convergentes consecutivas:

$$\frac{N_{n-2}}{D_{n-2}}, \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}, \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_{n-1} b_n + N_{n-2} a_n}{D_{n-1} b_n + D_{n-2} a_n}$$

dão, pela subtracção,

$$C_{n-1} - C_n = \frac{a_n (N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2})}{D_{n-1} D_n}$$

$$C_{n-2} - C_{n-1} = - \frac{N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2}}{D_{n-1} D_{n-2}},$$

e portanto o numerador da differença $C_{n-1} - C_n$ é igual ao numerador da differença $C_{n-2} - C_{n-1}$ multiplicado por $-a_n$; mas as primeiras convergentes dão

$$C_1 - C_2 = \frac{a_1 a_2}{D_1 D_2},$$

logo temos

$$C_{n-1} - C_n = \pm \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{D_{n-1} D_n},$$

e portanto

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = \pm a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n,$$

III — Este resultado permitte transformar a fracção continua n'uma série. Com effeito, temos evidentemente

$$u_1 = C_1 - (C_1 - C_2) - (C_2 - C_3) - \ldots$$

d'onde se segue,

$$u = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1\, a_2}{D_1\, D_2} + \frac{a_1\, a_2\, a_3}{D_2\, D_3} - \ldots$$

O valor que se obtêm sommando n termos d'esta série é igual a convergente de ordem n de fracção continua. Logo para que a fracção continua seja convergente basta que esta série o seja, e reciprocamente.

IV — Das fracções continuas contidas na fórma geral (1) ha dous grupos importantes na Analyse. O primeiro corresponde a $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 1$ (¹). O segundo corresponde a $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$.

A respeito das fracções continuas do segundo grupo enunciaremos os principios seguintes:

1.° — *A fracção algebrica* $\frac{N_n}{D_n}$ *é irreductivel.*

Este principio é consequencia da formula

$$N_{n-1}\, D_n - N_n\, D_{n-1} = \pm 1.$$

2.° — *O denominador da convergente da ordem* n *é um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de* x, *cujo grão é igual á somma dos grãos de* b_1, b_2, *etc.*

Este principio é uma consequencia da lei da formação dos denominadores das convergentes.

3.° — *Se* u_n *tende para um limite quando* x *tende para o infinito, a differença entre o valor da fracção continua completa e o da convergente* C_{n-1} *é da fórma*

$$(2) \qquad u - C_{n-1} = \frac{1}{x^k}(A + \varepsilon),$$

(¹) Veja-se o nosso opusculo intitulado — *Desenvolvimento das funcções em fracção continua* — Coimbra, 1871.

onde k igual á somma dos gráos dos polynomios D_{n-1} e D_n, A uma constante determinada, e ε uma quantidade que tende para zero quando x tende para o infinito.

Antes de demonstrar esta proposição, demonstremos o lemma seguinte:

A fracção

$$y = \frac{Ax^a + Bx^b + \dots}{Lx^l + Mx^m + \dots}$$

cujo numerador e denominador estão ordenados segundo as potencias decrescentes de x, quando x tende para o infinito, tende para zero se é $a < l$, tende para $\frac{A}{L}$ se é $a = b$ e tende para o infinito se é $a > l$.

Com effeito, se é $a = l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{A + Bx^{b-a} + \dots}{L + Mx^{m-a} + \dots} = \frac{A}{L};$$

se é $a > l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{A + Bx^{b-a} + \dots}{Lx^{l-a} + Mx^{m-a} + \dots} = \infty;$$

se é $a < l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{Ax^{a-l} + Bx^{b-l} + \dots}{L + Mx^{m-l} + \dots} = 0.$$

Posto isto, a igualdade

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - \frac{N_n}{D_n} = \pm \frac{1}{D_n D_{n-1}}$$

$$= \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_{n-1} b_n + D_{n-2})}$$

dá, quando se muda b_n em $b_n + u_n$,

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - u = \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_{n-1}b_n + D_{n-1}u_n + D_{n-2})}$$

$$= \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_n + D_{n-1}u_n)}.$$

Temos pois a igualdade

$$(u - C_{n-1})\,x^k = \mp \frac{x^k}{D_{n-1}(D_n + D_{n-1}u_n)},$$

da qual se deduz, dividindo os dous termos da fracção que entra no segundo membro por x^k, fazendo tender x para o infinito, e attendendo a que $\frac{D_{n-1}D_n}{x^k}$ tende para um limite determinado e $\frac{D^2_{n-1}}{x^k}$ tende para zero, uma igualdade da fórma

$$\lim x^k (u - C_{n-1}) = A$$

da qual se tira o theorema enunciado.

4.° — *Se* $\frac{N}{D}$ *representar uma fracção irreductivel, cujo numerador e denominador sejam polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de* x *e cujo denominador seja do grão* α, *e se existir um numero* m, *maior do que* 2α, *tal que seja*

$$(3) \qquad u - \frac{N}{D} = \frac{1}{x^m}(B + \varepsilon'),$$

B *sendo uma quantidade constante e* ε' *uma quantidade que tende para zero quando* x *tende para o infinito, a fracção* $\frac{N}{D}$ *é igual á convergente* C_{n-1} *da fracção continua* u, *no caso de* u_n *tender para um limite quando* x *tende para o infinito.*

Sejam α_{n-1} e α_n os grãos dos denominadores D_{n-1} e D_n de duas convergentes consecutivas da fracção continua considerada taes que $\alpha_{n-1} \overline{<} \alpha$, $\alpha_n > \alpha$, e ponha-se $\alpha + \alpha_{n-1} = s$.

As igualdades (2) e (3) dão

$$x^s \left(\frac{N}{D} - \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}\right) = \frac{x^s}{x^k} (A + \varepsilon) - \frac{x^s}{x^m} (B + \varepsilon'),$$

e portanto, fazer tender x para o infinito e notando que é $s < k$, $s \overline{<} 2\alpha < m$,

$$\lim \frac{x^s (ND_{n-1} - DN_{n-1})}{DD_{n-1}} = 0.$$

Temos pois

$$ND_{n-1} - DN_{n-1} = 0,$$

porque, se esta igualdade não tivesse logar, o grão do numerador da fracção precedente seria igual ou superior ao grão do denominador, e o limite da fracção não podia ser igual a zero, em virtude do lemma anteriormente demonstrado.

Logo

$$\frac{N}{D} = \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}},$$

que é o que se queria demonstrar.

30. — A theoria das fracções continuas algebricas tem a sua principal applicação no problema que consiste em procurar, sendo dada a série convergente

$$u = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots,$$

uma série de fracções irreductiveis

$$\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \ldots, \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}, \ldots$$

taes que, sendo α o grão de D_{n-1}, seja

$$u - \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{1}{x^{2\alpha+1}}(A + \varepsilon),$$

representando por A uma constante e por ε uma variavel que tende para zero, quando x tende para o infinito. Para resolver esta questão, vamos primeiramente desenvolver u em fracção continua.

Pondo, para isso,

$$u = c_0 + \frac{1}{v}, \; v = \frac{1}{\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots},$$

teremos, effectuando a divisão, um resultado da fórma

$$v = p_1 x + q_1 + u_1,$$

onde

$$u_1 = \frac{\frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \ldots}{c_1 + \frac{c_2}{x} + \ldots}.$$

Temos depois

$$u_1 = \frac{1}{v_1}, \; v_1 = \frac{c_1 + \frac{c_2}{x} + \ldots}{\frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \ldots},$$

e portanto

$$v_1 = p_2 x + q_2 + u_2,$$

onde

$$u_2 = \frac{\frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{x^2} + \ldots}{d_1 + \frac{d_2}{x} + \ldots}.$$

Continuando do mesmo modo obtem-se o desenvolvimento de u em fracção continua:

$$u = c_0 + \frac{1}{p_1 x + q_1 + u_1}$$

$$u_1 = \frac{1}{p_2 x + q_2 + u_2}$$

$$u_2 = \frac{1}{p_3 x + q_3 + u_3}$$

. . . .

$$u_{n-1} = \frac{1}{p_n x + q_n + u_n}.$$

Como u_n tende para zero quando x tende para o infinito, as convergentes d'esta fracção continua satisfazem (n.º 29 — 3.º) á questão proposta, e são as unicas fracções (n.º 29 — 4.º) que lhe satisfazem.

CAPITULO II

PRINCIPIOS GERAES DA THEORIA DAS FUNCÇÕES. FUNCÇÕES ALGEBRICAS, LOGARITHMICAS, ETC.

I

Principios geraes

31. — *Funcções de variaveis reaes.* — Se duas quantidades reaes variaveis x e y estão ligadas de tal modo que os valores da segunda dependem dos valores da primeira, diz-se que y é *funcção de x.* Assim, por exemplo, $\sqrt{x}$, $\operatorname{sen} x$, x^m, etc. são funcções de x. Para designar que y é funcção de x emprega-se qualquer das notações

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x), \text{ etc.}$$

Os valores que tomam as funcções $f(x)$, $F(x)$, etc., quando á variavel x se dá o valor determinado a, representam-se por $f(a)$, $F(a)$, etc.

A' variavel x chama-se *variavel independente*, e á variavel y *variavel dependente.* A variavel independente póde representar qualquer numero da collecção geral dos numeros, ou qualquer numero de uma collecção especial, por exemplo, da collecção dos numeros racionaes, ou da collecção dos numeros comprehendidos entre A e B, etc. Os valores de y ficam determinados quando x é dado.

Uma funcção $f(x)$ diz-se *definida no intervallo de $x = a$ a $x = b$* quando a todo o valor que se dá a x desde a até b, corresponde um valor unico da funcção.

Uma funcção diz-se *definida na visinhança do ponto $x = a$* quando existe um numero β tal que a funcção é definida no intervallo de $x = a - \beta$ a $x = a + \beta$.

Nas definições e enunciados dos theoremas geraes relativos ás funcções supporemos sempre que a cada valor de x corresponde um só valor da funcção. Para depois se applicarem estes principios ás funcções que tomam muitos valores para cada valor de x, é necessario primeiramente separar estes valores de modo a formar novas funcções taes que a cada valor de x corresponda um só valor da funcção. Ás novas funcções assim formadas chama-se *ramos* da primeira.

Deve-se observar que esta separação não se faz de uma maneira arbitraria; deve ser feita de tal modo que as novas funcções tenham as qualidades que iremos attribuindo ás funcções de que nos occuparmos.

32.—Principiaremos o estudo geral das funcções demonstrando o theorema seguinte, devido ao sr. *Weierstrass:*

Se os valores da funcção $f(x)$, correspondentes aos valores que toma x desde $x = \alpha$ até $x = \beta$, estão todos comprehendidos entre dous numeros A e B, existe sempre um numero L tal que os valores de $f(x)$ não podem ser superiores a L e tal que, ou L representa um valor de $f(x)$, ou entre L e $L - \delta$ existe sempre algum dos valores de $f(x)$, por mais pequeno que seja δ; e existe sempre um numero l tal que os valores de $f(x)$ não podem ser inferiores a l, e tal que, ou l representa um valor de $f(x)$, ou entre l e $l + \delta$ existe sempre algum dos valores de $f(x)$.

Sejam a e b dous numeros racionaes entre os quaes A e B estejam comprehendidos, e seja $b > a$. Dividamos o intervallo entre a e b em dous intervallos iguaes, o que dá os numeros

$$a,\ a + \frac{b-a}{2},\ b,$$

e seja a_1 o ultimo d'estes tres numeros que $f(x)$ póde exceder, quando x varia dos α até β, e b_1 o primeiro que $f(x)$ não póde exceder, de modo que

$$a_1 \geqq a,\ b_1 \lesseqgtr b,\ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Dividamos em seguida o intervallo entre a_1 e b_1 em dous intervallos iguaes, o que dá os numeros

$$a_1,\ a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2},\ b_1,$$

e seja a_2 o ultimo d'estes numeros que $f(x)$ póde exceder e b_2 o primeiro que $f(x)$ não póde exceder, de modo que

$$a_2 \geqq a_1,\ b_2 \leqq b_1,\ b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo obtem-se um grupo de numeros crescentes

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

que $f(x)$ excede, e um grupo de numeros decrescentes

$$b,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

que $f(x)$ não póde exceder, taes que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Os numeros a, a_1, a_2, etc. tendem para um numero racional ou irracional L; e como a differença $b_n - a_n$ tende para zero á medida que n augmenta, segue-se que os numeros b, b_1, b_2, etc. tendem tambem para o limite L. Como porém $f(x)$ não póde exceder os numeros b, b_1, b_2, etc., esta funcção não póde exceder L; e como, por outra parte, temos

$$L - f(x) < L - a_n < b_n - a_n$$

ou

$$L - f(x) < \frac{b-a}{2^n},$$

ou, dando a n um valor tão grande que seja $\frac{b-a}{2^n} < \delta$,

$$L - f(x) < \delta,$$

$f(x)$ excede $L - \delta$, por mais pequeno que seja δ, o que é a primeira parte do theorema.

Do mesmo modo se demonstra a existencia do numero l satisfazendo ás condições do theorema.

Aos numeros L e l chama-se respectivamente *limite superior* e *limite inferior* dos valores considerados da funcção.

Nota. — E' facil de vêr que o theorema precedente tem logar, no caso mais geral de, em logar de uma funcção, se considerar um grupo qualquer de numeros comprehendidos entre A e B.

33. — Seja $f(x)$ uma funcção definida na visinhança do ponto a. Diz-se que esta funcção é *continua* no ponto a se $f(a+h)$ tende para $f(a)$ quando h tende para zero, e isto qualquer que seja o modo como h tenda para zero. Se no ponto a a funcção não é continua, diz-se que é *discontinua*.

Da definição de continuidade decorrem immediatamente as seguintes proposições:

1.° — *E' condição necessaria e sufficiente para que a funcção $f(x)$ seja continua no ponto a, que a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero positivo ε tal que a desigualdade*

$$(1) \qquad | f(a+h) - f(a) | < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $| h | < \varepsilon$.

E' suff.

Com effeito, sendo h_1, h_2, h_3, etc. uma série de valores de h que tendem para zero, se a desigualdade (1) é satisfeita por todos os valores que tem h entre $+\varepsilon$ e $-\varepsilon$, é satisfeita por aquelles dos numeros h_1, h_2, h_3, etc. que estão comprehendidos entre $+\varepsilon$ e $-\varepsilon$. Logo os valores $f(a+h_1)$, $f(a+h_2)$, etc. de $f(x)$ tendem para $f(a)$, e a funcção $f(x)$ é continua no ponto a.

E' necessaria

Reciprocamente, se para qualquer grupo dos numeros h_1, h_2, h_3, etc., os valores correspondentes $f(a+h_1)$, $f(a+h_2)$, etc. de $f(x)$ tendem para $f(a)$, a desigualdade (1) tem logar; porque, se não tivesse logar, existiria um valor de δ tal que, por menor que tomassemos ε, seria

$$| f(a+h) - f(a) | \geqq \delta$$

para algum valor h_i de h inferior em valor absoluto a ε. Pondo depois $\varepsilon = | h_i |$ vê-se que existiria um valor h_j de h, inferior em valor absoluto a $| h_i |$, tal que esta ultima desigualdade seria satisfeita. Continuando do mesmo modo obter-se-hia uma série de numeros h_i, h_j, h_l, etc. taes que, quando se fizesse passar h por elles, a funcção $f(a + h)$ não tenderia para $f(a)$, o que é contrario á hypothese.

2.° — *A somma, o producto e o quociente (quando $\psi(a)$ é differente de zero) de duas funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, continuas no ponto a, são funcções de x continuas no mesmo ponto.*

Com effeito, sendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ estas funcções e $f(x)$ a sua somma, temos (n.° 12 — 1.°)

$$\lim_{h=0} f(a + h) = \lim_{h=0} \varphi(a + h) + \lim_{h=0} \psi(a + h)$$

$$= \varphi(a) + \psi(a) = f(a).$$

Do mesmo modo se demonstram os theoremas relativos ao producto e ao quociente de funcções, baseando-se nos theoremas 2.° e 3.° do n.° 12.

3.° — *Se $y = \varphi(x)$ representa uma funcção continua de x no ponto a, e $z = \psi(y)$ uma funcção continua de y no ponto b correspondente a $x = a$, a funcção de funcção $z = \psi[\varphi(x)] = f(x)$ é continua no ponto $x = a$.*

Com effeito, quando x tende para a, y tende para b, e z tende para $\psi(b) = \psi[\varphi(a)] = f(a)$.

34. — Os theoremas seguintes dão propriedades importantes das funcções continuas:

Theorema 1.° — *Se a funcção $f(x)$ fôr continua em todos os pontos desde $x = a$ até $x = b$, e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem signaes contrarios, entre a e b existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$* (Cauchy).

Supponhamos $b > a$ e dividamos o intervallo de $x = a$ a $x = b$ em duas partes iguaes, o que dá os numeros

$$a,\ a + \frac{b - a}{2},\ b.$$

Se o segundo numero annullar a funcção, está o theorema demonstrado. No caso contrario, chamemos a_1 e b_1 dous d'estes numeros que sejam consecutivos e dêem á funcção signaes contrarios; de modo que temos

$$a_1 \geqq a,\ b_1 \lesseqgtr b,\ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Dividamos do mesmo modo o intervallo de $x = a_1$ a $x = b_1$ em dous intervallos iguaes, o que dá os numeros

$$a_1,\ a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2},\ b_1,$$

e chamemos a_2 e b_2 os dous numeros consecutivos d'este grupo que dão a $f(x)$ signaes contrarios; de modo que temos

$$a_1 \geqq a_2,\ b_1 \lesseqgtr b_2,\ b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se um grupo

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

de numeros crescentes, e um grupo

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

de numeros decrescentes, maiores do que os numeros do grupo anterior, e taes que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Os numeros do primeiro grupo tendem para um numero racional ou irracional c; e, por ser a funcção $f(x)$ continua no intervallo de $x = a$ a $x = b$, as funcções $f(a_1)$, $f(a_2)$, etc. devem tender para um limite $f(c)$, que deve ser nullo ou ter o mesmo signal que estas funcções (n.° 10 — 3.°).

Os numeros b_1, b_2, etc. tendendo tambem para c, as funcções $f(b_1)$, $f(b_2)$, etc. tendem tambem para um limite $f(c)$, que deve ser nullo ou ter o mesmo signal que estas funcções.

Mas $f(c)$ não póde ter ao mesmo tempo o signal de $f(a_n)$ e de $f(b_n)$, porque estes valores têem signaes contrarios; logo é $f(c) = 0$.

Theorema 2.° — *Se a funcção $f(x)$ é continua em todos os pontos desde $x = a$ até $x = b$ e A e B são dous valores de $f(x)$ correspondentes aos valores a e b de x, $f(x)$ passa por todos os valores comprehendidos entre A e B quando x varia desde a até b.*

Com effeito, sendo C um valor comprehendido entre A e B e portanto $A > C > B$, as quantidades $f(a) - C$ e $f(b) - C$ têem signaes contrarios; logo existe um valor x_1 de x, comprehendido entre a e b (theorema 1.°), tal que é $f(x_1) - C = 0$.

Theorema 3.° — *Se a funcção $f(x)$ fôr continua no intervallo de $x = a$ a $x = b$, existe um limite superior e um limite inferior dos valores que ella tem n'este intervallo, e estes limites representam valores da funcção* (Weierstrass).

E' evidente que, se $f(x)$ não tivesse limite superior no intervallo de $x = a$ a $x = b$, tambem não teria limite superior n'um pelo menos dos intervallos que resultam de dividir aquelle em duas partes iguaes; e que, se a $f(x)$ tiver limite superior no intervallo considerado, este limite coincide com o limite superior correspondente a um (a_1 a b_1) dos intervallos considerados. Continuando depois, como na demonstração do theorema 1.°, é facil de vêr que, se não existe limite superior, haverá dous grupos de numeros

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

que tenderão para o mesmo limite c, taes que não existirá limite superior dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde a_n até b_n; e que, se existir um limite superior L, este numero será tambem o limite superior dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde a_n até b_n.

Mas, por ser a funcção $f(x)$ continua no ponto c, a cada valor de δ corresponde um valor positivo h_1 tal que a desigualdade

$$| f(c + h) - f(c) | < \delta$$

é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $- h_1$ e h_1. Logo, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c - h_1$ e $c + h_1$, vê-se que é

$$| f(x) - f(c) | < \delta,$$

quando x está comprehendido entre a_n e b_n, e portanto que $f(x)$ está comprehendido entre $f(c) + \delta$ e $f(c) - \delta$; isto é que existe um limite superior L (n.º 32) dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde a até b. Para mostrar que este limite é um valor de $f(x)$, basta notar que, por ser tambem L o limite superior dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde a_n até b_n, temos, por definição (n.º 32),

$$f(x) > L - \delta'$$

por mais pequeno que seja δ', e portanto

$$f(c) + \delta > L - \delta',$$

o que dá, fazendo tender δ e δ' para zero, $f(c) = L$, visto que, por definição, $f(c)$ não póde ser maior do que L.

Por um raciocinio semelhante se demonstra o theorema no caso do limite inferior.

THEOREMA 4.º — *Se a funcção $f(x)$ fôr continua em todos os pontos desde $x = a$ até $x = b$, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 tal que a desigualdade*

$$|f(x') - f(x)| < \delta$$

é satisfeita por todos aquelles valores de x e x', pertencentes ao intervallo considerado, cuja differença é menor do que h_1 (1).

Com effeito, se o theorema não tivesse logar, tambem não teria logar n'um, pelo menos, dos intervallos que resultam de dividir o intervallo de $x = a$ a $x = b$ em duas partes iguaes por meio dos numeros

$$a,\ a + \frac{b-a}{2},\ b;$$

porque, se o theorema tivesse logar nos dous intervallos, teriamos para h_1 dous valores, correspondendo um a cada intervallo, e as condições do theorema verificavam-se em todo

(1) Este theorema é devido a *Cantor*. Veja-se uma memoria de *Heine* publicada no tomo 74 do *Jornal de Crelle*.

o intervallo de $x = a$ a $x = b$ dando a h_1 o menor d'estes valores.

Chamando a_1 e b_1 as extremidades d'aquelle dos intervallos precedentes no qual o theorema não teria logar, vê-se que o theorema tambem não deveria ter logar n'um pelo menos dos intervallos parciaes que resultam de dividir o intervallo $x = a_1$ a $x = b_1$ em duas partes iguaes por meio dos numeros

$$a_1,\ a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2},\ b_1.$$

Continuando do mesmo modo, como na demonstração do theorema 1.°, é facil de vêr que, se o theorema não fosse verdadeiro, haveria dous grupos de numeros

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

que tenderiam para o limite c, taes que o theorema não seria tambem verdadeiro no intervallo de $x = a_n$ a $x = b_n$.

Mas, por ser a funcção $f(x)$ continua no ponto c, a cada valor δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 tal que é

$$|\, f(c + h) - f(c)\, | < \delta$$

quando h está comprehendido entre $-h_1$ e $+h_1$. Logo dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c - h_1$ e $c + h_1$, a desigualdade

$$|\, f(x) - f(c)\, | < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre a_n e b_n. Chamando pois x' um valor de x comprehendido entre estes numeros, temos

$$|\, f(x') - f(c)\, | < \delta.$$

D'esta desigualdade e da anterior tira-se a desigualdade

$$|\, f(x') - f(x)\, | < 2\delta$$

que é satisfeita por todos os valores de x e de x' comprehendidos entre a_n e b_n. Logo o theorema tem logar para o intervallo de $x = a_n$ a $x = b_n$, e portanto tambem tem logar para o intervallo de $x = a$ a $x = b$.

35. — Se uma quantidade variavel u depende de outras variaveis x, y, etc., diz-se que u é funcção das variaveis x, y, etc. e escreve-se

$$u = f(x, y, \ldots), \; u = F(x, y, \ldots), \text{ etc.}$$

A funcção $f(x, y, \ldots)$, definida na visinhança dos pontos $x = a$, $y = b$, etc., diz-se *continua* no ponto $(a, b, c, \ldots)$ se $f(a + h, b + k, \ldots)$ tende para $f(a, b, \ldots)$ quando h, k, etc. tendem para zero, e isto qualquer que seja o modo como tendam para zero.

E' facil de estender os theoremas que demonstrámos nos numeros anteriores para as funcções de uma variavel, ao caso das funcções de muitas variaveis. Assim temos:

1.° — *E' condição necessaria e sufficiente para que a funcção $f(x, y, \ldots)$ seja continua no ponto $(a, b, \ldots)$, que a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, correspondam numeros ε_1, ε_2, etc. taes que a desigualdade*

$$| f(a + h, b + k, \ldots) - f(a, b, \ldots) | < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h, k, etc. que satisfizerem ás condições $| h | < \varepsilon_1$, $| k | < \varepsilon_2$, etc.

2.° — *A somma, o producto e o quociente (quando $\psi(a, b, \ldots)$ é differente de zero) de duas funcções $\varphi(x, y, \ldots)$ e $\psi(x, y, \ldots)$ continuas no ponto $(a, b, \ldots)$, são funcções de x, y, etc. continuas no mesmo ponto.*

....

36. — *Funcções de variaveis imaginarias.* — Se os valores de uma variavel $u = X + iY$ dependem dos valores de outra variavel $z = x + iy$, diz-se que u é *funcção* de z.

A funcção $f(x + iy)$ diz-se *continua* no ponto $a + ib$ se a funcção $f[a + h + i(b + k)]$ tende para $f(a + ib)$ quando h e k tendem para zero, e isto qualquer que seja o modo como h e k tendam para zero; ou, em outros termos (n.º 15), se X e Y são funcções continuas de x e y.

D'esta definição decorre immediatamente que *a somma, o producto e o quociente (quando $\psi(a+ib)$ é differente de 0) de duas funcções $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, continuas no ponto $a+ib$, é uma funcção de z continua no mesmo ponto.*

Com effeito, pondo

$$\varphi(z) = X + iY, \; \psi(z) = X_1 + iY_1,$$

temos as relações (n.º 7)

$$\varphi(z) + \psi(z) = X + X_1 + i(Y + Y_1),$$

$$\varphi(z)\,\psi(z) = XX_1 - YY_1 + i(XY_1 + YX_1),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{XX_1 + YY_1}{X_1^2 + Y_1^2} + i\,\frac{YX_1 - XY_1}{X_1^2 + Y_1^2},$$

das quaes se tira o theorema enunciado, visto que a parte independente de i e o coefficiente de i, que entram no segundo membro de cada uma d'estas relações, são (n.º 35—2.º) funcções continuas de x e y.

II

Funcções algebricas

37.—Diz-se que u é uma funcção algebrica de z quando estas variaveis estão ligadas por uma equação irreductivel da fórma

$$(1) \qquad a_m u^m + a_{m-1} u^{m-1} + \ldots + a_1 u + a_0 = 0,$$

onde m é um numero inteiro positivo e a_0, a_1, a_2, etc. são polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de z.

Se a equação precedente é do primeiro grão relativamente a u, diz-se que u é funcção *racional* de z; no caso contrario diz-se que u é funcção *irracional* de z. Toda a expressão analytica dada em que a variavel z é sómente sujeita a sommas, multiplicações e divisões, em numero finito, é uma funcção racional de z.

Se a equação (1) é do primeiro grão relativamente a u e a_1 é constante, diz-se que u é funcção *inteira* de z. Toda a funcção racional que não contém z em denominador é pois uma funcção inteira de z.

N'este logar occupar-nos-hemos sómente das funcções racionaes, inteiras e fraccionarias, para recordarmos algumas das suas propriedades mais importantes.

38. — Consideremos primeiramente a *funcção inteira*, isto é, a funcção

$$u = f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n,$$

onde n é um numero inteiro positivo, e A_0, A_1, etc. são constantes reaes ou imaginarias.

I — Mudando z em $z + h$, temos

$$f(z+h) = A_0 (z+h)^n + A_1 (z+h)^{n-1} + \ldots$$
$$+ A_k (z+h)^{n-k} + \ldots + A_{n-1} (z+h) + A_n,$$

ou, desenvolvendo as potencias inteiras do binomio $z + h$ e ordenando o resultado segundo as potencias de h,

$$f(z+h) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n$$
$$+ h\,[nA_0 z^{n-1} + (n-1) A_1 z^{n-2} + \ldots + A_{n-1}]$$
$$+ \frac{h^2}{2}[n(n-1) A_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 z^{n-3} + \ldots]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{h^k}{1.2\ldots k}[(n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \ldots]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A_0 h^n,$$

pondo

$$(n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1), \text{ etc.}$$

Representando os coefficientes de h, $\frac{1}{2}h^2$, $\frac{1}{2.3}h^3$, etc. por $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc, vem a formula

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \frac{h^2}{2}f''(z) + \ldots$$
$$+ \frac{h^k}{1.2\ldots k}f^{(k)}(z) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(z),$$

que tem o nome de *formula de Taylor*.

As funcções $f'(z)$, $f''(z)$, etc. são respectivamente do grão $n-1$, $n-2$, etc., e a sua lei de formação é dada pela formula seguinte:

$$f^k(z) = (n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \ldots$$

A estas funcções dá-se respectivamente os nomes de *derivada de primeira ordem*, de *derivada de segunda ordem*, etc. da funcção $f(z)$.

Da comparação das expressões de $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$, etc., ou antes da comparação da formula precedente com a correspondente a $k+1$:

$$f^{k+1}(z) = (n)_{k+1} A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_{k+1} A_1 z^{n-k-2} + \ldots$$
$$= (n)_k (n-k) A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_k (n-k-1) A_1 z^{n-k-2} + \ldots$$

conclue-se a seguinte regra para formar as derivadas successivas de $f(z)$:

Para passar de uma funcção para a sua derivada, ou de uma derivada para a seguinte, multiplique-se em cada termo da primeira o expoente de z pelo coefficiente e diminua-se o expoente de uma unidade.

Por exemplo, no caso de

$$f(z) = z^5 - 3z^4 + 4z^2 - 7$$

vem

$$f'(z) = 5z^4 - 12z^3 + 8z$$

$$f''(z) = 20z^3 - 36z^2 + 8$$

etc.

II — A funcção inteira é composta de sommas, productos e potencias de funcções continuas, logo (n.º 33 — 3.º) *é continua qualquer que seja z.*

III — Toda a funcção inteira é um producto de n factores do primeiro grão:

$$f(z) = A_0 (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \ldots (z-l)^\lambda,$$

onde $a, b, \ldots, l$ são as raizes da equação $f(z) = 0$. Este theorema é bem conhecido da theoria das equações, e mais tarde o demonstraremos.

39. — Consideremos agora as *funcções racionaes fraccionarias*, isto é, as funcções da fórma:

$$u = f(z) = \frac{\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p}.$$

I — Suppondo $n > p$, póde effectuar-se a divisão do numerador pelo denominador e reduzir d'este modo u á fórma

$$u = F(z) + \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

onde $F(z)$, $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ são funcções inteiras, e o grão de $\varphi(z)$ é menor de que o grão de $\psi(z)$.

Decompondo $\psi(z)$ em factores, o que dá

$$\psi(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \ldots (z-l)^\lambda,$$

a fracção $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é susceptivel da decomposição seguinte:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha}$$

$$+\frac{B_1}{z-b}+\frac{B_2}{(z-b)^2}+\dots+\frac{B_\beta}{(z-b)^\beta}$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{L_1}{z-l}+\frac{L_2}{(z-l)^2}+\dots+\frac{L_\lambda}{(z-l)^\lambda},$$

onde os numeradores são quantidades constantes.

Demonstra-se esta proposição importante do modo seguinte:

Pondo

$$\psi_1(z)=(z-b)^\beta\dots(z-l)^\lambda$$

e chamando $\varphi_1(z)$ o quociente e R o resto da divisão de $\varphi(z)-A_\alpha\,\psi_1(z)$ por $z-a$, temos

$$\varphi(z)-A_\alpha\,\psi_1(z)=\varphi_1(z)(z-a)+R$$

e, pondo $z=a$,

$$R=\varphi(a)-A_\alpha\,\psi_1(a).$$

Determinando pois A_α de modo que R seja nullo, isto é pondo

$$A_\alpha=\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)},$$

vem

$$\varphi(z)=A_\alpha\,\psi_1(z)+\varphi_1(z)(z-a),$$

d'onde se tira, dividindo por $\psi(z)$,

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha}+\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\,\psi_1(z)}.$$

Do mesmo modo obtemos

$$\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\,\psi_1(z)}=\frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}}+\frac{\varphi_2(z)}{(z-a)^{\alpha-2}\,\psi_1(z)}.$$

Continuando acha-se finalmente a igualdade

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_1}{z-a}+\frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}.$$

Depois applica-se a $\frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}$ o mesmo processo que se applicou a $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, e continua-se do mesmo modo até chegar á decomposição enunciada.

Pelo processo anterior determina-se as constantes A_1, A_2, etc., B_1, B_2, etc.; mas attendendo á importancia da questão, vamos expôr um processo mais simples para esta determinação.

Pondo na igualdade precedente $z=a+h$, vem

$$\frac{\varphi(a+h)}{h^\alpha\psi_1(a+h)}=\frac{A_\alpha}{h^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_1}{h}+\frac{\varphi_\alpha(a+h)}{\psi_1(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)}=A_\alpha+A_{\alpha-1}h+\ldots+A_1h^{\alpha-1}+\frac{h^\alpha\varphi_\alpha(a+h)}{\psi_1(a+h)}.$$

Este resultado mostra que, para achar A_α, $A_{\alpha-1}$, ..., A_1, basta dividir $\varphi(a+h)$ por $\psi_1(a+h)$, tendo o cuidado de ordenar primeiro estes polynomios segundo as potencias crescentes de h. Os coefficientes de h^0, h, ..., $h^{\alpha-1}$ no quociente são as constantes pedidas.

Devemos observar que na formação do numerador e do denominador de $\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)}$ é escusado escrever os termos que contêem potencias de h superiores a $\alpha-1$, pois que estes termos não influem no quociente.

Do mesmo modo se determina as outras constantes B_1, B_2, ... dividindo $\varphi(b+h)$ por $\frac{\psi(b+h)}{h^\beta}$, etc.

Exemplo. — Decomponhamos por este processo a fracção:

$$\frac{z^2-3z+5}{(z-1)^4(z-2)z}.$$

Pondo n'esta fracção $z = a + h = 1 + h$, vem

$$\frac{\varphi(1+h)}{\psi_1(1+h)} = \frac{3-h+h^2}{-1+h^2} = -3+h-4h^2+h^3+\frac{4h^4-h^5}{h^2-1};$$

logo teremos

$$A_4 = -3,\ A_3 = 1,\ A_2 = -4,\ A_1 = 1.$$

Do mesmo modo, pondo $z = 2 + h$, vem

$$\frac{\varphi(2+h)}{\psi_1(2+h)} = \frac{(2+h)^2 - 3(2+h)+5}{(1+h)^4(2+h)},$$

que, aproveitando só a parte independente de h no numerador e no denominador, visto que $z - 2$ entra na fracção proposta no primeiro grão, dá $\frac{3}{2}$. Logo temos

$$B_1 = \frac{3}{2}.$$

Do mesmo modo se acha $C_1 = -\frac{5}{2}$.

Temos pois

$$\frac{z^2-3z+5}{(z-1)^4(z-2)z} = \frac{1}{z-1} - \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{3}{(z-1)^4}$$
$$\frac{\frac{3}{2}}{z-2} - \frac{\frac{5}{2}}{z}.$$

Ha muitos outros methodos para fazer a decomposição das fracções racionaes, e ha mesmo formulas que dão directamente a expressão analytica das constantes A_1, A_2, etc. Póde vêr-se alguns methodos e formulas na nossa memoria intitulada — *Sur la décomposition des fractions rationelles* [1].

[1] *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomos I e II (Coimbra).

NOTA. — No caso de ser $\alpha = 1$, é

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Com effeito, da igualdade

$$\psi(z) = (z - a)\,\psi_1(z)$$

tira-se, pondo $z = a + h$ e desenvolvendo os dous membros pela formula de Taylor, a identidade

$$\psi(a) + h\,\psi'(a) + \ldots = h\,[\psi_1(a) + h\,\psi'_1(a) + \ldots],$$

que, devendo ter logar qualquer que seja o valor de h, dá $\psi'(a) = \psi_1(a)$; e portanto temos

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

II — Vejamos agora se a funcção considerada é ou não continua.

A primeira parte $F(z)$ é continua por ser uma funcção inteira. A outra parte $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é a somma de fracções da fórma $\frac{A}{(z-a)^k}$, onde k é inteiro; logo é continua (n.° 33 — 2.°) em todos os pontos, excepto nos pontos $z = a, b, c, \ldots, l$.

Concluiremos pois que toda a *funcção racional fraccionaria é continua em qualquer ponto z que não seja raiz do denominador. N'estes pontos a funcção torna-se infinita.*

III

Funcções exponenciaes, logarithmicas, e circulares

40. — As *exponenciaes*, os *logarithmos* e as *potencias de expoente irracional* são funcções transcendentes conhecidas desde os Elementos de Algebra; as *funcções circulares* são conhecidas desde a Trigonometria. São as unicas transcendentes estudadas nos Elementos, e o seu estudo é muito importante por causa da frequencia com que apparecem nas questões a que se applica a Mathematica, e porque serve de preparação para o estudo das outras transcendentes de que se occupa a Analyse mathematica. Vamos porisso aqui recordar succintamente, e completar em certos pontos o que a respeito d'estas funcções se ensina nos Elementos.

41. — *Exponencial de base e expoente real.* — Viu-se nos Elementos de Algebra qual é a significação de a^x quando a representa um numero racional positivo e x um numero racional positivo ou negativo. Viu-se tambem que n'este caso a cada valor de x corresponde um valor positivo para a^x, e tambem um valor negativo quando o denominador de x é par. Considerando só os valores positivos, a^x é uma funcção de x que tem um unico valor para cada valor racional de x.

Vejamos agora como se define a^x quando a e x são irracionaes.

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ os grupos de numeros respectivamente inferiores a a e a x, que entram na definição (n.° 2) d'estes numeros, e α e β dous numeros racionaes maiores do que a e x. Se é $a > 1$, os valores positivos de $a_m^{x_n}$ crescem constantemente quando n e m augmentam, sem todavia poderem exceder o numero α^β; logo tendem para um limite (n.° 11—1.°) que representa, por definição, o symbolo a^x. Se é $a > 1$, os mesmos valores decrescem constantemente quando n e m augmentam, e vê-se do mesmo modo que tendem para um limite, que representa ainda, por definição, o symbolo a^x.

Para justificar esta definição, é necessario demonstrar que a^x tem um unico valor, quaesquer que sejam os numeros racionaes que entram na definição de a e de x. Sejam, com effeito, y_1 e y_2 os valores de a^x correspondentes a dous systemas differentes de numeros racionaes que entrem na definição de a e de x, e seja y_3 um terceiro valor de a^x correspondente ao systema de numeros composto de todos os numeros que entram nos dous systemas anteriores, collocados pela ordem crescente. Por hypothese, a cada valor de δ correspondem dous inteiros n_1 e m_1 taes que a desigualdade

$$\left| y_3 - a_m^{x_n} \right| < \delta$$

é satisfeita pelos numeros a_m e x_n que entram nos dous systemas considerados, correspondentes a $n > n_1$ e $m > m_1$. Por ser esta desigualdade satisfeita separadamente pelos valores de a_m e x_n que entram só no primeiro ou só no segundo dos systemas considerados, os valores correspondentes de $a_m^{x_n}$ tendem tambem para y_3, e temos (n.° 10—1.°) $y_3 = y_1$, $y_3 = y_2$ e portanto $y_1 = y_2$.

A' funcção a^x que vimos de definir chama-se *exponencial*. Vamos vêr algumas propriedades d'esta funcção.

I — *O producto de dous valores da exponencial é dado pela formula*

$$(1) \qquad a^x . a^y = a^{x+y}.$$

Esta proposição foi demonstrada nos Elementos de Algebra, quando a, x e y representam numeros racionaes.

No caso de a, x e y representarem numeros irracionaes, temos, chamando y_1, y_2, etc. os numeros racionaes que entram na definição de y,

$$a^x . a^y = \lim_{m,n=\infty} a_m^{x_n} . \lim_{m,n=\infty} a_m^{y_n} = \lim_{m,n=\infty} a_m^{x_n+y_n} = a^{x+y}.$$

II — *Quando x cresce constantemente desde $-\infty$ até ∞, a^x cresce constantemente desde 0 até ∞ se é $a > 1$, e decresce constantemente desde ∞ até 0 se é $a < 1$.*

Seja primeiramente $a > 1$.

Sabe-se desde a Arithmetica que as potencias de expoente inteiro e as raizes dos numeros maiores do que a unidade são tambem maiores do que a unidade; logo, se h representa um numero racional positivo, é $a^h > 1$. Se h representa um numero irracional positivo e h_1, h_2, etc. representam os numeros, menores do que h, que entram na definição de h, temos ainda $a^h > 1$, por ser $a^h > a_m^{h_n} > 1$.

Em virtude d'esta desigualdade, a formula (1) dá $a^{x+h} > x^x$, por onde se vê que a exponencial cresce quando o expoente cresce, como se sabia já, no caso dos numeros racionaes, pelos Elementos d'Algebra.

Para demonstrar que a^x tende para ∞ quando x tende para ∞, basta notar que, chamando m o maior inteiro contido em x, temos

$$a^x > a^m,\ a^m = (1 + a - 1)^m = 1 + m(a - 1) + \ldots,$$

por onde se vê primeiramente que a^m tende para ∞, quando m tende para ∞, e depois que a^x tende para ∞ quando x tende para ∞.

Para demonstrar que a^x tende para 0 quando x tende para $-\infty$, basta notar que, quando x é negativo, o denominador de $\frac{1}{a^{-x}} = a^x$ tende para ∞.

Para considerar o caso de ser $a < 1$, basta pôr $a = \frac{1}{b}$ e notar que, por ser $b > 1$, o denominador de $\frac{1}{b^x} = a^x$ cresce desde 0 até ∞, quando x cresce desde $-\infty$ até ∞.

III—*Quando x tende para zero, a^x tende para a unidade.*

Seja primeiramente $a > 1$.

Se x é positivo, temos, pondo $x = \frac{1}{t}$ e chamando m o maior inteiro contido em t,

$$a^x - 1 = a^{\frac{1}{t}} - 1 \overline{\gtrless} a^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Mas da desigualdade

$$\left(1 + \frac{a-1}{m}\right)^m = 1 + a - 1 + \binom{m}{2}\left(\frac{a-1}{m}\right)^2 + \ldots > a$$

tira-se

$$a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a-1}{m}.$$

Logo $a^x - 1$ tende para zero quando x tende para zero, visto ser $a^x > 1$ e $\frac{a-1}{m}$ tender para zero quando m tende para o infinito.

Quando x é negativo, ponha-se $x = -y$, o que dá a igualdade

$$a^x - 1 = -\frac{a^y - 1}{a^y}$$

da qual se tira ainda o principio enunciado, visto que, quando x tende para 0, a^y tende para 1.

Para demonstrar o theorema no caso de ser $a > 1$, basta pôr $a = \frac{1}{b}$ e notar que, por ser $b > 1$, $a = \frac{1}{b^x}$ tende para 1 quando x tende para 0.

IV—*A funcção a^x é continua qualquer que seja x.*

E' o que resulta da igualdade

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

a qual, attendendo a que a^h tende para 1 quando h tende para 0, mostra que a^{x+h} tende para a^x.

42.—Nota **I**—Baseados nas considerações que precedem podemos completar a doutrina relativa ás raizes das quantidades irracionaes (3—5.°). Seja u um numero irracional dado e procuremos a raiz $\sqrt[m]{u}$, que representaremos por v. Ao problema satisfaz $v = u^{\frac{1}{m}}$ pois que temos, em virtude da formula (1)

$$v^m = \left(u^{\frac{1}{m}}\right)^m = u^{\frac{1}{m}} . u^{\frac{1}{m}} \ldots = u.$$

Podemos accrescentar que não existe outro numero real positivo que satisfaça á questão. Com effeito, se á questão satisfizessem dois numeros v e v' e fosse $v' > v$, teriamos, pondo $v' = v + h$,

$$v'^m = (v + h)^m = v^m + mhv^{m-1} + \ldots$$

ou o resultado absurdo

$$u = u + mhv^{m-1} + \ldots$$

43. — Nota **II** — Viu-se no n.º 27 que a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende para um limite determinado, que se representou pela lettra e, quando n tende para o infinito passando por uma série de numeros inteiros positivos. Podemos agora mostrar que esta expressão tende ainda para o mesmo numero e, quando n tende para o infinito passando por uma série qualquer de numeros racionaes ou irracionaes, positivos ou negativos.

Seja n positivo e sejam m e $m + 1$ dois numeros inteiros entre os quaes n está comprehendido. Teremos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1},$$

e depois

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

ou

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

O primeiro e o ultimo membro d'esta desigualdade tendem para e, quando m tende para o infinito. Logo a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende tambem para e.

Se n é negativo e igual a $-m$, temos ainda

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m=} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m=\infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^m$$

$$= \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e.$$

44. — *Funcção* e^{x+iy}. — Seja e o numero definido nos n.os 27 e 43. A definição de e^z no caso de ser $z = x + iy$ deve ser tal que se recaia na exponencial de expoente real quando é $y = 0$, e que tenha logar o principio fundamental (1). A estas condições satisfaz e^{x+iy} quando se define pela igualdade, devida a Euler:

$$(2) \qquad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Com effeito temos, pondo $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$,

$$e^z \cdot e^{z'} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y') \cdot e^{x'} (\cos y' + i \operatorname{sen} y')$$

$$= e^{x+x'} [\cos (y + y') + i \operatorname{sen} (y + y')] = e^{z+z'}.$$

Adiante definiremos a^z no caso de a representar um numero positivo differente de e.

I — Da equação de definição decorre logo uma propriedade importante da exponencial de expoente imaginario, a saber: a sua *periodicidade*. Com effeito, por ser

$$e^{z+2ki\pi} = e^x [\cos (y + 2k\pi) + i \operatorname{sen} (y + 2k\pi)]$$

$$= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z,$$

quando k é inteiro, conclue-se que a exponencial toma o mesmo valor cada vez que z augmenta de $2i\pi$.

Do mesmo modo se vê que a exponencial toma o mesmo valor com signal contrario cada vez que z augmenta de $i\pi$.

II — Do que precede resulta tambem que todo o imaginario se póde exprimir debaixo da fórma de exponencial. Com effeito, temos

$$x + iy = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \rho e^{i\theta}.$$

Temos assim tres fórmas que se póde dar ao imaginario, cada uma das quaes póde ser preferivel em sua questão.

III — Por ser

$$e^{h+ik} = e^h (\cos k + i \operatorname{sen} k)$$

e por e^h, cos k, sen k tenderem respectivamente para 1, 1, 0 quando h e k tendem para 0, como se viu no n.° 41—III a respeito de e^h, e na Trigonometria a respeito de sen k e cos k, vê-se que é

$$\lim_{h,\, k = 0} e^{h + ik} = 1.$$

Temos porém

$$e^{x + h + i(y + k)} = e^{x + iy} . e^{h + ik}.$$

Logo

$$\lim_{h,\, k = 0} e^{x + h + i(y + k)} = e^{x + iy}.$$

A funcção exponencial e^z é pois continua, qualquer que seja z.

45. — *Logarithmos reaes.* Consideremos agora a funcção inversa da exponencial e^x, isto é a funcção y ligada com x pela equação

$$x = e^y,$$

e supponhamos que x é uma variavel real positiva e que y é uma variavel real, positiva ou negativa.

A y chama-se, como se sabe, *logarithmo neperiano de x* (n.° 27), e será representado pelo signal log x.

I—*A variavel y é uma funcção definida de x que, quando x varia desde 0 até ∞, varia desde $-\infty$ até ∞.*

Com effeito, por ser e^y uma funcção continua de y, se a x dermos um valor positivo a, a y deve corresponder (n.° 34—2.°) um valor b, e só um, visto que a valores desiguaes de y correspondem valores desiguaes de x. Além d'isso, a $x = 0$ corresponde (n.° 41—II) $y = -\infty$, a $x = \infty$ corresponde $y = \infty$, e a $e^y > e^{y'}$ corresponde $y > y'$. De tudo isto resulta o theorema enunciado.

II—*Se x e x' representarem dous numeros positivos, temos*

$$\log (xx') = \log x + \log x'.$$

Esta proposição fundamental é bem conhecida desde os Elementos d'Algebra.

III — Se y é um numero racional e a um numero real positivo, temos, como se sabe,

$$\log a^y = y \log a.$$

Se y é um numero irracional e $y_1, y_2, \ldots, y_t$, etc. são os numeros racionaes, inferiores a y, que entram na sua definição, temos

$$\log a^{y_t} = y_t \log a,$$

e portanto

$$a^{y_t} = e^{y_t \log a},$$

e, no limite,

$$a^y = e^{y \log a}.$$

Logo

$$\log a^y = y \log a.$$

IV — *A funcção $\log x$ é continua quando a variavel x é positiva e differente de 0. No ponto 0 a funcção $\log x$ é infinita.*

Esta proposição resulta da igualdade

$$\log (x + h) - \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$$

cujo ultimo membro tende (n.º 27 e 43) para 0 quando h tende para 0.

V — Temos, pondo $x = a^y$ e representando por $\log_a x$ o logarithmo de x na base a,

$$\log_a x = y, \ \log x = y \log a,$$

e portanto

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Passa-se pois do logarithmo neperiano de x para o logarithmo de x na base a dividindo o logarithmo neperiano de x pelo logarithmo neperiano de a.

46. — Consideremos agora a funcção u determinada pela equação

$$z = e^u$$

onde z e u representam quantidades reaes ou imaginarias.

Suppondo

$$z = x + iy = \rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega),\ u = \alpha + i\beta$$

temos a equação

$$\rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}\,(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta),$$

que dá

$$\rho\cos\omega = e^{\alpha}\cos\beta,\ \rho\operatorname{sen}\omega = e^{\alpha}\operatorname{sen}\beta,$$

d'onde se tira, por serem α e β reaes,

$$e^{2\alpha} = \rho^2,\ \cos\omega = \cos\beta,\ \operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}\beta,$$

ou

$$\alpha = \log\rho,\ \beta = \omega + 2k\pi,$$

onde é $\omega < 2\pi$, e k igual a zero ou a um numero inteiro positivo ou negativo qualquer.

Temos pois

$$(a)\qquad u = \log((z)) = \log\rho + i\,(\omega + 2k\pi),$$

empregando, como Cauchy, o signal $\log((N))$ para designar todos os logarithmos de N e o signal $\log N$ para designar o logarithmo real.

O valor de ρ que entra n'esta igualdade é dado pela formula

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2},$$

e o valor de ω é dado por qualquer das formulas

$$\omega = \text{arc sen}\,\frac{y}{\rho}\,,\ \omega = \text{arc cos}\,\frac{x}{\rho}\,,\ \omega = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}\,,$$

devendo porém observar-se que qualquer d'estas formulas dá dous valores para ω, e que porisso se deve determinar primeiramente pelo signal de x e y qual o quadrante em que está comprehendido o angulo ω.

I — Se z fôr um numero real positivo, é $\omega = 0$, e vê-se pela formula precedente que o logarithmo de z tem um valor real correspondente a $k = 0$, e um numero infinito d'elles imaginarios correspondentes aos outros valores de k. Em todos os outros casos o logarithmo de z tem um numero infinito de valores imaginarios, e não tem valor real.

Cada uma das expressões que se obtém para u dando a k um valor determinado é um *ramo* da funcção $log\,((z))$. Cada ramo é uma funcção definida de z, excepto no ponto $z = 0$ onde se torna infinita. Quando z é um numero real positivo, a funcção tem um ramo real e um numero infinito de ramos imaginarios; nos outros casos só tem ramos imaginarios.

II — Não ha valor algum de z para o qual dous ramos de $log\,((z))$ sejam iguaes, pois que viria

$$\log \rho + i\,(\omega + 2k\pi) = \log \rho + i\,(\omega + 2k'\pi),$$

ou $k = k'$.

III — A igualdade fundamental

$$\text{lag}\,((z)) + \log\,((z')) = \log\,((zz'))$$

tem logar para todos os valores do logarithmo. Os logarithmos que entram nos dous membros d'esta igualdade podem todavia corresponder a ramos differentes da funcção.

IV — *Cada um dos ramos da funcçao log ((z)) é uma funcçao continua de z.*

Com effeito, temos, para cada ramo,

$$\log(z + h + ik) - \log z = \frac{1}{2}\log\frac{(x+h)^2 + (y+k)^2}{x^2 + y^2} + i\left[\text{arc tang}\,\frac{y+k}{x+h} - \text{arc tang}\,\frac{y}{x}\right].$$

Quando h e k tendem para zero, temos

$$\lim_{h,\,k=0} \log \frac{(x+h)^2+(y+k)^2}{x^2+y^2} = 0,$$

e, dando a h e k valores tão pequenos que $x+h$ tenha o signal de x e que $y+k$ tenha o signal de y,

$$\lim_{h,\,k=0} \left[\operatorname{arc\,tang} \frac{y+k}{x+h} - \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right]$$

$$= \lim_{h,\,k=0} \operatorname{arc\,tang} \frac{kx-hy}{x(x+h)+y(y+k)} = 0,$$

visto que os dous arcos que entram no primeiro membro d'esta formula estão comprehendidos no mesmo quadrante.

Temos pois

$$\lim_{h,\,k=0} \log(z+h+ik) = \log z,$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

47. — *Funcção z^a*. E' conhecido desde o n.° 8 a significação de z^a quando a representa um numero racional qualquer, e sabe-se que é

$$z^a = \rho^a [\cos a(\theta+2k\pi) + i \operatorname{sen} a(\theta+2k\pi)],$$

ρ e θ representando o módulo e o argumento de z. No caso de a ser irracional toma-se esta igualdade para definição de z^a. A funcção z^a gosa das propriedades seguintes:

I — Se a é racional e igual a $\frac{m}{n}$, a funcção z^a tem n ramos (n.° 8—IV), que correspondem a $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Se a é irracional, a funcção tem um numero infinito de ramos. Se z é real e igual ao numero positivo x, é $\theta = 0$ e z^a tem um unico ramo real positivo correspondente a $k=0$, e, no caso de a ser uma fracção de denominador par, tem ainda um ramo real negativo correspondente a $k = \frac{n}{2}$.

II — Por ser (n.° 44)

$$e^{a \log z} = e^{a [\log \rho + (\theta + 2k\pi) i]}$$

$$= \rho^a [\cos a (\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} a (\theta + 2k\pi)],$$

temos a relação

$$z^a = e^{a \log z},$$

que póde servir depois de definição a z^a quando a é imaginario.

III — Seja z positivo e igual a x, e consideremos o ramo real positivo de x^a. Da relação

$$x^a = e^{a \log x}$$

deduzem-se as propriedades seguintes:

1.° — *Quando x cresce desde 0 até ∞, x^m cresce desde 0 até ∞.*

Com effeito, quando x cresce desde 0 até ∞, $\log x$ cresce desde $-\infty$ até ∞, e portanto $e^{a \log x}$ cresce desde 0 até ∞.

2.° — *O producto de dous valores da funcção é dado pela formula*

$$x^a . x'^a = (xx')^a.$$

Temos, com effeito,

$$x^a \, x'^a = e^{a \log x} . e^{a \log x'} = e^{a (\log x + \log x')}$$

$$= e^{a \log (xx')} = (xx')^a.$$

3.° — *A funcção x^a é continua em qualquer dos pontos considerados, exceptuando o ponto $x = 0$ quando a é negativo. N'este ponto a funcção torna-se infinita.*

Viu-se, com effeito, no n.° 45 que, quando é $x > 0$, a funcção $\log x$ tem um ramo real que é uma funcção continua de x; e portanto tambem n'este caso é continua a funcção de funcção $e^{a \log x}$.

No ponto $x = 0$ a funcção x^a é infinita quando a é negativo; quando porém a é positivo $\frac{1}{e^{-a \log x}}$ tende para 0 quando x tende para 0, e a funcção x^a é ainda continua.

48.—*Funcções circulares.*—As funcções circulares foram estudadas na Trigonometria, onde apparecem como auxiliares para a resolução dos triangulos.

I—As suas propriedades fundamentaes são, no caso dos arcos reaes, as seguintes:

1.ª—Sendo a e b dous arcos reaes, temos

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \cos a\,\text{sen}\,b$$

$$\cos\,(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b.$$

E' o *theorema de addicção.*

2.ª—As funcções circulares são *periodicas*, isto é, tomam o mesmo valor cada vez que o arco augmenta de 2π, e o mesmo valor com signal contrario cada vez que o arco augmenta de π.

II—As formulas do n.º 44:

$$e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\,\text{sen}\,x$$

dão as funcções circulares expressas por meio de funcções exponenciaes:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \text{sen}\,x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

III—Estas relações permittem definir os *senos* e *cosenos* de arcos imaginarios. Representa-se, com effeito, por sen $(x+iy)$ e cos $(x+iy)$ as funcções que resultam de substituir nas formulas precedentes x por $x+iy$, a saber:

$$\cos z = \cos\,(x+iy) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y+ix}+e^{y-ix}}{2}$$

$$\text{sen}\,z = \text{sen}\,(x+iy) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i}.$$

A primeira d'estas formulas dá

$$\cos(z+z') = \frac{e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}}{2} = \frac{e^{iz}e^{iz'} + e^{-iz}\,e^{-iz'}}{2}$$

$$= \frac{(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iz'}+e^{-iz'}) + (e^{iz}-e^{-iz})(e^{iz'}-e^{-iz'})}{4}$$

ou

$$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'.$$

Do mesmo modo a segunda dá

$$\operatorname{sen}(z+z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \cos z \operatorname{sen} z'.$$

Vê-se pois que os *senos* e os *cosenos* de arcos imaginarios gozam da propriedade expressa pelo *theorema de addicção.*

IV — Pondo nas formulas precedentes $x = 0$, vem

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2},\ \operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}.$$

Estas funcções $\operatorname{sen}(iy)$ e $\cos(iy)$ têem o nome de *seno hyperbolico* e de *coseno hyperbolico* de y. Temos aqui a origem da theoria das *funcções hyperbolicas*, devida a Riccati, que é objecto de tratados especiaes.

V—Por ser a exponencial uma funcção continua, qualquer que seja z, e por serem $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ sommas d'exponenciaes, podemos enunciar o theorema seguinte:

As funcções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são continuas, qualquer que seja z.

VI — A tangente de z, quer z seja real, quer seja imaginario, é definida pela relação

$$\operatorname{tang} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$$

Esta funcção é continua (n.° 36) qualquer que seja z, excepto nos pontos que satisfazem á equação

$$\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = 0,$$

ou

$$e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) = 0,$$

ou

$$\cos x\,(e^{-y} + e^{y}) + i \operatorname{sen} x\,(e^{-y} - e^{y}) = 0.$$

Esta equação, por ser a expressão $e^{-y} + e^{y}$ sempre positiva, dá $\cos x = 0$, $e^{-y} = e^{y}$, e portanto

$$y = 0,\ x = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \ldots$$

Logo *a tangente é uma funcção continua, qualquer que seja* z, *excepto nos pontos* $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)\left(0, \frac{3}{2}\pi\right), \ldots$

49. — *Funcções circulares inversas.* — Suppondo que na relação

$$\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} = \cos u = z$$

se conhece $\cos u$, isto é z, podemos achar u isto é $\operatorname{arc}\cos z$.

A equação precedente dá, com effeito,

$$e^{2iu} - 2z\,e^{iu} + 1 = 0;$$

logo será

$$e^{iu} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

d'onde se deduz

$$u = \frac{1}{i}\log\left(\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)\right),$$

onde se deve substituir o logarithmo neperiano pela sua expressão achada no n.º 46.

Esta formula dá todos os ramos do $\operatorname{arc}\cos z$.

Do mesmo se estudariam as outras funcções circulares.

CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

NOÇÕES PRELEMINARES

I

Noção de infinitamente pequeno e de derivada

50.—Chama-se *quantidade infinitamente pequena toda a quantidade variavel que tende para o limite zero.*

Seja α uma quantidade infinitamente pequena e β uma quantidade ligada com α de tal modo que, quando α tende para o limite zero, β tenda tambem para o limite zero. Diz-se que β *é infinitamente pequena de ordem n relativamente a* α *se* $\frac{\beta}{\alpha^n}$ *tende para um limite determinado* (¹), *differente de zero, quando* α *tende para zero.*

Chamando A este limite, podemos escrever n'este caso

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = A + \varepsilon,$$

(¹) Diz-se que uma quantidade u, dependente de outra x, tende para um limite *determinado*, quando x tende para a, se o limite para que tende u é sempre o mesmo qualquer que seja o modo como x tende para a.

onde a quantidade ε é infinitamente pequena ao mesmo tempo que α.

D'esta definição decorre immediatamente:

1.° — *Que, se duas quantidades infinitamente pequenas* β *e* β' *forem respectivamente da ordem* n *e* m *relativamente a* α, *o seu producto será da ordem* $n + m$ *e o seu quociente da ordem* $n - m$.

Com effeito, das equações de definição

$$\beta = \alpha^n (A + \varepsilon),\ \beta' = \alpha^m (B + \varepsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta\beta'}{\alpha^{n+m}} = AB.$$

2.° — *Que, se uma quantidade infinitamente pequena* β' *fôr da ordem* m *relativamente a* β, *e esta da ordem* n *relativamente a* α, *a primeira será da ordem* $n \times m$ *relativamente a* α.

Com effeito, das equações de definição

$$\beta' = \beta^m (A + \varepsilon),\ \beta = \alpha^n\ (B + \varepsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha^{nm}} = AB^m.$$

Exemplo 1.° — Quando um arco é infinitamente pequeno, o seu seno é um infinitamente pequeno da mesma ordem. Com effeito, sabe-se pela Trigonometria que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tende para a unidade quando x tende para o limite zero.

Exemplo 2.° — No triangulo rectangulo ABC a differença entre a hypothenusa BC e o catheto AC é infinitamente pequena de segunda ordem relativamente ao catheto.

Com effeito, chamando α o angulo BCA, temos

$$CB - AC = CB\,(1 - \cos\alpha) = 2CB \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\,\alpha,$$

e portanto

$$\lim \frac{CB - AC}{\alpha^2} = \lim \frac{2CB \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2} BC,$$

visto que é

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha} = 1.$$

51. — Na *Introducção* definiu-se a *continuidade* das funcções. A respeito da noção de continuidade observaremos aqui que, empregando a linguagem infinitesimal, se póde dizer que *$f(x)$ é uma funcção continua de x no ponto a, quando a differença $f(a+h) - f(a)$ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que h.*

52. — Seja $f(x)$ uma funcção de x definida na visinhança de cada ponto. Se, quando h tende para zero, a fracção

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

tende para um limite *determinado* $f'(x)$ (isto é, para um limite que é sempre o mesmo qualquer que seja a lei dos valores successivos pelos quaes passa h quando tende para zero), a este limite dá-se o nome de *derivada* da funcção $f(x)$ no ponto x.

Se em alguns pontos a fracção (1) tende para o infinito, diz-se que a derivada é *infinita* n'estes pontos e *finita* nos outros.

Se em alguns pontos a mesma funcção não tende para um limite determinado, a funcção n'estes pontos não tem derivada [1]. No que segue, quando dissermos que uma funcção tem derivada, sem especificar os pontos em que isto tem logar, deve-se entender que a funcção tem derivada em todos os pontos em que é dada.

---

(1) Quando n'um ponto a fracção (1) tende para mais do que um limite, diz-se algumas vezes que n'este ponto a funcção tem derivada, mas que não é determinada.

E' facil de vêr que, no caso de $f(x)$ ser uma funcção algebrica inteira, a definição de derivada que vimos de dar concorda com a definição dada na *Introducção* (n.º 38 — I).

Com effeito, a formula de Taylor dá

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x),$$

e portanto

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Da definição de derivada deduz-se immediatamente o seguinte principio:

Toda a funcção, que tem derivada, é continua nos pontos em que a derivada se não torna infinita.

Com effeito, da igualdade

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

deduz-se

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

representando por ε uma quantidade infinitamente pequena com h.

Temos pois a igualdade

$$f(x+h)-f(x)=h(f'(x)+\varepsilon),$$

a qual mostra que a differença $f(x+h)-f(x)$ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que h, quando a funcção $f'(x)$ é finita.

Por muito tempo se julgou que toda a funcção, continua em todos os pontos d'um intervallo dado, tinha nos pontos d'este intervallo, exceptuando um numero limitado d'elles, uma derivada finita. Hoje sabe-se que este principio é falso e conhecem-se muitas funcções continuas que não admittem derivada. Adiante veremos um exemplo notavel d'estas funcções singulares. As funcções consideradas na *Introducção* têem todas derivada. Veremos isto adiante, assim como veremos apparecer um numero infinito d'outras funcções nas mesmas circumstancias.

53. — Considerámos no paragrapho anterior a derivada como limite da razão $\frac{k}{h}$ (pondo $f(x+h)-f(x)=k$) de dous infinitamente pequenos. D'este modo sobre k e h não se podem executar as operações da Algebra. Introduzindo a noção de *differencial* póde exprimir-se a derivada pela razão de dous infinitamente pequenos, como vamos vêr.

Temos

$$f(x+h)-f(x)=h\,(f'(x)+\varepsilon)\,,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h. A differença $f(x+h)-f(x)$ compõe-se pois de duas parcellas infinitamente pequenas, a primeira das quaes é proporcional a h, e, por tender menos rapidamente para zero do que a segunda, é a parte principal da differença quando h é sufficientemente pequeno e $f'(x)$ é differente de zero. A esta parcella dá-se o nome de *differencial da funcção* $f(x)$ e representa-se por $df(x)$ ou por dy (pondo $y=f(x)$). Para conformidade de notação representa-se o infinitamente pequeno arbitrario h pela notação dx. Temos pois

$$dy=f'(x)\,dx,$$

onde *dx é o augmento arbitrario da variavel independente x, dy é a parte proporcional a dx do augmento correspondente da funcção $f(x)$. A derivada $f'(x)$ é o quociente de dy por dx.*

Das duas igualdades precedentes tira-se a relação

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{dy}=1$$

entre o augmento da funcção $f(x)$ e a sua differencial, de que teremos de fazer uso.

54. — Em todo este livro empregaremos para representar as derivadas umas vezes a notação y' ou $f'(x)$ (notação de Lagrange), outras vezes a notação $\frac{dy}{dx}$ (notação de Leibnitz).

Esta ultima notação é principalmente util quando y é funcção de muitas variaveis independentes. Assim, se fôr $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, a derivada de y relativamente a x_1, quando as outras variaveis são consideradas como constantes, que se chama *derivada parcial* de y relativamente a x_1, será representada por $\frac{\partial y}{\partial x_1}$; do mesmo modo a *derivada parcial* de y relativamente a x_2 será representada por $\frac{\partial y}{\partial x_2}$; etc. As differenciaes ∂y que entram n'estas derivadas parciaes são differentes umas das outras e é o denominador que indica o que cada uma representa. Portanto sobre as differenciaes que entram nas derivadas parciaes, não se podem executar operações que as separem dos denominadores. E' para não esquecer esta circumstancia que em logar da caracteristica d se emprega a caracteristica ∂.

A funcção $f'(x)$ póde ter tambem uma derivada que se representa por $f''(x)$, etc. Estas derivadas $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. têem respectivamente os nomes de derivadas de *segunda ordem*, de *terceira ordem*, etc. Podem tambem ser representadas pelas notações $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. por motivos que adiante veremos.

No caso de muitas variaveis independentes representa-se por

$$\frac{\partial^n f(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{\partial x_1^a \, \partial x_2^b \, \partial x_3^c \ldots}$$

a derivada de ordem n que se obtém derivando primeiro a vezes a funcção relativamente a x_1, considerando as outras variaveis como constantes; depois derivando o resultado obtido b vezes relativamente a x_2, considerando as outras variaveis como constantes; e assim successivamente.

55. — Foi por considerações geometricas que se chegou á noção importante de derivada. Vamos pois entrar por um pouco no campo da Geometria, para se poder vêr a origem d'esta noção e apreciar assim a sua importancia.

II

Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do Calculo infinitesimal

56. — Dá-se, como se sabe, o nome de *methodo dos limites* ao methodo de determinar quantidades considerando-as como limites d'outras quantidades conhecidas. Viu-se já na Geometria Elementar a importancia consideravel d'este methodo para se resolverem certas questões relativas ao circulo, ao cylindro, ao cóne e á esphera. Aqui vamos fazer ainda duas applicações importantes para o nosso fim.

I — Consideremos uma recta MM' que corte uma curva em dous pontos, e supponhamos que, quando o segundo ponto M' tende para M [1], a recta tende para um limite determinado, isto é, para um limite MT' que é sempre o mesmo qualquer que seja a série de pontos pelos quaes passa M' quando se approxima de M. A esta recta MT' chama-se *tangente* á curva no ponto M.

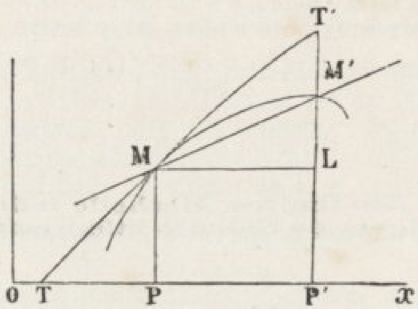
Se forem $y = f(x)$ a equação da curva, (x, y) e $(x + h, y + k)$ as coordenadas dos pontos M e M', θ e α as inclinações $T'ML$ e $M'ML$ da tangente e da secante sobre o eixo das abscissas, a resolução do triangulo rectangulo LMM' dará a igualdade

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{M'L}{ML} = \frac{k}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

por meio da qual se determina a inclinação da secante sobre o eixo das abscissas, substituindo $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pelo seu valor tirado da equação da curva.

---

(1) Diz-se que uma recta fixa é o limite para que tende uma recta variavel se o angulo das duas rectas tende para zero; e que um ponto variavel tende para um ponto fixo se a distancia dos dous pontos tende para zero.



Mas, quando o ponto M' tende para M, h tende para zero, logo temos a igualdade

$$\operatorname{tang} \theta = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

por meio do qual se determina a direcção θ da tangente substituindo $\lim \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pelo seu valor tirado da equação da curva. Este *methodo de tangentes* é devido a Fermat.

No caso, por exemplo, de ser $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ou $x^2 + y^2 = R^2$, teremos, mudando x em $x + h$ e y em $y + k$,

$$x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 = R^2,$$

ou

$$2hx + h^2 + 2ky + k^2 = 0,$$

que dá

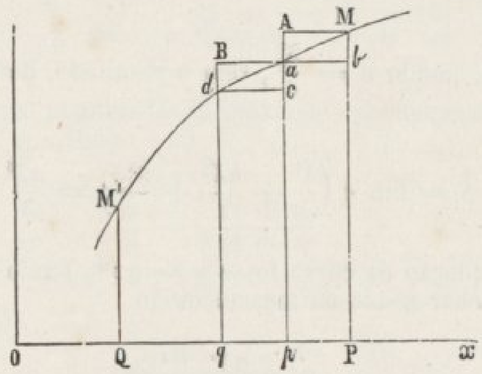
$$\frac{k}{h} = -\frac{2x + h}{2y + k},$$

e portanto

$$\operatorname{tang} \theta = \lim \frac{k}{h} = -\frac{x}{y}.$$

Temos assim o coefficiente angular da tangente á circumferencia no ponto (x, y).

II — O segmento plano $MM'QP$, comprehendido entre uma curva MM' cuja equação é $y = f(x)$, o eixo das abscissas e duas ordenadas MP e $M'Q$, correspondentes ás abscissas X e x_0, póde ser decomposto n'outros por meio de rectas parallelas ao eixo das ordenadas que passem por $n - 1$ pontos equidistantes, comprehendidos entre P e Q, cujas abscissas representaremos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Tirando depois pa-



rallelas ao eixo das abscissas que passem pelos pontos M, a, d, etc. forma-se uma série de rectangulos $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_2, r_1$ ($AMPp$, $aBpq$, etc.) cujas áreas são iguaes a $hf(X)$, $hf(x_{n-1}), \ldots, hf(x_2)$, $hf(x_1)$, representando por h o comprimento de cada uma das n partes em que foi dividido o intervallo PQ. Posto isto, chama-se *área* do segmento plano considerado o limite para que tende a somma

$$hf(x_1) + hf(x_2) + \ldots + hf(X)$$

quando h tende para zero, se este limite existe e tem um valor unico qualquer que seja o modo como h tende para zero (questão de que adiante nos occuparemos).

Por exemplo, se a linha MM' é uma recta $y = ax$ que passa pela origem das coordenadas, e se queremos achar a área comprehendida entre a origem e a ordenada correspondente á abscissa X, teremos $X = nh$, e portanto

$$S = \lim ah^2 [n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1]$$
$$= \lim \frac{n(n+1)ah^2}{2} = \lim \left[\frac{aX^2}{2} + \frac{aXh}{2}\right] = \frac{aX^2}{2}.$$

Do mesmo modo no caso da parabola $y = ax^2$ vem

$$S = \lim ah^3 (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2);$$

mas, em virtude de um theorema da Algebra (¹), temos

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6};$$

e portanto, pondo $n = \frac{X}{h}$, vem o resultado, devido a Archimedes:

$$S = \lim a \left(\frac{X^3}{3} + \frac{hX^2}{2} + \frac{h^2X}{6}\right) = \frac{aX^3}{3}.$$

Se a equação da curva fosse $y = ax^m$, sendo m inteiro e positivo, achar-se-hia do mesmo modo

$$S = \frac{aX^{m+1}}{m+1},$$

resultado devido a Wallis.

57. — O methodo dos limites, quando se determinam as quantidades considerando-as como limites de razões ou limites de sommas de quantidades infinitamente pequenas, toma o nome de methodo infinitesimal. Os dous principios seguintes facilitam a applicação do methodo infinitesimal a muitas questões:

1.° — *Se se quizer achar o limite para que tende a razão $\frac{\alpha'}{\alpha}$ de duas quantidades infinitamente pequenas α' e α, e se as quantidades infinitamente pequenas β' e β estiverem ligadas com α' e α de modo que seja*

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \ \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

(¹) Este theorema será adiante demonstrado.

podemos substituir α' por β' e α por β, e temos:

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta}.$$

Com effeito, temos por hypothese

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \varepsilon', \quad \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon,$$

onde ε' e ε são quantidades infinitamente pequenas ao mesmo tempo que α' e α. Logo será

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'(1+\varepsilon')}{\beta(1+\varepsilon)},$$

e portanto

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta}.$$

2.º—*Se as quantidades $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n)}$ tenderem para zero quando n tende para o infinito e se quizer achar o limite para que tende n'este caso a somma d'estas quantidades, e se as quantidades positivas $\beta, \beta', \ldots, \beta^{(n)}$ estiverem ligadas com $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc. de tal modo que seja*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha}{\beta} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\alpha''}{\beta''} = 1 \text{ etc.},$$

podemos substituir α por β, α' por β', etc., e temos

$$\lim(\alpha + \alpha' + \ldots + \alpha^{(n)}) = \lim(\beta + \beta' + \ldots + \beta^{(n)}).$$

Com effeito, temos

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \varepsilon', \quad \frac{\alpha''}{\beta''} = 1 + \varepsilon'', \text{ etc.},$$

e portanto

$$\alpha + \alpha' + \ldots + \alpha^{(n)} = \beta + \beta' + \ldots + \beta^{(n)}$$
$$+ \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \ldots + \beta^{(n)}\,\varepsilon^{(n)}.$$

Mas suppondo que ε é aquella das quantidades infinitamente pequenas ε, ε', ε'', etc. que tem maior valor absoluto, teremos (n.º 8—I) a desigualdade

$$|\beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \ldots + \beta^{(n)}\varepsilon^{(n)}| \overline{\gtrless} |\varepsilon| (\beta + \beta' + \ldots + \beta^{(n)}),$$

que, quando $\beta + \beta' + \ldots$ tende para um limite determinado, dá

$$\lim (\beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \ldots + \beta^{(n)}\,\varepsilon^{(n)}) = 0.$$

Logo é

$$\lim (\alpha + \alpha' + \ldots) = \lim (\beta + \beta' + \ldots).$$

Só mais tarde se poderá apreciar a importancia d'estes dous principios. O primeiro tem applicação nas questões da natureza da questão I do paragrapho precedente, em que uma quantidade é determinada pelo limite da razão de dous infinitamente pequenos. O segundo tem applicação nas questões da natureza da questão II do mesmo paragrapho, em que uma quantidade é determinada pelo limite de uma somma de infinitamente pequenos. Em virtude d'estes principios podemos substituir os infinitamente pequenos que entrem n'uma questão, por outros que a simplifiquem.

58. — Para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza da questão I do n.º 56 é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite de $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Somos assim levados pela questão importante da determinação das tangentes ás curvas *á resolução do problema de calculo que tem por fim achar as derivadas das funcções.*

Este problema é o objecto do *Calculo Differencial.*

Em segundo logar, para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza da questão II do n.º 56 é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite da somma

$$S = hf(x_1) + hf(x_2) + \ldots + hf(X).$$

Somos assim levados a outro problema da Analyse: *determinar a funcção que é o limite da somma precedente.*

Adiante faremos vêr que, se a funcção $f(x)$ é continua, o limite para que tende S, quando h tende para zero, é uma funcção de X, cuja derivada é igual a $f(X)$.

Somos pois levados assim á *resolução do problema de calculo que tem por fim achar as funcções quando se conhecem as suas respectivas derivadas.* Este problema é o objecto do *Calculo Integral.*

O *Calculo Differencial* e o *Calculo Integral* constituem a *Analyse infinitesimal,* cuja descoberta é devida a Newton e a Leibnitz. A determinação das tangentes ás curvas e a quadratura das áreas planas foram as duas questões que principalmente levaram estes dous celebres geometras a esta grande descoberta.

CAPITULO II

DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM DAS FUNCÇÕES

I

Theoremas geraes

59. — **I** — Seja y uma funcção de x definida pela igualdade

$$y = \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \ldots \pm \varphi_n(x),$$

e procuremos a derivada d'esta funcção relativamente a x, suppondo que $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc. admittem derivadas finitas no ponto x.

Mudando x em $x + h$, e chamando k, l_1, l_2, ..., l_n os augmentos correspondentes de y, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc., teremos

$$k = l_1 \pm l_2 \pm \cdots \pm l_n,$$

d'onde se deduz, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{k}{h} = \lim \frac{l_1}{h} \pm \lim \frac{l_2}{h} \pm \ldots$$

ou

$$y' = \varphi'_1(x) \pm \varphi'_2(x) \pm \cdots \pm \varphi'_n(x).$$

Logo *a derivada de uma somma algebrica de funcções é igual á somma algebrica das derivadas das parcellas.*

II — Procuremos a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \, . \, \varphi_2(x)$$

de duas funcções dadas, que admittam derivadas finitas no ponto x.

Mudando x em $x + h$ e chamando k, l_1, l_2 os augmentos correspondentes de y, φ_1, (x), $\varphi_2(x)$, vem

$$y + k = \varphi_1(x + h) \, . \, \varphi_2(x + h) = [\varphi_1(x) + l_1] \, [\varphi_2(x) + l_2].$$

Teremos pois

$$k = l_1 \, \varphi_2(x) + l_2 \, \varphi_1(x) + l_1 \, . \, l_2,$$

e portanto, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{k}{h} = \varphi_2(x) \lim \frac{l_1}{h} + \varphi_1(x) \lim \frac{l_2}{h},$$

ou

$$y' = \varphi'_1(x) \, \varphi_2(x) + \varphi'_2(x) \, \varphi_1(x).$$

Do mesmo modo se vê que a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \, \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x)$$

é dada pela formula

$$y' = \varphi'_1(x) \, \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) + \varphi_1(x) \, \varphi'_2(x) \ldots \varphi_n(x)$$
$$+ \ldots + \varphi_1(x) \, \varphi_2(x) \ldots \varphi'_n(x);$$

e portanto *a derivada de um producto de funcções é igual á somma dos productos que se obtêem multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.*

III — A derivada do quociente das mesmas funcções:

$$y = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

obtem-se igualando os limites para que tendem os dous membros da identidade

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)}-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right]=\frac{1}{\varphi_2(x)\,\varphi_2(x+h)}\left[\varphi_2(x)\frac{\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)}{h}\right.$$

$$\left.-\,\varphi_1(x)\,\frac{\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)}{h}\right],$$

quando h tende para zero, o que dá

$$y'=\frac{\varphi'_1(x)\,\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\,\varphi'_2(x)}{[\varphi_2(x)]^2}.$$

Logo *a derivada de uma fracção é igual ao quociente da differença entre os productos da derivada do numerador pelo denominador e da derivada do denominador pelo numerador dividida pelo quadrado do denominador.*

IV — Seja y uma *funcção de funcção de* x determinada pelas equações:

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),$$

e procuremos a derivada de y relativamente a x, suppondo que $\varphi(x)$ admitte uma derivada finita no ponto x, e que $f(u)$ admitte uma derivada finita no ponto u correspondente. Chamando l e k os augmentos de u e de y, correspondentes ao augmento h de x, temos

$$k=f(u+l)-f(u)=l\left(\frac{dy}{du}+\varepsilon\right),$$

$$l=\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\left(\frac{du}{dx}+\varepsilon'\right),$$

onde ε e ε' representam quantidades infinitamente pequenas com h; e portanto

$$\frac{k}{h}=\left(\frac{dy}{du}+\varepsilon\right)\left(\frac{du}{dx}+\varepsilon'\right).$$

Logo

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Temos pois o theorema seguinte:

Se y é funcção de u e u é funcção de x, a derivada de y relativamente a x é igual ao producto da derivada de y relativamente a u pela derivada de u relativamente a x.

V—Se resolvermos relativamente a x a equação $y = f(x)$, vem uma equação da fórma $x = \varphi(y)$, e á funcção $\varphi(y)$ chama-se *funcção inversa de* $f(x)$.

Supponhamos que as funcções $f(x)$ e $\varphi(y)$ têem um unico valor para cada valor de x e de y; que a funcção $f(x)$ é continua, e que a funcção $\varphi(y)$ admitte uma derivada finita no ponto y. Chamando k o augmento infinitamente pequeno de y correspondente ao augmento infinitamente pequeno h de x, temos

$$h = \varphi(y+k) - \varphi(y) = k\,[\varphi'(y) + \alpha],$$

onde α representa uma quantidade infinitamente pequena com k, e portanto com h.

Temos pois

$$1 = \frac{k}{h}(\varphi'(y) + \alpha),$$

e portanto

$$f'(x) = \lim \frac{k}{h} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'(f(x))}.$$

Logo *a derivada de uma funcção é igual á unidade dividida pela derivada da sua funcção inversa.*

II

Derivadas das funcções algebricas, logarithmicas, circulares, etc.

60. — Vamos agora procurar as derivadas das funcções explicitas consideradas na Algebra e na Trigonometria.

Todas estas funcções são constituidas por *funcções simples*, chamando funcções simples aquellas em que a variavel entra affectada de um só dos signaes usados para indicar as combinações analyticas. Por meio dos theoremas do n.º 59 pode-se formar a derivada de qualquer funcção quando se conhecem as derivadas das funcções simples, e vamos porisso procurar estas derivadas.

As funcções simples são as seguintes:

$$a \pm x,\ bx,\ x^m,\ e^x,\ \log x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \operatorname{tang} x,\ \cot x,$$

$$\sec x,\ \operatorname{cosec} x,\ \operatorname{arc\,sen} x,\ \operatorname{arc\,cos} x,\ \operatorname{arc\,tang} x,$$

$$\operatorname{arc\,cot} x,\ \operatorname{arc\,sec} x,\ \operatorname{arc\,cosec} x.$$

Nem todas estas funcções são independentes, e bastaria portanto procurar as derivadas das cinco funcções

$$a + x,\ ax,\ x^m,\ e^x,\ \operatorname{sen} x,$$

de que as outras dependem. Em todo o caso serão aqui todas consideradas, para termos regras que permittam escrever immediatamente as suas derivadas, visto a frequencia com que apparecem na Analyse.

1) A derivada da funcção $y = a \pm x$ é

$$y' = \pm 1.$$

2) A derivada de $y = bx$ é

$$y' = b.$$

Nota. — A derivada da funcção de funcção

$$y = a + bu,$$

onde u representa uma funcção de x, é (n.º 59—IV) $y' = bu'$; e vê-se portanto: 1.º *que a derivada do producto de uma constante por uma funcção é igual ao producto da constante pela derivada da funcção*; 2.º *que a derivada de uma constante é nulla.*

3) A funcção $y = e^x$, onde e representa o numero definido no n.º 27, dá

$$y' = \lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim \frac{e^h - 1}{h}.$$

Mas, como e^h tende para o limite 1 quando h tende para zero, podemos pôr

$$e^h = 1 + \frac{1}{n},$$

onde n representa uma quantidade que tende para o infinito quando h tende para zero; o que dá

$$h = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

representando por *log* os logarithmos neperianos.

Virá pois

$$y' = e^x \lim \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{e^x}{\lim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

e por consequencia (n.os 27 e 43)

$$y' = e^x.$$

Nota. — Se fôr $y = e^u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.º 59 — IV)

$$y' = e^u \cdot u',$$

o que dá a regra seguinte:

A derivada da exponencial de base e é igual ao producto da mesma exponencial pela derivada do expoente.

$\log a^x = x \log a$

$\log e^{u \log a} =$

Se fôr $y = a^u$ teremos (n.º 45 — III)

$$y = e^{u \log a}$$

e portanto

$$y' = a^u u' \log a.$$

4) A funcção logarithmica $y = \log x$ dá $x = e^y$, e portanto (n.º 59 — V)

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Nota. — Se fôr $y = \log u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.º 59 — IV)

$$y' = \frac{u'}{u}.$$

Logo *a derivada do logarithmo neperiano de uma funcção é igual á derivada da funcção dividida pela funcção.*

Se fôr a a base dos logarithmos teremos (n.º 45 — V)

$$y = \log_a u = \frac{\log u}{\log a},\ y' = \frac{u'}{u \log a}.$$

5) No caso da funcção

$$y = x^m$$

temos

$$y = e^{m \log x}$$

o que dá, quando x é positivo e m real,

$$y' = e^{m \log x} \frac{m}{x} = \frac{my}{x} = mx^{m-1}.$$

Se x é negativo e m é um numero racional, pondo $x = -z$, temos

$$y = (-1)^m z^m$$

e portanto

$$y' = (-1)^m m z^{m-1} z' = mx^{m-1},$$

como no caso anterior.

NOTA 1.ª — Se fôr $y = u^m$, e $u = \varphi(x)$, vem

$$y' = mu^{m-1} u'.$$

Logo *a derivada da potencia de gráo m de uma funcção forma-se multiplicando o expoente pela potencia de gráo m — 1 da funcção e pela derivada da funcção.*

A regra precedente abrange as raizes das funcções, visto que se podem representar por potencias com expoentes fraccionarios.

NOTA 2.ª — Se fôr $y = u^v$, u e v representando funcções de x, temos $y = e^{v \log u}$ e portanto

$$y' = u^v \left(v' \log u + \frac{u'}{u} v\right).$$

6) A funcção $y = \operatorname{sen} x$ dá

$$y' = \lim \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim \frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \cos x \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

e portanto

$$y' = \cos x.$$

7) Por ser $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, a derivada da funcção $y = \cos x$ será

$$y' = -\operatorname{sen} x.$$

8) A derivada de $y = \operatorname{tang} x$ obtem-se derivando a fracção $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, o que dá

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{secant}^2 x.$$

Do mesmo modo se acha as derivadas de $\cot x$, de $\sec x$ e de $\operatorname{cosec} x$:

9) $y = \cot x,\ y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x,$

10) $y = \sec x,\ y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x \sec x,$

11) $y = \operatorname{cosec} x,\ y' = -\cot x \operatorname{cosec} x.$

12) Passando ás funcções circulares inversas, consideremos primeiramente a funcção

$$y = \operatorname{arc\,sen} x,$$

que é real no intervallo de $x = -1$ a $x = 1$, e tem um numero infinito de ramos.

Applicando o theorema V do n.º 59 ao ramo formado pelos valores de y comprehendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, temos

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}.$$

Do mesmo modo se acha a derivada dos outros ramos da funcção.

Do mesmo modo se acha as derivadas de $\operatorname{arc\,cos} x$, de $\operatorname{arc\,tang} x$, etc.:

13) $y = \operatorname{arc}\cos x,\ y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$

14) $y = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x,\ y' = \frac{1}{1+x^2}$

15) $y = \operatorname{arc}\cot x,\ y' = -\frac{1}{1+x^2}$

16) $y = \operatorname{arc}\sec x,\ y' = \frac{1}{+x\sqrt{x^2-1}}$

17) $y = \operatorname{arc}\operatorname{cosec} x,\ y' = \frac{1}{-x\sqrt{x^2-1}}$,

considerando os ramos de $\operatorname{arc}\cos x$ e $\operatorname{arc}\sec x$ comprehendidos entre 0 e π, e o ramo de $\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x$ comprehendido entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

III

Relações entre as funcções e suas derivadas

61. — Theorema 1.° — *Se a funcção $f(x)$ tiver uma derivada finita e differente de zero no ponto α, a funcção cresce com x, na visinhança do ponto α, se $f'(\alpha)$ é positiva, e decresce se $f'(\alpha)$ é negativa.*

E' o que se deduz da igualdade

$$f(\alpha \pm h) = f(\alpha) \pm h\,[f'(\alpha) + \varepsilon].$$

Com effeito, por ser ε infinitamente pequeno com h, póde sempre dar-se ao numero h_1 um valor tão pequeno que a somma $f'(\alpha) + \varepsilon$ tenha o signal de $f'(\alpha)$ quando $|h| < h_1$. Logo, se $f'(\alpha)$ é positivo, temos

$$f(\alpha - h) < f(\alpha) < f(\alpha + h)$$

quando $| h | < h_1$; e portanto, quando x cresce desde $\alpha - h_1$ até $\alpha + h_1$, a funcção $f(x)$ cresce.

Se porém $f'(\alpha)$ é negativo, temos

$$f(\alpha - h) > f(\alpha) > f(\alpha + h),$$

e a funcção $f(x)$ decresce, na visinhança do ponto α, quando x cresce.

/X **62.** — THEOREMA 2.° — *Se a funcção $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$ finita em todos os pontos desde x_0 até X, e se fôr $f(x_0) = 0$ e $f(X) = 0$, existe sempre um valor de x, comprehendido entre x_0 e X, que annulla $f'(x)$.*

Esta proposição, conhecida pelo nome de *theorema de Rolle*, foi demonstrada por O. Bonnet do modo seguinte:

Por ser a funcção $f(x)$ continua no intervallo de x_0 a X e nulla nos extremos d'este intervallo, ou será constantemente nulla n'este intervallo, ou augmentará (em valor absoluto) até um valor $f(x_1)$ correspondente a um numero x_1, comprehendido entre x_0 e X, para depois diminuir. No primeiro caso será constantemente $f'(x) = 0$; no segundo caso, na visinhança do ponto x_1, a funcção não será nem sempre crescente nem sempre decrescente, logo a derivada $f'(x_1)$ não será nem positiva nem negativa, e será portanto nulla.

THEOREMA 3.° — *Se a funcção $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$ finita em todos os pontos desde x_0 até X, será*

$$f(X) = f(x_0) + (X - x_0) f'(x_1),$$

x_1 representando um valor comprehendido entre x_0 e X (Lagrange).

Com effeito, applicando o theorema precedente á funcção

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{X - x_0} [f(X) - f(x_0)],$$

que se annulla quando se faz $x = x_0$, e quando se faz $x = X$, temos

$$\varphi'(x_1) = f'(x_1) - \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = 0,$$

que dá a formula enunciada.

Por estar x_1 comprehendido entre x_0 e X, pode-se pôr $x_1 = x_0 + \theta h$, sendo $h = X - x_0$ e θ uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade; e temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h).$$

D'este theorema deduzem-se os dous corollarios seguintes:

1.º — *Se a derivada de uma funcção $f(x)$ é nulla n'um certo intervallo, a funcção é constante no mesmo intervallo.*

Com effeito, sendo x_0 e $x_0 + h$ dous valores de x pertencentes ao intervallo considerado, por estar $x_0 + \theta h$ comprehendido no intervallo de x_0 a $x_0 + h$, será $f'(x_0 + \theta h) = 0$, e portanto $f(x_0 + h) = f(x_0)$.

2.º — *Se duas funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem uma mesma derivada finita em todos os pontos d'um certo intervallo, a sua differença será constante no mesmo intervallo.*

Com effeito, por ser nulla a differença $f'(x) - F'(x)$ das derivadas das duas funcções no intervallo considerado, será (corollario precedente) a funcção correspondente $f(x) - F(x)$ constante no mesmo intervallo.

Theorema 4.º — *Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem derivadas $f'(x)$ e $F'(x)$ finitas em todos os pontos desde x_0 até X, será*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]},$$

se a funcção $F'(x)$ fôr differente de zero no intervallo comprehendido entre x_0 e X.

Demonstra-se este theorema, devido a Cauchy, applicando o theorema de Rolle á funcção

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(x) - [F(x_0) - F(x)] \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)},$$

que se annulla nos pontos x e X; o que dá a igualdade

$$\varphi'(x_1) = - f'(x_1) + F'(x_1) \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = 0,$$

ou

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]}.$$

Nota. — Deve-se observar que os theoremas 2.°, 3.° e 4.° ainda têem logar quando as funcções $f(x)$ e $F(x)$ não têem derivadas finitas nos pontos x_0 e X, se todavia estas funcções são continuas n'estes pontos. E' o que resulta immediatamente das demonstrações que vimos de dar d'estes theoremas.

IV

Funcções de muitas variaveis

63. — Passando agora ás funcções de muitas variaveis, consideremos a funcção

$$z = f(x, y, \ldots)$$

das variaveis independentes x, y, etc.

Podemos derivar z relativamente a x considerando as outras variaveis como constantes, ou relativamente a y considerando as outras variaveis como constantes, etc. Já vimos que a estas derivadas se dava respectivamente os nomes de *derivada parcial* de z relativamente a x, de *derivada parcial* de z relativamente a y, etc. Já vimos tambem que se representa por $\frac{\partial^n z}{\partial x^a \, \partial y^b \ldots}$, ou $\frac{\partial^n f}{\partial x^a \, \partial y^b \ldots}$ a derivada parcial de ordem n que resulta de derivar z a vezes relativamente a x, depois o resultado b vezes relativamente a y, etc.

64. — Theorema 1.° — *Se as derivadas* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}$ *forem funcções continuas de x e y, é*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}.$$

Com effeito [1], applicando o theorema 3.º do n.º 62 ás funcções:

$$f(x, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots), \quad \frac{\partial f(x+\theta_1 h, y, \ldots)}{\partial x}$$

considerando na primeira x como variavel independente e na segunda y, vem

$$f(x+h, y+k, \ldots) - f(x+h, y, \ldots) - [f(x, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)]$$

$$= h\left[\frac{\partial f(x+\theta_1 h, y+k, \ldots)}{\partial x} - \frac{\partial f(x+\theta_1 h, y, \ldots)}{\partial x}\right]$$

$$= hk\,\frac{\partial^2 f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, \ldots)}{\partial x\,\partial y},$$

onde θ_1 e θ_2 representam duas quantidades comprehendidas entre 0 e 1.

Applicando o mesmo theorema ás funcções

$$f(x+h, y, \ldots) - f(x, y, \ldots), \quad \frac{\partial f(x, y+\theta' k, \ldots)}{\partial y}$$

considerando a primeira como funcção de y e a segunda como funcção de x, vem do mesmo modo

$$f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y+k, \ldots) - [f(x+h, y, \ldots) - f(x, y, \ldots)]$$

$$= hk\,\frac{\partial^2 f(x+\theta h, y+\theta' k, \ldots)}{\partial y\,\partial x},$$

onde θ e θ' representam quantidades comprehendidas entre 0 e 1.

Igualando estes dous resultados, vem

$$\frac{\partial^2 f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, \ldots)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(x+\theta h, y+\theta' k, \ldots)}{\partial y\,\partial x},$$

(1) Esta demonstração é devida a O. Bonnet.

e no limite,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}.$$

THEOREMA 2.º — *Se as derivadas*

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \ldots \partial t \, \partial u \, \partial v}, \quad \frac{\partial^m z}{\partial x \ldots \partial t \, \partial v \, \partial u}$$

forem funcções continuas de u e v, póde-se inverter a ordem das duas derivações consecutivas relativas a u e v, e temos

$$\frac{\partial^n z}{\partial x \ldots \partial t \, \partial u \, \partial v \, \partial w \ldots} = \frac{\partial^n z}{\partial x \ldots \partial t \, \partial v \, \partial u \, \partial w \ldots}.$$

Com effeito, temos primeiramente, em virtude do theorema anterior,

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \ldots \partial t \partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \dfrac{\partial^{m-2} z}{\partial x \ldots \partial t}}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 \dfrac{\partial^{m-2} z}{\partial x \ldots \partial t}}{\partial v \, \partial u}$$

e portanto

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \ldots \partial t \, \partial u \, \partial v} = \frac{\partial^m z}{\partial x \ldots \partial t \, \partial v \, \partial u}.$$

Derivando em seguida ambos os membros d'esta identidade relativamente a w, etc., obtem-se a igualdade que se queria demonstrar.

Se notarmos que qualquer mudança na ordem em que se effectuam as derivações relativas a x, y, etc. póde ser obtida por mudanças successivas da ordem de duas derivações, póde-se por applicações successivas do theorema que vimos de demonstrar inverter a ordem de qualquer numero de derivações. Em todas estas mudanças deve-se attender ás condições relativas á continuidade das derivadas impostas pelo theorema.

65. — Vamos agora estender o theorema 3.º do n.º 62 ás funcções de muitas variaveis independentes.

Applicando este theorema á funcção $f(x, y+k)$, considerando-a como funcção de x, vem

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + h\frac{\partial f(x+\theta_1 h, y+k)}{\partial x},$$

quando a funcção considerada tem uma derivada parcial relativa a x finita em todos os pontos do intervallo de x a $x+h$.

Applicando o mesmo theorema á funcção $f(x, y)$, considerando-a como uma funcção de y, vem

$$f(x, y+k) = f(x, y) + k\frac{\partial f(x, y+\theta_2 k)}{\partial y},$$

quando a funcção considerada tem uma derivada parcial relativa a y finita em todos os pontos do intervallo de y a $y+k$.

Temos pois

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h\frac{\partial f(x+\theta_1 h, y+k)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x, y+\theta_2 k)}{\partial y}.$$

Do mesmo modo se acha, no caso de muitas variaveis, a formula seguinte:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x+h, y+k, \ldots, t+l) &= f(x, y, \ldots) \\ &+ h\frac{\partial f(x+\theta_1 h, y+k, \ldots, t+l)}{\partial x} \\ &+ k\frac{\partial f(x, y+\theta_2 k, \ldots, t+l)}{\partial y} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ l\frac{\partial f(x, y, \ldots, t+\theta_n l)}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

D'este theorema deduzem-se dous corollarios importantes.

I — Se as derivadas parciaes de primeira ordem da funcção $f(x, y, \dots)$ forem todas finitas, $f(x, y, \dots)$ é uma funcção continua de x, y, etc. Com effeito, o primeiro membro da formula (1) tende para $f(x, y, \dots)$ quando h, k, etc. tendem para zero.

II — Se as derivadas parciaes $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, etc. forem funcções continuas de x, y, etc., temos

$$(2) \left\{ \begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y, \dots) &= h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + \dots \\ &+ \alpha_1 h + \alpha_2 k + \dots, \end{aligned} \right.$$

onde α_1, α_2, etc. representam quantidades que tendem para zero quando todas as quantidades h, k, etc. tendem para zero.

Com effeito, se as derivadas parciaes $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, etc. são funcções continuas de x, y, etc., temos

$$\frac{\partial f(x + \theta_1 h, y + k, \dots)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x} + \alpha_1$$

$$\frac{\partial f(x, y + \theta_2 k, \dots)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y} + \alpha_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

onde α_1, α_2, etc. representam quantidades que tendem para zero quando h, k, etc. tendem para zero.

Substituindo estes valores na formula (1) vem a formula (2) que se queria demonstrar.

66. — *Derivadas das funcções compostas.* — A' funcção $f(u_1, u_2, \dots)$, onde u_1, u_2, etc. representam funcções de x, dá-se o nome de *funcção composta* de x por meio de u_1, u_2, etc. Da formula (2) deduz-se uma regra importante para derivar estas funcções.

Dê-se a x o augmento infinitamente pequeno h e sejam

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ ou $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$ ou $\Delta y = y'\Delta x + \Delta x\,\varepsilon$.

l_1, l_2, etc. os augmentos correspondentes de u_1, u_2, etc. Se a funcção $f(u_1, u_2, \ldots)$ admitte derivadas parciaes relativamente a u_1, u_2, etc., e estas derivadas são funcções continuas de u_1, u_2, etc. nos pontos (u_1, u_2, etc.) correspondentes aos valores dados a x, a formula (2) dá

$$f(u_1+l_1, u_2+l_2, \ldots)-f(u_1, u_2, \ldots)=l_1\frac{\partial f}{\partial u_1}+l_2\frac{\partial f}{\partial u_2}+\ldots$$
$$+\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\ldots$$

onde α_1, α_2, etc. representam quantidades que tendem para zero quando l_1, l_2, etc. tendem para zero.

Temos pois, quando h tende para zero,

$$\lim\frac{f(u_1+l_1, u_2+l_2, \ldots)-f(u_1, u_2, \ldots)}{h}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial u_1}\lim\frac{l_1}{h}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\lim\frac{l_2}{h}+\ldots$$
$$+\alpha_1\lim\frac{l_1}{h}+\alpha_2\lim\frac{l_2}{h}+\ldots,$$

e portanto

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x}.$$

Esta formula importante dá a derivada das funcções compostas quando são conhecidas as derivadas das funcções que entram na sua composição, e contém como caso particular os theoremas 1.°, 2.°, 3.° e 4.° do n.° 59.

Applicação. Diz-se que $f(x, y, \ldots)$ é uma funcção *homogenea* do gráo n quando satisfaz á condição seguinte

$$f(tx, ty, \ldots)=t^m f(x, y, \ldots).$$

Derivando os dous membros d'esta identidade relativamente a t por meio do theorema anterior, vêm

$$\frac{\partial f}{\partial (tx)} x + \frac{\partial f}{\partial (ty)} y + \ldots = mt^{m-1} f(x, y, \ldots)$$

e, pondo $t = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \ldots = mf(x, y, \ldots).$$

Consiste n'esta formula o theorema de Euler relativo ás funcções homogeneas.

67. — A noção de differencial póde ser estendida ao caso d'uma funcção de muitas variaveis independentes.

Se differenciarmos a funcção $z = f(x, y, \ldots)$ relativamente a cada uma das variaveis, considerando as outras como constantes, obtemos os resultados

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx, \frac{\partial z}{\partial y} dy, \ldots,$$

a que se dá o nome de *differenciaes parciaes* de z relativamente a x, a y, etc. A' somma d'estas differenciaes parciaes dá-se o nome de *differencial total* de z. Representando-a por dz, temos pois a igualdade

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \ldots$$

que define dz.

Comparando esta formula com a formula (2) conclue-se que a differencial dz é a parte principal da differença $f(x + dx, y + dy, \ldots) - f(x, y, \ldots)$, quando dx, dy, etc. são sufficientemente pequenos.

V

Derivadas das funcções de variaveis imaginarias

68. — Seja $z = x + iy$ uma variavel imaginaria e

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$$

uma funcção d'esta variavel. Mudemos n'esta funcção x em $x + h$ e y em $y + k$ e supponhamos que a razão

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik}$$

tende para um limite determinado $f'(z)$, quando $h + ik$ tende para zero, mesmo quando uma das quantidades h e k é nulla. Este limite chama-se, como no caso das variaveis reaes, *derivada de* $f(z)$.

Por ser o limite da razão precedente sempre o mesmo, quando $f(z)$ tem derivada, quer h e k sejam differentes de zero, quer uma d'estas quantidades seja nulla, temos

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h, y) + i\psi(x+h, y) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]}{h} = f'(z)$$

$$\lim_{k=0} \frac{\varphi(x, y+k) + i\psi(x, y+k) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]}{ik} = f'(z),$$

e portanto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = f'(z),\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} = if'(z),$$

d'onde se deduz

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial y} = i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right],$$

ou

$$(1) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\psi}{\partial y}\,.$$

Temos assim duas condições a que devem satisfazer as funcções $\varphi\,(x,\,y)$ e $\psi\,(x,\,y)$ para que $\varphi\,(x,\,y) + i\psi\,(x,\,y)$ seja uma funcção de z que tenha derivada.

A proposição reciproca da precedente é verdadeira, no caso de $\varphi\,(x,\,y)$ e $\psi\,(x,\,y)$ representarem funcções continuas de x e y. Para o demonstrar basta attender ás igualdades (n.º 65 — II)

$$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x,y) + h\frac{\partial\varphi}{\partial x} + k\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \alpha_1 h + \alpha_2 k$$

$$\psi(x+h, y+k) = \psi(x,y) + h\frac{\partial\psi}{\partial x} + k\frac{\partial\psi}{\partial y} + \beta_1 h + \beta_2 k$$

onde α, α_1, β, β_1 representam quantidades infinitamente pequenas com h e k, que dão, attendendo ás formulas (1),

$$\varphi\,(x + h,\, y + k) + i\psi\,(x + h,\, y + k) - [\varphi\,(x, y) + i\psi\,(x, y)]$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)h + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)k + (\alpha_1 + i\beta_1)\,h + (\alpha_2 + i\beta_2)\,k$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(h + ik) + (\alpha_1 + i\beta_1)\,h + (\alpha_2 + i\beta_2)\,k.$$

Temos pois

$$\lim \frac{\varphi(x+h,y+k) + i\psi(x+h,y+k) - [\varphi(x,y) + i\psi(x,y)]}{h+ik}$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + \lim\,\frac{(\alpha_1 + i\beta_1)\,h}{h + ik} + \lim\,\frac{(\alpha_2 + i\beta_2)\,k}{h + ik}\,,$$

ou, attendendo a que α_1, α_2, β_1 e β_2 tendem para zero e a que os módulos de $\frac{h}{h+ik}$ e $\frac{k}{h+ik}$ são inferiores á unidade,

$$f'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Logo se a funcção $f(z)$ satisfaz ás condições (1), e $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ são funcções continuas de x e y, a funcção $f(z)$ tem derivada.

69. — E' facil de vêr que o que se disse no n.º 59 a respeito da derivação das sommas, productos, quocientes, funcções de funcções e funcções inversas tem ainda logar no caso das funcções de variaveis imaginarias. Estamos pois reduzidos a considerar as funcções simples.

1) E' facil de vêr que a derivada de $a \pm z$ é ± 1, e que a derivada de bz é b.

2) A derivada de e^z obtem-se facilmente. Com effeito, por serem x e y variaveis independentes, a funcção

$$u = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

dará (n.º 65 — II)

$$e^{z+h+ik} - e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) h + e^x (-\operatorname{sen} y + i \cos y) k$$

$$+ \alpha_1 h + \alpha_2 k = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)(h + ik) + \alpha_1 h + \alpha_2 k.$$

Logo teremos

$$\lim \frac{e^{z+h+ik} - e^z}{h+ik} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z.$$

Vê-se pois que se obtém a derivada da exponencial, no caso das variaveis imaginarias, pela mesma regra que no caso das variaveis reaes.

3) A derivada de cada ramo da funcção $\log z$ acha-se como no caso das variaveis reaes (n.º 60 e é igual a $\frac{1}{z}$.

4) A derivada de z^m acha-se tambem pondo, como no n.º 60, $z^m = e^{m \log z}$ e é igual a mz^{m-1}.

As outras funcções simples são sommas, productos, quocientes ou funcções das anteriores, e por isso acha-se facilmente as suas derivadas, e vê-se que as regras dadas, para as formar no caso das variaveis reaes, subsistem no caso das variaveis imaginarias.

VI

Funcções implicitas

70. — Consideremos agora as funcções implicitas, isto é, procuremos a derivada relativamente a x de uma funcção y dada pela equação

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Seja $y = \varphi(x)$ um ramo d'esta funcção, e supponhamos que $\varphi(x)$ admitte uma derivada finita e que $F(x, y)$ é uma funcção continua de x e y para os valores de x e y considerados. N'este caso o theorema relativo á derivação das funcções compostas (n.º 66) dá

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \tag{2}$$

e portanto temos a formula

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \tag{3}$$

por meio da qual se obtém a derivada da funcção $\varphi(x)$ sem resolver a equação proposta relativamente a y.

Por meio da formula precedente temos a derivada y' expressa em funcção de x e y. Se quizermos esta derivada só expressa em funcção de uma variavel, eliminaremos a outra por meio da equação proposta.

Derivando pela mesma regra a equação (2), que é da fórma

$$F_1(x, y, y') = 0,$$

vem a equação

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} y'' = 0$$

que dá y''.

Continuando do mesmo modo obtem-se equações que dão y''', $y^{(4)}$, etc.

As equações que se obtém, derivando successivamente uma equação dada, são do primeiro grão relativamente a y', y'', y''', etc. Porém este grão póde elevar-se já por se fazer desapparecer radicaes que lá entrem, já por se eliminar entre ellas algumas quantidades.

Exemplo. — A equação da ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

dá

$$a^2 y y' + b^2 x = 0,$$

e portanto

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Se quizermos exprimir a derivada só em funcção de x teremos de eliminar y, o que dá

$$y' = \pm \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Se quizermos fazer desapparecer o radical, teremos de elevar ao quadrado, o que dá

$$a^2 (a^2 - x^2) y'^2 = b^2 x^2.$$

71. — Toda a relação entre uma funcção e suas derivadas, isto é, toda a equação da fórma

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

tem o nome de *equação differencial d'ordem n.*

O estudo d'estas equações será feito no *Calculo Integral.* Aqui limitar-nos-hemos a observar que a equação

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

que contém n constantes arbitrarias c_1, c_2, etc., leva a uma equação differencial d'ordem n independente d'estas constantes.

Com effeito, derivando n vezes esta equação, obteremos n equações da fórma

$$F_1(x, y, y', c_1, c_2, \ldots) = 0$$

$$F_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, c_1, c_2, \ldots) = 0,$$

entre as quaes e a proposta podemos eliminar as n constantes arbitrarias. Chega-se assim a uma equação da fórma

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

independente das arbitrarias.

Em Geometria esta equação representa uma propriedade commum a todas as curvas representadas pela equação proposta.

Exemplo. — A equação do circulo $x^2 + y^2 = R^2$ dá

$$x + yy' = 0,$$

ou

$$1 + \frac{y}{x}y' = 0.$$

Como y' é o coefficiente angular da tangente á circumferencia no ponto (x, y) e $\frac{y}{x}$ é o coefficiente angular do raio que passa por este ponto, esta equação exprime que a tangente é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto.

72. — As derivadas parciaes das funcções implicitas de muitas variaveis obtêem-se pelas regras dos numeros anteriores.

Assim, por exemplo, as derivadas parciaes da funcção implicita z dada pela equação:

$$F(x, y, z) = 0$$

obtêem-se por meio das igualdades:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Em geral, se tivermos as n equações com $m + n$ variaveis, das quaes n sejam dependentes e m independentes:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \end{aligned}$$

podemos achar as derivadas das variaveis dependentes z_1, z_2, ..., z_n relativamente ás variaveis independentes x_1, x_2, ..., x_m resolvendo as $m \cdot n$ equações do primeiro grão:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_2} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

que resultam de derivar as anteriores relativamente a x_1, x_2, etc.

Derivando estas equações relativamente a x_1, x_2, etc. obtêem-se outras que dão as derivadas de segunda ordem de z, e assim successivamente.

73. — Toda a relação entre uma funcção e suas derivadas parciaes, isto é, toda a equação da fórma

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0$$

tem o nome de *equação ás derivadas parciaes*. Se a derivada da ordem mais elevada que entra n'esta equação é d'ordem n, diz-se que a equação é d'ordem n. O estudo d'estas equações será feito no *Calculo Integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que toda a equação:

$$F\,[x, y, z, \varphi\,(u)] = 0$$

onde $\varphi\,(u)$ representa uma funcção arbitraria de u, e u representa uma funcção determinada de x, y e z, leva a uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem independente de φ.

Com effeito, derivando-a relativamente a x e a y, temos as equações:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi\,(u)} \varphi'\,(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi\,(u)} \varphi'\,(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

que, pela eliminação de $\varphi\,(u)$ e $\varphi'\,(u)$ entre ellas e a proposta, dão uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem independente da funcção arbitraria.

Exemplo 1.° — A equação geral das superficies cylindricas

$$x - az = \varphi\,(y - bz)$$

dá

$$1 - a \frac{\partial z}{\partial x} = - b \frac{\partial z}{\partial x} \varphi' (y - bz)$$

$$- a \frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 - b \frac{\partial z}{\partial y}\right) \varphi' (y - bz),$$

e portanto temos a equação ás derivadas parciaes das superficies cylindricas

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

que deve representar uma propriedade commum a todos os cylindros. Adiante veremos qual é esta propriedade.

Exemplo 2.º — A equação geral das superficies de revolução

$$z = \varphi (x^2 + y^2)$$

dá do mesmo modo

$$\frac{\partial z}{\partial x} y - \frac{\partial z}{\partial y} x = 0.$$

Exemplo 3.º — A equação geral das superficies conicas

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi \left(\frac{y - b}{z - c}\right)$$

dá do mesmo modo

$$(x - a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$$

74. — Do mesmo modo uma equação da fórma:

$$V = F [x. y, z, \varphi (u_1). \psi (u_2)] = 0,$$

onde $\varphi (u_1)$ e $\psi (u_2)$ representam funcções arbitrarias de u_1 e u_2, e onde u_1 e u_2 representam funcções determinadas de x, y e z, leva, em certos casos, a uma equação ás derivadas parciaes de segunda ordem independente de φ e ψ.

Com effeito, formando as derivadas de primeira e de segunda ordem relativamente a x e a y d'esta equação, obtêem-se cinco equações onde entram as funcções arbitrarias φ, φ', φ'', ψ, ψ', ψ''.

Se entre estas equações e a proposta eliminarmos as funcções arbitrarias φ, ψ, φ', ψ', φ'', ψ'' chegaremos, não sempre, mas em casos particulares importantes, a uma equação ás derivadas parciaes de segunda ordem independente d'estas funcções.

Por exemplo, a equação

$$z = \varphi\,(x + ay) + \psi\,(x - ay)$$

dá

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'\,(x + ay) + \psi'\,(x - ay)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\varphi'\,(x + ay) - a\psi'\,(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi''\,(x + ay) + \psi''\,(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\,\varphi''\,(x + ay) + a^2\,\psi''\,(x - ay);$$

logo virá a equação ás derivadas parciaes de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,.$$

75. — Viu-se nos numeros anteriores o modo de achar as derivadas das funcções implicitas quando se sabe *á priori*, como acontece em muitos casos, que a funcção que se considera admitte derivada. Passando agora ao estudo das condições geraes para a existencia de derivada das funcções implicitas, vamos demonstrar os theoremas seguintes:

Theorema 1.º — *Se a equação*

$$F\,(x, y) = 0$$

fôr satisfeita pelos valores x_0 e y_0 dados a x e a y, se a *funcção* $F(x, y)$ *admittir derivadas parciaes* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *continuas na visinhança do ponto* (x_0, y_0) *e se n'este ponto a derivada* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *fôr differente de zero,* y *é uma funcção definida de* x *na visinhança do ponto* (x_0, y_0), *e esta funcção é continua e admitte uma derivada finita n'este ponto.* ou mesp.º vide A

Pondo $x - x_0 = h$ e $y - y_0 = k$, e representando por α_1, α_2 e α_3 tres quantidades infinitamente pequenas com h e k, temos (n.º 65 — II)

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \alpha_1\right) h + \left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2\right) k$$

A

e, em virtude da continuidade da funcção $\frac{\partial F}{\partial y}$ no ponto (x_0, y_0),

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_3.$$ N.B. Segue na pag. seg.te

Seja h_1 um numero de valor absoluto tão pequeno que, para valores de $|h|$ e $|k|$ que não sejam maiores do que $|h_1|$, as quantidades

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2, \quad \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_3$$

sejam differentes de zero e tenham o signal de $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}$, o que é sempre possivel por ser esta quantidade differente de zero; e dê-se na primeira das formulas precedentes a k o valor h_1 e a h valores inferiores em valor absoluto a h_1^2. Teremos, pondo $h = \pm\,\theta\, h_1^2$ (onde θ representa um numero positivo menor do que a unidade)

$$F(x, y) = \pm\left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \alpha_1\right]\theta h_1^2 + \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2\right] h_1$$

$$= h_1\left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2\right]\left[1 \pm \theta\,\frac{\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \alpha_1}{\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2}\, h_1\right].$$

D'esta formula conclue-se que $F(x, y)$ tem o signal de $h_1 \dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}$ quando se dá a $|h_1|$ um valor tão pequeno que seja

$$\left| \frac{\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \alpha_1}{\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2} \, h_1 \right| < 1;$$

e portanto que, para cada valor $x_0 + h$ de x comprehendido entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$, $F(x, y)$ muda de signal quando y varia desde $y_0 - h_1$ até $y_0 + h_1$.

A cada valor de x comprehendido entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$ corresponde pois sempre um valor de y, comprehendido entre $y_0 - h_1$ e $y_0 + h_1$, que satisfaz (n.° 34 — I) á equação $F(x, y) = 0$; e não póde haver mais (n.° 62) do que um visto
x Vide NB na pag. anter. que a derivada $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ não é nulla n'este intervallo. Logo a collecção dos valores de y comprehendidos entre $y_0 - h_1$ e $y_0 + h_1$ determinados pela equação $F(x, y) = 0$, quando se dá a x os valores comprehendidos entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$, constitue um ramo $\varphi(x)$ da funcção implicita dada por esta equação.

Como além d'isso, quando h_1 tende para zero, x tende para x_0 e y tende para y_0, vê-se que φ é continua no ponto x_0.

Finalmente a funcção $y = \varphi(x)$ admitte uma derivada finita no ponto (x_0, y_0). Com effeito, mudando na equação proposta x_0 em $x_0 + h$ e y_0 em $y_0 + k$, temos

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x_0} h + \frac{\partial F}{\partial y_0} k + \alpha_1 h + \alpha_2 k = 0$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \frac{k}{h} + \alpha_1 + \alpha_2 \frac{k}{h} = 0.$$

Temos pois

$$y' = \lim \frac{k}{h} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{\frac{\partial F}{\partial y_0}}.$$

o que concorda com o que se disse no n.º 70.

THEOREMA 2.º — *Se a equação*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0$$

fôr satisfeita pelos valores $a_1, a_2, \ldots, a_m, y_0$ *dados a* $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$, *se a funcção* $F(x_1, \ldots, x_m, y)$ *admittir derivadas parciaes relativas a* $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$ *continuas na visinhança do ponto* $(a_1, a_2, \ldots, a_m, y_0)$, *e se n'este ponto a derivada* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *fôr differente de zero*, y *é uma funcção definida de* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *na visinhança do ponto* $(a_1, a_2, \ldots, a_m, y_0)$, *e esta funcção é continua e admitte uma derivada finita n'este ponto.*

A demonstração d'este theorema é semelhante á demonstração empregada para estabelecer o theorema anterior.

THEOREMA 3.º — *Se as equações*

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots, F_n = 0,$$

onde entram as variaveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *e as variaveis dependentes* $z_1, z_2, \ldots, z^n$, *forem satisfeitas pelos valores* $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *dados a* $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_n$; *se as funcções* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *admittirem derivadas parciaes relativas a* $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_n$ *que sejam funcções continuas d'estas variaveis na visinhança do ponto* $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$; *e se n'este ponto o determinante*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_1} & \frac{\partial F_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}$$

fôr differente de zero, z_1, z_2, ..., z_n *são funcções de* x_1, x_2, ..., x_m *continuas no ponto* $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ *e admittem n'este ponto derivadas parciaes relativamente a* x_1, x_2, x_3, ..., x_m.

Como este theorema vem de ser demonstrado no caso de ser dada uma só equação, para o demonstrar completamente vamos provar que, se é verdadeiro no caso de serem dadas $n-1$ equações, ainda é verdadeiro quando são dadas n equações.

Por não ser, por hypothese, nullo no ponto $(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots)$ o determinante J, tambem não podem ser nullos n'este ponto todos os determinantes menores que resultam de supprimir a primeira columna. Seja pois, por exemplo, differentes de zero o determinante

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}.$$

As equações $F_2 = 0, \dots, F_n = 0$ determinam n'este caso $z_2, z_3, \dots, z_n$ em funcção de $x_1, x_2, \dots, x_m$, e substituindo estes valores em $F_1 = 0$, vem

$$F_1(x_1, x_2, \dots, z_1, z_2, \dots) = \varphi(x_1, x_2, \dots, z_1) = 0.$$

Temos portanto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial z_1}.$$

Eliminando depois $\frac{\partial z_2}{\partial z_1}$, $\frac{\partial z_3}{\partial z_1}$, etc. entre esta equação e as seguintes:

$$\frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial z_1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial z_1} + \frac{\partial F_n}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial z_1} = 0,$$

vem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} = \frac{J}{J_1}.$$

Vê-se pois que $\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}$ é differente de zero no ponto $(a_1, a_2, \ldots)$; e portanto que (th. 2°) a equação $\varphi = 0$ determina z_1 em funcção de x_1, x_2, etc., que este valor satisfaz á equação $F_1 = 0$ conjunctamente com os valores anteriormente achados para z_2, z_3, etc., e que a funcção z_1 admitte tambem derivadas parciaes relativamente a x_1, x_2, etc. no ponto $(a_1, a_2, \ldots)$.

VII

Derivadas dos determinantes. Determinantes funccionaes

76. — Procuremos agora a derivada do determinante

$$f(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

onde u_1, u_2, v_1, v_2 são funcções de x.

Mudando x em $x + h$ e chamando k_1, k_2, l_1, l_2 os augmentos correspondentes de u_1, u_2, v_1, v_2, vem

$$f(x+h) = \begin{vmatrix} u_1 + k_1 & u_2 + k_2 \\ v_1 + l_1 & v_2 + l_2 \end{vmatrix},$$

ou, em virtude d'um theorema bem conhecido,

$$f(x+h) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & k_2 \\ v_1 & l_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & u_2 \\ l_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix}.$$

Temos pois

$$f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \begin{vmatrix} u_1 & u'_2 \\ v_1 & v'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u'_1 & u_2 \\ v'_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

O raciocinio precedente applica-se evidentemente a um determinante com qualquer numero de columnas, e vê-se que *a derivada d'um determinante é igual á somma dos determinantes que se obtêem substituindo cada columna do determinante proposto por outra formada das derivadas dos termos d'aquella.*

77. — Consideremos as funcções

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Com as derivadas d'estas funcções forma-se o determinante:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

que se representa tambem por

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

e que se chama *determinante funccional* ou *jacobiano*. Este determinante, estudado pela primeira vez por Jacobi, apparece em muitas questões e tem propriedades muito importantes, para o estudo das quaes se póde recorrer á memoria intitulada — *De determinantibus functionalibus* [1] do eminente geometra. No theorema 3.° do n.° 75 vimos já uma questão em que intervem este determinante. Aqui vamos ainda demonstrar, a respeito d'elle os theoremas seguintes:

I — Supponhamos que as funcções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ admittem derivadas parciaes relativas a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e que estas derivadas são funcções continuas d'estas variaveis. N'este caso temos o theorema seguinte:

1.° — *Se uma das funcções $y_1, y_2, \ldots, y_n$, por exemplo y_1, fôr uma funcção das outras e admittir derivadas parciaes relativamente a $y_2, y_3, \ldots, y_n$ que sejam funcções continuas d'estas variaveis, o determinante* (2) *é identicamente nullo.*

2.° — *Se o determinante* (2) *fôr identicamente nullo, mas não o fôr um dos seus menores de primeira ordem, uma das quantidades y_1, y_2, etc. é funcção das outras, e esta funcção é continua e admitte derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante é nullo.*

3.° — *Se forem identicamente nullos o determinante* (2) *e todos os seus menores de primeira ordem e o não fôr um dos determinantes menores de segunda ordem, duas das quantidades y_1, y_2, etc. são funcções das outras, e estas funcções são continuas e admittem derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante de segunda ordem não é nullo.*

4.° — *Em geral, se forem identicamente nullos o determinante* (2) *e os seus menores até á ordem i e não o fôr um dos determinantes menores da ordem $i+1$, i das quantidades y_1, y_2, etc. são funcções das restantes, e estas funcções são continuas e admittem derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante de ordem $i+1$ não é nullo.*

Para demonstrar esta proposição consideremos sómente tres funcções

$$(1') \quad y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3),\; y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3),\; y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3).$$

E' facil de vêr que o raciocinio que vamos empregar é applicavel a maior numero de funcções.

Se fôr $y_1 = \varphi(y_2, y_3)$, temos

(1) Jacobi — *Gesammelte Werke*, tomo III.

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_3},$$

e portanto, eliminando $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}$ entre estas equações,

$$(2') \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

o que demonstra a primeira parte do theorema.

Para demostrar a proposição reciproca, supponhamos que o determinante (2) é identicamente nullo e que um dos determinantes menores de segunda ordem não é identicamente nullo, por exemplo o determinante

$$\frac{\partial (f_2, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}.$$

Em virtude do theorema 3.° do n.° 75, as duas ultimas equações (1') determinam x_2 e x_3 como funcções de x_1, y_2 e y_3, e, nos pontos em que este determinante não é nullo, estas funcções admittem derivadas parciaes relativas a x_1, y_2, y_3 dadas pelas equações

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0.$$

....

Substituindo estes valores de x_2 e x_3 na primeira das equações (1') vem

$$y_1 = \varphi(x_1, y_2, y_3),$$

e, em virtude do theorema relativo á derivação das funcções compostas, y_1 admitte derivadas parciaes relativamente a x_1, y_2 e y_3. A derivada relativa a x_1 é dada pela equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1},$$

onde se deve substituir $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ pelos seus valores tirados das equações anteriores, o que dá

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)}}{\dfrac{\partial (f_2, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}}.$$

Como o segundo membro d'esta igualdade é, por hypothese, identicamente nullo, é identicamente nulla a derivada de φ relativamente a x_1; portanto φ é independente de x_1, e temos

$$y_1 = \varphi(y_2, y_3),$$

que é o que se queria demonstrar.

Se todos os determinantes menores de primeira ordem do determinante (1') forem identicamente nullos, recorre-se aos determinantes de segunda ordem, que no caso considerado não podem ser todos identicamente nullos sem que as funcções sejam todas constantes. Seja pois $\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ um dos determinantes de terceira ordem que não é identicamente nullo. A ultima das equações (1') determinará x_3 em funcção de x_1, x_2 e y_3 e as suas derivadas relativamente a x_1 e x_2 serão dadas pelas equações

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0.$$

Substituindo o valor de x_3 na primeira das equações (1′) vem

$$y_1 = \varphi\,(x_1,\ x_2,\ y_3),$$

cujas derivadas relativamente a x_1 e x_2 são dadas pelas equações

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\,\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\,\frac{\partial x_3}{\partial x_2}$$

ou, eliminando $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial x_3}{\partial x_2}$ por meio das equações anteriores

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial\,(f_1,\ f_3)}{\partial\,(x_1,\ x_3)}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{\dfrac{\partial\,(f_1,\ f_3)}{\partial\,(x_2,\ x_3)}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}}.$$

Como, por hypothese, os segundos membros d'estas equações são identicamente nullos, a funcção φ é independente de x_1 e x_2, e temos

$$y_1 = \varphi\,(y_3).$$

Do mesmo modo a segunda das equações (1′) dá

$$y_2 = \psi\,(y_3).$$

II — *Se nas funcções f_1, f_2, …, f_n substituirmos as variaveis x_1, x_2, …, x_n por outras θ_1, θ_2, …, θ_n ligadas com as primeiras por equações dadas, o jacobiano das novas funcções estará ligado com o jacobiano* (2) *pela relação:*

$$(4)\qquad \frac{\partial\,(y_1,\ \ldots,\ y_n)}{\partial\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)} = \frac{\partial\,(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_n)}{\partial\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)} \cdot \frac{\partial\,(y_1,\ \ldots,\ y_n)}{\partial\,(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_n)}.$$

Para demonstrar este theorema basta substituir no determinante (2) as derivadas que lá entram pelos seus valores tirados das equações que se formam dando a k e a i os valores $1, 2, \ldots, n$ na equação

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_1} = \frac{\partial y_k}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial y_k}{\partial \theta_n} \cdot \frac{\partial \theta_n}{\partial x_1},$$

e applicar depois o theorema da multiplicação dos determinantes.

Se tivermos uma funcção unica e uma variavel, a formula (4) dá

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1},$$

isto é, o theorema 4.º do n.º 59.

III — Se no theorema precedente as equações que ligam as novas variaveis ás antigas são as equações lineares:

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_1 = a_1^{(1)}\, x_1 + \ldots + a_n^{(1)}\, x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_n = a_1^{(n)}\, x_1 + \ldots + a_n^{(n)}\, x_n, \end{array}\right.$$

vem

$$(6) \qquad \frac{\partial\,(y_1, \ldots, y_n)}{\partial\,(x_1, \ldots, x_n)} = M\,\frac{\partial\,(y_1, \ldots, y_n)}{\partial\,(\theta_1, \ldots, \theta_n)},$$

pondo

$$M = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(n)} & \ldots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

78. — Se as funcções $f_1, \ldots, f_n$ forem as derivadas parciaes $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ de uma funcção $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, o determinante (2) reduz-se ao determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

que se chama *hesseano*, do nome do eminente geometra O. Hesse que primeiro o considerou.

A respeito d'este determinante limitar-nos-hemos aqui a procurar a relação entre o *hesseano* da funcção dada e o *hesseano* da funcção em que esta se transforma pela substituição das variaveis x_1, x_2, etc. pelas variaveis θ_1, θ_2, etc. ligadas com as primeiras pela equação (5).

Por ser y funcção de $x_1, \ldots, x_n$ e portanto de $\theta_1, \ldots, \theta_n$, em virtude das formulas (5), temos

$$y_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1^{(1)} \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \ldots + a_1^{(n)} \frac{\partial y}{\partial \theta_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = \frac{\partial y}{\partial x_n} = a_n^{(1)} \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \ldots + a_n^{(n)} \frac{\partial y}{\partial \theta_n}.$$

Substituindo estes valores no determinante

$$\frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial \theta_1, \ldots, \partial \theta_n)}$$

e attendendo ao theorema da multiplicação dos determinantes, vem

$$\frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (\theta_1, \ldots, \theta_n)} = M \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n^2} \end{vmatrix}.$$

Logo a formula (6) dá

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \, \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2_n} \end{vmatrix} = M^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \, \partial \theta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \, \partial \theta_n} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n^2} \end{vmatrix}.$$

VIII

Derivada de limites de sommas. Derivada dos arcos de curva

79. — Seja $f(x)$ uma funcção de x continua em todos os pontos do intervallo de x_0 a X, e seja $X > x_0$. Decomponha-se o intervallo $X - x_0$ em n intervallos iguaes a $h_1, h_2, \ldots, h_n$ de modo que seja

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = X - x_0,$$

e represente-se por $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ os numeros, comprehendidos entre x_0 e X, que separam estes intervallos, de modo que seja

$$z_1 = x_0 + h_1, \; z_2 = z_1 + h_2, \; \ldots, \; X = z_{n-1} + h_n.$$

Finalmente, represente-se por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ quaesquer numeros que pertençam respectivamente aos intervallos de x_0 a z_1, de z_1 a z_2, de z_2 a z_3, etc. Posto isto, vamos demonstrar o theorema seguinte:

A somma

$$S = h_1 f(x_1) + h_2 f(x_2) + \ldots + h_n f(x_n)$$

tende para um limite quando todas as quantidades h_1, $h_2, \ldots, h_n$ tendem para zero, e este limite é sempre o mes-

mo qualquer que seja o modo como se escolham os numeros z_1, z_2, *etc., e os numeros* x_1, x_2, *etc.*

Supponhamos primeiramente que se escolhe x_1, x_2, etc. de modo que $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc. representem os maiores valores que toma $f(x)$ quando x varia respectivamente de x_0 a z_1, de z_1 a z_2, etc. Decompondo o intervallo h_i em m intervallos parciaes h'_i, h''_i, etc. de modo que seja

$$h_i = h'_i + h''_i + \ldots,$$

e chamando x'_i, x''_i, etc. os valores de x a que correspondem os maiores valores que toma $f(x)$ quando x varia desde z_{i-1} até $z_{i-1} + h'_i$, de $z_{i-1} + h'_i$ até $z_{i-1} + h'_i + h''_i$, etc., vem

$$f(x'_i) \lesseqgtr f(x_i),\ f(x''_i) \lesseqgtr f(x_i), \text{ etc.,}$$

e portanto

$$\begin{aligned} h_i f(x_i) &= h'_i f(x_i) + h''_i f(x_i) + \ldots \\ &> h'_i f(x'_i) + h''_i f(x''_i) + \ldots \end{aligned}$$

O primeiro membro d'esta desigualdade representando uma qualquer das parcellas de S e o segundo membro a somma das que a substituem quando se divide h_i em m partes, podemos concluir que a somma S diminue quando augmenta o numero de partes em que se divide o intervallo h_i. Por outra parte, o seu valor conserva-se sempre maior do que

$$m(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) = m(X - x_0),$$

representando por m o menor valor que toma $f(x)$ quando x varia desde x_0 até X. Logo a somma S tende para um limite quando as quantidades h_1, h_2, etc. tendem todas para zero.

Supponhamos agora que $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc. não representam os maiores valores que toma $f(x)$, quando x varia respectivamente de x_0 a z_1, de z_1 a z_2, etc., e sejam M_1, M_2, M_3, etc. estes valores. Pondo

$$f(x_1) = M_1 + \varepsilon_1,\ f(x_2) = M_2 + \varepsilon_2,\ \ldots$$

temos

$$\Sigma h_i\, f(x_i) = \Sigma h_i\, M_i + \Sigma h_i\, \varepsilon_i,$$

ou, chamando ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, etc.,

$$|\Sigma h_i\, f(x_i) - \Sigma h_i\, M_i| = |\Sigma h_i\, \varepsilon_i| < \varepsilon\, \Sigma h_i.$$

Mas, por ser continua a funcção $f(x)$ em todos os pontos desde x_0 até X, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde (n.° 34 — 4.°) um numero η tal que a desigualdade $|\varepsilon| < \delta$ é satisfeita quando a $|h_1|$, $h_2|$, etc. se dá valores inferiores a η. Logo quando h_1, h_2, etc. tendem para zero, ε tende para zero. Por isto e por ser Σh_i igual a $X - x_0$, conclue-se da desigualdade precedente que as duas sommas $\Sigma h_i\, f(x_i)$ e $\Sigma h_i\, M_i$ tendem para um mesmo limite.

Resta demonstrar que este limite é sempre o mesmo qualquer que seja o modo como se escolham os numeros z_1, z_2, etc. Para isso, consideremos duas sommas S e S_1 correspondentes a dous modos de divisão do intervallo $X - x_0$, e seja S_2 uma somma correspondente a um terceiro modo de divisão, em que figurem todos os intervallos das duas divisões anteriores. O intervallo h_i da primeira divisão conterá um ou mais intervallos h'_i, h''_i, etc. da terceira divisão, e á parcella $h_i\, f(x_i)$ da somma S corresponderão as parcellas

$$u_i = h'_i\, f(x'_i) + h''_i\, f(x''_i) + \dots$$

da somma S_2. Pondo pois

$$f(x_i) = f(x'_i) + \varepsilon_i,\ f(x_i) = f(x''_i) + \varepsilon'_i,\ \dots,$$

temos

$$S_2 = \Sigma u_i = \Sigma f(x_i)\,(h'_i + h''_i + \dots) - \Sigma\,(\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \dots)$$
$$= \Sigma f(x_i)\, h_i - \Sigma\,(\varepsilon_i\, h'_i + \varepsilon'_i\, h''_i + \dots),$$

d'onde se tira

$$|S_2 - S| = |\Sigma\,(\varepsilon_i\, h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \dots)| < \varepsilon \Sigma h_i$$

chamando ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, ..., $|\varepsilon'_1|$, $|\varepsilon'_2|$, ..., etc.

Mas, por ser continua a funcção $f(x)$, ε tende (n.° 34 —

4.º) para zero, quando n tende para o infinito; logo S e S_2 tendem para o mesmo limite.

Demonstra-se do mesmo modo que S_1 e S_2 tendem tambem para um mesmo limite.

Logo S e S_1 tendem para um mesmo limite, que é o que se queria demonstrar.

80.—O limite para que tende a somma S, quando todas as quantidades h_1, h_2, etc. tendem para zero, é uma funcção de X. Procuremos a derivada d'esta funcção.

Se mudarmos em $\lim S$ a variavel X em $X + h$ e se chamarmos k o augmento correspondente d'esta funcção, temos

$$k = \lim \left[h_{n+1} f(x_{n+1}) + \ldots + h_{n+i} f(x_{n+i})\right],$$

onde é

$$h_{n+1} + h_{n+2} + \ldots + h_{n+i} = h.$$

Representando por $f(x'')$ e $f(x')$ o menor e o maior dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde X até $X + h$, vê-se que o valor de k está comprehendido entre

$$f(x')(h_{n+1} + \ldots + h_{n+i}) = f(x')\,h$$

e

$$f(x'')(h_{n+1} + \ldots + h_{n+i}) = f(x'')\,h.$$

Logo, se $h > 0$,

$$hf(x'') < k < hf(x'),$$

e portanto

$$f(x'') < \frac{k}{h} < f(x');$$

e, se $h < 0$,

$$f(x') < \frac{k}{h} < f(x'').$$

Fazendo agora tender h para zero, x' e x'' tendem para

X e, por ser continua a funcção $f(x)$, $f(x')$ e $f(x'')$ tendem para $f(X)$; temos portanto

$$\lim \frac{k}{h} = f(X).$$

Logo *a funcção lim S admitte derivada no ponto X, e esta derivada é igual a f (X).*

81.—*Derivada dos arcos de curva.*—**I**—Dá-se o nome de *comprimento de um arco de curva* ao limite para que tende o perimetro d'um polygono inscripto n'este arco quando todos os lados tendem para zero.

Para justificar esta definição é necessario demonstrar que este limite existe e que tem um valor unico qualquer que seja a lei d'inscripção dos polygonos.

N'um arco da curva, cujas equações são $y = f(x)$ e $z = F(x)$, comprehendido entre o ponto arbitrario (x_0, y_0, z_0) e o ponto variavel (x, y, z), inscrevamos um polygono qualquer e sejam (y_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), etc. os seus vertices. O perimetro P do polygono será dado pela formula

$$P = \Sigma \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$

onde a somma se refere a todos os lados do polygono; ou

$$P = \Sigma h_i \sqrt{1 + [f'(x_i + \theta_i h_i)]^2 + [F'(x_i + \theta'_i h_i)]^2},$$

pondo $x_{i+1} - x_i = h_i$ e attendendo ás igualdades (n.º 62)

$$y_{i+1} - y_i = h_i f'(x_i + \theta_i h_i),\ z_{i+1} - z_i = h_i F'(x_i + \theta'_i h_i).$$

Ponha-se agora

$$\sqrt{1 + [f'(x_i + \theta_i h_i)]^2 + [F'(x_i + \theta'_i h_i)]^2}$$
$$= \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2} + \varepsilon_i$$

e represente-se por ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, etc. Teremos

$$P = \Sigma h_i \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2} + \Sigma \varepsilon_i h_i,$$

Serret - T. 1º pag. 285.

d'onde se tira

$$|P - \Sigma h_i \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2}| = |\Sigma \varepsilon_i h_i| < \varepsilon |\Sigma h_i|.$$

Suppondo agora que as funcções $f'(x)$ e $F'(x)$ são continuas em todos os pontos do arco considerado, a funcção $\sqrt{1 + [f'(x)]^2 + [F'(x)]^2}$ é tambem continua, e portanto ε tende (n.° 34 — 4.°) para zero quando todas as quantidades h_1, h_2, etc. tendem para zero. Logo

$$\lim P = \lim \Sigma h_i \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2}.$$

Esta formula mostra, em virtude dos theoremas do numero precedente, que o limite de P existe; que é unico e determinado qualquer que seja o modo como as quantidades h_i tendam para zero; e finalmente que a derivada d'este limite, que representaremos por s, é dada pela formula

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

d'onde se deduz a differencial

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Se houver pontos em que alguma das funcções $f'(x)$ ou $F'(x)$ seja discontinua, decompor-se-ha o arco considerado n'outros cujos comprimentos se avaliam separadamente.

II — Se a curva fôr plana, a equação precedente dará

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se quizermos o valor de ds expresso em coordenadas polares, faremos a transformação da formula precedente por meio das formulas

$$x = \rho \cos\theta,\ dx = d\rho \cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta,\ dy = d\rho \operatorname{sen}\theta + \rho \cos\theta\, d\theta:$$

e acharemos

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}.$$

IX

Mudança das variaveis

82. — O problema que vamos resolver é o seguinte:

Dada uma expressão analytica ou uma equação, em que entrem variaveis independentes, variaveis dependentes e derivadas d'estas, achar a sua transformada, quando se substitue todas ou algumas das variaveis por outras ligadas com as primeiras por equações dadas.

Esta transformação tem muita importancia em Geometria quando, tendo um resultado expresso em um systema de coordenadas, se quer exprimil-o n'outro systema. Em Analyse tem tambem uma importancia grande, como iremos vendo.

83. — Consideremos primeiro expressões em que entrem duas variaveis, uma dependente e outra independente:

$$F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2},\, \ldots\right),$$

e resolvamos os dous problemas seguintes:

1.° — *Substituir a variavel independente x por outra θ ligada com x pela relação $\varphi(x, \theta) = 0$.*

Chamando x', x'' etc., y', y'', etc. as derivadas de x e de y relativamente a θ, teremos (n.° 59 — IV)

$$y' = \frac{dy}{dx} x'$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} x'^2 + \frac{dy}{dx} x''$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} x'^3 + 3\, \frac{d^2y}{dx^2} x' x'' + \frac{dy}{dx} x'''$$

....

e portanto

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x'\,y'' - y'\,x''}{x'^3} \\[2ex] \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{x'^2\,y''' - x'\,y'\,x''' - 3\,x'\,x''\,y'' + 3\,y'\,x''^2}{x'^5} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

onde se deve substituir as derivadas de x pelos seus valores tirados da equação $\varphi\,(x,\,\theta) = 0$.

Substituindo depois os valores resultantes de $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, etc. na expressão proposta resolve-se o problema enunciado.

Exemplo. — Substituindo na expressão:

$$F\left(x,\,\sqrt{x^2 + bx + c},\,\frac{dy}{dx}\right),$$

onde F representa uma funcção racional de x, $\sqrt{x^2 + bx + c}$ e $\dfrac{dy}{dx}$, a variavel x por outra θ ligada com x pela equação

$$\sqrt{x^2 + bx + c} = x - \theta$$

que dá

$$x = \frac{\theta^2 - c}{b + 2\theta}, \qquad x' = \frac{2\,(\theta^2 + b\theta + c)}{(b + 2\theta)^2},$$

vem uma expressão da fórma:

$$f\left(\theta,\,\frac{dy}{d\theta}\right)$$

onde f representa uma funcção racional de θ e $\dfrac{dy}{d\theta}$. Temos assim um exemplo da transformação d'uma funcção irracional n'outra racional.

2.° — *Substituir as variaveis x e y por outras ρ e θ ligadas com x e y pelas equações*

$$\varphi(x, y, \theta, \rho) = 0, \ \psi(x, y, \theta, \rho) = 0,$$

sendo θ a nova variavel independente.

Para resolver este problema basta derivar as equações precedentes relativamente a θ, considerando x, y e ρ como funcções d'esta variavel, o que dá

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} x' + \frac{\partial\psi}{\partial y} y' + \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0$$

etc.;

e em seguida substituir nas formulas (1) os valores de x', y', x'', y'', etc. tirados das equações precedentes. Obtêem-se assim as derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

Exemplo. — Transformar a expressão

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

sendo

$$x = \rho\cos\theta, \ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

as equações que ligam as novas variaveis ás antigas.

Temos

$$x' = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$y' = \frac{d\rho}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho\cos\theta$$

$$x'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\,\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta - \rho\cos\theta$$

$$y'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\operatorname{sen}\theta + 2\,\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta.$$

Substituindo estas derivadas na formula

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'\,y'' - y'\,x''},$$

que resulta de substituir na expressão dada $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ pelos seus valores tirados das formulas (1), vem

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\,\frac{d\rho^2}{d\theta^2}}.$$

84. — Consideremos agora a respeito da funcção de duas variaveis independentes x e y:

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \ldots\right)$$

as duas questões seguintes:

1.° — *Substituir as variaveis independentes x e y por outras θ_1 e θ_2 ligadas com x e y pelas equações*

$$\varphi\,(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2) = 0,\ \psi\,(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2) = 0.$$

Por z ser funcção de x e y, e por x e y serem funcções de θ_1 e θ_2, temos

$$\frac{\partial z}{\partial\theta_1} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta_1} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta_2} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta_2} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta_2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta_1^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \theta_1}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2}.$$

etc.

Substituindo n'estas equações as derivadas $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta_2}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta_2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2}$, etc. pelos seus valores tirados das equações que resultam de derivar $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ relativamente a θ_1 e θ_2, e resolvendo-as depois relativamente a $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., temos as derivadas que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

2.º — *Substituir as variaveis x, y e z por outras θ_1, θ_2, e ρ ligadas com as primeiras pelas equações:*

$$\varphi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0,\ \psi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0,$$

$$\omega(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0.$$

Resolve-se este problema por meio das formulas anteriores substituindo n'ellas $\frac{\partial z}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta_2}$, etc. pelos seus valores tirados das equações $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\omega = 0$.

Exemplo. — Transformar a funcção

$$F\left(x, \sqrt{a+x}, \frac{y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}}{y}\right),$$

suppondo as novas variaveis ligadas com as antigas pelas equações

$$x^2 + y^2 = \theta_1,\ a + x = \theta_2^2.$$

Derivando estas equações relativamente a θ_1 e θ_2, vem

$$2x \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + 2y \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = 1,\ x \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + y \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = 2\theta_2;$$

o que dá

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = 2\theta_2,\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2y},\ \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -\frac{2x\,\theta_2}{y}.$$

Temos pois

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial \theta_2} = 2\,\theta_2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2x\,\theta_2}{y} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Substituindo na expressão proposta os valores de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ tirados d'estas equações, vem uma expressão da fórma

$$f\left(\theta_2,\ \frac{\partial z}{\partial \theta_2}\right)$$

em que só entra uma derivada e em que não entra radical.

CAPITULO III

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DOS PRINCIPIOS PRECEDENTES

I

Curvas planas

85. — *Tangentes e normaes.* — **I** — Seja dada uma curva cuja equação em coordenadas rectangulares é

$$F(x, y) = 0.$$

A *tangente* a esta curva no ponto (x, y) sendo uma recta que passa pelo ponto (x, y) e cujo coefficiente angular *tang* θ é (n.º 56 — I) igual a $\frac{dy}{dx}$, a sua equação será (chamando X e Y as coordenadas correntes da recta)

$$(1) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

onde se deve substituir $\frac{dy}{dx}$ pelo seu valor tirado da equação da curva, o que dá

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0.$$

II — A equação da recta perpendicular a esta, isto **é**, a equação da *normal á curva* no ponto (x, y) é

$$X - x = - \frac{dy}{dx} (Y - y),$$

ou

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

A respeito da normal resolveremos aqui o problema seguinte:

Determinar o limite para que tende a intersecção das normaes á curva nos pontos (x, y) e $(x + h, y + k)$ quando o segundo ponto tende para o primeiro.

As equações das duas normaes são

$$X - x = - f'(x) (Y - y)$$

$$X - x - h = - f'(x + h) (Y - y - k),$$

e a segunda dá, attendendo á primeira e ao que se disse no n.º 52,

$$- h = - hf''(x) (Y - y) + kf'(x)$$
$$+ khf''(x) - \varepsilon h (Y - y - k).$$

Vêem portanto, dividindo por h e depois fazendo tender h para zero, as formulas

$$(2) \quad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}, \; X - x = - y' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''}$$

que dão o ponto (X, Y) pedido.

III — Dá-se respectivamente os nomes de *subtangente*, *subnormal*, *tangente definida* e *normal definida* aos comprimentos [1] TP, PN, TM e NM determinados pela tangente e pela normal. A resolução dos triangulos MTP e MNP dá os comprimentos d'estas linhas:

---

(1) Serve a figura do n.º 56, tirando a normal MN que corta o eixo das abscissas no ponto N.

$$\text{subtangente} = \frac{y}{\text{tang}\,\theta} = y\,\frac{dx}{dy}$$

$$\text{subnormal} = y\,\text{tang}\,\theta = y\,\frac{dy}{dx}$$

$$\text{tangente} = \sqrt{y^2 + TP^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$\text{normal} = \sqrt{y^2 + NP^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

86. — *Concavidade e convexidade.* — **I** — Consideremos um arco de curva e pelo ponto (x, y) d'este arco tiremos a normal, que se estende indefinidamente em duas direcções oppostas. Se as normaes nos pontos do arco, visinhos de (x, y), cortarem todas a primeira normal em pontos situados n'uma mesma d'estas direcções, diz-se que o arco considerado tem, na visinhança do ponto (x, y) a sua *concavidade* voltada no sentido d'esta direcção da normal e a *convexidade* voltada no sentido opposto.

O sentido da concavidade determina-se pois pela posição do ponto (X, Y) dado pelas formulas (2), visto que estas formulas dão o ponto para que tende a intersecção da normal á curva no ponto (x, y) com as normaes nos pontos infinitamente proximos de (x, y), quando estes pontos tendem para (x, y).

II — Diz-se que um arco tem, na visinhança do ponto (x, y), a sua concavidade voltada no sentido d'uma direcção dada, quando esta direcção fórma um angulo agudo com a direcção da normal no sentido da qual está voltada a concavidade.

Se a direcção dada é a das ordenadas positivas, para que esta direcção forme um angulo agudo com a direcção da normal que contém o ponto (X, Y), deve este ponto estar evidentemente acima de uma parallela ao eixo das abscissas tirada pelo ponto (x, y). A primeira das formulas (2) mostra que isto tem logar todas as vezes que y'' è positivo, pois que:

1.° — Se y é positivo a formula dá $Y > y$;

2.° — Se y é negativo, a formula dá para Y ou um valor positivo, ou um valor negativo menor do que y em valor absoluto.

Demonstra-se do mesmo modo que a concavidade estará voltada para os y negativos quando y'' é negativo.

Podemos pois enunciar o theorema seguinte:

A curva volta a sua concavidade no sentido das ordenadas positivas ou das negativas, na visinhança d'um ponto dado no qual as derivadas y' e y'' são finitas, segundo a derivada y'' é positiva ou negativa n'este ponto.

III — Se nos pontos visinhos do ponto (x, y), collocados d'um dos lados d'este ponto, a concavidade está voltada n'um sentido e nos pontos visinhos, collocados do outro lado, está voltada no sentido opposto, diz-se que o ponto (x, y) é um *ponto d'inflexão*.

D'esta definição e do theorema anterior resulta immediatamente o theorema seguinte:

E' condição necessaria e sufficiente para que um ponto (x, y), no qual as derivadas y' e y'' são finitas, seja ponto d'inflexão, que y'' mude n'este ponto de signal.

Funda-se n'este theorema a indagação dos pontos d'inflexão, como adiante veremos.

Duhamel - T. I., pg. 332

87. — *Asymptotas.* — Uma recta diz-se *asymptota* de um ramo infinito de curva se a distancia d'um ponto do ramo de curva á recta tende para o limite zero, quando o ponto se affasta indefinidamente sobre a curva.

Para achar as asymptomas não parallelas ao eixo das ordenadas dos ramos de curvas planas, basta determinar as constantes a e b, que entram na equação

$$y = ax + b,$$

de modo que a differença entre as ordenadas y e Y da recta e da curva, correspondentes á mesma abscissa, tenda para zero quando x tende para o infinito. Para isso é necessario e basta que a equação do ramo de curva possa ser reduzida á fórma

$$Y = ax + b + F(x, y),$$

representando por $F(x, y)$ uma funcção que tende para zero quando x tende para o infinito.

Temos pois, pondo $Y = zx$ e $Y = ax + u$,

$$\lim z = \lim \frac{Y}{x} = a + \lim \frac{b + F(x, y)}{x} = a$$

$$\lim u = \lim (Y - ax) = b + \lim F(x, y) = b;$$

Denotando por $y=ax+b$ a equação de uma asymptote, a equação da respectiva curva deverá ser $Y=ax+b+u$ (Duhamel, T. 1°, pag 332, e Gomes Teixeira, pag), sendo u uma funcção de x e y(x) que se torna nulla para valores infinitos d'estas variaveis

Ora da eq. da 1a recta deduz-se $a=\frac{y-b}{x}$, e pelo que ha pouco se disse, n'esta expressão é permittido substituir y por Y para valores m.to grandes de x e Y, pelo que teremos $a=\frac{Y-b}{x}$ e logo $a=\lim\frac{Y-b}{x}=\frac{Y}{x}$

Assim determinado a, teremos $b=y-ax=\lim(y-ax)=\lim(Y-ax)$ sendo Y o valor de y dado pela equação da curva, que se suppõe conhecida

(x) ou mais simplesmente funcção de x sómente.

... que dá

$$\alpha^2 z^2 - \beta^2 = - \frac{\alpha^2 \beta^2}{x^2},$$

e portanto

$$\alpha^2 (\lim z)^2 - \beta^2 = 0,$$

ou

$$a = \lim z = \pm \frac{\beta}{\alpha}.$$

Pondo em seguida $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x + u$, vem a equação

$$u\left(\frac{u}{x} \pm 2 \frac{\beta}{\alpha}\right) = - \frac{\beta^2}{x},$$

que, fazendo $x = \infty$, dá $\lim u = 0$; portanto $b = 0$.

Logo as equações das asymptotas da hyperbole são

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x.$$

Demonstra-se do mesmo modo que a concavidade estará voltada para os u negativos quando y'' é negativo.

Cournot - T. 1º, pag. 303 dá a seg.te regra. Procura-se a eq.ão da tangente á curva dada no ponto x_1 y_1, exprime-se y_1 em funcção de x_1, e depois faz-se $x_1 = \infty$

Assim p. ex.e na hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, a eq. da tangente no p.to x_1, y_1, é $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$, donde resulta exprimindo y_1 em funcção de x_1

$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b}\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x_1^2}} = \frac{1}{x_1}$, e suppondo agora $x_1 = \infty$, vem $y = \pm \frac{b}{a}x$

Duhamel - T. 1º, pag. 332

87. — *Asymptotas.* — Uma recta diz-se *asymptota* de um ramo infinito de curva se a distancia d'um ponto do ramo de curva á recta tende para o limite zero, quando o ponto se affasta indefinidamente sobre a curva.

Para achar as asymptomas não parallelas ao eixo das ordenadas dos ramos de curvas planas, basta determinar as constantes a e b, que entram na equação

$$y = ax + b,$$

de modo que a differença entre as ordenadas y e Y da recta e da curva, correspondentes á mesma abscissa, tenda para zero quando x tende para o infinito. Para isso é necessario e basta que a equação do ramo de curva possa ser reduzida á fórma

$$Y = ax + b + F(x, y),$$

representando por $F(x, y)$ uma funcção que tende para zero quando x tende para o infinito.

Temos pois, pondo $Y = zx$ e $Y = ax + u$,

$$lim\ z = lim\ \frac{Y}{x} = a + lim\ \frac{b + F(x, y)}{x} = a$$