ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRIA

RECTILINEA E ESPHERICA

PELO DOUTOR

Rufino Guerra Ozorio

LENTE CATHEDRATICO NA FACULDADE DE MATHEMATICA

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1863

ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRIA

RECTILINEA E ESPHERICA

PELO DOUTOR

RUFINO GUERRA OZORIO

LENTE CATHEDRATICO NA FACULDADE DE MATHEMATICA

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1863

Da Faculdade
Para uso da Aula.

TRIGONOMETRIA RECTILINEA

1. Os theoremas de Geometria Synthetica, Eucl. L. 6, p. 2, 8 ou 31, que ligam entre si o seno, coseno, tangente e secante do arco α, podem escrever-se, como se segue: $\cos.\alpha : \text{sen}.\alpha :: R : \text{tg}.\alpha$; ou $\text{tg}.\alpha = \frac{R.\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha} \ldots (1)$; $\text{sen}.^2\alpha + \cos.^2\alpha = R^2 \ldots (2)$; $\cos.\alpha : R :: R : \sec.\alpha$; $\sec.\alpha = \frac{R^2}{\cos.\alpha} \ldots (3)$; $R^2 + \text{tg}.\alpha = \sec.^2\alpha \ldots (4)$

As cotangentes, co-secantes, senosversos são funcções conhecidas das linhas, que figuram nas equações precedentes: R é o raio do circulo de cuja circumferencia é parte o arco α.

Tomando para unidade de medida das linhas $\text{sen}.\alpha$, $\cos.\alpha$...., a linha recta R, as fórmulas (1) (2) (3) (4) podem ser substituidas por $\text{tg}.\alpha = \frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha} \ldots (5)$; $\text{sen}.^2\alpha + \cos.^2\alpha = 1 \ldots (6)$; $\sec.\alpha = \frac{1}{\cos.\alpha} \ldots (7)$; $1 + \text{tg}.^2\alpha = \sec.^2\alpha \ldots (8)$. 'Nesta hypothese, que d'aqui por diante admittiremos, os signaes analyticos $\text{sen}.\alpha$, $\cos.\alpha$, $\text{tg}.\alpha$. . ., significam os *números*, que dão a medida das rectas $\text{sen}.\alpha$, $\cos.\alpha$, $\text{tg}.\alpha$...., quando se toma para unidade de medida a linha recta R: mas querendo que os signaes, $\text{sen}.\alpha$ por exemplo, empregados 'neste sentido, continuem a ser empregados mas na hypothese de que significam linhas rectas, aonde estiver escripto sen.α, escreva-se $\frac{\text{sen.}\alpha}{\text{R}}$, e assim para as outras linhas trignometricas; e sen.α em $\frac{\text{sen.}\alpha}{\text{R}}$ representa uma linha recta.

2. Representando c a circumferencia do círculo do raio R, e α uma parte de c, é

$$\frac{c}{2} : \alpha :: \frac{c}{2} : \alpha \ldots (1).$$

Seja g uma parte aliquota de c, e designe-se pelo termo *grau* o arco g; de (1) tira-se

$$\frac{c}{2g} : \frac{\alpha}{g} :: \frac{c}{2\text{R}} : \frac{\alpha}{\text{R}} \ldots (2).$$

Se $g = \frac{1}{360}$ de c, $\frac{c}{2g} = 180$: se é $g = \frac{1}{400}$ de c, $\frac{c}{2g} = 200$. Na divisão moderna da circumferencia é $g = \frac{1}{400}$ de c; na divisão antiga, (que d'aqui por diante empregaremos, menos quando explicitamente declararmos o contrário) é $g = \frac{1}{360}$ de c. Por abreviar escreveremos em (2) 180° em vez de $\frac{c}{2g}$; A° em vez de $\frac{\alpha}{g}$; π por $\frac{c}{2\text{R}}$; [A°] por $\frac{\alpha}{\text{R}}$: e ficará

$$180^\circ : \text{A}^\circ :: \pi : [\text{A}^\circ] \ldots (3).$$

O primeiro termo de (3) diz que a semicircumferencia se considera dividida em 180 arcos eguaes, chamados graus: A° é o número de graus do arco α : π é o número que significa a semicircumferencia quando se toma o raio d'ella R por unidade: $[A^\circ]$ é o número, que representa o arco α, quando a unidade é R. Podemos pois estabelecer

$$180^\circ : A^\circ :: \pi : [A^\circ] \ldots\ldots (4);\ 180 \times 60' : A' :: \pi : [A'] \ldots\ldots (5);$$
$$180 \times 60 \times 60'' : A'' :: \pi : [A''] \ldots (6);\ 180 \times 60 \times 60 \times 60''' : A''' :: \pi : [A'''] \ldots (7);$$
$$180 \times 60 \times 60 \times 60 \times 60^{\text{IV}} : A^{\text{IV}} :: \pi : [A^{\text{IV}}] \ldots (8);$$ e assim por diante.

Aos quartos termos d'estas proporções dá-se tambem o nome de *arcos rectificados:* é o mesmo que dizer $[A^\circ]$, $[A'] \ldots [A^{\text{IV}}]$ são os numeros, que significam os arcos de A°, $A', \ldots A^{\text{IV}}$, quando se toma por unidade o raio R do círculo, com que os arcos α são descriptos. As fórmulas (4), (5), (6), (7), (8), tomando por π o número, dado por *Euler. Int. á An. dos Inf.* ou *Callet, Taboas de Log.*, approveitando unicamente vinte e duas decimaes, transformam-se em:

$$[A^\circ] = 0{,}01745.32925.19943.29576.92 \times A^\circ \ldots\ldots (9)$$
$$[A'] = 0{,}00029.08882.08665.72159.62 \times A' \ldots\ldots (10)$$
$$[A''] = 0{,}00000.48481.36811.09535.99 \times A'' \ldots\ldots (11)$$
$$[A'''] = 0{,}00000.00808.02280.18492.27 \times A''' \ldots\ldots (12)$$
$$[A^{\text{IV}}] = 0{,}00000.00013.46704.66974.87 \times A^{\text{IV}} \ldots (13)$$
$$[A^{\text{V}}] = 0{,}00000.00000.22445.07782.91 \times A^{\text{V}} \ldots (14)$$

Se na praxe trigonometrica não entram arcos menores do que $0^\circ{,}0000001$ ou proximamente, do que um minuto quarto, regeitaremos (14), que não teremos de empregar. Os coeffecientes de $A^\circ, A' \ldots A^{\text{IV}}$, multiplicados por 10^{10}, dão productos maiores do que a unidade: o que não se verifica relativamente ao coeffeciente de A^{V}. Se quizessemos achar os numeros $[A^\circ]\,[A'] \ldots [A^{\text{IV}}]$, na hypothese de que a unidade linear fôsse $\frac{R}{10^{10}}$, multiplicariamos os coffecientes de $A^\circ, A', \ldots A^{\text{IV}}$ por 10^{10}.

3. Posta a doutrina de Legendre, *Geom.* 14.ª Ed. L. 1, Def. 3, L. 4, p. 9, conclue-se que, sendo α um arco menor do que o quadrante, é $tg.\alpha > \alpha$.....(1) $\alpha > sen.\alpha$.....(2); logo

$$\frac{sen.\frac{1}{2}\alpha}{cos.\frac{1}{2}\alpha} > \frac{\alpha}{2},\text{ ou } \textit{Eucl. L. 6, } sen.\alpha > \alpha(1 - sen.^2\ )$$

e, *a fortiori*, $$sen.\alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{4}....(3).$$

Se, por exemplo, fôsse $\alpha = 1''$, a differença (n.º 2, eq. 11) entre o sen. $1''$ e $[1'']$ seria menor do que 0,00000.00000.00000.2.... (4); se $\alpha = 1'$, $[1'] - sen.1' < 0{,}00000.00000.09$.... (5); se $\alpha = 1°$, vem $[1°] - sen.1° < 0{,}00000.2$.... (6). Por conseguinte

Quando nas questões que houvermos de tractar nos for permittida a approximação de nove decimaes podemos pôr (n.º 2, eq. 10 e 11) $sen.1' = [1'] = 0{,}000290888 = \frac{\pi}{180.60}$.... (7) $sen.1'' = [1''] = 0{,}000004848 = \frac{\pi}{180.60.60}$.... (8); e $[A'] = A'\ sen.1'$.... (9) : $[A''] = A''\ sen.1''$.. ..(10); *que servem para converter os arcos dados em minutos, ou segundos nos arcos rectificados; e reciprocamente.*

O seno de um minuto quarto, sem erro na vigesima segunda decimal é 0,00000.00013.46704.66974.87 (n.º 2, eq. 13), e como $cos.\alpha = \sqrt{1 - sen.^2\alpha}$, teremos $cos.1^{IV} = 0{,}99999.99999.99999.99909.82$..... (11); que differe da unidade em 0,00000.00000.00000.00090.18; e muito menores portanto serão as differenças entre os cosenos e o raio, quando os arcos forem menores do que 0°,00000.01, ou, proximamente, do que um minuto quarto.

O número de graus do arco, egual ao raio, com a approximação de onze decimaes é 57,°29577.95130 7, que é dado por (n.º 2, eq. 4)

$$A° = \frac{180}{\pi} = 57{,}°29577951307....(12)$$

O seno de um minuto segundo, exacto até á decima quinta decimal, é $0{,}00000.48481.36811 = \text{sen.}\,1''$ (n.º 2, eq. 11). . . . (13); e por ser $\cos.\,1'' = \sqrt{1 - \text{sen}^2\,1''}$ resultará $\cos.\,1'' = 0{,}99999.99999.88248\ldots.$ (14); com a mesma approximação do seno.

O coefficiente de A° em (n.º 2, eq. 9), multiplicado por $6 \times 3 \times 10$, dá em producto o número π, com erro menor do que a unidade escripta na vigesima casa decimal.

4. A fórmula $\cos.^2\alpha + \text{sen.}^2\alpha = 1$ póde escrever-se assim

$(\cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha)\,(\cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha) = 1$: os factores $\cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha$, $\cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha$, são as raizes y_1 y_2 da equação do segundo grau $y^2 - 2y\cos.\,\alpha + 1 = 0$: supponhamos pois que são dadas m equações do segundo grau $y^2 - 2y\cos.\alpha + 1 = 0$, $y'^2 - 2y'\cos.\alpha' + 1 = 0$, $y''^2 - 2y''\cos.\alpha'' + 1 = 0\ldots.$; multipliquem-se entre si as raizes d'estas equações, que forem da fórma $y_1 = \cos.\,\text{A} + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\text{A}$; e depois todas as raizes da fórma $y_2 = \cos.\,\text{A} - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\text{A}$; e alcançaremos

$$y_1\,y_1'\ldots.y^{(m-1)} = \cos.\,(\alpha + \alpha'\ldots.\alpha^{(m-1)}) + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,(\alpha + \alpha'\ldots.)\ldots \quad (1)$$

$$y_2\,y_2'\ldots.y_2^{(m-1)} = \cos.\,(\alpha + \alpha'\ldots. + \alpha^{(m-1)}) - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,(\alpha + \alpha'\ldots.)\ldots. \quad (2).$$

Se em (1) e (2) fizermos $\alpha = \alpha' = \alpha''\ldots. = \alpha^{(m-1)}$, (1) e (2) se transformarão em

$$y_1^m = (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha)^m = \cos.\,m\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,m\,\alpha\ldots.(3)$$

$$y_2^m = (\cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha)^m = \cos.\,m\,\alpha - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,m\,\alpha\ldots.(4)$$

D'estas fórmulas conclue-se

$$2\cos.\,m\,\alpha = (\cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha)^m + (\cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha)^m\ldots.\ (5)$$

$$2\sqrt{-1}\,\text{sen.}\,m\,\alpha = (\cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha)^m - (\cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\alpha)^m\ldots.\ (6)$$

Advirtindo em que $+\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}:[+\sqrt{-1}]^2=-1:[+\sqrt{-1}]^3=-\sqrt{-1}:[+\sqrt{-1}]^4=+1$: applicando a fórmula do Binomio; e fazendo as reducções algebricas, resulta o seguinte

$$\text{sen.}\, m\alpha = m \text{ sen.}\,\alpha \cos.^{m-1}\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3} \text{sen.}^3\alpha \cos.^{m-3}\alpha$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.} \text{sen.}^5\alpha \cos.^{m-5}\alpha$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.\ \ 7.} \text{sen.}^7\alpha \cos.^{m-7}\alpha + \ldots (7)$$

$$\cos.\, m\alpha = \cos.^m\alpha - \frac{m(m-1)}{1.\ \ 2.} \text{sen.}^2\alpha \cos.^{m-2}\alpha$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.} \text{sen.}^4\alpha \cos.^{m-4}\alpha$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.} \text{sen.}^6\alpha \cos.^{m-6}\alpha + \ldots (8)$$

Conhecido pois o seno e o coseno de um arco α, o que não é difficil de alcançar, sendo o arco pequeno (n.° 3), as fórmulas (7) e (8) dão o seno e ó coseno do arco multiplo $m\alpha$.

Significando por i o número de termos successivos do segundo membro de (7), contando do segundo por diante, o último dos i termos, que póde servir de *termo geral*, é

$$T_i = \mp \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{2i}{m}\right)}{1.\ 2.\ \ 3.\ldots(2i+1)} (m \text{ sen.}\,\alpha)^{2i+1} \cos.\, \alpha^{m-(2i+1)} \quad \ldots (9);$$

e o termo seguinte e successivo é

$$T_{(i+1)} = -T_i \frac{\left(1-\frac{2i+1}{m}\right)\left(1-\frac{2i+2}{m}\right)(m\,\mathrm{sen.}\,\alpha)^2}{(2i+2)\quad(2i+3)\quad\mathrm{cos.}^2\alpha} \ldots \quad .(10)$$

O signal de T_i será o superior, quando i for impar, e o inferior, quando i for par.

Sendo α menor do que o quadrante é $\mathrm{sen.}\,\alpha = \alpha - \left(\frac{\alpha^3}{4} - k^3\right)$, e k^2 menor do que $\frac{\alpha^3}{4}$, e $(m\,\mathrm{sen.}\,\alpha) = m\alpha - \left(m\alpha\frac{\alpha^2}{4} - k^2 m\right)$; façamos $m\alpha = x$, e $x < \frac{\pi}{2}$, de donde se tira $(m\,\mathrm{sen.}\,\alpha) = \left(m\,\mathrm{sen.}\frac{x}{m}\right)x - = \left(\frac{x^3}{4m^3} - k^2 m\right) \ldots (11)$,

e teremos ainda 'nesta fórmula $x < \frac{\pi}{2}$; mas $\frac{\pi}{2} = 1{,}57\ldots$; logo em (11)

é $x^2 < 4\ldots.$ (12): e (9), (11), (12)

T_1 *é muito menor do que dois terços*.... $T_1 < \frac{2}{3} \ldots.$(13); e $[m\,\mathrm{sen.}\alpha]^2 < 2{,}5\ldots.$ (14)

Quando α fosse egual á quarta parte da semicircumferencia, e $i = 1$, $(2i+2)\ (2i+3)\ \mathrm{cos.}^2\alpha = 10$, e por consequencia

$$(2i+2)\ (2i+3)\ \mathrm{cos.}^2\alpha > 10\ldots.(15),$$

quando α é menor do que metade do quadrante: logo *quando for m α menor do que o quadrante, e m maior do que a unidade, é*

$$\frac{(m\,\mathrm{sen.}\,\alpha)^2}{(2i+2)(2i+3)\,\mathrm{cos.}^2\alpha}$$

menor do que a unidade, e por isso $T_{(i+1)} < T_i$ .... (16): entendendo-se que fallamos somente dos valores numericos de $T_{(i+1)}$ e T_i. E porque (7) os termos são alternadamente positivos e negativos, segue-se (14) (15) que

Approveitando em (7) os primeiros $i+1$ termos successivos, e despresando os seguintes, o erro commettido será muito menor, do que a quarta parte do último termo approveitado, T_i.

Sabe-se que $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)....\left(1-\frac{2i}{m}\right)=1-\frac{A_1}{m}+\frac{A_2}{m^2}-\frac{A_3}{m^3}+....+\frac{A_{2i}}{m^{2i}}$; .... (17). Seja, para um dado valor de i, M o maior numerador das fracções precedentes, e resultará $\frac{A_1}{m}-\frac{A_2}{m^2}+\frac{A_3}{m^3}....-\frac{A_{2i}}{m^{2i}}<\frac{M}{m-1}$: representando por B_i o primeiro membro da desegualdade, será $B_i<\frac{M}{m-1}$ .... (18).

A unica relação, que se dá entre m, e i é $m>i$.

Tome-se o quebrado mui pequeno ε, e determine-se m pela condição $\frac{M}{m-1}<\varepsilon$, ou por $m>1+\frac{M}{\varepsilon}$..... (19), e será B_i muito menor do que ε: ora a fórmula (7), separando os termos em B_i, fica, como se segue, mais commoda para ser ulteriormente examinada,

$$\text{sen.}\,m=(m\,\text{sen.}\alpha)\cos.^{m-1}\alpha-\frac{(m\,\text{sen}\,\alpha)^3\cos.^{m-3}\alpha}{1.\ 2.\ 3.}+\frac{(m\,\text{sen.}\alpha)^5\cos.^{m-5}\alpha}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}-$$

$$+\frac{B_1\,(m\ \text{sen.}\,\alpha)^3\cos.^{m-3}\alpha}{1.\ 2.\ 3.}-\frac{B_2\,(m\,\text{sen.}\,\alpha)^5\cos.^{m-5}\alpha}{1.\ 2.\ 3.\ 4,\ 5.}+.....(20)$$

Depois de $i=5$ os denominadores 1. 2. 3. .... $(2i+1)$ crescem tão rapidamente que se for $1.\,2.\,3...(2i+1)=N$, será $1.\,2.\,3...(2i+3)>100\,N$; e para o duodecimo termo da primeira linha de (20), ou undecimo da segunda, é 1. 2. 3. 4....23 = 25852.01673.88849.76640.000 ... (21).

Os termos da primeira linha de (20) convergem para zero 'numa razão mais rapida do que $\frac{1}{4}$, contando do termo $i=1$; por conseguinte póde escolher-se i tal que dê para $T_{(i+1)}$ na primeira linha (20) uma fracção inattendivel.

B$_i$ é dado por $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{2i}{m}\right)=1-\text{B}_i$,

do que se infere que B$_i$ é positivo, menor do que a unidade, porém tanto maior, quanto maior for i.

Tomando pois para i o número que faz $T_{(i+1)}$, na primeira linha (20), inattendivel; e determinando m, para este valor de i, por (19), a segunda linha (20) dará um número menor do que δ, sendo

$$\delta=\frac{2i}{9}(m\,\text{sen.}\,\alpha)^3\cos.^{m-3}\alpha. \ldots (22)$$

Logo (20) póde reduzir-se á sua primeira linha.

Seja i um número pár $2p$; $\cos.^i\beta=(1-\text{sen}^2\beta)^p$: e $\cos.^i\beta>(1-\beta^2)^p$:

$$(1-\beta^2)^p=1-p\beta^2+\frac{p.\,p-1}{1.\;2.}\beta^4-\frac{p.\,p-1.\,p-2}{1.\;\;2.\;\;3.}\beta^6+\ldots.:$$

e fazendo $\beta m=x$, resulta

$$\cos.^i\frac{x}{m}>1-\left(\frac{i}{2m}\right).\left(\frac{x^2}{m}\right)+\frac{\left(1-\frac{2}{i}\right)}{1.\;2.}\left(\frac{i}{2m}\right)^2\left(\frac{x^2}{m}\right)^2$$

$$-\frac{\left(1-\frac{2}{i}\right)\left(1-\frac{4}{i}\right)}{1.\;\;2.\;\;3.}\left(\frac{i}{2m}\right)^3\left(\frac{x^2}{m}\right)^3+\ldots\ldots (23)$$

Se i é um número impar $2p+1$, teremos $\cos.^i \beta > \cos.\beta\,(1-\beta^2)^p$, fazendo tambem $\beta m = x$, e notando que $p = \frac{i-1}{2}$, ficará

$$\cos.^i \frac{x}{m} > \cos.\frac{x}{m}\left[1-\left(\frac{i-1}{2m}\right)\left(\frac{x^2}{m}\right)+\frac{\left(1-\frac{2}{i-1}\right)}{1.\quad 2.}\left(\frac{i-1}{2m}\right)^2\left(\frac{x^2}{m}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{\left(1-\frac{2}{i-1}\right)\left(1-\frac{4}{i-1}\right)}{1.\quad 2.\quad 3.}\left(\frac{i-1}{2m}\right)^3\left(\frac{x^2}{m}\right)^3+\ldots\ldots\right]\ldots\ldots(24)$$

Suppondo $m > i$ tanto em (23) como em (24), e $x < \frac{\pi}{2}$, os termos successivos dos segundos membros de (23) e (24) approximam-se continuamente de zero, e com tanto maior rapidez, quanto maior for m; e para um dado valor de i é sempre possivel determinar m de modo (n.º 2, eq.ms 10, 11, 12, 13, 14) que (23) o erro que se commette tomando $\cos.^i \frac{x}{m} = 1$ seja menor, do que uma fracção muito pequena.

Na egualdade (24) podemos pôr, com uma approximação da ordem da precedente

$$\cos.^i \frac{x}{m} = \cos.\frac{x}{m}, \text{ ou } \cos.\frac{x}{m}\left[\cos.^{i-1}\frac{x}{m}-1\right]=0$$

mas sendo $\frac{x}{m}$ um arco pequeno não póde admittir-se $\cos.\frac{x}{m}=0$, logo

$$\cos.^{i-1}\frac{x}{m}-1=0, \text{ o que dá } \cos.^{i-1}\frac{x}{m}=+1, \text{ e } \cos.\frac{x}{m}=+1;$$

e é com effeito $+1$ o *unico número,* que póde tomar-se, como raiz nu-

merica da equação $\cos.^{i-1}\frac{x}{m}-1=0$, porque sómente o número *unidade* é que dá as potencias eguaes á raiz.

Por consequencia, podendo tomar-se m mui grande, e $m\alpha=x$, sendo x menor do que $\frac{\pi}{2}$, estamos auctorisados a escrever na primeira linha de (20) a unidade em vez de $\cos.^{i}\frac{x}{m}$, ou de $\cos.^{i}\alpha$.

Nas mesmas circumstancias, e advertindo que

$$\left[m\,\text{sen.}\frac{x}{m}\right]=x-\left[x\frac{x^2}{4m^2}-mk^2\right]\text{podemos, pôr}\left[m\,\text{sen.}\frac{x}{m}\right]=x:\ (20)$$

e por isso (20) se transforma em

$$\text{sen.}x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{x^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}-\ldots.\ (\text{A})$$

e do mesmo modo

$$\cos.x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}-\ldots.\ (\text{B})$$

Sejam m e n dois números inteiros e positivos, e $m<n$: o arco em graus $x^\circ=\frac{m}{n}.\,90^\circ$ dá o arco rectificado $[x^\circ]=\frac{m}{n}.\frac{\pi}{2}$; e as fórmulas procedentes se transformam em

$$\text{sen.}\frac{m}{n}.\,90^\circ=\frac{m}{n}.\frac{\pi}{2}-\frac{m^3}{n^3}.\frac{\pi^3}{1.2.3.2^3}+\frac{m^5}{n^5}.\frac{\pi^5}{1.2.3.4.5.2^5}-\ldots.$$

$$\text{e}\ \cos.\frac{m}{n}.\,90^\circ=1-\frac{m^2}{n^2}.\frac{\pi^2}{1.2.2^2}+\frac{m^4}{n^4}.\frac{\pi^4}{1.2.3.4.2^4}-\ldots.$$

O cálculo numerico dos termos $\frac{\pi^i}{1.2.3.4....i.2^i}$ não offerece complicação: feito elle, e contentando-nos com a approximação de quinze decimaes, virá:

$$[C]$$

$$\begin{aligned}
\text{sen.}\frac{m}{n}.90^\circ = & [1,57079.63267.948966].\frac{m}{n} \\
& -[0,64596.40975.062463].\frac{m^3}{n^3} \\
& +[0,07969.26262.461670].\frac{m^5}{n^5} \\
& -[0,00468.17541.353187].\frac{m^7}{n^7} \\
& +[0,00016.04411.847874].\frac{m^9}{n^9} \\
& -[0,00000.35988.432352].\frac{m^{11}}{n^{11}} \\
& +[0,00000.00569.217292].\frac{m^{13}}{n^{13}} \\
& -[0,00000.00006.688035].\frac{m^{15}}{n^{15}} \\
& +[0,00000.00000.060669].\frac{m^{17}}{n^{17}} \\
& -[0,00000.00000.000438].\frac{m^{19}}{n^{19}} \\
& +[0,00000.00000.000003].\frac{m^{21}}{n^{21}}
\end{aligned}$$

$$[D]$$

$$\begin{aligned}
\cos.\frac{m}{n}.90^\circ = & \ 1,00000.00000.000000 \\
& -[1,23370.05501.361698].\frac{m^2}{n^2}
\end{aligned}$$

$$+[0,25366.95079.010480].\frac{m^4}{n^4}$$

$$-[0,02086.34807.63353\ ].\frac{m^6}{n^6}$$

$$+[0,00091.92602.748394].\frac{m^8}{n^8}$$

$$-[0,00002.52020.423730].\frac{m^{10}}{n^{10}}$$

$$+[0,00000.04710.874779].\frac{m^{12}}{n^{12}}$$

$$-[0,00000.00063.866031].\frac{m^{14}}{n^{14}}$$

$$+[0,00000.00000.656596].\frac{m^{16}}{n^{16}}$$

$$-[0,00000.00000\ 005294].\frac{m^{18}}{n^{18}}$$

$$+[0,00000.00000.000034].\frac{m^{20}}{n^{20}}$$

Fazendo em (C) $m=1$, $n=10$ teremos sen. $\frac{m}{n}90^\circ=$ sen. 9° (divisão antiga) $=$ sen. 10° (divisão moderna) $=0,15643.4465040231$; que é, como devia ser, o mesmo número, que vem para o seno do arco de 10° (*d. m.*) nas táboas de Callet *(Senos naturaes)*. As fórmulas precedentes, que servem para a construcção de uma *Táboa dos Senos*, são tanto mais faceis de calcular, quanto menor for $\frac{m}{n}$: de maneira que se $\frac{m}{n}>\frac{1}{2}$, isto é, se $\frac{m\,90^\circ}{n}<45^\circ$ não tem de calcular-se senão oito termos em *(C) (D)*, quando muito; porque $2^{15}=32368$, $2^{16}=64736$, $2^{17}=129472$.

5. I. Se forem dadas duas linhas rectas, e um anglo menor do que dois rectos, com estas rectas, como lados, que comprehendam o angulo dado, póde construir-se um triangulo. *Eucl. Geom.* L. 1, p. 3, 23, e post. 1. Todos os triangulos assim construidos, e com os mesmos elementos, são eguaes por justa-posição *Eucl. Geom.* L. 1, p. 4.

II. Se dois angulos, tomados junctos, são menores do que dois rectos, com elles e com uma recta qualquer, que deva tomar-se como adjacente, ou como opposta, aos dictos angulos, póde construir-se um triangulo, *Eucl. Geom.* L. 1, p. 3, 32, 23. Todos os triangulos construidos com estes elementos, e do mesmo modo, são eguaes por justa-posição, *Eucl. Geom.* L. 1, p. 26.

III. Se tres rectas são taes, que duas quaesquer d'ellas, tomadas como se quizer, são maiores do que a terceira, é possivel construir um triangulo, que tenha por lados as tres rectas propostas, *Eucl.* L. 1, *Geom.* p. 22. Todos os triangulos, que se construirem com as tres rectas dadas, são eguaes por justa-posição, *Eucl. Geom.* L. 1, p. 8.

IV. (*a*) Sendo dado um angulo recto, ou um angulo obtuso menor do que dois rectos, e tambem duas rectas deseguaes, póde construir-se um triangulo, no qual a maior das rectas dadas seja lado opposto ao angulo dado, e a menor adjacente ao dicto angulo, *Eucl. Geom.* L. 1, p. 3, 23, def. 15, post. 3. Todos os triangulos construidos d'este modo, e com estes dados, são eguaes por justa-posição, *Eucl. Geom.* L. 1, p. 47, L. 2, p. 13.

(*b*) Se o angulo dado é agudo, e se póde escolher para lado opposto ao dicto angulo a maior das rectas dadas, deduzem as mesmas conclusões precedentes (*a*).

(*c*) Se o angulo dado é agudo, e deve escolher-se para lado opposto ao dicto angulo, no triangulo que pertende construir-se, a menor das rectas, formaremos, *Eucl. Geom.* L. 1, p. 12, um triangulo rectangulo, que tenha por hypothenusa a maior das linhas dadas, e por um dos angulos agudos o angulo dado; e a respeito do catheto, opposto a este angulo, se realisará uma das tres condições seguintes: ou este catheto é egual á menor das rectas dadas, ou é maior, ou é menor do que a dicta recta: no primeiro caso o triangulo rectangulo, que acaba de construir-se é o triangulo unico, que póde formar-se, com os dados suppostos; no segundo podem construir-se, com esses mesmos dados, dois triangulos differentes; no terceiro é impossivel a construcção do triangulo: logo

Com duas rectas, e um angulo, que deva ficar opposto a uma d'ellas, e menor do que dois rectos, póde construir-se um triangulo, dois, ou nenhum; e por isso a este último caso de resolução de triangulos, se chama *Caso duvidoso.*

V. Com tres angulos, os quaes tomados junctos sejam equivalentes a dois rectos póde formar-se um número de triangulos tão grande quanto se quizer: porque posta uma recta qualquer, e com dois dos angulos dados, construe-se um triangulo; e construido este construem-se os mais que se quizer por meio de systemas de tres rectas parallelas respectivamente aos tres lados do primeiro triangulo.

Todas as combinações tres a tres, que podem formar-se com os seis elementos do triangulo, a saber, os tres lados e os tres angulos, ficam comprehendidas nas cinco divisões precedentes (I, II, III, IV, V): porque o número das dictas combinações é $\frac{6.5.4}{1.2.3}=20$; ora d'esta vinte combinações as nove, em que entra um lado e dois angulos, dados, estão collocadas em (II); as nove em que entram dois lados e um angulo ficam comprehendidas em (I), (IV); uma em que entram os tres lados pertence a (III); e a dos tres angulos a (V).

Se o número dos dados, offerecidos para construir um triangulo, é maior do que o número tres, o excesso d'aquelle número sôbre o número tres representa um número de dados inutil; ou então o problema proposto é absurdo.

E com effeito, sendo dados mais de tres elementos para a construcção do triangulo, a construcção se póde sempre reduzir a uma das tres hypotheses (I, II, III) tomando entre os dados unicamente os *convenientes:* e construido assim o triangulo, ou os dados satisfazem á construcção supposta, e 'neste caso ha dados inuteis; ou não satisfazem, e então as supposições são contradictorias.

Se o número de dados para construir um triangulo é menor do que tres o problema é indeterminado: isto é, com dois elementos podem construir-se muitos triangulos.

Ultimamente advirtiremos: que dois angulos, os quaes, tomados junctamente, são maiores do que dois rectos, não podem ser os dois angulos internos de um triangulo, *Eucl.* L. 1, p. 17; e tambem que: como tres angulos A, B, C, dados por $A+B+C \gtrless \pi$ não é possivel construir um triangulo, *Eucl.* L. 1, p. 17, 32. Relativamente aos lados do triangulo advirta-se tambem que não póde construir-se um triangulo, se dois lados tomados, como se quizer, não forem maiores do que o terceiro, *Eucl.* L. 1, p. 20.

6. Representem a, b, c os tres lados de um triangulo; A, B, C os angulos d'elle; de sorte que seja A opposto ao lado a, B opposto ao lado b, e C a c: entre os pontos A e B da recta c tome-se um ponto, e outro entre os pontos A e C da recta b, e de modo que a distancia r do ponto, tomando em c, ao ponto B, seja egual á distancia a C do ponto to-

mado em b; abaixadas dos pontos escolhidos em c e b, e de A, perpendiculares a a, designem-se estas perpendiculares por p, P, p', contando-as successivamente da que é abaixada de c, depois de A, e por fim de b; feito isto, virá *Eucl.* L. 6, p. 2; $r:c::p:\mathrm{P}\ldots(1)$; $r:b::p':\mathrm{P}\ldots(2)$; significando pelos signaes $r\mathrm{P}$, cp, bp', os rectangulos de r e P: de c e p: de b e p': resulta, *Eucl.* L. 6, p. 16; $r\mathrm{P}=cp\ldots(3)$; $r\mathrm{P}=bp'\ldots(4)$; e $cp=bp'\ldots(5)$; e por fim, *Eucl.* L. 6, p. 16, $b:c::p:p'\ldots(6)$; mas esta proporção é o mesmo que $b:c::\mathrm{R}p:\mathrm{R}p'\ldots(7)$, *Eucl.* L. 5, p. 15: representando R uma recta qualquer: mas se a recta R é o raio do círculo, em que se construem as linhas trigonometricas dos arcos, os quaes, como é sabido, *Eucl.* L. 6, p. 33, podem servir de medida dos angulos, uma mui simples construcção dá $p:\text{sen. B}::r:\mathrm{R}\ldots(8)$; $p':\text{sen. C}::r:\mathrm{R}\ldots(9)$; ou *Eucl.* L. 6, p. 16, $p\mathrm{R}=r\,\text{sen. B}\ldots(10)$; $p'\mathrm{R}=r\,\text{sen. C}\ldots(11)$; o que reduz (7) a, $b:c::r\,\text{sen. B}:r\,\text{sen. C}\ldots(12)$; do que resulta, *Eucl.* L. 5, p. 15;

$$b:c::\text{sen. B}:\text{sen. C}\ldots(13).$$

Semilhantemente se podia achar; $b:a::\text{sen B}:\text{sen. A}\ldots(14)$ Das proporções (13) e (14) e de *Eucl.* L. 5, p. 11, resulta:

$$a:c::\text{sen. A}:\text{sen C}\ldots(15).$$

Adoptando para unidade de medida das linhas rectas a, b, c, a unidade u, e para unidade nas linhas trigonometricas a recta R (n.º 2), e continuando a representar por a, b, c os números dados por $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{u}$, $\frac{c}{u}$, e por sen. A, sen. B, sen. C, os números formados por $\frac{\text{sen. A}}{\mathrm{R}}$, $\frac{\text{sen. B}}{\mathrm{R}}$, $\frac{\text{sen. C}}{\mathrm{R}}$, as equações (13), (14), (15), podem escrever-se, como se segue,

$$b\,\text{sen. C}=c\,\text{sen. B}\ldots(a);\ b\,\text{sen. A}=a\,\text{sen. B}\ldots(b);\ a\,\text{sen. C}=c\,\text{sen. A}\ldots(c).$$

As tres equações precedentes involvem unicamente numeros abstractos, ou antes os signaes de numeros abstractos, e por consequencia podemos usar d'ellas empregando os recursos, que offerece a *Algebra*.

Já vimos tambem que das tres equações (a), (b), (c), sómente duas são distinctas, por quanto qualquer d'ellas é consequencia necessaria da existencia das outras duas. Logo, tudo o que dizem as tres equações (a), (b), (c), se resume no seguinte typo:

$$a \operatorname{sen.} B = b \operatorname{sen.} A \ldots (A). \quad a \operatorname{sen.} C = c \operatorname{sen.} A \ldots (B)$$

Da analyse, convenientemente applicada ás fórmulas (A) e (B), se conclue:

Primo: *Quaes são as hypotheses, em que o problema proposto da resolução de um triangulo tem muitas soluções, uma, ou nenhuma.*

Secundo: *Quaes são as fórmulas, com que, dado o número sufficiente de elementos de um triangulo, se determinam os elementos restantes.* E é o que passamos a mostrar.

7. As fórmulas (A) (B) (n.º 6), applicadas aos triangulos rectangulos, em que se póde decompor um triangulo qualquer, abaixando de A, por exemplo, sôbre a uma perpendicular, mostram que $a = b \cos. C + c \cos. B$; e consequentemente teremos o systema das tres fórmulas seguintes:

$$a = b \cos. C + c \cos. B \ldots (1) \quad b = a \cos. C + c \cos. A \ldots (2)$$

$$c = a \cos. B + b \cos. A \ldots (3)$$

A fórmula (3) é o mesmo que $\frac{c}{a} = \cos. B + \frac{b}{a}. \cos. A$, ou (A) (B) (n.º 6)

$$\operatorname{sen.} C = \operatorname{sen.} A \cos. B + \operatorname{sen.} B \cos. A; \text{ mas } C = \pi - (A + B),$$

logo $$\operatorname{sen.} (A + B) = \operatorname{sen.} A \cos. B + \operatorname{sen.} B \cos. A \ldots (4)$$

A fórmula (4) é uma identidade para todos os valores positivos de A e B, em que se não considere $A=0$, ou $B=0$; ou tambem $A+B=\pi$; ou $A+B>\pi$. Ora $\cos.(A+B)=\pm\sqrt{1-\text{sen.}^2(A+B)}$; mas $1-\text{sen.}^2(A+B)=1-\text{sen.}^2A\cos.^2B-2\,\text{sen.}A\cos.A\,\text{sen.}B\cos.B-\cos.^2A\,\text{sen.}^2B=1-(1-\cos.^2A)\cos.^2B-2\,\text{sen.}A\,\text{sen.}B\cos.A\cos.B-(1-\text{sen.}^2A)\,\text{sen.}^2B=1-\cos.^2B+\cos.^2A\cos.^2B-2\,\text{sen.}A\,\text{sen.}B\cos.A\cos.B-\text{sen.}^2B+\text{sen.}^2A\,\text{sen.}^2B=(\cos.A\cos.B-\text{sen.}A\,\text{sen.}B)^2$; ou a $(\text{sen.}A\,\text{sen.}B-\cos.A\cos.B)^2$ logo:

$$\cos.(A+B)=\pm(\cos.A\cos.B-\text{sen.}A\,\text{sen.}B)\ldots.(5).$$

A fórmula (5) deve verificar-se para o caso $B=90°$, com tanto que $A<90°$; e por isso $\cos.(A+90°)=\pm(-\text{sen.}A)=\mp\text{sen.}A$; mas uma mui simples construcção geometricá mostra que, sendo α um arco positivo qualquer é $\cos.(\alpha+90°)=-\text{sen.}\alpha\ldots\ldots(6)$; assim como $\text{sen.}(\alpha+90°)=\cos.\alpha\ldots.(7)$; logo em $\cos.(A+90°)=\mp\text{sen.}A$ deve tomar-se o signal superior, e por isso (5) é o mesmo que

$$\cos.(A+B)=\cos.A\cos.B-\text{sen.}A\,\text{sen.}B\ldots.(8).$$

As fórmulas (4) e (8) são identidades; isto é, verificam-se sempre, seja qual for a grandeza, ou o signal, que se attribua a A, e B.

Com effeito, escolha-se o arco $A'=A+90°$, e será $A'+B=A+B+90°$ e por conseguinte $\text{sen.}(A+B+90°)$ é egual (eq. 7) a $\text{co.}(A+B)$; e $\cos.(A+B+90°)=-\text{sen.}(A+B)$: logo $\text{sen.}(A'+B)=\cos.A\cos.B-\text{sen.}A\,\text{sen.}B\ldots.(9)$ e $\cos.(A'+B)=-\text{sen.}A\cos.B-\text{sen.}B\cos.A\ldots.(10)$; eliminando, sen. A, e cos. A pelas relações $A=A'-90°$, $\cos.A=\text{sen.}A'$ (eq. 7); $\text{sen.}A=-\cos.A'$ (eq. 6), fica

$$\text{sen.}(A'+B)=\text{sen.}A'\cos.B+\text{sen.}B\cos.A'\ldots.(11),\text{ e}$$

$$\cos.(A'+B)=\cos.A'\cos.B-\text{sen.}A'\,\text{sen.}B\ldots\ldots(12)$$

que são o mesmo que (4) (8).

Repetindo o mesmo raciocinio concluiremos que (4) e (8) se verificam, por muito grande que se supponha o arco A+B.

Sabe-se que sendo A — B um arco qualquer, positivo, ou negativo, é sempre sen. $(A-B)=$ sen. $(A+2m\pi-B)$; cos. $(A-B)=$ cos. $(A+2m\pi-B)$ sendo m um número inteiro positivo: escolha-se pois m de modo que $2m\pi$ seja maior do que B, e alcançaremos (11) (12)

$$\text{sen.}\,(A+2m\pi-B)=\text{sen.}\,A\cos.\,(2m\pi-B)+\cos.\,A\,\text{sen.}\,(2m\pi-B)\ \text{e}$$

$$\cos.\,(A+2m\pi-B)=\cos.\,A\cos.\,(2m\pi-B)-\text{sen.}\,A\,\text{sen.}\,(2m\pi-B);\ \text{ou}$$

$$\text{sen.}\,(A-B)=\text{sen.}\,A\cos.\,(-B)+\cos.\,A\,\text{sen.}\,(-B)$$

$$\text{sen.}\,(A-B)=\text{sen.}\,A\cos.\,B-\text{sen.}\,B\cos.\,A\ldots.(13)$$

$$\cos.\,(A-B)=\cos.\,A\cos.\,(-B)-\text{sen.}\,A\,\text{sen.}\,(-B)$$

$$\cos.\,(A-B)=\cos.\,A\cos.\,B+\text{sen.}\,B\,\text{sen.}\,A\ldots.(14).$$

Se em (4), (8); (11), (12); (13), (14) fizessemos $B=0$, resultaria sen. A = sen. A, cos. A = cos. A; sen. A′ = sen. A′, cos. A′ = cos. A′ : e pondo em (13) (14) $A=0$, fica sen. $(-B)=$ sen. $(-B)$, cos. $(-B)$ $=$ cos. $(-B)$. Por consequencia, sendo α e β dois arcos quasquer em grandeza e signal, verificar-se-hão sempre as fórmulas seguintes, que por isto são perfeitas *identidades:*

$$(A)\ldots.\ \text{sen.}\,(\alpha+\beta)=\text{sen.}\,\alpha\ \cos.\,\beta+\text{sen.}\,\beta\ \cos.\,\alpha:$$

$$(B)\ldots.\ \cos.\,(\alpha+\beta)=\cos.\,\alpha\ \cos.\,\beta-\text{sen.}\,\alpha\ \text{sen.}\,\beta.$$

Comparadas estas fórmulos a (A) (B) do (n.º 4) conclue-se que o seno e o coseno de um arco α são *funcções* conhecidas do arco α, embora seja $a > \frac{\pi}{2}$: e por conseguinte (A) (B) do número precedente importam o mesmo que duas fórmulas, que ligam entre si os tres lados e os tres angulos: mas para que o triangulo possa existir é necessario que $A + B + C = \pi$; logo a

$$(C) \ldots . \ a \operatorname{sen.} (A + C) = b \operatorname{sen.} A: \quad a \operatorname{sen.} C = c \operatorname{sen.} A \ldots . \ (D);$$

podemos dar a fórma;

$$a - b F(A, C) = 0 \ldots . \ (15); \quad a - c f(A, C) = 0 \ldots . \ (16)$$

E d'estas últimas expressões se conclue que:

I. É possivel a determinação numerica de A e c, e por tanto de B, quando forem dados b, a, C (n.º 5, I); e com effeito; (C)

a sen. A cos. C + a cos. A sen. C = b sen. A; e $tg.A\,(b - a \cos. C) = a \operatorname{sen.} C$; ou

$$tg. A = \frac{a \operatorname{sen.} C}{b - a \cos. C} \ldots . \ (17); \text{ e se for } C < 90, \text{ façamos}$$

$$(18) \ldots . \ \frac{a}{b} \cos. C = tg. \varphi, \text{ e resultará } tg. A = \frac{\sqrt{2}\, a \operatorname{sen.} C \cos. \varphi}{2b \cos. (45 + \varphi)} \ldots . \ (19)$$

Se for $C > 90°$ poremos

$$\frac{a}{b} \operatorname{sen.} (C - 90°) = tg. \psi, \text{ e } tg. A = \frac{\sqrt{2}\, a \operatorname{sen.} C \cos. \psi}{2b \operatorname{sen.} (45 + \psi)} \ldots . \ (20)$$

Determinado assim A, deduz-se $B = \pi - (A + C)$; e (D) assigna o valor de c; e fica d'este modo resolvido o triangulo.

II. É possivel determinar dois lados de um triangulo, sendo dado um lado e dois angulos, (e por conseguinte tres angulos); ao que se prestam (C) e (D), sem necessidade de transformação (n.º 5, II).

III. Podem determinar-se os angulos do triangulo, sendo dados os tres lados, porque (C) $a \operatorname{sen.} A \cos. C + a \cos. A \operatorname{sen.} C = b \operatorname{sen.} A$, e (D) $a \cos. C + c \cos. A = b$, $\pm a \sqrt{1 - \operatorname{sen.}^2 C} + c \cos. A = b$, e (D) $\pm \sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{sen.}^2 A} = b - c \cos. A$, ou

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A \ldots (21);$$

e advirta-se que se póde achar do mesmo modo

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos. B \ldots (22);$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C \ldots (23);$$

ora fazendo $a + b + c = 2p$, resulta

$$\cos. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \ldots (24) \quad \operatorname{sen.} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}} \ldots (25)$$

Conhecido assim A póde semilhantemente determinar-se B; ou então recorrer a (19) 20). O valor de c (I) póde tambem deduzir-se de (23), e depois A de (19) ou (20).

IV. Em quanto á hypothese de ser dado, por exemplo, a, c, A: discorreremos como se segue.

(a) De (D) tire-se $\operatorname{sen.} C = \dfrac{c \operatorname{sen.} A}{a} \ldots (26)$; se $A = 90°$, ou $A > 90°$, C é agudo, isto é, deve ser $C < 90°$, aliás o problema supposto seria impossivel de resolver; assim como seria impossivel, se fosse $A \geqq 90°$, e $c \geqq a$, *Eucl.* L. 1, p. 5, 18, 19, 32: e'nisto se vê um dos muitos exemplos, que podem dar-se, por onde podemos convencer-nos de que *a raiz numerica da equação nem sempre é a resposta ao problema, que tracta de resolver-se,* podendo o problema ser impossivel por causa da contradição entre as hypotheses. Mas sendo $A > 90°$, ou $A = 90°$, e $c < a$, (26) dará entre [n.° 5, IV, (a)] as raizes uma para C, que satisfaz ao problema; e é $C < 90°$ a raiz procurada.

(b) Semilhantemente se for $A < 90°$, e $c < a$, (26) dará entre as suas raizes uma, que satisfaz ao problema, e é $C < 90°$, e $C < A$ [n.° 5, IV, (b)].

(c) Se $A < 90°$, e $c > a$, mas $a > c \operatorname{sen.} A$. (26) dá duas raizes $C < 90°$, e $C > 90°$, porém < 180, que satisfazem ao problema; o qual tem por tanto duas soluções; sendo α o menor arco, que satisfaz a (26) isto é $\alpha < 90°$, e $C' = \alpha$; a outra raiz é $C'' = 180° - \alpha$ [n.° 5, IV, (c)]. Se fôsse $a < c \operatorname{sen.} A$, (26) mostrava logo a impossibilidade de solução.

V. A simples inspecção de (C), (D) ou (15) (16) mostra que o problema tem tantas soluções, quantas se quizerem, sendo dados A e C, isto é, sendo dados os tres angulos do triangulo. Pelo mesmo modo se póde concluir o que se disse (n.° 5, V) se forem dados mais ou menos de tres elementos do triangulo.

8. *As fórmulas* (1), (2), (3) *do número precedente; ou* (21), (22), (23) *do mesmo número, que podem ser empregadas para a resolução dos triangulos, conduzem aos mesmos resultados, a que já chegamos pelas fórmulas* (A) *e* (B) *do número seis.*

Primeiramente; $a = b \cos. C + c \cos. B \ldots (1)$; $b = a \cos. C + c \cos. A \ldots (2)$; $c = a \cos. B + b \cos. A \ldots (3)$; eliminando de (2) e (3) a por meio (1), fica

$$b \operatorname{sen}^2 C - c\,[\cos. A + \cos. B \cos. C] = 0 \ \ldots\ldots (4)$$

$$b\,[\cos. A + \cos. B. \cos. C] - c \operatorname{sen.}^2 B = 0 \ldots\ldots (5),$$

de donde
$$\frac{b \operatorname{sen.}^2 C}{c \operatorname{sen.}^2 B} = \frac{c}{b} \quad \ldots (6)$$

e $$b^2 \text{sen.}^2 C = c^2 \text{sen.}^2 B, \text{ que dá } b = \pm \frac{c \text{ sen. } B}{\text{sen. } C};$$

mas B, e C são menores do que dois rectos, logo;

$$b \text{ sen. } C = c \text{ sen. } B \ldots (7);$$

eliminando entre (1), (2), (3) b, e depois c, resulta

$$c \text{ sen. } A = a \text{ sen. } C \ldots (8);\ b \text{ sen. } A = a \text{ sen. } B \ldots (9)$$

que são o mesmo que (n.º 6, A, B.).

As equações (4) e (5) representam uma equação unica, quando 'nellas suppomos desconhecidos b, c, e dados A, B, C: porque *(Algebra)* para que (4) e (5) não sejam contradictorias deve entre os dados verificar-se a clausula seguinte

$$\text{sen.}^2 B \text{ sen.}^2 C = (\cos. A + \cos. B \cos. C)^2;$$

ou $$\text{sen. } B \text{ sen. } C = \pm (\cos. A + \cos. B \cos. C);$$

ou $\cos. A = -\cos. B \cos. C \pm \text{sen. } B \text{ sen. } C$; mas deve ser $A + B + C = \pi$;

logo $$\cos. (B + C) = \cos. B \cos. C \mp \text{sen. } B \text{ sen. } C;$$

ou antes $$\cos. (B + C) = \cos. B \cos. C - \text{sen. } B \text{ sen. } C$$

regeitando o signal inferior; logo (4) é o mesmo que

$$b \text{ sen. } C - c \text{ sen. } B = 0;$$

e (5) é tambem $b\,\text{sen.}\,C - c\,\text{sen.}\,B = 0.$

Convem advirtir que de (1), (2) e (3) sahem (21), (22) (23) do mesmo (n.º 7).

Se quizermos servirnos da regra de *Cramer* para obter as expressões algebricas das raizes a, b, c, de (1), (2), (3), suppondo A, B, C, dados acharemos os numeradores das expressões das incognitas nullos; o denominador commum das dictas expressões é

$$D = \cos.^2 A + \cos.^2 B + \cos.^2 A \cos.^2 B + \text{sen.}^2 A\,\text{sen.}^2 B$$

$$-2\,\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,B\ \cos.\,A\ \cos.\,B + 2\cos.\,A\ \cos.\,B\ \cos.\,C$$

$$-1 = -(1-\cos.^2 A) + \text{sen.}^2 A,\ \text{sen.}^2 B + \cos.^2 B + \cos.^2 A\ \cos.^2 B$$

$$-2\cos.\,A\ \cos.\,B\ (\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,B + \cos.\,A\ \cos.\,B - \text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,B)$$

por ser $\cos.\,C = -\cos.\,(A+B)$; é $D = -\text{sen.}^2 A + \text{sen.}^2 A\ \text{sen.}^2 B + \cos.^2 B$

$$+\cos.^2 A\ \cos.^2 B - 2\ \cos.^2 A\ \cos.^2 B = -\,\text{sen.}^2 A\ \cos.^2 B + \cos.^2 B$$

$$+\cos.^2 A\ \cos.^2 B - 2\ \cos.^2 A\ \cos.^2 B = 0:$$

seria pois $a = \dfrac{0}{0}: b = \dfrac{0}{0}: c = \dfrac{0}{0}.$

Um dos systemas de raizes, que satisfaz ás equações, mas não ao problema, é $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, que não contradizem as expressões geraes $\dfrac{0}{0}$ dos lados do triangulo.

Tomando agora, $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,\cos.\,A.\,.\,.\,.$ (10) : $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\,\cos.\,B.\,.\,.\,.$ (11) : $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,\cos.\,C.\,.\,.\,.$ (12): que são a traducção analytica das propriedades conhecidas, Eucl., liv. 2, p. 12, e 13; e liv. 6, p. 2, e eliminando a de (11) (12) por meio de (10), fica:

$$(c - b\ \text{cos. A})^2 = (b^2 + c^2 - 2\,bc\ \text{cos. A})\ \text{cos}^2\ \text{B}, \quad \text{e} \quad (b - c\ \text{cos. A})^2 = (b^2 + c^2 - 2\ bc\ \text{cos. A})\ \text{cos}^2\ \text{C};$$

e resolvendo estas equações em ordem a b, e a c acha-se:

$$b\ (\text{sen. B cos. A} \pm \text{sen. A cos. B}) + c\ \text{sen B} = 0 \ldots (13)$$

$$b\ \text{sen. C} - c\ (\text{sen. C cos. A} \pm \text{sen. A cos. C}) = 0 \ldots (14);$$

e para que seja possivel a co-existencia d'estas equações é necessario que entre os dados se verifiquem todas ou algumas das condições seguintes:

$$\text{sen.B sen.C} = (\text{sen.B cos.A} + \text{sen.A cos.B})\ (\text{sen.C cos.A} + \text{sen.A cos.C}) \ldots (15)$$

$$\text{sen.B sen.C} = (\text{sen.B cos.A} + \text{sen.A cos.B})\ (\text{sen.C cos.A} - \text{sen.A cos.C}) \ldots (16)$$

e como para existir triangulo é necessario que $A + B + C = \pi$, segue-se que (15) se verifica, mas não (16): 'nestes termos (13) e (14) reduzem-se á equação unica

$$b\ \text{sen. C} = c\ \text{sen. B} \ldots (17);$$

se eliminassemos depois b; e ultimamente c, entre (10) (11) (12) alcançariamos:

$$a\ \text{sen C} = c\ \text{sen. A} \ldots (18) \quad a\ \text{sen. B} = b\ \text{sen. A} \ldots (19);$$

o que é o mesmo que (A) e (B) do (n.º 6). E por fim sommando duas a duas (10) (11) (12), primeiro membro de uma com primeiro da outra, e segundo com segundo, rejeitando $a = o$, $b = o$, $c = o$, resultam as equações (1) (2) (3) d'este numero.

9. Sejão $\alpha+\delta$, e α dois arcos: $\text{sen.}\,(\alpha+\delta)-\text{sen.}\,\alpha=\text{sen}\,\alpha\,(\cos.\,\delta-1)$

$+\,\text{sen.}\,\delta\,\cos.\,\alpha=2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\delta\,\cos.\,\frac{1}{2}\delta\,\cos.\,\alpha-2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,\delta\,\text{sen.}\,\alpha$

$=2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\delta\,\cos.\,(\alpha+\frac{\delta}{2})$: e se representarmos por o signal Δ sen. α a differença, $\text{sen.}\,(\alpha+\delta)-\text{sen}\,\alpha$, resultará:

$$\Delta\,\text{sen.}\,\alpha=2.\,\text{sen.}\frac{\delta}{2}\cos.\,(\alpha+\frac{\delta}{2})\ldots(A).$$

Se, por exemplo, $\delta=A''$, sendo $A''<60''$, e nos bastar a approximação de quinze decimaes, acharemos:

$$\Delta\,\text{sen.}\,\alpha=A''.\,\text{sen.}\,1''.\,\cos.\,(\alpha+\frac{\delta}{2})\text{; isto é,}$$

$$\Delta\,\text{sen.}\,\alpha=A''.\,\text{sen.}\,1''\,\cos.\,(\alpha+\frac{A''}{2})\ldots(B).$$

Do mesmo modo $\cos.\,(\alpha+\delta)-\cos\,\alpha=\Delta.\,\cos.\,\alpha=-\cos.\,\alpha\,(1-\cos\,\delta)$

$-\,\text{sen.}\,\alpha\,\text{sen.}\,\delta=-2\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}\,\delta\,\cos.\,\alpha-2\,\text{sen.}\,\alpha\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,\delta\,\cos.\,\frac{1}{2}\,\delta=$

$$-2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\delta\,\text{sen.}\Big(\alpha+\frac{\delta}{2}\Big)=\Delta\,\cos.\,a.\ldots(C).$$

Se, por exemplo, o arco $\delta < 60''$, e $\delta = A''$, resultaria, sem êrro na decima quinta decimal

$$\Delta.\ \cos.\ a = -A''\ \text{sen.}\ 1''\ \text{sen.}\ \left(a + \frac{A''}{2}\right) \ldots (D)$$

$$\frac{\text{sen.}\ (\alpha+\delta)}{\cos.\ (\alpha+\delta)} - \frac{\text{sen.}\ \alpha}{\cos.\ \alpha} = \Delta\ \text{tg.}\ \alpha = \frac{\text{sen.}\ \delta}{\cos.\ \alpha\ \cos.\ (\alpha+\delta)} \ldots (E).$$

As formulas (A) (C) mostram que os *senos, e os cosenos são funcções continuas dos arcos:* isto é, que a mui pequenas variações nos arcos correspondem mui pequenas variações nos *senos* e nos *cosenos*, seja qual for a grandeza dos arcos. Se, por exemplo, δ fôsse 1^{v}, a differença entre sen. $(\alpha + 1^{v})$ e sen α; ou entre cos. $(\alpha + 1^{v})$ e cos. α sería menor (n.º 2, eq. 14) do que 0,00000.00000.3; ou Δ sen. $\alpha <$ 0,00000.00000.3; e, prescindindo do signal, Δ cos. $\alpha <$ 0,00000.00000.3 : é o mesmo que dizer, pedido o seno, ou coseno de um arco, que differe de outro arco em 1^{v}, o seno, e o coseno procurados são eguaes ao seno e coseno do arco primitivo, augmentado ou diminuido de 1^{v}, quando queiramos a approximação de dez decimaes.

A formula (E) mostra que, sendo cos. α consideravel, e δ convenientemente pequeno, se podem tirar a respeito de Δ tg. α as mesmas conclusões que a respeito do Δ sen. α. Não acontece porem o mesmo, quando, conservando-se δ mui pequeno for cos. α mui proximo de zero; nesta hypothese Δ tg. α é mui grande; e Δ tg. α é *insignificante* mesmo, ou *infinito*, se α é tal que dá cos. $\alpha = 0$, por muito pequeno, que seja δ. A tangente é pois uma *funcção discontinua do arco;* o que já sabiamos da Geometria.

Das formulas (A) (C) (E), tirão-se:

$$\frac{\text{sen.}\ (\alpha+\delta) - \text{sen.}\ \alpha}{\text{sen.}\ \delta} = \frac{\cos.\ \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}{\cos.\ \frac{1}{2}\ \delta} \ldots\ldots (F)$$

$$\frac{\cos.\ (\alpha+\delta)-\cos.\ \alpha}{\operatorname{sen.}\ \delta}=-\frac{\operatorname{sen.}\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)}{\cos.\ \frac{1}{2}\delta}\ \ldots\ (G)$$

$$\frac{\operatorname{tg.}\ (\alpha+\delta)-\operatorname{tg.}\ \alpha}{\operatorname{sen.}\ \delta}=\frac{1}{\cos.\ \alpha\ \cos.\ (\alpha+\delta)}\ \ldots\ (H)$$

Se 'nestas formulas, não dando a α valores particulares, queremos dizer, suppondo consideravel a fracção cos. α, para H, fizermos approximar δ de zero os primeiros membros se approximarão de $\frac{0}{0}$, os segundos das expressões *finitas*, cos. α : — sen. α : $+\frac{1}{\cos.^2\ \alpha}$: e as egualdades $\frac{0}{0}=\cos.\ \alpha$: $\frac{0}{0}=-\operatorname{sen.}\ \alpha$: $\frac{0}{0}=\frac{1}{\cos.^2\ \alpha}$, tem uma significação algebrica, que é acceitavel. Querendo deixar nos resultados os indicios das operações que se fizeram para os obter, e notando que para mui pequenos arcos sen. $\delta=\delta=(\alpha+\delta)-\alpha=\Delta\,\alpha$: poderemos dizer que no *Limite* dos decrescimentos δ, isto é, quando

$$\delta=0:\ \frac{\Delta\operatorname{sen.}\alpha}{\Delta\,\alpha}=\cos.\ \alpha\ldots\ (I):\quad \frac{\Delta\cos.\ \alpha}{\Delta\,\alpha}=-\operatorname{sen.}\ \alpha\ \ldots\ (K):$$

$$\frac{\Delta\ \operatorname{tg.}\ \alpha}{\Delta\ \alpha}=\frac{1}{\cos.^2\ \alpha}\ldots.(L).$$

E não suppondo $\delta=0$, mas tão proximo de zero, quanto quizermos,

$$\Delta\ \operatorname{sen.}\ \alpha=\Delta\alpha\ \cos.\ \alpha;\qquad \Delta\ \cos.\ \alpha=-\Delta\ \alpha\ \operatorname{sen.}\ \alpha:\Delta\ \operatorname{tg.}\ \alpha=\frac{\Delta\ \alpha}{\cos^2\ \alpha}.$$

Se $\Delta\,\alpha = (\alpha + \delta) - \alpha = A''$, e $A'' < 60''$ podemos escrever

$$\Delta\,\text{sen.}\,\alpha = A''\,\text{sen.}\,1''\cos.\,\alpha \ldots (M)\ ;\ \Delta\cos.\,\alpha = -A''\,\text{sen.}\,1''\,\text{sen.}\,\alpha \ldots (N);$$

$$\Delta\,\text{tg.}\,\alpha = \frac{A''\,\text{sen.}\,1''}{\cos.^2\alpha} \ldots (P)$$

advertindo-se que, para $\cos.\,\alpha = 0$, (P) é falsa: e inutil para o calculo numerico nas proximidades de $\cos.\,\alpha = 0$.

10. Se dois triangulos tem, um os lados a, b, c e os angulos oppostos A, B, C; outro os lados $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$, e os angulos oppostos $A + \Delta A$, $B + \Delta B$, $C + \Delta C$, conclue-se que

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C = 0 \ldots (1)\ ;\ \text{e que } a = b\cos.\,C + c\cos.\,B \ldots (2)\ ;$$

$$a + \Delta a = (b + \Delta b)\cos.\,(C + \Delta C) + (c + \Delta c)\cos.\,(B + \Delta B) \ldots (3)\ ;$$

feitas as multiplicações indicadas em (3), e tirando depois ordenadamente (2) de (3) fica

$$\Delta a = b\,[\cos.\,(C + \Delta C) - \cos.\,C] + c\,[\cos.\,(B + \Delta B) - \cos.\,B]$$

$$+ \Delta b\cos.\,(C + \Delta C) + \Delta c\cos.\,(B + \Delta B) \ldots (4)$$

e (eq. C n.° 10)

$$\Delta a = \Delta b\cos.\,b + \Delta c\cos.\,B + (b + \Delta b)\,\Delta\cos.\,C + (c + \Delta c)\,\Delta\cos.\,B \ldots (A).$$

Se for permittido tomar $\frac{\Delta B}{2}$, $\frac{\Delta C}{2}$ em vez de sen. $\frac{\Delta B}{2}$, sen. $\frac{\Delta C}{2}$, e despresar $\Delta c \, \Delta B$; $\Delta b \, \Delta C$;.... podemos pôr em (A) c sen $B = b$ sen. C; $\Delta B + \Delta C = -\Delta A$ (1), e resultará

$$\Delta a = \Delta b \cos. C + \Delta c \cos. B + b \, \Delta A \text{ sen. } C \ldots (B).$$

11. As formulas (n.º 9) $\Delta \text{ sen. } \alpha = 2 \text{ sen.} \frac{\delta}{2} \cos. \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right) \ldots (1)$

$$\Delta \cos. \alpha = -2 \text{ sen.} \frac{\delta}{2} \text{ sen.} \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right) \ldots (2)$$

mostram que, sendo δ pequeno, as differenças numericas Δ sen. α, Δ cos. α serão unicamente sensiveis, em geral, quando as linhas trigonometricas estiverem calculadas com muitas decimaes; e esta proposição é tanto mais exacta, quanto menor for $\cos. \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)$ em (1); ou quanto menor for $\text{sen.} \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)$ em (2). É o mesmo que dizer: *dado um numero menor do que a unidade, porém mui proximo d'ella, se este numero representa um seno, sería necessaria uma externa precisão no calculo numerico para estabelecer com segurança que o arco, do qual é seno o numero dado, é o arco* $\alpha + \delta$, *ou o arco* α: e tambem, *dado um numero menor do que a unidade, porém mui proximo d'ella, só com muita precisão no calculo numerico se poderia concluir que o numero dado, que significa um coseno, daria o arco* $\alpha + \delta$, *ou o arco* α. *Logo, como na practica não é exequivel essa precisão indefinida, ou é pelo menos muito laboriosa, teremos o cuidado de calcular os arcos pelo seno, quando os senos são pequenos: e de calcular os arcos pelo coseno, quando os cosenos são pequenos.*

12. Se as linhas rectas $b \; m \; x \; n$ são *commensuraveis*, tomando uma linha recta u, a que chamaremos unidade linear, acharemos que a razão composta de b para m, e de x para n, *Eucl.*, liv. 5, Def. 11, é $\frac{b}{u} \cdot \frac{x}{u} : \frac{m}{u} \cdot \frac{n}{u}$, ou simplesmente, $bx:mn$, expressão em que $b \; m \; x \; n$ significam os numeros que dão a medida de $b \; m \; x \; n$.

Representem R′ q dois rectangulos, R′ comprehendido por b e x, q por m e n, e *Eucl.* liv. 6, p. 23, será

$$R' : q :: bx : mn \ldots (1)$$

Se R′ e q são *commensuraveis*, tomando q por unidade de superficie, $\frac{R'}{q} : \frac{q}{q} :: bx : mn$, ou $\frac{R'}{q} = \frac{bx}{mn}$; seja R o numero $\frac{R'}{q}$, e teremos:

$$R = q\frac{bx}{mn} \ldots (2)$$

Se no rectangulo q é $m = n = u = 1$ unidade linear, que póde ser a toeza, o metro, a milha, a legua. . . ., q será o *quadrado* formado sôbre u, e (2) póde escrever-se:

$$R = q.\, bx \ldots (3)$$

Ora dado o parallelogrammo P das rectas b e c, que comprehendem o angulo A, póde achar-se um rectangulo R′ de b e x, que seja equivalentes a P. *Eucl.*, liv. 1, p. 35, tomando $x = c$ sen. A; logo

$$P = q\, bc \text{ sen. A, ou simplesmente } P = bc \text{ sen. A} \ldots (4)$$

'Nesta formula, suppondo b a base do parallelogramo, c sen. A é a altura.

Vê-se pois que, tomando a unidade linear u e formando sôbre ella o *quadrado* q (3), e depois formando com u os numeros b e x, deduziremos o número P (4) de quadrados q, que se contém em P, multiplicando b por x, ou b por c sen. A. Presuppostas pois estas restricções, poderemos dizer:

A superficie do parallelogrammo é egual ao producto da base pela altura.

D'aqui se conclue que, sendo dados c, b, A em um triangulo rectilineo, a superficie do triangulo é $T = \frac{bc}{2}$ sen. A. *Eucl.* liv. 1, p. 41.

Se no triangulo ABC são dados dois angulos e o lado b, que tomaremos por base, primeiramente $c : b ::$ sen. C : sen. B, ou $c = \frac{b \text{ sen. C}}{\text{sen. B}}$, e a altura x é $x = \frac{b \text{ sen. C sen. A}}{\text{sen. B}}$; logo

$$T = \frac{b^2 \text{ sen. A sen. C}}{2 \text{ sen. B}} = \frac{b^2 \text{ sen. A sen. }(A+B)}{2 \text{ sen. B}}$$

Se são dados os tres lados do triangulo ABC, tomando b por base a altura é $x = c$ sen. A; mas (n.º 7)

$$\text{sen. A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{; logo}$$

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

No caso duvidoso deve primeiramente construir-se o triangulo, ou triangulos, se os houver, e depois T se achará facilmente.

13. O calculo numerico das formulas de Trigonometria Rectilinea é tão facil, que sómente, para exemplo, converteremos em numeros a formula

$$\text{cos. } \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \text{ quando for}$$

$$a = 142^m 985 : b = 106^m,836 : c = 103^m,357.$$

E $\qquad \text{tg. } B = \dfrac{\sqrt{2}\ b \text{ sen. } A \cos. \varphi}{2\ c \cos.\ (45^\circ + \varphi)}$, sendo $\text{tg. } \varphi = \dfrac{b}{c}$, cos. A;

e $\qquad b = 539^m{,}07 : c = 1202^m{,}32 : A = 68^\circ.40'.44'',4.$

Exemplo I

$$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p\ (p-a)}{b\ c}}.$$

$$p = 176^m{,}589 : p - a = 33^m{,}604 : \ \text{lg. } p = 2{,}2469636$$

$$\text{lg. } (p-a) = 1{,}5263910$$

$$\text{Cp. lg. } b = 7{,}9712824$$

$$\text{Cp. lg. } c = 7{,}9856600$$

$$\text{lg. } \cos.^2 \frac{1}{2} A = 9{,}7302970$$

$$\text{lg. } \cos. \frac{1}{2} A = 9{,}8651485$$

$$A = 85^\circ.42'38''$$

Exemplo II

$$\text{tg. } \varphi = \frac{b}{c}. \cos. A; \ \text{tg.} B = \frac{\sqrt{2}.\ b \text{ sen. } A \cos. \varphi}{2\ c.\ \cos.\ (45^\circ + \varphi)}$$

$$b = 539^m,07: \quad c = 1202^m,32: \quad A = 68^\circ.40'.44'',4$$

$$\lg.\frac{b}{c} = 9,6516252 \qquad \lg.\sqrt{2} = 0,1505150$$

$$\lg.\cos.A = 9,5606151 \qquad \lg.\frac{b}{c} = 9,6516252$$

$$\lg.\operatorname{tg}.\varphi = 9,2122403 \qquad \lg.\operatorname{sen}.A = 9,9692099$$

$$\varphi = 9^\circ.15'.32'' \qquad \lg.\cos.\varphi = 9,9943046$$

$$45^\circ + \varphi = 54^\circ.15'.32'' \qquad \text{Cp}.\lg.2 = 9,6989700$$

$$\text{Cp}.\lg.\cos.(45^\circ + \varphi) = 0,2334951$$

$$\lg.\operatorname{tg}.B = 9,6981198$$

$$B = 26^\circ.31'.12'',7$$

Como se acaba de ver, este calculo é um pouco laborioso, por causa do angulo *auxiliar* φ, que se empregou: mas póde calcular-se B, C por outra formula muito mais simples.

Sabe-se que $\frac{\operatorname{sen}.B}{\operatorname{sen}.C} = \frac{b}{c}$; e por conseguinte

$$\frac{\operatorname{sen}.B \pm \operatorname{sen}.C}{\operatorname{sen}.C} = \frac{b \pm c}{c}\text{; logo } \frac{\operatorname{sen}.B + \operatorname{sen}.C}{\operatorname{sen}.B - \operatorname{sen}.C} = \frac{b+c}{b-c}$$

que por (n.° 7, A) se transforma em

$$\cot.\frac{B-C}{2}\operatorname{tg}.\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{b+c}{b-c}\text{; mas } A + B + C = 180^\circ\text{:}$$

logo $$\text{tg.}\frac{(C-B}{2}=\frac{c-b}{c+b}.\ \text{cot.}\frac{1}{2}A\ldots(1)$$

Ora $$c-b=663{,}25:c+b=1741{,}39:\frac{1}{2}A=34°.20'.22'',2:$$

e por isso

$$\begin{aligned}\text{lg.}\ (c-b) &= \ \ 2{,}8216773\\ \text{Cp. lg.}\ (b+c) &= \ \ 6{,}7591039\\ \text{lg. cot.}\ \frac{1}{2}A &= \ \ 0{,}1654748\\ \hline \text{lg. tg.}\ \frac{(C-B)}{2} &= \ \ 9{,}7462560\\ \hline C-B &= 58°.16'.50'',0\\ C+B &= 111.19.15{,}6\\ \hline C &= 84°.48'.2'',8\\ B &= 26°.31'.12'',8\end{aligned}$$

No fim da Trigonometria Espherica transcreveremos algumas das formulas, que tem mais uso nas transformações.

TRIGONOMETRIA ESPHERICA

14. Triangulo espherico é a figura construida na superficie da esphera por tres arcos de circulo maximo. O triangulo espherico póde considerar-se como a base d'um angulo solido triedro, que tenha todas as arestas eguaes ao raio da esphera, e o vertice no centro d'ella. Supporemos que cada angulo plano dos que formam o triedro, que tem por base o triangulo espherico, é assim como cada angulo de dois dos ditos planos, menor do que dois rectos; o que, sem faltar á generalidade do que temos para dizer, se conforma com as construcções de Euclides, *Eucl. Ed. de Coimbra de* 1846. Liv. XI.

Chamáremos *face do triedro* ao plano comprehendido por duas arestas do triedro

Lados do triangulo espherico são os arcos de circulo maximo, que formam a figura triangulo espherico: e os representaremos pelas letras *a, b, c.*

Angulos do triangulo espherico são os angulos diedros do triangulo espherico. Significaremos por A aquelle angulo do triangulo espherico que fica opposto a a; por B o que fica opposto a b e por C o opposto a c.

15. Dois lados quaesquer do triangulo espherico são, *Eucl.*, liv. XI, p. 20, maiores do que o terceiro: e todos tres tomados junctos, são *Eucl.*, liv. XI, p. 21, menores do que quatro rectos.

16. De um ponto tomado dentro da esphera, e tambem dentro do triedro, que tem por base o triangulo espherico ABC, abaixem-se perpendiculares sôbre cada plano das faces do triedro; e d'esta construcção resultará:

I. Que as tres perpendiculares não existem no mesmo plano: porque se existissem todas no mesmo plano, cada duas arestas do triedro seriam, *Eucl.*, liv. XI, p. 6, parallelas; conclusão absurda.

II. Que as tres perpendiculares são as tres arestas d'um segundo triedro, que terá por base um segundo triangulo espherico A'B'C', situado sôbre uma esphera egual á proposta, se forem convenientemente produzidas as perpendiculares.

A este segundo triangulo A'B'C' chamaremos triangulo espherico *supplementar* ou *polar*, de ABC.

III. Que cada par de perpendiculares determina um plano, que é perpendicular, *Eucl.*, liv. XI, p. 19, a secção commum ou aresta das duas faces, sôbre as quaes se abaixaram as duas perpendiculares; e que por isto, o angulo, *Eucl.*, liv. I, p. 32, formado pelas duas perpendiculares, e que é opposto ao angulo diedro dos planos sôbre os quaes as perpendiculares foram abaixadas, é supplemento do angulo diedro d'estes dois planos. Sendo pois a', b', c' os lados do triangulo supplementar, respectivamente oppostos a A', B', C', temos

$$a' = \pi - A : b' = \pi - B : c' = \pi - C.$$

E por quantò cada aresta do triedro, que tem ABC por base é perpendicular a cada face do triedro, que tem A'B'C' por base, segue-se, do mesmo modo, que

$$a = \pi - A', \; b = \pi - B', \; c = \pi - C' :$$

ou que $$A' = \pi - a : B' = \pi - b : C' = \pi - c$$

17. Em dois triangulos esphericos, construidos na mesma esphera ou em espheras eguaes, serão eguaes todos os elementos, cada um a cada um:

I. Se tiverem os tres lados eguaes cada um a cada um. *Eucl.*, liv. XI, p. A. B e 22.

II. Se tiverem os tres angulos eguaes, cada um a cada um. Triangulo supplementar.

III. Se um angulo diedro d'um dos triangulos é egual a um angulo diedro do outro, sendo tambem eguaes cada um a cada um os lados, que comprehendem os angulos diedros eguaes. *Eucl.*, liv. XI, p. 22; e A, B. *Pyramides triangulares symetricas.*

IV. Se tiverem um lado d'um egual a um lado de outro, e eguaes cada um a cada um os angulos adjacentes a este lado egual. A mesma razão.

18. No triangulo espherico isosceles os angulos diedros da base são eguaes: porque fazendo passar pelo vertice do angulo diedro opposto á base, e pelo meio da base um circulo maximo, o triangulo isosceles ficava partido em dois, que estavam como (n.° 17, I). Se a proposição reciproca se não verificasse cahiriamos em uma contradicção palpavel.

O circulo maximo, que acima dividio em dois triangulos com todos os elementos eguaes o triangulo isosceles, divide tambem o angulo diedro do vertice do triangulo isosceles em dois angulos diedros eguaes.

19. Em qualquer triangulo espherico ao maior angulo oppõe-se o maior lado: e reciprocamente. *Eucl.*, liv. XI, p. 20.

20. Se dois triangulos esphericos construidos na mesma esphera, ou em espheras eguaes, tem dois lados eguaes a dois lados, cada um a cada um, e se os angulos que comprehendem a estes lados são deseguaes, ficará opposto um lado maior ao angulo que for maior. *Eucl.*, liv. X, p. 20. A reciproca é verdadeira.

21. Traçando na superficie curva do hemispherio a semicircumferencia de um circulo maximo, perpendicular á base do hemispherio, e chamando a esta semicircumferencia *meridiano*, conclue-se que:

I. O raio do hemispherio, perpendicular ao plano da base, divide em partes eguaes a linha meridiana, e todas as semicircumferencias de circulos maximos, perpendiculares á base do hemispherio. Chamaremos *polo* ao ponto que designa o meio das supra mencionadas semicircumferencias.

Por este modo se vê que dois triangulos, que tem o vertice no polo, e por base uma parte qualquer da circumferencia da base do hemispherio são isosceles; que os angulos diedros da base são rectos; que os lados eguaes equivalem cada um ao quadrante; e que a base do triangulo é a medida do angulo diedro do vertice; que se cada um dos dois angulos diedros d'um triangulo espherico é recto, cada um dos lados oppostos a estes angulos é um quadrante; e reciprocamente.

II. Dividida a linha meridiana em dois segmentos deseguaes, e por isto em um ponto, que não é polo, e fazendo passar por este ponto muitas semicircumferencias de circulos maximos:

(a) Os planos d'estes circulos fazem com a base do hemispherio angulos diedros agudos para o lado do segmento menor do meridiano; porque a parte é menor do que o todo.

(b) Dois arcos das semicircumferencias de circulos maximos, cada um dos quaes tem uma extremidade na base do hemispherio e a outra no ponto de divisão em partes deseguaes da linha meridiana, se são equidistantes d'esta linha, são eguaes. (n.º 17, I.)

(c) Os arcos equidistantes do meridiano serão successivamente menores ao passo que se approximarem do segmento menor do meridiano (n.º 19).

(d) O menor arco de circulo maximo, que se póde traçar sôbre o hemispherio, sujeito a terminar no ponto de divisão do meridiano em partes deseguaes de um lado, e do outro na circumferencias da base do hemispherio, é o segmento menor do meridiano.

22. Se um triangulo espherico dado tem, adjuncto a base, um lado egual ao quadrante, lado que chamaremos recto, e se o outro lado não é recto, podemos sempre construir um triangulo espherico isosceles, que tenha, cada um dos lados eguaes, recto, e por angulo diedro opposto á base, o mesmo angulo diedro, opposto á base no triangulo espherico primitivo.

Para conseguir isto basta designar no lado não recto do triangulo espherico primitivo, ou, se for necessario, no prolongamento d'esse lado para debaixo da base do sobredicto triangulo espherico, um ponto tal que o arco de circulo maximo da esphera comprehendido entre este ponto e o vertice do angulo diedro opposto á base no triangulo espherico dado, seja um quadrante: ligando a extremidade d'este arco á do lado recto dado, por meio d'um arco de circulo maximo, opposto ao angulo diedro, a que tambem fica opposta a base do triangulo espherico dado, fica feito o que se desejava.

Alem d'este triangulo espherico e isosceles, que acabamos de construir fica construido outro, cujos elementos tem com os elementos do triangulo espherico dado as relações seguintes:

Um dos lados que póde tomar-se, como base, é a base do triangulo dado: o segundo lado é a differença entre o quadrante e o lado não recto, dado no triangulo espherico primitivo: o terceiro lado é o arco, que serve de medida ao angulo diedro opposto á base do triangulo espherico dado.

23. Dado um triangulo espherico, e produzidos os lados d'elle para debaixo da base até se completar a lunula espherica, construe-se assim um segundo triangulo espherico, que tem com o triangulo espherico dado as relações seguintes.

A base do segundo triangulo espherico é a base do triangulo espherico primitivo e cada um dos lados d'este é supplemento respectivamente de cada um dos lados do segundo triangulo espherico construido. Os angulos diedros oppostos ás bases são eguaes; e cada um dos adjacentes á base em um triangulo espherico é supplemento respectivamente de cada um dos adjacentes á base no outro triangulo espherico.

24. Ultimamente advertiremos que abaixando do vertice d'um angulo diedro d'um triangulo espherico dado um arco de circulo maximo perpendicular ao lado opposto ao angulo diedro, lado que tomaremos por base do triangulo espherico, ou ao lado opposto produzido, se for necessario, se construem dois triangulos esphericos rectangulos.

Ambos estes triangulos esphericos rectangulos tem o arco de circulo maximo, que se abaixou perpendicularmente sôbre a base, ou sôbre a base produzida, por catheto commum: um dos triangulos esphericos rectangulos tem por hypothenusa um lado, o outro, o outro lado do triangulo espherico dado. Ao catheto commum fica opposto em um triangulo espherico rectangulo um dos angulos diedros adjacentes a base do triangulo espherico dado, no outro triangulo espherico rectangulo o outro angulo adjacente tambem á base no triangulo espherico dado, ou o supplemento d'este angulo.

A base do triangulo espherico dado é, ou egual aos dois outros cathetos dos triangulos esphericos rectangulos, ou á differença dos ditos cathetos.

O angulo diedro opposto á base no triangulo dado é egual aos dois angulos diedros dos triangulos esphericos rectangulos, e cujos angulos diedros são formados no vertice do dito angulo diedro opposto a base do triangulo espherico dado: ou é egual a differença dos ditos angulos diedros dos triangulos esphericos rectangulos.

25. Seja dado o triangulo espherico ABC, traçado na superficie de

uma esphera, cujo raio seja a unidade (n.os 1 e 2). Sopponha-se que os lados b e c satisfazem as condições $b < \frac{\pi}{2}$, $c < \frac{\pi}{2}$.

Pelo vertice do angulo diedro A tirem-se as tangentes e secantes trigonometricas dos arcos b e c: e unam-se por meio d'uma recta δ os pontos em que as tangentes cortam as secantes: e teremos assim dois triangulos rectilineos, com um lado commum δ: os outros dois lados, em um dos triangulos, são as tangentes de b, e de c, que comprehendem o angulo A: no outro triangulo são as secantes de b, e de c, que comprehendem um angulo, cuja medida é o lado a.

Empregando as formulas (n.º 7, eq. 21, 22) acha-se:

$$\delta^2 = \text{tg.}^2\, b + \text{tg.}^2\, c - 2\ \text{tg.}\, b\ \text{tg.}\, c \cos. A$$

e $$\delta^2 = \sec.^2\, b + \sec.^2\, c - 2 \sec.\, b \sec.\, c \cos.\, a;$$

ou $$\sec.^2\, b + \sec.^2\, c - 2 \sec.\, b \sec.\, c \cos.\, a = \text{tg.}^2\, b + \text{tg.}^2\, c - 2\ \text{tg.}\, b\ \text{tg.}\, c \cos. A;$$

do que se deduz

$$\text{sen.}\, b\ \text{sen.}\, c \cos. A = \cos.\, a - \cos.\, b \cos.\, c \ldots (1)$$

Esta fórmula verifica-se seja qual for a grandeza de b e c; ficando sempre b e c entre os limites o e π.

I. Seja $b = \frac{\pi}{2}$, $c = \frac{\pi}{2}$; e a fórmula (1) se transforma em $\cos. A = \cos.\, a$, o que é exacto escolhendo a raiz $A = a$, (n.º 21, I). As outras raizes são inconvenientes.

II. Seja $b > \frac{\pi}{2}$, $c < \frac{\pi}{2}$. Produzam-se b e a para debaixo da base c até se completar a lunula espherica, cujo angulo diedro é C; e obteremos assim um segundo triangulo espherico, cujos elementos são $\pi - b$, c lados que comprehendem o angulo diedro $\pi - A$: o terceiro lado é

$\pi - a$, os outros dois angulos diedros são C, e $\pi - B$. Logo, como $\pi - b < \frac{\pi}{2}$, e $c < \frac{\pi}{2}$, tiraremos de (1)

$$\text{sen.}(\pi - b)\ \text{sen.}\,c\ \text{cos.}(\pi - A) = \text{cos.}(\pi - a) - \text{cos.}(\pi - b)\ \text{cos.}\,c\,;$$

ou $\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c\ \text{cos.}\,A = \text{cos.}\,a - \text{cos.}\,b\ \text{cos.}\,c$ (2)... como se fôsse $b < \frac{\pi}{2}$

III. Se $b > \frac{\pi}{2}$, $c > \frac{\pi}{2}$, feita a construcção precedente, com a differença de ser B o angulo diedro da lunula, da qual o triangulo ABC faz parte, achamos (II)

$$\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,(\pi - c)\ \text{cos.}\,(\pi - A) = \text{cos.}\,(\pi - a) - \text{cos.}\,b\ \text{cos.}\,(\pi - c),$$

que é o memos que

$$\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c\ \text{cos.}\,A = \text{cos.}\,a - \text{cos.}\,b\ \text{cos.}\,c\,....\ (3)$$

IV. (*a*) Se $b = \frac{\pi}{2}$, e $c < \frac{\pi}{2}$, faremos o que segue. Com o angulo diedro A, e o lado b construa-se o triangulo isosceles, de que se tractou (n.º 22): e fica d'este modo construido tambem outro triangulo, que tem o angulo diedro, opposto á base de ABC, recto (n.º 21, I); um dos lados adjacentes a este angulo é $\frac{\pi}{2} - c$, o outro adjacente, que chamaremos a', é a medida de A; o terceiro lado é a: ora se $a' = b = \frac{\pi}{2}$, será tambem (n.º 21, I) $a' = b = a = \frac{\pi}{2}$; ora fazendo em (1) $a = b = \frac{\pi}{2}$ fica $o = o$ o que é verdade.

(*b*) Senão é $a' = \frac{\pi}{2}$, do triangulo espherico rectangulo, que tem por lado opposto ao angulo diedro recto o lado a, tiramos

$$\text{sen.}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \text{sen.}\, a' \cos.\frac{\pi}{2} = \cos.\, a - \cos.\, a' \cos.\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$$

ou $\cos.\, a - \text{sen.}\, c \cos.\, \text{A} = o$; isto é, $\cos.\, a = \text{sen.}\, c \cos.\, \text{A}$;

e fazendo em (1) $b = \frac{\pi}{2}$, resulta tambem $\cos.\, a = \text{sen.}\, c \cos.\, \text{A}$.

Emfim, se fôsse $c > \frac{\pi}{2}$ e $b = \frac{\pi}{2}$ o triangulo espherico isosceles, que se construio acima, para quando $c < \frac{\pi}{2}$ e $b = \frac{\pi}{2}$ sería agora comprehendido pelo triangulo dado; mas attendendo só a esta modificação, e applicando convenientemente o raciocinio, que se fez para o caso de $c < \frac{\pi}{2}$, chegariamos á mesma conclusão, a que então chegamos. Logo a formula (1) verifica-se para todos os valores de b e de c, comprehendidos nos limites o e π. Podemos pois escrever

$$\cos.\, \text{A} = \frac{\cos.\, a - \cos.\, b \cos.\, c}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c} \ldots (\alpha): \quad \cos.\, \text{B} = \frac{\cos.\, b - \cos.\, a \cos.\, c}{\text{sen.}\, a\, \text{sen.}\, c} \ldots (\beta)$$

$$\cos.\, \text{C} = \frac{\cos.\, c - \cos.\, a \cos.\, b}{\text{sen.}\, a\, \text{sen.}\, b} \ldots (\chi)$$

Cumpre advertir aqui mais explicitamente o que em outro logar indicamos já, e vem a ser, que dois triangulos esphericos nos quaes os seis elementos d'um são eguaes aos seis elementos do outro, cada uma a cada um, devem denominar-se triangulos eguaes, ou *por justa posição;* ou *por symetria.*

Comparando as formulas (α) (β) (χ) com o que se disse (n.º 17) conclue-se que são seis as hypotheses ou *casos* differentes, em que pelo conhecimento de tres elementos d'um triangulo espherico se poderão determinar os outros tres. Tractaremos de transformar α, β, χ, de modo que se prestem a resolução dos triangulos esphericos nestas seis hypotheses, ou casos differentes.

As formulas (α) (β) (χ) são o mesmo que

$$\text{sen.}\, b\ \text{sen.}\, c\ \cos.\, A = \cos.\, a - \cos.\, b\ \cos.\, c \ldots (\alpha)$$

$$\text{sen.}\, a\ \text{sen.}\, c\ \cos.\, B = \cos.\, b - \cos.\, a\ \cos.\, c \ldots (\beta)$$

$$\text{sen.}\, a\ \text{sen.}\, b\ \cos.\, C = \cos.\, c - \cos.\, a\ \cos.\, b \ldots (\chi)$$

De (α) e (β) tira-se

$$\text{sen.}\, c\ (\text{sen.}\, b\ \cos.\, A + \text{sen.}\, a\ \cos.\, B) = \cos.\, a + \cos.\, b$$

$$-\cos.\, c\ (\cos.\, a + \cos.\, b) = (\cos.\, a + \cos.\, b)\ (1 - \cos.\, c) \ldots (1)$$

e $$\text{sen.}\, c\ (\text{sen.}\, b\ \cos.\, A - \text{sen.}\, a\ \cos.\, B) = \cos.\, a - \cos.\, b$$

$$-\cos.\, c\ (\cos.\, b - \cos.\, a) = (\cos.\, a - \cos.\, b)\ (1 + \cos.\, c) \ldots (2)$$

Multiplicando entre si (1) e (2) o primeiro membro de (1) pelo primeiro de (2), o segundo de (1) pelo segundo de (2), notando que

$1-\cos.^2 c = \text{sen.}^2 c$, e supprimindo $\text{sen.}^2 c$ de ambos os membros dos productos eguaes, fica

$$\text{sen.}^2 b \cos.^2 A - \text{sen.}^2 a \cos.^2 B = \cos.^2 a - \cos.^2 b = 1$$

$$-\text{sen.}^2 a - 1 + \text{sen.}^2 b = \text{sen.}^2 b - \text{sen.}^2 a;$$

e $$\text{sen.}^2 b\,(1-\cos.^2 A) = \text{sen.}^2 a\,(1-\cos.^2 B):$$

logo $$\text{sen.}^2 b \,\text{sen.}^2 A = \text{sen.}^2 a \,\text{sen.}^2 B \ldots (3)$$

Extraindo a raiz quadrada de (3), e tomando somente a raiz arithmetica, por ser $b < \frac{\pi}{2}$, $A < \frac{\pi}{2}$, $a < \frac{\pi}{2}$, $B < \frac{\pi}{2}$, resulta

$$\text{sen.}\, a \,\text{sen.}\, B = \text{sen.}\, b \,\text{sen.}\, A \ldots (4)$$

Eliminando, pelo mesmo modo, b, e depois a, acham-se resultados da mesma forma (4). Logo

$$\text{sen.}\, a \,\text{sen.}\, B = \text{sen}\, b \,\text{sen.}\, A \,.\,. (\delta) \qquad \text{sen.}\, a \,\text{sen.}\, C = \text{sen.}\, c \,\text{sen.}\, A \,.\,. (\varepsilon)$$

e

$$\text{sen.}\, b \,\text{sen.}\, C = \text{sen.}\, c \,\text{sen.}\, B \,.\,. (\xi)$$

Estas formulas podem ser traduzidas em vulgar do seguinte modo: *Em todo o triangulo espherico os senos de dois lados quaesquer estão entre si, como estão os senos dos angulos diedros respectivamente oppostos aos ditos lados.*

26. Se o triangulo espherico é rectangulo em A; isto é, se $A = \frac{\pi}{2}$, (γ) dá

$$\cos. a = \cos. b \cos. c \,.\,.\,(\ ) \text{; e de } (\delta) \text{ e } (\varepsilon)$$

tira-se $$\text{sen.}\, b = \text{sen.}\, a \text{ sen. B} \,.\,.\,(i)$$

$$\text{sec.}\, c = \text{sen.}\, a \text{ sen. C} \,.\,.\,(\beta) \quad \text{Por conseguinte:}$$

No triangulo espherico rectangulo o coseno da hypothenusa é egual ao producto dos cosenos dos cathetos: e o seno d'um

Qualquer dos cathetos do triangulo espherico rectangulo é egual ao producto do seno da hypothenusa multiplicado pelo seno do angulo diedro comprehendido pela hypothenusa e pelo outro catheto.

27. Eliminando sen. c de (α) e (β) por meio de (ε n.º 25) resulta

$$\cos. a \text{ sen. A} = \cos. b \cos. c \text{ sen. A} + \text{sen.}\, a \text{ sen.}\, b \text{ sen. C cos. A} \,.\,.\,(5)$$

e $$\cos. b \text{ sen. A} = \cos. a \cos. c \text{ sen. A} + \text{sen.}^2 a \cos. \text{B sen. C} \,.\,.\,(6);$$

e pondo em (5) cos. c, tirado de (χ), fica

$$\cos. a \text{ sen. A} = \text{sen.}\, a \text{ sen.}\, b \text{ sen. C cos. A} + \cos. a \cos.^2 b \text{ sen. A}$$
$$+ \text{sen.}\, a \text{ sen.}\, b \cos. b \text{ sen. A cos. C} \,.\,.\,(7)$$

eliminando de (7) sen. b por meio de (δ), resulta

$$\cos. a \text{ sen.}^2 \text{A} = \text{sen.}^2 a \text{ sen. B sen. C cos. A} + \cos. a \cos.^2 b \text{ sen.}^2 \text{A}$$
$$+ \text{sen.}^2 a \cos. b \text{ sen. A sen. B cos. C} \,.\,.\,(8);$$

ou $$\cos. a \operatorname{sen.}^2 A\ (1-\cos.^2 b)=$$

$$\operatorname{sen.}^2 a\,[\operatorname{sen.} B \operatorname{sen.} C \cos. A+\cos. b \operatorname{sen.} A \operatorname{sen.} B \cos. C], \text{ e}$$

$$\cos. a \operatorname{sen.}^2 a \operatorname{sen.}^2 B=\operatorname{sen.}^2 a\,[\operatorname{sen.} B \operatorname{sen.} C \cos. A$$

$$+\cos. b \operatorname{sen.} A \operatorname{sen.} B \cos. C]\,.\,.\,(9);$$

$$\cos. a \operatorname{sen.} B=\operatorname{sen.} C \cos. A+\cos. b \operatorname{sen.} A \cos. C\,.\,.\,(10)$$

Pondo em (6) cos. c, tirado de (χ) vem

$$\cos. b \operatorname{sen.} A=\operatorname{sen.}^2 a \operatorname{sen.} C \cos. B+\cos.^2 a \cos. b \operatorname{sen.} A$$

$$+\operatorname{sen.} a \cos. a \operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} A \cos. C,$$

ou $$\cos. b \operatorname{sen.} A \operatorname{sen.}^2 a=\operatorname{sen.}^2 a \operatorname{sen.} C \cos. B$$

$$+\operatorname{sen.} a \cos. a \operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} A \cos. C, \text{ e } (\delta)$$

$$\cos. b \operatorname{sen.} A \operatorname{sen.}^2 a=\operatorname{sen.}^2 a \operatorname{sen.} C \cos. B$$

$$+\operatorname{sen.}^2 a \cos. a \operatorname{sen.} B \cos. C,$$

que é o mesmo que

$$\cos. b \operatorname{sen.} A=\cos. B \operatorname{sen.} C+\cos. a \operatorname{sen.} B \cos. C\,.\,.\,(11);$$

multiplicando tudo por cos. C

$$\cos. b \operatorname{sen.} A \cos. C=\cos. B \operatorname{sen.} C \cos. C+\cos. a \operatorname{sen.} B \cos.^2 C; \text{ e } (10)$$

$$\cos. a \text{ sen. } B = \text{sen. } C \cos. A + \cos. B \text{ sen. } C \cos. C + \cos. a \text{ sen. } B \cos.^2 C;$$

é o mesmo que

$$\cos. a \text{ sen. } B \text{ sen.}^2 C = \text{sen. } C \cos. A + \cos. B \text{ sen. } C \cos. C;$$

ou
$$\text{sen. } B \text{ sen. } C \cos. a = \cos. A + \cos. B \cos. C \ldots (12)$$

Construido (*Eucl.*, L. XI, p. 23, e n.° 16) o triangulo espherico, supplementar $A'B'C'$ de ABC, que teria os lados

$$a' = \pi - A, \; b' = \pi - B, \; c' = \pi - C;$$

e os angulos respectivamente oppostos

$$A' = \pi - a, \; B' = \pi - b, \; C' = \pi - c;$$

e usando de (α), resultava

$$\text{sen. } b' \text{ sen. } c' \cos. A' = \cos. a' - \cos. b' \cos. c',$$

eliminando a', b', c', e A', fica, como acima (12),

$$\text{sen. } B \text{ sen. } C \cos. a = \cos. A + \cos. B \cos. C.$$

Alcançaremos pois ou pela eliminação, ou pelo triangulo espherico supplementar

$$\text{sen. } B \text{ sen. } C \cos. a = \cos. A + \cos. B \cos. C \ldots (\alpha')$$

$$\text{sen. A sen. C cos. } b = \text{cos. B} + \text{cos. A cos. C. . } (\beta')$$

$$\text{sen. B sen. A cos. } c = \text{cos. C} + \text{cos. A cos. B . } (\chi')$$

28. Fazendo 'nestas tres formulas $A = \frac{\pi}{2}$ obtem-se

$$\text{cos. } a = \text{cot. B cot. C. . } (\theta') \quad \text{cos. B} = \text{sen. C cos. } b. . (i')$$

$$\text{cos. C} = \text{sen. B cos. } c. . (\beta')\text{: quer dizer}$$

O coseno da hypothenusa no triangulo espherico rectangulo é egual ao producto das cotangentes dos angulos diedros, que estão adjacentes á mesma hypothenusa. (θ')

O coseno de angulo diedro, adjacente á hypothenusa no triangulo espherico rectangulo, é egual ao seno de outro angulo diedro, adjacente tambem á hypothenusa, multiplicado pelo coseno do lado opposto ao primeiro angulo diedro. (i') (β').

29. Substituindo em (n.° 25, α) em vez de sen. b, o seu valor tirado de (δ n.° 25) e de cos. b o segundo membro de (β n.° 25), achamos

$$\text{cos. } a = \text{cos. } c \, (\text{cos. } a \text{ cos. } c + \text{sen. } a \text{ sen. } c \text{ cos. B}) + \text{sen. } a \text{ sen. } c \text{ sen. B cot. A}$$

$$= \text{cos. } a \text{ cos.}^2 c + \text{sen. } a \text{ sen. } c \text{ cos. } c \text{ cos. B} + \text{sen. } a \text{ sen. } c \text{ sen. B cot. A};$$

e $$\text{cos. } a \text{ sen. } c = \text{sen. } a \text{ cos. } c \text{ cos. B} + \text{sen. } a \text{ sen. B cot. A};$$

e $$\text{sen. } c \text{ cot. } a = \text{cos. } c \text{ cos. B} + \text{sen. B cot. A};$$

ou $$\text{cos. } c \text{ cos. B} = \text{sen. } c \text{ cot. } a - \text{sen. B cot. A. . } (1)$$

Podemos tambem eliminar (n.º 25) c de (α) por (χ) e (ε); e com effeito

$$\cos. a = \cos. b\ (\cos. a \cos. b + \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. b \cos. C)$$

$$+ \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. a \cot. A \operatorname{sen}. C = \cos. a \cos.^2 b + \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. b \cos. b \cos. C$$

$$+ \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. a \cot. A \operatorname{sen}. C;$$

e $$\cos. a \operatorname{sen}. b = \operatorname{sen}. a \cos. b \cos. C + \operatorname{sen}. a \cot. A \operatorname{sen}. C,$$

e $$\operatorname{sen}. b \cot. a = \cos. b \cos. C + \operatorname{sen}. C \cot. A;$$

ou $$\cos. b \cos. C = \operatorname{sen}. b \cot. a - \operatorname{sen}. C \cot. A .\ .\ (2)$$

Eliminando a de (β) por (α) e (δ),

$$\cos. b = \cos. c\ (\cos. b \cos. c + \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. c \cos. A)$$

$$+ \operatorname{sen}. c \operatorname{sen}. b \cot. B \operatorname{sen}. A;$$

$$\cos. b \operatorname{sen}.^2 c = \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. c \cos. c \cos. A + \operatorname{sen}. c \operatorname{sen}. b \cot. B \operatorname{sen}. A;$$

$$\cot. b \operatorname{sen}. c = \cos. c \cos. A + \cot. B \operatorname{sen}. A;$$

ou $$\cos. c \cos. A = \operatorname{sen}. c \cot. b - \operatorname{sen}. A \cot. B .\ .\ (3);$$

e eliminando c por (χ) (ξ),

$$\cos. b = \cos. a\ (\cos. a \cos. b + \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. b \cos. C)$$

$$+ \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. C \cot. B;$$

$$\cos. b \text{ sen. } a = \cos. a \text{ sen. } b \cos. C + \text{sen. } b \text{ sen. } C \cot. B;$$

ou $$\cos. a \cos. C = \text{sen. } a \cot. b - \text{sen. } C \cot. B. . (4)$$

Empregando, em (χ), (α) (ε)

$$\cos. c = \cos. b\ (\cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A) + \text{sen. } b \text{ sen. } c \text{ sen. } A \cot. C;$$

ou $$\cos. c \text{ sen. } b = \text{sen. } c \cos. A \cos. b + \text{sen. } c \text{ sen. } A \cot. C;$$

e $$\cos. b \cos. A = \text{sen. } b \cot. c - \text{sen. } A \cot. C. . (5):$$

e eliminando de (χ) b por (β) (ξ),

$$\cos. c = \cos. a\ (\cos. a \cos. c + \text{sen. } a \text{ sen. } c \cos. B) + \text{sen. } a \text{ sen. } c \cot. C \text{ sen. } B,$$

de d'onde $$\cos. a \cos. B = \text{sen. } a \cot. c - \text{sen. } B \cot. C. . (6)$$

30. Fazendo $A = \frac{\pi}{2}$ nas formulas precedentes, resulta

$$\cos. B = \text{tg. } c \cot. a. . (1) \qquad \cos. C = \text{tg. } b \cot. a. . (2)$$

$$\text{sen. } c = \text{tg. } b \cot. B. . (3) \qquad \text{sen. } b = \text{tg. } c \cot. C. . (4):$$ logo

No triangulo espherico rectangulo o coseno d'um dos angulos die-

dros, adjacentes á hypothenusa, é egual ao producto da cotangente da hypothenusa pela tangente do catheto, adjacente ao dito augulo diedro. E tambem:

No triangulo espherico rectangulo o seno d'um dos cathetos é egual ao producto da cotangente do angulo diedro, não recto, que fica adjacente ao dito catheto, pela tangente do outro catheto.

31. As formulas até aqui deduzidas são:

TABELLA [A]

Triangulo Espherico A B C.

I. $\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen}. b\ \text{sen}. c \cos. A$

II. $\cos. b = \cos. a \cos. c + \text{sen}. a\ \text{sen}. c \cos. B$

III. $\cos. c = \cos. a \cos. b + \text{sen}. a\ \text{sen}. b \cos. C$

IV. $\text{sen}. a\ \text{sen}. B = \text{sen}. b\ \text{sen}. A$

V. $\text{sen}. a\ \text{sen}. C = \text{sen}. c\ \text{sen}. A$

VI. $\text{sen}. b\ \text{sen}. C = \text{sen}. c\ \text{sen}. B$

VII. $\cos. A = -\cos. B \cos. C + \text{sen}. B\ \text{sen}. C \cos. a$

VIII. $\cos. B = -\cos. A \cos. C + \text{sen}. A\ \text{sen}. C \cos. b$

IX. $\cos. C = -\cos. A \cos. B + \text{sen}. A\ \text{sen}. B \cos. c$

X. $\cos. c \cos. B = \text{sen}. c \cot. a - \text{sen}. B \cot. A$

XI. $\cos. b \cos. C = \text{sen}. b \cot. a - \text{sen}. C \cot. A$

XII. $\cos. c \cos. A = \text{sen}. c \cot. b - \text{sen}. A \cot. B$

XIII. $\cos. a \cos. C = \text{sen}. a \cot. b - \text{sen}. C \cot. B$

XIV. $\cos. b \cos. A = \text{sen}. b \cot. c - \text{sen}. A \cot. C$

XV. $\cos. a \cos. B = \text{sen}. a \cot. c - \text{sen}. B \cot. C$

TABELLA [B]

Triangulo Espherico A B C; *rectangulo em* A.

I.	$\cos. a = \cos. b \cos. c$	VI.	$\cos. C = \cos. c \operatorname{sen}. B$
II.	$\operatorname{sen}. b = \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. B$	VII.	$\cos. C = \operatorname{tg}. b \cot. a$
III.	$\operatorname{sen}. c = \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. C$	VIII.	$\operatorname{sen}. c = \operatorname{tg}. b \cot. B$
IV.	$\cos. a = \cot. B \cot. C$	IX.	$\operatorname{sen}. b = \operatorname{tg}. c \cot. C$
V.	$\cos. B = \cos. b \operatorname{sen}. C$	X.	$\cos. B = \operatorname{tg}. c \cot. a$

A memoria retem com pouco esfôrço as nove primeiras formulas da tabella (A). Em quanto ás seis ultimas de X a XV advertiremos que na X entrão os elementos A, c, B, a: na XI, A, b, C, a: em XII, B, c, A, b: em XIII, B, a, C, b: em XIV, C, b, A, c em XV, C, a, B, c. Por isto, podemos contar os quatro elementos, que entram em cada uma d'estas seis formulas, de um modo *contínuo*, sem que entre um elemento e o immediato esteja no triangulo um dos elementos, que falta nas formulas, ou ambos elles. Dos quatro elementos, contados como se vê acima, dois são um lado e um angulo, que ficam *medios* dos *extremos* angulo e lado. Assim as formulas de X a XV podem comprehender-se debaixo do seguinte enunciado:

Dados quatro elementos contiguos de um triangulo espherico, será o producto dos cosenos das partes medias egual á somma dos productos dos senos das mesmas partes, multiplicados pelas cotangentes das extremas; lado com lado, angulo com angulo: sendo positivo o producto, em que entram lados; negativo o outro.

As formulas da tabella (B), relativas á solução do triangulo espherico rectangulo, comprehendem-se nos dois seguintes enunciados, que tem o nome de

Regras de Neper

No triangulo espherico rectangulo o coseno da parte media é egual ao producto dos senos das partes separadas.

No triangulo espherico rectangulo o coseno da parte media é egual ao producto das cotangentes das partes conjunctas.

'Nestas regras o angulo diedro recto é considerado, como não existente: e pelas linhas trigonometricas, de que as regras de Neper falam, se devem tomar as complementares, se o elemento a que as linhas trigonometricas pertencem é a algum dos dois cathetos.

Ás formulas VIII e IX da tabella (B) dão $\operatorname{tg}. b = \operatorname{sen}. c \operatorname{tg}. B$; $\operatorname{tg}. c = \operatorname{sen}. b \operatorname{tg}. C$; logo b e B; c e C, são ambos menores ou ambos maiores do que $\frac{\pi}{2}$; o que tambem se costuma exprimir dizendo: b e B *são da mesma especie: c* e C *são da mesma especie.*

32. Pelo que referimos em (n.º 17) sabe-se que pela *Geometria Synthetica* se póde construir um triangulo espherico, ou dois symetricos um do outro, em quatro hypotheses ou *Casos:* agora compararemos o que se referiu n'aquelle número com o que dizem as formulas da tabella (A).

As formulas I, II, III, dão immediatamente em numeros os angulos diedros de um triangulo espherico, quando são dados os tres lados do dicto triangulo: é solução em numeros do primeiro problema ou *Primeiro caso,* que (n.º 17) alli indicamos como susceptivel de solução pela *Geometria Synthetica.*

Pelas formulas VII, VIII, IX se obtêm egualmente em numeros os tres lados do triangulo espherico, quando se conhecem os tres angulos diedros do mesmo triangulo: isto concorda com o que se sabe da *Geometria Synthetica:* (n.º 17, II) é o *Segundo caso.*

Finalmente por X, XI, XII, XIII, XIV, XV, vêm a alcançar-se os numeros que representam dois angulos diedros e um lado de um triangulo espherico, quando são dados dois lados do triangulo, e o angulo que elles comprehendem; e é o *Terceiro caso* (n.º 17, III): ou se determinem dois lados do triangulo e um angulo diedro, quando são dados um lado e os dois angulos adjacentes ao dicto lado: é o *Quarto caso* (n.º 17, IV).

'Nestas quatro hypotheses, ou *casos,* não ha multiplicidade de raizes, que satisfaçam aos problemas, porque as incognitas são dadas por cosenos e cotangentes; por consequencia, das raizes que satisfazem ás equações sómente podem approveitar-se, para cada problema, uma. Já assim não aconteceria, *em geral,* se nos servissemos em um dado problema das equações IV, V, VI; ou mesmo de qualquer das outras, quando a incognita fôsse procurada pelo seno: 'nestas circumstancias podem approveitar-se mais do que uma raiz para cada incognita, ficando assim a solução *duvidosa:* será este o *Quinto caso,* ou *caso duvidoso.*

Se empregassemos as formulas (tabella A) no estado em que ellas se apresentam, além do trabalho excessivo do calculo numerico, cahiriamos facilmente em inexactidões: por isto convem transformar as dictas formulas, accomodando-as ao uso dos logarithmos; o que encurta o trabalho, e diminue o número de causas, que podem viciar as raizes procuradas em cada problema. É d'isto especialmente que nos vamos occupar.

PRIMEIRO CASO

33. *Sendo dados os tres lados do triangulo espherico, determinar os tres angulos.*

Da formula (I, T. A.) tira-se $\cos.A = \dfrac{\cos.a - \cos.b\cos.c}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}$; mas $1 - \cos.A = 2\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}A$: logo

$$2\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}A = \frac{\cos.b\cos.c + \text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c - \cos.a}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c} = \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}$$

$$= \frac{2\,\text{sen.}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen.}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c};\ \text{ou}$$

$$\text{sen.}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen.}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}} \ldots (\alpha).$$

Póde tambem fazer-se $1 + \cos.A = 2\cos.^2\frac{1}{2}A$; e

$$2\cos.^2\frac{1}{2}A = \frac{\cos.a - [\cos.b\cos.c - \text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c]}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}$$

$$= \frac{\cos.a - \cos.(b+c)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c} = \frac{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\ \text{sen.}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c};\ \text{e}$$

$$\cos.\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\text{sen.}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}}\ldots(\beta).$$

A expressão, que está debaixo do radical em (α) e (β) é sempre positiva (n.º 15). Na extracção da raiz quadrada toma-se unicamente o signal positivo, por quanto é $A<\pi$. A formula (α) não dá duas soluções para $\frac{A}{2}$; dos dois valores de $\frac{A}{2}$ deve escolher-se aquelle, que dér $A<\pi$. Não se dão formulas para ter B, C, porque podemos permutar no triangulo espherico as letras, que designam os angulos diedros e os lados de sorte, que seja sempre A o signal, que designe a incognita.

SEGUNDO CASO

34. *Determinar os tres lados do triangulo espherico, sendo dados os tres angulos do dicto triangulo.*

A formula (VII, T. A.) é

$$\cos.a=\frac{\cos.A+\cos.B\cos.C}{\text{sen.}B\ \text{sen.}C};\ 1-\cos.a=2\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}a$$

$$=\frac{-[\cos.B\cos.C-\text{sen.}B\ \text{sen.}C]-\cos.A}{\text{sen.}B\ \text{sen.}C}=\frac{-\cos.(B+C)-\cos.A}{\text{sen.}B\ \text{sen.}C}$$

$$=\frac{-2\cos.\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos.\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\text{sen.}B\ \text{sen.}C};\ \text{e}$$

$$\text{sen.}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos.\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos.\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\text{sen.}B\ \text{sen.}C}}\ldots(\alpha).$$

Ora $\quad 1 + \cos. a = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} a$: logo

$$2 \cos.^2 \frac{1}{2} a = \frac{\cos. B \cos. C + \text{sen}. B \,\text{sen}. C + \cos. A}{\text{sen}. B \,\text{sen}. C} = \frac{\cos. (B - C) + \cos. A}{\text{sen}. B \,\text{sen}. C}$$

$$= \frac{2 \cos. \left(\frac{A + B - C}{2}\right) \cos. \left(\frac{A + C - B}{2}\right)}{\text{sen}. B \,\text{sen}. C}; \text{ e}$$

$$\cos. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos. \left(\frac{A + B - C}{2}\right) \cos. \left(\frac{A + C - B}{2}\right)}{\text{sen}. B \,\text{sen}. C}} \ldots (\beta)$$

Seja $A' B' C'$ o triangulo supplementar de ABC, e será (16)

$a' + b' + c' = 3\pi - (A + B + C)$, ou $A + B + C = 3\pi - (a' + b' + c')$; mas (15)

$$a' + b' + c' < 2\pi : \text{ logo } A + B + C > \pi$$

e por conseguinte $-\cos. \left(\frac{A + B + C}{2}\right)$ é um número positivo (α) : e tambem

$B + C - A = 2\pi - (b' + c') - \pi + a' = \pi - (b' + c' - a')$; mas (n.º 15)

$b' + c' > a'$: logo $B + C - A < \pi$; e por conseguinte os factores (α) (β)

$$\cos. \left(\frac{B + C - A}{2}\right); \ \cos. \frac{A + B - C}{2}; \ \cos. \frac{A + C - B}{2};$$

são positivos; e por isso $\text{sen} \frac{1}{2} a$, $\cos. \frac{1}{2} a$ são reaes.

As formulas (α) (β) (n.º 33) applicadas ao triangulo A′ B′ C′, supplementar de A B C, são

$$\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,A'=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{a'+b'-c'}{2}\,\text{sen.}\,\frac{a'+c'-b'}{2}}{\text{sen.}\,b'\,\text{sen.}\,c'}}\;\ldots(1)$$

e
$$\cos.\,\frac{1}{2}\,A'=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{a'+b'+c'}{2}\,\text{sen.}\,\frac{b'+c'-a'}{2}}{\text{sen.}\,b'\,\text{sen.}\,c'}}\;\ldots(2)$$

mas
$$\frac{a'+b'-c'}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B-C}{2}\,;\;\frac{a'+c'-b'}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+C-B}{2}\,;$$

$$\frac{a'+b'+c'}{2}=\frac{3\pi}{2}-\frac{A+B+C}{2}\,;\;\frac{b'+c'-a'}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+C-A}{2}\,;$$

substituindo em (1) e (2) estes valores, assim como os de $\frac{A'}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$, (1) dá

$$\cos.\,\frac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\cos.\,\frac{A+B-C}{2}\,\cos.\,\frac{A+C-B}{2}}{\text{sen. B sen. C}}},$$

que é o mesmo que (β) d'este segundo caso; e (2)

resulta
$$\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\cos.\,\frac{A+B+C}{2}\,\cos.\,\frac{B+C-A}{2}}{\text{sen. B sen. C}}},$$

como tambem se tinha achado.

TERCEIRO CASO

35. *Dados dois lados do triangulo espherico, e o angulo que os dictos lados comprehendem, achar o outro lado, e os dois outros angulos.*

Sejam dados b, c, A: da formula (XII, T. A.) tira-se

$$\text{cot. B} = \frac{\text{sen.}\,c\ \text{cot.}\,b - \text{cos.}\,c\ \text{cos. A}}{\text{sen. A}} = \text{cot. A}\left[\text{sen.}\,c\,\frac{\text{cot.}\,b}{\text{cos. A}} - \text{cos.}\,c\right];$$

e fazendo $\dfrac{\text{cot.}\,b}{\text{cos. A}} = \text{cot.}\,\varphi$, ou $\text{cos. A} = \text{cot.}\,b\ \text{tg.}\,\varphi$. . (1)

tira-se $\text{cot. B} = \dfrac{\text{cot. A}}{\text{sen.}\,\varphi}\,\text{sen.}\ (c - \varphi)$. . ($\alpha$)

De (n.° 31, XIV) deduz-se $\text{cot. C} = \text{cot. A}\left[\text{sen.}\,b\,\dfrac{\text{cot.}\,c}{\text{cos. A}} - \text{cos.}\,b\right]$;

e pondo $\dfrac{\text{cot.}\,c}{\text{cos. A}} = \text{cot.}\,\psi$, ou $\text{cos. A} = \text{cot.}\,c\ \text{tg.}\,\psi$. . (2)

resulta $\text{cot. C} = \dfrac{\text{cot. A}}{\text{sen.}\,\psi}\,\text{sen}\ (b - \psi)$. . ($\beta$)

Como na hypothese actual se conhecem os tres angulos, póde determinar-se o lado a pela formula (α) ou (β) do segundo caso: ou tambem pela formula (X, T. A.), como se segue:

$$\cot.\ a = \cot.\ c\ \cos.\ B + \operatorname{sen}.\ B \frac{\cot.\ A}{\operatorname{sen}.\ c} = \cot.\ c \left[\cos.\ B + \operatorname{sen}.\ B \frac{\cot.\ A}{\cos c}\right];$$

e tomando $\dfrac{\cot.\ A}{\cos.\ c} = \operatorname{tg}.\ \varepsilon$, ou $\cos.\ c = \cot.\ A\ \cot.\ \ldots (3)$

viria
$$\cot.\ a = \frac{\cot.\ c}{\cos.\ \varepsilon} \cos.\ (B - \varepsilon) \ldots (\gamma)$$

Como $\dfrac{\operatorname{sen}.\ (c-\varphi)}{\operatorname{sen}.\ \varphi} = \dfrac{\operatorname{sen}.[(c-\varphi)-\pi]}{\operatorname{sen}.\ (\varphi+\pi)}$; e $\dfrac{\cos.\ (B-\varepsilon)}{\cos.\ \varepsilon} = \dfrac{\cos.[(B-\varepsilon)-\pi]}{\cos.\ (\varepsilon+\pi)}$;

segue-se que no calculo (1), (2), (3), devemos tomar os *menores arcos* ou *angulos* φ, π, ε, que satisfizerem ás ditas equações (1) (2) (3).

A equação (1) tem por *logar geometrico* um triangulo espherico rectangulo, que tem um angulo diedro A, comprehendido pela hypothenusa b, e pelo catheto φ (n.° 31, T. B); e póde tambem dizer-se que é geometricamente representada pela figura triangular, comprehendida pelos arcos de circulo maximo b, φ que comprehendem A, e por um terceiro arco de circulo maximo baixado de C perpendicularmente sôbre o plano do arco c. Em quanto a (3) o seu *logar geometrico* é um triangulo espherico rectangulo, que tem c por hypothenuma, e pelos dois angulos diedros, adjacentes á hypothenusa, A e ε.

Poderiamos ter começado por determinar a pela formula (n.° 31, I), como se segue:

$$\cos.\ a = \cos.\ c\ (\cos.\ b + \operatorname{sen}.\ b\ \operatorname{tg}.\ c\ \cos.\ A);$$

e fazendo $\operatorname{tg}.\ c\ \cos.\ A = \operatorname{tg}.\ \omega$ ou $\cos.\ A = \cot.\ c\ \operatorname{tg}.\ \omega \ldots (4)$

fica
$$\cos.\ a = \frac{\cos.\ c}{\cos.\ \omega} \cos.(b-\omega) \ldots (\delta);$$

aonde, como acima, se deve tomar por ω o menor arco, que satisfizer a (4): e (4) significa um triangulo espherico rectangulo, cuja hypothenusa é c, e que tem o angulo diedro A, comprehendido por c e ω. Conhecidos assim os tres lados a questão proposta acaba de resolver-se pelo primeiro caso.

QUARTO CASO

36. *Dado um lado do triangulo espherico, e os dois angulos adjacentes a este lado, achar os outros elementos do triangulo.*

Sejam B, a, C os dados; e a formula (n.° 31, VII) dá

$$\cos. A = \cos. a \operatorname{sen.} B \left(\operatorname{sen.} C - \frac{\cot. B \cos. C}{\cos. a}\right)$$

e pondo $\dfrac{\cot. B}{\cos. a} = \operatorname{tg.} \varphi$; ou $\cos. a = \cot. B \cot. \varphi$.. (1)

resulta $\cos. A = \dfrac{\cos. a \operatorname{sen.} B \operatorname{sen.} (C - \varphi)}{\cos. \varphi}$.. ($\alpha$)

E como por este modo são conhecidos os tres angulos A, B, C, o problema póde considerar-se resolvido pelo segundo caso.

Podemos tambem começar pela determinação dos lados b e c, e acabar de resolver o problema pelo primeiro ou terceiro caso; e com effeito a formula (n.° 31, XIII) é

$$\cot. b = \cot. a \left(\cos. C + \operatorname{sen.} C \frac{\cot. B}{\cos. a}\right):$$

$$\frac{\cot. B}{\cos. a} = \operatorname{tg.} \psi, \text{ ou } \cos. a = \cot. B \cot. \psi .. (2)$$

dá em resultado

$$\cot. b = \frac{\cot. a \cos. (C - \psi)}{\cos. \psi} \ldots (\beta).$$

Do mesmo modo escrevendo em (XV)

$$\cos. a = \cot. C \cot. \omega \quad (3) \quad \text{vem} \ \cot. c = \frac{\cot. a \cos. (B - \omega)}{\cos. \alpha} \ldots (\chi):$$

e assim ou se calculará b e c por (β) (χ) e depois A pelo primeiro caso: ou se calculara sómente (β) ou (χ), e se terminará a questão pelo terceiro caso.

Antes de tractarmos do quinto caso estabeleceremos alguns principios, que podem esclarecer a discussão.

37. Seja dado um triangulo espherico CPA, rectangulo em P: sendo φ o lado opposto ao angulo A, que supporemos agudo; isto é, $A < \frac{\pi}{2}$: ψ será o lado opposto a C, b será a hypothenusa. Pelas formulas (n.º 31, T. B.) é

$$\text{tg.} \varphi = \text{sen.} \psi \ \text{tg.} A \ldots (1) \quad \cos. b = \cos. \varphi \cos. \psi \ldots (2);$$

$$\cos. b = \cot. A \cot. C; \ \text{ou} \ \cot. C = \cos. b \ \text{tg.} A \ldots (3).$$

Vê-se por esta ultima formula que *sendo dados* b,A *se determina* C; e depois $\cos. A = \cot. b \ \text{tg.} \psi$, dá ψ; e $\cos. C = \text{tg.} \varphi \cot. b$, dá φ. Assim o triangulo CPA é determinado por b, A.

Na hypothese actual, $A < \frac{\pi}{2}$, é $\varphi < \frac{\pi}{2}$, por conseguinte o supplemento do arco φ é maior do que $\frac{\pi}{2}$, isto é, $\pi - \varphi > \frac{\pi}{2}$. Chamaremos segmento *menor do meridiano* ao arco $\varphi < \frac{\pi}{2}$: e segmento maior do meridiano ao arco $\pi - \varphi$, construido no mesmo plano do arco φ, e do mesmo lado, em respeito do plano de ψ.

Supponha-se (2) que φ é invariavel, e procurem-se as variações de b, correspondentes ás variações de ψ. Fazendo em (2) $\psi = o$, fica $b = \varphi$. . . . (4) $\psi = \delta$, mui pequeno, dá cos. $b <$ cos. φ, e por isso $b' > \varphi$. . . . (5) $\psi = \frac{\pi}{2}$, dá

$$b'' = \frac{\pi}{2} \quad (6) \quad \psi = \frac{\pi}{2} + \delta,\ \cos. b = -\text{sen.}\ \delta \cos. \varphi, \text{ portanto } b''' > \frac{\pi}{2} \,.\,.\, (7)$$

$$\psi = \pi, \text{ dá } b^{\text{IV}} = \pi - \varphi \,.\,.\, (8).$$

Reproduzem-se resultados analogos ou se faça $\psi = -\psi$, ou $\psi = 2\pi - \psi$: portanto: dado um hemispherio, e na superficie curva d'elle um ponto C, que não seja o polo do hemispherio, 'neste e por C façamos passar muitas semicircumferencias de circulo maximo, sendo o plano de uma d'ellas, a meridiana, perpendicular ao plano da circumferencia da base do hemispherio, e 'nesta circumferencia contem-se os ψ: e de C esteja tirado para circumferencia da base o arco de circulo maximo $b < \frac{\pi}{2}$ a uma distancia ψ do segmento menor φ do meridiano: o angulo A, que faz o plano de b com a base do hemispherio, e que fica opposto a φ, é menor do que um recto; isto é, $A < \frac{\pi}{2}$: a semicircumferencia, de que b é parte, e que existe sôbre o hemispherio, divide o hemispherio em duas lunulas esphericas: uma tem o angulo diedro A; outra $\pi - A$: supposto isto:

I. O menor arco de circulo maximo, que se póde tirar de C para a circumferencia de ψ é φ: o maior é $\pi - \varphi$.

II. Os arcos de circulo maximo tirados de C para a circumferencia de ψ são successiva e gradualmente maiores ao passo que se desviam de φ.

III. Dois arcos de circulo maximo tirados de C para a circumferencia da ψ, e que são equidistantes do arco φ, são eguaes.

IV. Na lunula, em que existe o menor segmento φ do meridiano, e para intervallo 2ψ da circumferencia da base do hemispherio, contando de A, podem tirar-se de C muitos pares de arcos de circulo maximo, sendo o arco d'um par egual ao outro do mesmo par; e qualquer dos arcos d'um par é menor do que b.

V. Similhantemente na lunula em que está o segmento maior $\pi-\varphi$ do meridiano, e para o intervallo correspondente a $(\psi+\pi)-(\pi-\psi)$ da circumferencia da base do hemispherio, sendo ψ contado do segmento menor do meridiano, se podem tirar de C muitos pares de arcos de circulo maximo eguaes, sendo cada arco menor do que $\pi-\varphi$, e maior que $\pi-b$. Na lunula do segmento $\pi-\varphi$ do meridiano ha um par de arcos eguaes, cada um a $\pi-b$.

VI. Todos os outros arcos de circulo maximo, tirados de C para a base do hemispherio, e que não pertencem aos pares, de que acabamos de fallar (IV, V), e que não são φ, ou $\pi-\varphi$, são maiores do que b, na lunula do angulo A, e menores do que $\pi-b$; na lunula de $\pi-A$ os ditos arcos são todos maiores do que b.

Supponhamos agora que se propõe o problema seguinte (n.° 32).

QUINTO CASO

38. *Dados dois lados a, b, e o angulo diedro* A, *que deve ser opposto a* a, *achar* B, C, *e* c.

I. Seja
$$A=\frac{\pi}{2},\ \text{e}\ b<\frac{\pi}{2}.$$

A formula
$$\cos. a=\cos. b\cos. c \text{ dá } \cos. c=\frac{\cos. a}{\cos. b}.$$

Se $a<b$, $\cos. a>\cos. b$, e por conseguinte $\cos. c>1$, resultado absurdo.

Se $a=b$, $\cos. a=\cos. b$, e por conseguinte $\cos. c=1$, ou $c=o$, que se deve rejeitar, porque $c=o$ diz que não ha triangulo.

Se $a>b$, e $a+b<\pi$, faremos

$$a+b=\pi-a',\ \text{e}\ b=\frac{\pi}{2}-b'$$

do que se tira

$$a+\frac{\pi}{2}-b'=\pi-a', \text{ e } a=\frac{\pi}{2}+(b'-a') \text{ ou } a=\frac{\pi}{2}-(a'-b')$$

mas a nem é zero, nem π, nem negativo, por conseguinte

$$b'-a', \text{ ou } a'-b' \text{ é agudo; e } \cos. c=\frac{-\text{sen.}\,(b'-a')}{\text{sen.}\,a},$$

ou $$\cos. c=\frac{\text{sen.}\,(a'-b')}{\text{sen.}\,b'} : \text{isto é, } \cos. c=\frac{\pm\,\text{sen.}\,(b'-a')}{\text{sen.}\,b'},$$

conforme for $b'>a'$, ou $b'<a'$: logo o valor numerico de coseno é menor, do que a unidade, e por isso ha uma solução admissivel.

Se $a>b$, e $a+b=\pi$ será tambem

$$\cos. c=-\frac{\cos. b}{\cos. b}=-1$$

logo $c=\pi$, solução, que se deve rejeitar.

Se $a>b$, e $a+b>\pi$, faremos

$$a+b=\pi+a', \text{ e } a+\frac{\pi}{2}-b'=\pi+a'$$

do que se deduz $a=\frac{\pi}{2}+a'+b'$, logo $a'+b'<\frac{\pi}{2}$,

por conseguinte $$\cos. c=\frac{-\,\text{sen.}\,(a'+b')}{\text{sen.}\,b'},$$

e o valor numerico de cos. c sáe maior do que a unidade, conclusão absurda.

II. *Seja em segundo logar* $A = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$.

Se $a < b$ $\cos. c = \frac{\cos. a}{0} = \infty$, o que significa impossibilidade de solução nos termos, em que foi posto o problema.

Se $a > b$, temos, como acima, $\cos. c = \infty$.

Se $a = b$, é $\cos. c = \frac{0}{0}$, e póde, portanto, construir-se um numero de triangulos tão grande, quanto se quizer, com os dados $A = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{\pi}{2}$; o que concorda com o que se sabe (n.º 21) pela Geometria Synthetica.

III. *Seja finalmente* $A = \frac{\pi}{2}$, e $b > \frac{\pi}{2}$.

Se $a < b$, e $a + b < \pi$, fazendo

$$a + b = \pi - a', \text{ e } b = \frac{\pi}{2} + b',$$

resulta $$a = \frac{\pi}{2} - (a' + b'), \text{ e é } a' + b' < \frac{\pi}{2}; \text{ logo}$$

$$\cos. c = \frac{-\text{sen.}(a' + b')}{\text{sen.}\, b'}$$

numero maior do que um, prescindindo do signal; logo a hypothese actual conduz ao absurdo.

Se $a < b$, e $a + b = \pi$, $\cos. c = -1$, ou $c = \pi$, o que se deve rejeitar.

Se $a<b$, e $a+b>\pi$, faremos

$$a+b=\pi+a', \text{ e } a+\frac{\pi}{2}+b'=\pi+a', \text{ ou } a=\frac{\pi}{2}+(a'-b'),$$

aonde $a'-b'$ ou $b'-a'$ é menor, do que $\frac{\pi}{2}$: logo

$$\cos. c=\frac{\pm \text{sen.}\,(b'-a')}{\text{sen.}\,b'}, \text{ mas } \frac{\text{sen.}\,(b'-a')}{\text{sen},\,b'}<1\,;$$

logo a presente hypothese dá uma solução acceitavel.

Se $a>b$; como $b>\frac{\pi}{2}$, e $b<\pi$; e tambem $a>\frac{\pi}{2}$, $a<\pi$, segue-se que $\cos. a>\cos. b$, e por isso $\cos. c>1$, o que é contradictorio.

Se $a=b$, $\cos. c=1$, e $c=0$, o que é inadmissivel.

Antes de começar-se a discussão dos casos correspondentes a $A \lessgtr \frac{\pi}{2}$ advertiremos que, convertido em numero o arco φ, segmento menor do meridiano, se devem rejeitar como impossiveis de resolver, os casos, em que seja $a<\varphi$, e o triangulo tenha de construir-se na lunula do angulo $A<\frac{\pi}{2}$; e rejeitar, pela impossibilidade de solução, as hypotheses, em que é a maior do que $\pi-\varphi$, quando tivesse de construir-se o triangulo na lunula, cujo angulo é $\pi-A$ e $A<\frac{\pi}{2}$ (I).

IV. $A<\frac{\pi}{2}$: $b<\frac{\pi}{2}$.

Se $a<b$, o problema tem duas soluções; isto é, podem construir-se

dous triangulos esphericos differentes, mas que tem os mesmos elementos $A < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$, $a < b$, ficando ambos os triangulos na lunula, cujo angulo é A. (n.° 37, IV).

Se $a = b$, ha sómente uma solução (n.° 37, V.).

Se $a > b$, e $a + b < \pi$, ou $a < \pi - b$, ha uma solução (n.° 37, VI).

Se $a > b$, e $a + b = \pi$, ou $a = \pi - b$, não ha solução, porque (n.° 37, VI) só o arco a, que está em direitura de b, isto é, no mesmo plano, é que satisfaz á condição $a = \pi - b$.

Se $a > b$, e $a + b > \pi$, ou $a > \pi - b$, tambem ha, e a *fortiori*, como na hypothese precedente impossibilidade de solução.

V. $$A < \frac{\pi}{2} : b = \frac{\pi}{2}.$$

'Nesta hypothese $\cos. b = \cos. \varphi \cos. \psi = 0$, dá $\psi = \frac{\pi}{2}$, $2\psi = \pi$.

Se $a < b$, ha duas soluções (n.° 37, IV).

Se $a = b$, não ha solução (n.° 37, IV).

Se $a < b$, pelo mesmo motivo, e a *fortiori*, não ha solução.

VI. $$A < \frac{\pi}{2} : b > \frac{\pi}{2}.$$

Nas construcções para esta hypothese escusamos de mudar as precedentes, tomando aqui por b o que anteriormente era $\pi - b$: e 'nestes termos:

Se $a < b$ e $a + b < \pi$, ou $a < \pi - b$, acham-se duas soluções. (n.° 37, IV).

Se $a < b$, e $a + b = \pi$, ou $a = \pi - b$, temos uma solução (n.° 37, V).

Se $a < b$, e $a + b > \pi$, ou $a > \pi - b$, ha uma solução (n.º 37, VI).

VII. $$A > \frac{\pi}{2} : b < \frac{\pi}{2}.$$

Se $a < b$, não ha solução (n.º 37, VI).

Se $a = b$, o mesmo.

Se $a > b$, e $a + b < \pi$, ou $a < \pi - b$, ha uma solução (n.º 37, VI).

Se $a > b$, e $a + b = \pi$, ou $a = \pi - b$, ha uma solução (n.º 37, V,VI).

Se $a > b$, e $a + b > \pi$, ou $a > \pi - b$, vem duas soluções (n.º 37, II,III).

VIII. $$A > \frac{\pi}{2} : b = \frac{\pi}{2}.$$

Se $a < b$, não ha solução (n.º 37, VI).

Se $a = b$, o mesmo.

Se $a > b$, ha duas soluções (n.º 37, V).

IX. $$A > \frac{\pi}{2} : b > \frac{\pi}{2}.$$

Se $a < b$, e $a + b < \pi$, ou $a < \pi - b$, não ha triangulo (n.º 37, II,VI).

Se $a < b$, e $a + b = \pi$, o mesmo.

Se $a < b$, e $a + b > \pi$, ou $a > \pi - b$, ha um triangulo (n.º 37, VI).

Se $a = b$, ha um triangulo (n.º 37, V).

Se $a > b$, ha duas soluções (n.º 37, III).

Reunindo em um só typo, ou tabella, os resultados precedentes, porém omittindo, por inuteis, as hypotheses que não offerecem solução numerica, fica:

TABELLA C

Angulo diedro A	Arco b	Relações de a com b	Numero de soluções	Angulo diedro B	Angulo diedro B
$A < 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a < b$	Duas sol.	$B < 90^\circ$	$B'' = 180^\circ - B$
		$a = b$	Uma sol.	$B = A$	
		$a > b,\ a < 180^\circ - b$	Uma sol.	$B < 90^\circ$	
	$b = 90^\circ$	$a < b$	Duas sol.	$B < 90^\circ$	$B'' = 180^\circ - B$
	$b > 90^\circ$	$a < b,\ a < 180^\circ - b$	Duas sol.	$B < 90^\circ$	$B'' = 180^\circ - B$
		$a < b,\ a = 180^\circ - b$	Uma sol.	$B > 90^\circ$	
		$a < b,\ a > 180^\circ - b$	Uma sol.	$B > 90^\circ$	
$A = 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a > b,\ a < 180^\circ - b$	Uma sol.	$B < 90^\circ$	
	$b = 90^\circ$	$a = b$	M.tas sol.	$B = A = 90^\circ$	$B'' = B''' = 90^\circ$
	$b > 90^\circ$	$a < b,\ a > 180^\circ - b$	Uma sol.	$B > 90^\circ$	
$A > 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a > b,\ a < 180^\circ - b$	Uma sol.	$B < 90^\circ$	
		$a > b,\ a = 180^\circ - b$	Uma sol.	$B < 90^\circ$	
		$a > b,\ a > 180^\circ - b$	Duas sol.	$B < 90^\circ$	$B'' = 180^\circ - B$
	$b = 90^\circ$	$a > b$	Duas sol.	$B < 90^\circ$	$B'' = 180^\circ - B$
	$b > 90^\circ$	$a < b,\ a > 180^\circ - b$	Uma sol.	$B > 90^\circ$	
		$a = b$	Uma sol.	$B = A$	
		$a > b$	Duas sol.	$B < 90^\circ$	$B'' = 180^\circ - B$

Formada uma tabella, como C, para o triangulo espherico $A'\,B'\,C'$, supplementar de $A\,B\,C$, para o qual C foi construida, e mudado depois, na tabella relativa a $A'\,B'\,C'$, A' em $180° - a$, B' em $180° - b$, C' em $180° - C$, a' em $180° - A$, b' em $180° - B$, c' em $180° - C$, resulta a seguinte tabella.

TABELLA D

Arcos a	Angulo diedro B	Relações de A com B	Numero de soluções	Arcos b	Arcos b
$a < 90°$	$B < 90°$	$A < B$	Duas sol.	$b > 90°$	$b'' = 180° - b$
		$A = B$	Uma sol.	$b = a$	
		$A > B$, $A < 180 - B$	Uma sol.	$b < 90°$	
	$B = 90°$	$A < B$	Duas sol.	$b > 90°$	$b'' = 180° - b$
	$B > 90°$	$A < B$, $A < 180° - B$	Duas sol.	$b > 90°$	$b'' = 180° - b$
		$A < B$, $A = 180° - B$	Uma sol.	$b > 90°$	
		$A < B$, $A > 180° - B$	Uma sol.	$b > 90°$	
$a = 90°$	$B < 90°$	$A > B$, $A < 180° - B$	Uma sol.	$b < 90°$	
	$B = 90°$	$A = B$	M.tas sol.	$b = a = 90°$	$b'' = b''' = 90°$
	$B > 90°$	$A < B$, $A > 180° - B$	Uma sol.	$b > 90°$	
$a > 90°$	$B < 90°$	$A > B$, $A < 180° - B$	Uma sol.	$b < 90°$	
		$A > B$, $A = 180° - B$	Uma sol.	$b < 90°$	
		$A > B$, $A > 180° - B$	Duas sol.	$b > 90°$	$b'' = 180° - b$
	$B = 90°$	$A > B$	Duas sol.	$b > 90°$	$b'' = 180° - b$
	$B > 90°$	$A < B$, $A > 180° - B$	Uma sol.	$b > 90°$	
		$A = B$	Uma sol.	$b = a$	
		$A > B$	Duas sol.	$b > 90°$	$b'' = 180° - b$

A tabella C offerece um meio de reconhecer se o *quinto caso* é ou não determinado: e a tabella D presta um similhante serviço, quando tivermos de discutir o seguinte problema, que póde ser o:

SEXTO CASO

Resolver um triangulo espherico, quando são dados dois angulos e um lado, opposto a um dos angulos dados.

39. As *Regras de Neper*, que deduzimos, como hypothese particular, da equação (n.° 25, α), podiam ser demonstradas directamente pela Geometria Synthetica, o que se vê feito em *Legendre Geom. 14.ª* Ed. de Paris, pag. 387 a 390: mas, seja qual for o processo empregado para estabelecer as *Regras de Neper*, temos a certeza de que as dictas regras respondem ás questões de trigonometria espherica com a mesma generalidade, com que responde a fórmula (n.° 25, α).

E com effeito, esteja abaixado do vertice B do triangulo espherico A B C um arco de circulo maximo B P que chamaremos p, e cujo plano seja perpendicular ao plano de b: e supponha-se que p divide b em dois segmentos δ, $b-\delta$; e, pelas *Regras de Neper*, $\cos. c = \cos. p \cos. \delta$, $\cos. a = \cos. p \cos. (b-\delta)$; logo

$$\frac{\cos. a}{\cos. c} = \frac{\cos. (b-\delta)}{\cos. \delta} \ldots (1) \qquad \frac{\cos. a}{\cos. c} = \cos. b + \text{sen.}\, b \text{ tg.}\, \delta \ldots (2);$$

mas $\cos. A = \text{tg.}\, \delta \cot. c$, ou $\text{tg.}\, \delta = \cos. A \text{ tg.}\, c \ldots (3)$

e por isso (2) $$\frac{\cos. a}{\cos. c} = \cos. b + \frac{\text{sen.}\, b \text{ sen.}\, c \cos. A}{\cos. c},$$

ou $\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen.}\, b \text{ sen.}\, c \cos. A \ldots (4)$

e (4) é o mesmo que (n.° 25, α).

Um processo analogo dá a equação (4) quando p cahe fóra de b.

As formulas (1) (3) ou

$$\text{tg.}\,\delta = \cos.\,A\ \text{tg.}\,c,\ \cos.\,a = \frac{\cos.\,c\ \cos.\,(b-\delta)}{\cos.\,\delta}.$$

Servem para resolver o *Terceiro caso*, fazendo-o depender do *Primeiro caso*.

40. Demonstra-se com facilidade na Geometria (*) Synthetica que

I. A superficie da lunula espherica é proporcional ao angulo A da lunula. De sorte que representando por E a superficie da esphera, sôbre a qual está descripta a lunula; e por A o angulo da lunula, ou o arco, que mede o dicto angulo; por $2\pi R$ a circumferencia de um circulo maximo da esphera, por L a superficie da lunula, teremos

$$L : E :: A : 2\pi R \ldots (1)$$

Adoptando para unidade de superficie a oitava parte da superficie da esphera, ou a superficie do triangulo espherico trirectangulo, e para unidade dos arcos o quadrante, ou $\frac{\pi R}{2}$, e chamando ainda L ao número

$$\frac{8L}{E};\ 8\ a\ \frac{8E}{E},\ A\ a\ \frac{2A}{\pi R},\ 4\ a\ \frac{4\pi R}{R\pi},\ \text{fica (1)}:$$

$$L : 2 :: A : 1 \ldots\ldots (2), \text{ ou}$$

$$L = 2A \ldots\ \ \ldots (b);$$

II. Dados dois triangulos esphericos *symetricos*, a superficie de um é equivalente á do outro: e por consequencia

III. A superficie T do triangulo espherico ABC, junctamente com a superficie de dois triangulos trirectangulos, é equivalente á semisomma

---

(*) Geometrias de *Legendre* 14, Ed. de París, L. 7, p. 20, 21, 22, 23: de *Sonnet*, Ed. de París, de 1853, n.º 667—670: de *Cirodde*, 2.ª Ed. de París, pag. 321—323 das lunulas dos angulos A, B, C: isto é

$$T+2=A+B+C\ldots\ldots(c)$$

41. Se fizermos N=cos. a—cos. b cos. c, e D=sen. b sen. c, resulta cos. $A=\frac{N}{D}$ (n.º 25, α): mas (n.º 4)

$$N=1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}-\ldots-\left(1-\frac{b^2}{2}+\frac{b^4}{24}-\ldots\right)\left(1-\frac{c^2}{2}+\frac{c^4}{24}-\ldots\right)$$

$$D=\left(b-\frac{b^3}{6}+\ldots\right)\left(c-\frac{c^3}{6}+\ldots\right)=bc\left(1-\frac{a^2+c^2}{6}+\ldots\right)$$

$$N=1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}-\ldots-1+\frac{c^2}{2}-\frac{c^4}{24}+\ldots+\frac{b^2}{2}-\frac{b^2c^2}{4}+\ldots-\frac{b^4}{24}+\ldots;\text{ ou}$$

$$N=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24}+\ldots\ldots(1)$$

$$D=bc\left(1-\frac{b^2+c^2}{6}+\ldots\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Se for permittido o despresar em cos. A todos os termos, em que entrarem potencias dos arcos a, b, c superiores á segunda, e os productos que entrarem na mesma ordem, resultará, feita a divisão algebrica:

$$\cos. A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\left(1+\frac{b^2+c^2}{6}\right)+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24bc}$$

$$\cos. A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{b^4+c^4+2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{12bc}+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24bc}$$

$$\cos. A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bc}\ldots(3)$$

No triangulo rectilineo A′ B′ C′, que tenha os lados *a*, *b*, *c*, é

$$\cos. A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}, \text{ e por conseguinte}$$

$$\cos. A = \cos. A' + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2\,b^2 - 2\,a^2\,c^2 - 2\,b^2\,c^2}{24\,b\,c} \ldots\ldots (4)$$

$$\text{e como} \quad 1 - \cos.^2 A' = \frac{4\,b^2\,c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,b^2\,c^2} = \text{sen.}^2 A', \text{ resulta}$$

$$\text{sen.}^2 A' = \frac{4\,b^2\,c^2 - b^4 - c^4 - a^4 - 2\,b^2\,c^2 + 2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2}{4\,b^2\,c^2}, \text{ ou}$$

$$-\text{sen.}^2 A' = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2\,b^2 - 2\,a^2\,c^2 - 2\,b^2\,c^2}{4\,b^2\,c^2}, \text{ ou}$$

$$-\frac{b\,c\,\text{sen.}^2 A'}{6} = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2\,b^2 - 2\,a^2\,c^2 - 2\,b^2\,c^2}{24\,b\,c}, \text{ logo (4)}$$

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{b\,c\ \text{sen.}^2 A'}{6} \ldots\ldots (5)$$

Vê-se pois que cos. A — cos. A′ é da segunda ordem relativamente a *b*, *c*; e como A, e A′ são, cada um, comprehendidos entre 0 e π segue-se que A—A′ é da mesma ordem que cos. A—cos. A′: sendo pois $A - A' = \delta$, é (n.° 9)

$$\cos. A - \cos. A' = -\delta\ \text{sen.}\, A' = -\frac{b\,c\ \text{sen.}^2 A'}{6}; \text{ logo } \delta = \frac{b\,c\ \text{sen.}\, A'}{6};$$

e por conseguinte:

$$A = A' - \frac{b\,c\,\text{sen.}\, A'}{6} \ldots (6): \qquad B = B' - \frac{a\,c\,\text{sen.}\, B'}{6} \ldots\ldots (7)$$

$$C = C' - \frac{ab\,\text{sen.}\,C'}{6} \quad ..(8)$$

Os arcos a, b, c estão aqui referidos ao raio R das tàboas; mas os arcos, que subtendem o mesmo angulo são proporcionaes aos respectivos raios; logo $a:a'::R:R'$, e $\frac{a}{R}=\frac{a'}{R'}$; em vez pois de $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ podemos tomar $\frac{a'}{R'}, \frac{b'}{R'}, \frac{c'}{R'}$, ou por mais simplicidade $\frac{a}{R'}, \frac{b}{R'}, \frac{c}{R'}$, e as formulas (6) (7) (8) podem escrever-se

$$A = A' - \frac{bc\,\text{sen.}\,A'}{6\,R'^2} \dots (9): \qquad B = B' - \frac{ac\,\text{sen.}\,B'}{6\,R'^2} \dots (10)$$

$$C = C' - \frac{ab\,\text{sen.}\,C'}{6\,R'^2} \dots (11).$$

'Nestas formulas as arcos a, b, c estão traçados na esphera do raio R'.

Suppondo que a circumferencia do circulo maximo da esphera terrestre é $2\pi\,R'$, e que $\frac{\pi R'}{2} = 10000000$ metros resultarà

$$R' = \frac{20000000}{\pi} = 6366197{,}7237 \text{ metros}; \quad \text{ou}$$

$$\textit{Raio da esphera terrestre} = 6366197^{m}{,}7237 \dots (a)$$

$$\textit{log. do raio da esphera terrestre} = 6{,}803880122969847 \dots (b)$$

Querendo R' expresso em segundos decimaes, faremos

$$\frac{\pi R'}{2} = 200\,(100)^2; \text{ ou } R' = \frac{2000000}{\pi} = 636619{,}77237$$

segundos decimaes.... (c)

Podemos empregar as linhas trigonometricas para ter (c), por quanto $R' = \frac{200.(100)^2[R']}{\pi}$, procedendo como fizemos (n.º 2, 3); mas $\frac{\pi\,(R')^{-1}}{200.(100)^2}$ = ao seno do arco de um segundo decimal, sendo R′ o raio do circulo, em que se construem os senos, e sendo *permittido* o tomar o arco de $1''$ pelo seno de $1''$: mas $R' : R :: \text{sen.}\,\alpha' : \text{sen.}\,\alpha$; logo

$$\frac{\pi\,(R')^{-1}}{200.(100)^2} = \frac{\pi}{200.(100)^2} = \text{sen.}\,1'',$$

contado no circulo cujo raio é $R = 1$, logo

$$R' = \frac{1}{\text{sen.}\,1''} \ldots\ldots (d)$$

aonde seno de $1''$ é tomado na divisão moderna.

Como pois (c) $A' = \frac{2000000}{\pi}$, e por (d) tambem achamos R′ approximadamente, segue-se, que *dentro dos limites da approximação* (d) *os dois valores de* R′ *devem coincidir.*

Não ha pois motivo rasoavel para julgar que é digna de nota a coincidencia de (c) *com* (d).

Tambem se deve notar que é vicioso o pôr $\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ em (3), por muito pequenos que sejam $\frac{a'}{R'}, \frac{b'}{R'}, \frac{c'}{R'}$, ou os arcos a', b', c', como é facil de ver por (3): e além d'isso a hypothese, *o triangulo espherico confunde-se com o rectilineo*, contradiz a proposição 2.ª do L. 3, da *Geom. de Eucl.*

Resolução numerica dos triangulos esphericos

Exemplo I

Sejão $a = 58^\circ.0'.5'',28$; $b = 88^\circ.18'.28'',80$; $c = 94^\circ.52'.40'',80$ os tres lados d'um triangulo espherico; o angulo A é dado (n.º 33 α) por

$$\text{sen.}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen.}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}}$$

Ora $\frac{a+b-c}{2} = 25^\circ.42'.56'',64$; $\frac{a+c-b}{2} = 32^\circ.17'.8'',64$

$$\begin{aligned}
\text{lg. sen.}\frac{a+b-c}{2} &= 9,6373961\\
\text{lg. sen.}\frac{a+c-b}{2} &= 9,7276565\\
\text{Comp. lg. sen.}\,b &= 0,0001894\\
\text{Comp. lg. sen.}\,c &= \underline{0,0015758}\\
\text{lg. sen.}^2\frac{1}{2}A &= \underline{9,3668178}\\
\text{lg. sen.}\frac{1}{2}A &= \underline{9,6834089}\\
\frac{1}{2}A &= 28^\circ.50'.32'',58;\ A = 57^\circ.41'.5'',16
\end{aligned}$$

Por este modo se póde proceder na *reducção dos angulos ao horizonte.*

Exemplo II

Sejão $A = 114°.7'.30'',14$; $b = 41°.9'.45'',94$; $c = 50°.5'.47'',15$; os dois lados b, c, e o angulo A de um triangulo espherico; o lado a é (n.° 35) dado por $\cos. a = \dfrac{\cos. c \cos. (b-\omega)}{\cos. \omega}$: sendo $\text{tg}. \omega = \cos. A \ \text{tg}. c$.

$$\begin{aligned}
\text{lg. cos. } A &= 9,6114358 \\
\text{lg. tg. } c &= 0,0776713 \\
\text{lg. tg. } \omega &= \overline{9,6891071} \\
\omega &= \overline{153°.57'.6'',74}\text{; e } b-\omega = -112°.47'.20'',8 \\
\text{lg. cos. } c &= 9,8071949 \\
\text{lg. cos. } (b-\omega) &= 9,5880928 \\
\text{Comp. lg. cos. } \omega &= 0,0465180 \\
\text{lg. cos. } a &= \overline{9,4418057} \\
a &= 73°.56'.39'',77
\end{aligned}$$

Assim se procederá quando, por exemplo, se quizer achar a *minima distancia entre dois pontos situados sôbre a esphera terrestre, se for dada a differença das Longitudes Geographicas dos dois pontos, e a Latitude Geographica de cada um d'elles.*

O comprimento do quadrante terrestre em metros é 10.000.000; o arco a é $a = 73°,9443805555$: logo $90° : 73°,9443805555 :: 10.000.000 : a^m$ e $a^m = \dfrac{739443805,555}{90} = \dfrac{73944380,5555}{3^2} = 8216042^m2839$, e como o myriametro tem dez mil metros será $a = 73°.56'.39'',77 = 821,6042839$ *myriametros*

Exemplo III

'Neste exemplo supporemos a circumferencia dividida em 400 partes eguaes (n.° 2): e 'neste supposto, seja

$$A = 53°.7'.41'' : b = 46°.23'.64'' : c = 94°.51'.39'' : \text{e}$$

$$\cot.\ \omega = \frac{\text{tg.}\ (100^\circ - c)}{\cos.\ A} : \cos.\ a = \frac{\cos.\ c\ \cos.\ (b-\omega)}{\cos.\ \omega}$$

$$\begin{aligned}
\text{lg. tg.}\ (100^\circ - c) &= 8{,}9364603 \\
\text{Comp. lg. cos. A} &= 0{,}1725330 \\
\text{lg. cot.}\ \omega &= \overline{9{,}1089933} \\
\omega &= \overline{91^\circ.86'.24''} \\
\text{Com. lg. cos.}\ \omega &= 0{,}8945671 \\
\text{lg. cos.}\ c &= 8{,}9348458 \\
\text{lg. cos.}\ (b-\omega) &= 9{,}8773617 \\
\text{lg. cos.}\ a &= \overline{9{,}7067746} \\
a &= \overline{65^\circ.99'.81'',4}
\end{aligned}$$

E como o myriametro tem 10000 metros, é

$$a = 659{,}9814 \text{ myriametros.}$$

Formulas trigonometricas

Das formulas (n.º 7, A, B) tira-se

$$\text{sen.}\ (\alpha + \beta) + \text{sen.}\ (\alpha - \beta) = 2\ \text{sen.}\ \alpha \cos \beta \quad \text{(I)}$$

$$\text{sen.}\ (\alpha + \beta) - \text{sen.}\ (\alpha - \beta) = 2\cos.\ \alpha\ \text{sen.}\ \beta \quad \text{(II)}$$

$$\cos.\ (\alpha + \beta) + \cos.\ (\alpha - \beta) = 2\cos.\ \alpha \cos.\ \beta \quad \text{(III)}$$

$$\cos.\ (\alpha - \beta) - \cos.\ (\alpha + \beta) = 2\ \text{sen.}\ \alpha\ \text{sen.}\ \beta \quad \text{(IV)}$$

Fazendo 'nestas formulas $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = b$, fica

$$\text{sen.}\ a + \text{sen.}\ b = 2\ \text{sen.} \left(\frac{a+b}{2}\right) \cos. \left(\frac{a-b}{2}\right) \ldots . \ (1)$$

$$\text{sen.}\ a - \text{sen.}\ b = 2\cos. \left(\frac{a+b}{2}\right) \text{sen.} \left(\frac{a-b}{2}\right) \ldots . \ (2)$$

$$\cos. a + \cos. b = 2 \cos. \left(\frac{a+b}{2}\right) \cos. \left(\frac{a-b}{2}\right) \ldots (3)$$

$$\cos. b - \cos. a = 2 \operatorname{sen.} \left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{sen.} \left(\frac{a-b}{2}\right) \ldots (4)$$

Sendo em (I) (II) $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = 90^\circ - b$, resulta

$$\operatorname{sen.} a + \cos. b = 2 \operatorname{sen.} \left(\frac{a - b + 90^\circ}{2}\right) \cos. \left(\frac{a + b - 90^\circ}{2}\right) \ldots (5)$$

$$\operatorname{sen.} a - \cos. b = 2 \operatorname{sen.} \left(\frac{a + b - 90^\circ}{2}\right) \cos. \left(\frac{a - b + 90^\circ}{2}\right) \ldots (6)$$

Dividindo sen. $(\alpha + \beta)$ por cos. $(\alpha + \beta)$; sen. $(\alpha - \beta)$ por cos. $(\alpha - \beta)$, acha-se

$$\operatorname{tg.} (a + b) = \frac{\operatorname{tg.} a + \operatorname{tg.} b}{1 - \operatorname{tg.} a \operatorname{tg.} b} \ldots (7)$$

$$\operatorname{tg.} (a - b) = \frac{\operatorname{tg.} a - \operatorname{tg.} b}{1 + \operatorname{tg.} a \operatorname{tg.} b} \ldots (8).$$

Fazendo 'nestas duas formulas $a = 45^\circ$,

$$\operatorname{tg.} (45^\circ + b) = \frac{1 + \operatorname{tg.} b}{1 - \operatorname{tg.} b} \ldots (9)$$

$$\operatorname{tg.} (45^\circ - b) = \frac{1 - \operatorname{tg.} b}{1 + \operatorname{tg.} b} \ldots (10).$$

Pondo $a = b$ em (7)

$$\operatorname{tg.} 2a = \frac{2 \operatorname{tg.} a}{1 - \operatorname{tg.}^2 a} \ldots (11).$$

Dividindo (1) por (2); e (1) por (3); e (2) por (3);

$$\frac{\text{sen.}\,a+\text{sen.}\,b}{\text{sen.}\,a-\text{sen.}\,b}=\text{tg.}\,\frac{(a+b)}{2}\,\text{cot.}\,\frac{(a-b)}{2}\ldots\ (12)$$

$$\frac{\text{sen.}\,a+\text{sen.}\,b}{\text{cos.}\,a+\text{cos.}\,b}=\text{tg.}\,\frac{(a+b)}{2}\ldots\ldots\ldots\ (13)$$

$$\frac{\text{sen.}\,a-\text{cos.}\,b}{\text{cos.}\,a+\text{cos.}\,b}=\text{tg.}\,\frac{(a-b)}{2}\ldots\ldots\ldots\ (14).$$

Fazendo $a=90°$ em (12)

$$\frac{1+\text{sen.}\,b}{1-\text{sen.}\,b}=\text{tg.}\left(45°+\frac{b}{2}\right)\text{cot.}\left(45°-\frac{b}{2}\right)=\text{tg.}^2\left(45°+\frac{b}{2}\right)\ldots(15).$$

Suppondo $\alpha=\beta=a$ em (I) (III) (IV). vem

$$\text{sen.}\ 2a=2\,\text{sen.}\,a\,\text{cos.}\,a\ldots\ (16)$$

$$1+\text{cos.}\,2a=2\,\text{cos.}^2\,a\ldots\ldots\ (17)$$

$$1-\text{cos.}\,2a=2\,\text{sen.}^2\,a\ldots\ldots\ (18).$$

Sendo $a=90$ em (1) e (2)

$$1+\text{sen.}\,b=2\,\text{sen.}\left(45°+\frac{b}{2}\right)\text{cos.}\left(45°-\frac{b}{2}\right)=2\,\text{sen.}^2\left(45°+\frac{b}{2}\right)\ldots(19)$$

$$1-\text{sen.}\,b=2\,\text{cos.}\left(45°+\frac{b}{2}\right)\text{sen.}\left(45°-\frac{b}{2}\right)=2\,\text{cos.}^2\left(45°+\frac{b}{2}\right)\ldots(20).$$

Multiplicando (1) por (2), e usando de (16) fica

$$\text{sen.}^2\,a-\text{sen.}^2\,b=\text{sen.}\,(a+b)\ \text{sen.}\,(a-b)\ldots\ (21)$$

Fazendo o mesmo com (3) (4)

$$\cos.^2 b - \cos.^2 a = \text{sen.}\,(a+b)\ \text{sen.}\,(a-b) \ldots (22).$$

Fazendo $a = 90°$ em (12)

$$\frac{1+\text{sen.}\,b}{1-\text{sen.}\,b} = \text{tg.}^2\left(45° + \frac{b}{2}\right) \ldots (23).$$

Reduzindo ao mesmo denominador $\text{tg.}\,a + \text{tg.}\,b$, $\text{tg.}\,a - \text{tg.}\,b$, e usando de (n.° 7, A)

$$\text{tg.}\,a + \text{tg.}\,b = \frac{\text{sen.}\,(a+b)}{\cos.\,a\,\cos.\,b} \ldots (24)$$

$$\text{tg.}\,a - \text{tg.}\,b = \frac{\text{sen.}\,(a-b)}{\cos.\,a\,\cos.\,b} \ldots (25)$$

Suppondo 'nestas duas formulas $a = 45°$

$$1 + \text{tg.}\,b = \frac{\text{sen.}\,(45° + b)}{\cos.\,45°\,\cos.\,b} = \frac{\cos.\,(45° - b)}{\cos.\,45°\,\cos.\,b} \ldots (26)$$

$$1 - \text{tg.}\,b = \frac{\text{sen.}\,(45° - b)}{\cos.\,45.°\,\cos.\,b} = \frac{\cos.\,(45° + b)}{\cos.\,45°\,\cos.\,b} \ldots (27)$$

Pondo $a = b$ em (5) (6):

$$\text{sen.}\,a + \cos.\,a = 2\,\text{sen.}\,45°\,\cos.\,(45° - a) = 2\,\text{sen.}\,45°\,\text{sen.}\,(45° + a) \ldots (28)$$

$$\cos.\,a - \text{sen.}\,a = 2\,\text{sen.}\,(45° - a)\cos.\,45° = 2\,\cos.\,45°\,\cos.\,(45° + a) \ldots (29)$$

Escrevendo $\beta = b$, $\alpha = 30°$ em (n.° 7, A, B)

$$\text{sen.}\,(30° + b) = \cos.\,b - \text{sen.}\,(30° - b) \ldots (30)$$

$$\cos.\,(30° + b) = \cos.\,(30° - b) - \text{sen.}\,b \ldots (31)$$

Fazendo as operações indicadas nos primeiros membros das seguintes formulas, por meio de (n.° 7, A, B); e dividindo por cos. a cos. b ambos os termos das fracções equivalentes aos primeiros membros:

$$\frac{\text{sen.}\,(a+b)}{\text{sen.}\,(a-b)}=\frac{\text{tg.}\,a+\text{tg.}\,b}{\text{tg.}\,a-\text{tg.}\,b}\ldots\ (32)$$

$$\frac{\text{sen.}\,(a+b)}{\cos.\,(a-b)}=\frac{\text{tg.}\,a+\text{tg.}\,b}{1+\text{tg.}\,a\ \text{tg.}\,b}\ldots\ (33)$$

$$\frac{\text{sen.}\,(a-b)}{\cos.\,(a+b)}=\frac{\text{tg.}\,a-\text{tg.}\,b}{1-\text{tg.}\,a\ \text{tg.}\,b}\ldots\ (34)$$

$$\frac{\cos.\,(a+b)}{\cos.\,(a-b)}=\frac{1-\text{tg.}\,a\ \text{tg.}\,b}{1+\text{tg.}\,a\ \text{tg.}\,b}\ldots\ (35).$$

Pelo (n.° 4) se exprime o seno e coseno do arco multiplo $m\,\alpha$ no seno e coseno do arco α.

Pela formula (7) e (8)

$$\text{tg.}\,\frac{C}{2}\,\text{tg.}\left(\frac{A\pm B}{2}\right)=\frac{\text{tg.}\,\frac{A}{2}\,\text{tg.}\frac{C}{2}\pm\text{tg.}\,\frac{B}{2}\text{tg.}\,\frac{C}{2}}{1\ \pm\text{tg.}\,\frac{A}{2}\,\text{tg.}\frac{B}{2}}$$; mas (n.° 33) fazendo

$$a+b+c=2\,p$$

$$\text{tg.}\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-b)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-a)}}\,;\ \text{tg.}\,\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-a)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-b)}}$$

$$\text{tg.}\,\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-a)\ \text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)}}\ ;\ \text{e}$$

$$\text{tg.}\frac{A}{2}\text{tg.}\frac{B}{2}=\frac{\text{sen.}(p-c)}{\text{sen.}\,p}\,;\ \text{tg.}\frac{A}{2}\text{tg.}\frac{C}{2}=\frac{\text{sen.}(p-b)}{\text{sen.}\,p}\,;\ \text{tg.}\frac{B}{2}\text{tg.}\frac{C}{2}=\frac{\text{sen.}(p-a)}{\text{sen.}\,p}\,;$$

logo $$\text{tg.}\,\frac{C}{2}\text{tg.}\,\frac{(A\pm B)}{2}=\frac{\text{sen.}\,(p-b)\pm\text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,p\mp\text{sen.}\,(p-c)}\ldots\ (a)$$

mas (1) (2), $\text{sen.}(p-b)+\text{sen.}(p-a)=2\,\text{sen.}\dfrac{(2p-a-b)}{2}\cos.\dfrac{(a-b)}{2}$

$$\text{sen.}\,p-\text{sen.}\,(p-c)=2\cos.\,\frac{(2p-c)}{2}\,\text{sen.}\,\frac{c}{2}$$

Logo $$\text{tg.}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{\cos.\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{\cos.\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}\cot.\,\frac{1}{2}C.\;\ldots\;(36)$$

Tomando o signal inferior é

$$\text{tg.}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\text{sen.}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{\text{sen.}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}\cot.\,\frac{1}{2}C.\;\ldots\;(37).$$

E empregando o triangulo supplementar

$$\text{tg.}\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{\cos.\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\cos.\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}\text{tg.}\,\frac{1}{2}\,c.\;\ldots\;(38)$$

$$\text{tg.}\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{\text{sen.}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\text{sen.}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}\text{tg.}\,\frac{1}{2}\,c.\;\ldots\;(39).$$

As formulas (36), (37), (38), (39) denominam-se *analogias de Neper*.

FIM.