mas

$$\left[1+\frac{x}{pq(m+1)}\right]\left[1+\frac{\alpha+1-x}{pq(m+1)}\right]=$$

$$=1+\frac{\alpha+1}{pq(m+1)}+\frac{x(\alpha+1-x)}{[pq(m+1)]^2}$$

$$>1+\frac{\alpha+1}{pq(m+1)};$$

logo

$$\left(\frac{T_{n+\alpha+1}}{T_n}\right)^2<\prod_{x=1}^{\alpha}\left[1+\frac{\alpha+1}{pq(m+1)}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{\alpha+1}{pq(m+1)}\right]^{-\alpha}$$

$$<\left[1+\frac{\alpha}{pq(m+1)}\right]^{-\alpha};$$

donde

$$T_{n+\alpha+1}<T_n\left[1+\frac{\alpha}{pq(m+1)}\right]^{-\frac{\alpha}{2}}$$

e, visto que

$$T_n<1,$$

$$T_{n+\alpha+1}<\left[1+\frac{\alpha}{pq(m+1)}\right]^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Por outro lado, as probabilidades das combinações que não entram em S, são todas inferiores a $T_{n+\alpha+1}$ (prop. III); logo

$$1-S<(2\alpha+1)\,T_{n+\alpha+1}<m\,T_{n+\alpha+1}$$

$$<\frac{m}{\left[1+\dfrac{\alpha}{pq\,(m+1)}\right]^{\frac{\alpha}{2}}},$$

c. d. d.

Proposição VIII

(3.º Teorema de Bernoulli)

Tem-se uma probabilidade sempre crescente de que a razão do número de acontecimentos favoráveis para o número de acontecimentos contrários se não afastará da razão das suas probabilidades respectivas alèm de certos limites; e, por mais apertados que esses limites sejam, a probabilidade de que se trata, aproximar-se-há da unidade tanto quanto se queira, logo que o número de experiências aumente suficientemente.

Com efeito, como já vimos na proposição V, caso o afastamento α seja positivo, teremos

$$\frac{(p)}{(q)}=\frac{p}{q}+\frac{p-r+\alpha}{mq-p+r-\alpha}$$

e portanto

$$\left|\frac{(p)}{(q)}-\frac{p}{q}\right|=\frac{p-r+\alpha}{mq-p+r-\alpha}\,.$$

Ora, para que

$$\left| \frac{(p)}{(q)} - \frac{p}{q} \right| > \varepsilon,$$

necessário se torna que

$$\frac{p - r + \alpha}{mq - p + r - \alpha} > \varepsilon$$

ou

$$p - r + \alpha > mq\varepsilon - p\varepsilon + r\varepsilon - \alpha\varepsilon$$

ou

$$\alpha(1 + \varepsilon) > mq\varepsilon + \ldots$$

ou

$$\alpha > A(m + 1) + B; \qquad (1)$$

onde A e B são constantes, sendo $A > 0$.

Mas, S representa na prop. VII a probabilidade de que o afastamento seja igual ou menor do que α; $1 - S$ representará a probabilidade de que o afastamento seja superior a α.

Logo, a probabilidade de que

$$\left| \frac{(p)}{(q)} - \frac{p}{q} \right| > \varepsilon$$

será

$$1 - S < \frac{m}{\left[1 + \frac{\alpha}{(m+1)pq}\right]^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$< \frac{m}{\left[1 + \frac{A(m+1) + B}{pq(m+1)}\right]^{\frac{A(m+1)+B}{2}}}$$

expressão esta que tende para zero quando m tende para infinito, visto que $A > 0$.

Este teorema é também chamado *lei dos grandes numeros.*

Observação

Não consideramos o caso de $\alpha < 0$ porque para êle chegavamos a uma desigualdade análoga a (1), ficando por isso caídos no mesmo caso.

*

O 3.º teorema de Bernoulli pode enunciar-se do seguinte modo:

A probabilidade de que o afastamento seja da ordem do número de experiências, tende para zero quando o número de experiências tende para infinito.

Proposição IX

A probabilidade de que o afastamento α *seja tal que*

$$\frac{\alpha^{n+1}}{m^n} > \varepsilon, \tag{1}$$

tende para zero quando m *cresce, logo que* $n > 1$.

Com efeito, de (1) tira-se

$$\frac{m}{\left[1 + \frac{\alpha}{pq(m+1)}\right]^{\frac{\alpha}{2}}} < \frac{m}{\left[1 + \frac{\varepsilon m^{\frac{n}{n+1}}}{(m+1)pq}\right]^{\frac{\varepsilon m^{\frac{n}{n+1}}}{2}}}.$$

Ora, ao segundo membro desta desigualdade pode dar-se a forma

$$\frac{m}{\left[1+\mathrm{A}\,m^{-\frac{1}{1+n}}\right]^{\mathrm{B}\,m^{\frac{n}{n+1}}}},$$

desprezando as parcelas finitas em presença das infinitas, ou ainda, pela mesma razão, a forma

$$\frac{m}{1+\mathrm{A}_1\,m^{\frac{n}{n+1}}\,.\,m^{-\frac{1}{n+1}}+\mathrm{A}_2\,m^{2\frac{n}{n+1}}\,.\,m^{-\frac{2}{n+1}}\ldots}$$

$$=\frac{m}{1+\mathrm{A}_1\,m^{\frac{n-1}{n+1}}+\mathrm{A}_2\,m^{2\frac{n-1}{n+1}}+\ldots}$$

$$=\frac{1}{m^{-1}+\mathrm{A}_1\,m^{\frac{n-1}{n-1}-1}+\mathrm{A}_2\,m^{2\frac{n-1}{n+1}-1}+\ldots}$$

expressão esta que tenderá para zero logo que $n>1$, porque neste caso haverá sempre um inteiro i tal que

$$i\,\frac{n-1}{n+1}-1>0.$$

Esta proposição pode enunciar-se:

Há uma probabilidade nula de que a ordem do número de experiencias em relação ao afastamento α, seja inferior à segunda.

Proposição X

A probabilidade de que

$$\frac{a}{\sqrt[n]{m}} < \varepsilon$$

tende para zero quando m *aumenta indefinidamente, se* $n > 2$.

Com efeito, visto que

$$T_{n-a} < T_n = \frac{1 + \varepsilon_m}{\sqrt{2\pi p q m}},$$

segue-se que

$$S < 2 a T_n = \frac{2a}{\sqrt{2\pi p q m}} (1 + \varepsilon_m),$$

ou

$$S < \frac{a}{\sqrt{m}} C_m,$$

onde C_m tende para uma constante quando m tende para infinito. Ora, se

$$\frac{a}{\sqrt[n]{m}} < \varepsilon,$$

será

$$S < \frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt{m}} \varepsilon C_m$$

$$= m^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}} . \varepsilon C_m$$

e

$$\lim_{m=\infty} S = 0$$

se

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} < 0, \quad \text{ou,} \quad n > 2,$$

c. d. d.

Logo, *é nula a probabilidade de que o número de experiências seja de ordem superior à segunda, em relação α.*

Portanto

Proposição XI

A ordem do número de experiências relativa ao afastamento será a segunda como resulta das proposições IX e X.

*
* *

Todo o número se pode supôr escrito com a forma decimal e com um número infinito de casas. Assim, o número $\frac{1}{2}$ pode escrever-se debaixo da forma 0,5000...

Supondo todos os números com esta forma, consideremos o seguinte

Problema

Tira-se, à sorte, um número do intervalo (0, 1); *qual a probabilidade de que os seus algarismos se sucedam de modo a satisfazerem à lei de* Bernoulli?

Êste problema, assim posto, não encontra solução nas definições que demos da probabilidade.

Com efeito, êste problema pertence à probabilidade contínua, visto que a tiragem se faz no intervalo (0, 1) e nós, no capítulo correspondente dos presentes *Elementos,* definimos, apenas, probabilidade de *regiões* em relação a *regiões.* Portanto, para que êste problema lá encontrasse resposta, necessário seria que os números que constituem a classe favorável, constituissem intervalos completos, contidos no intervalo (0, 1), o que não é verdade; ou, talvez melhor, o que não pode afirmar-se *à priori.*

Modifiquemos por isso o enunciado do problema, do seguinte modo: *qual a probabilidade de que os primeiros* N *algarismos do numero achado satisfaçam à lei de* BERNOULLI ?

Êste problema já tem uma solução, porque os números cujos primeiros N algarismos são idênticos, formam um intervalo.

Esses intervalos uns serão favoráveis, outros não.

A soma dos intervalos favoráveis, dividida pelo intervalo total, dará a solução pedida.

Ora, sendo estes intervalos todos iguais, eles serão igualmente possíveis e a possibilidade de cada um deles será

$$\frac{1}{10^N}$$

visto que 10^N é o seu número.

Consideremos, agora, uma urna com 10 bolas, numeradas de 0 a 9. Qualquer número com N casas se pode supôr obtido por meio de N tiragens nessa urna e a possibilidade de cada um dêsses números será

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdots\frac{1}{10}=\frac{1}{10^N},$$

isto é, a mesma de qualquer dos intervalos parciais precedentes.

Portanto, no problema em questão, tanto faz lançar à sorte um ponto no intervalo $(0, 1)$, como fazer N tiragens, à sorte, numa urna que contenha 10 bolas, numeradas de 0 a 9.

Á mesma conclusão podiamos chegar, servindo nos da fórmula do problema tratado na página 74 dos presentes *Elementos,* onde teriamos de supôr $f(x)=x$, o que nos dava, imediatamente,

$$P=\frac{1}{10}$$

qualquer que fôsse a e d.

Mas sendo assim, a relação do numero de combinações que satisfazem ao teorema de Bernoulli, para o número total de combinações, tende para 1, à medida que N aumenta. É nisto mesmo que consiste o teorema de Bernoulli.

Logo, a probabilidade pedida no segundo inunciado, tende para 1, à medida que N aumenta. A probabilidade pedida no primeiro que corresponde ao limite para $N=\infty$, será igual a 1.

*

Êste mesmo raciocínio prova que é igual a 1 a probabilidade de que sejam satisfeitas todas as outras leis análogas às de Bernoulli.

*

Daqui podemos concluir que a probabilidade de que o numero achado seja racional, é igual a zero.

Com efeito, um número racional dá sempre logar a uma dizima periódica.

E, de duas uma: ou bem no período do número racional entram todos os algarismos de 0 a 9 e em proporções iguais; e nesse caso a distribuìção dos algarismos satisfarà à lei de Bernoulli, mas não satisfará a nenhuma das outras, visto que o afastamento absoluto passará periodicamente pelos mesmos valores e portanto ficará inferior a certo máximo; ou o período do número racional não satisfaz à condição precedente e nesse caso não é satisfeita a lei de Beknoulli.

Os números racionais correspondem pois, a uma classe de combinações que, ou não satisfazem à lei de Bernoulli ou não satisfazem às leis análogas. A sua probabilidade será, pois, nula.

Certo, ver

SEGUNDA PARTE

Lei dos desvios

Demonstrado, dum modo rigoroso, o 3.º teorema de Jacob Bernoulli e outros análogos, relativos à ordem de grandeza dos afastamentos ou desvios, vamos deduzir uma relação aproximada entre os desvios e as suas probabilidades.

Proposição XII

Representando por T_n a probabilidade da combinação de probabilidade máxima, combinação esta a que podemos chamar *normal*, a probabilidade de que o afastamento seja inferior, em valor absoluto, a k, será dada por

(ver sebenta a T da P)

$$P(k) = T_{n-k} + \ldots + T_n + \ldots + T_{n+k} = \sum_{i=-k}^{k} T_{n+i}.$$

Ora,

$$T_{n+i} = \frac{m!}{(n+i)!\,(m-n-i)!}\, p^{n+i}\, q^{m-n-i},$$

onde n representa o número de bolas brancas da combinação normal e por isso é da forma

$$n = (m+1)p - r, \quad (0 < r < 1).$$

Supondo m bastante grande, poderemos, na fórmula aproximada que nos dá

$$(m-n+i)! \quad \text{e} \quad (n+i)!,$$

substituir

$$(m+1)p-r$$

por

$$mp = n$$

e T_{n+i} tomará a forma

$$T_{n+1}=\frac{m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}\; p^{mp+i}q^{mq-i}(1+\alpha_m)}{(mp+i)^{mp+i}e^{-mp-i}\sqrt{2\pi(mp+i)}(mq-i)^{mq-i}e^{-mq-i}\sqrt{2\pi(mq-i)}}$$

$$=\frac{\sqrt{m}\,p^{mp+i}\,q^{mq-i}}{\left(p+\frac{i}{m}\right)^{mp+i}\left(q-\frac{i}{m}\right)^{mq-i}\sqrt{2\pi(mp+i)\,(mq-i)}}(1+\alpha_m)$$

$$=\frac{p^{mp+i}\,q^{mq-i}}{\left(p+\frac{i}{m}\right)^{mp+i+\frac{1}{2}}\left(q-\frac{i}{m}\right)^{mq-i+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi m}}(1+\alpha_m)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{mp}\right)^{mp+i+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{i}{mq}\right)^{mq-i+\frac{1}{2}}}(1+\alpha_m)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\,.\,H$$

sendo

$$H=\left(1+\frac{i}{mp}\right)^{-mp-i-\frac{1}{2}}\left(1\pm\frac{i}{mq}\right)^{-mq+i-\frac{1}{2}}(1+\alpha^m)^{-1}$$

e

$$\log \mathrm{H} = -\left(m\,p + i + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{i}{mp}\right)$$

$$-\left(mq - i + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 - \frac{i}{mq}\right) - \log (1 + \alpha_{n1})\ ;$$

mas (3.° teorema de BERNOULLI) a probabilidade de que

$$\left| \frac{i}{m} \right| > \varepsilon$$

tende para zero quando m aumenta; haverá pois, uma probabilidade sempre crescente de que (para maior rigor, seria preferível aplicar a fórmula de MacLaurin, bastando os 2 primeiros termos e o resto correspondente)

$$\log \mathrm{H} = -\left(mp + i + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{i}{mp} - \frac{i^2}{2m^2p^2} + \frac{i^3}{3m^3p^3} - \cdots\right]$$

$$-\left(mq - i + \frac{1}{2}\right) \left[-\frac{i}{mq} - \frac{i^2}{2m^2q^2} - \frac{i^3}{3m^3q^3} - \cdots\right]$$

$$-\log (1 + \alpha^m) =$$

$$= -\frac{i^2}{m}\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{m} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right]$$

$$+ \frac{i^2}{2m} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right] + \frac{i^3}{2m^2} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{i^2}{2m^2} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right] + \ldots - \log (1 + \alpha_m)$$

$$= -\frac{i^2}{2mpq} - \frac{i}{2mpq} + \frac{i^3}{2\,m^2p^2q_2} + \cdots \quad + \log (1 + \alpha_m)$$

Ora, o termo em α_m tende para zero, como se sabe da fórmula de aproximação; os termos em

$$\frac{i}{m}, \quad \frac{i^3}{m^2}, \ldots, \quad \frac{i^n}{m^n}, \quad \frac{i^{n+1}}{m^n},$$

tem uma probabilidade de se manterem superiores a ε, por menor que ε seja, que tende para zero quando o número m aumenta (prop. IX e X); logo, haverá uma probabilidade sempre crescente com m de que H seja tal que

$$\log \mathrm{H} = -\frac{i^2}{2mpq}$$

e portanto

$$\mathrm{H} = e^{-\frac{i^2}{2mpq}}$$

e

$$\mathrm{T}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{i^2}{2mpq}}$$

e

$$\mathrm{P}(k) = \sum_{i=-k}^{k} \mathrm{T}_{n+i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \sum_{i=-k}^{k} e^{-\frac{i^2}{2mpq}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi mpq}} \sum_{i=0}^{k} e^{-\frac{i^2}{2mpq}};$$

substituindo o Σ por um $\int$ tomado entre os mesmos limites, virá

$$\mathrm{P}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi pqm}} \int_0^k e^{-\frac{x^2}{2mpq}}\, dx,$$

ou, fazendo

$$x = \lambda\sqrt{2mpq},$$

$$P(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi mpq}} \int_0^{\lambda_1} e^{-\lambda^2} d\lambda \,.\, \sqrt{2mpq}\,,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda_1} e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{k}{\sqrt{2mpq}}.$$

A λ_1 chama-se *afastamento relativo* para o distinguir do afastamento k, também chamado *afastamento absoluto*. Ao número

$$\sqrt{2mpq}$$

chama-se *unidade de afastamento*.

*

Costuma chamar-se *probabilidade de* λ, à probabilidade de que o afastamento relativo se mantenha, em valor absoluto, inferior a λ.

Portanto,

Proposição XIII

Haverá uma probabilidade sempre crescente com m *de que seja*

$$\theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

a probabilidade do afastamento λ.

A $\theta(\lambda)$ costuma chamar-se *lei dos desvios, lei dos afastamentos* e também *lei de Gauss.*

*

A lei que acabamos de deduzir é apenas uma lei *provável* e, além disso, aproximada. A sua probabilidade, porém, tende muito rapidamente para 1, quando m aumenta, e os êrros cometidos na sua dedução tendem rapidamente para zero. A conveniência desta lei é tal que, em muitas aplicações, o resultado obtido é igual ao resultado verdadeiro. Na resolução dos problemas sôbre os afastamentos é ela sempre que se emprega.

*

A probabilidade de que a variável λ esteja compreendida entre 0 e ∞ será

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,$$

resultado êste, rigoroso, como era de esperar; quando λ tende para infinito, m tende também para o infinito e nestas condições a lei torna-se *exacta*.

*

As tabelas seguintes dão os valores de $\theta(\lambda)$ de centesima em centesima. Por elas se vê quão rapidamente $\theta(\lambda)$ tende para 1, quando λ cresce.

λ.	θ.	λ.	θ.	λ.	θ.
0,00....	0,0000000	0,24....	0,2657000	0,48...	0,5027498
0,01....	0,0112833	0,25....	0,2763263	0,49....	0,5116683
0,02...	0,0225644	0,26....	0,2868997	0,50....	0,5204999
0,03....	0,0338410	0,27....	0,2974182	0,51....	0,5292437
0,04....	0,0451109	0,28....	0,3078800	0,52....	0,5378987
0,05....	0,0563718	0,29....	0,3182834	0,53....	0,5464641
0,06...	0,0676215	0,30...	0,3286267	0,54....	0,5549392
0,07....	0,0788577	0,31....	0,3389081	0,55....	0,5633233
0,08....	0,0900781	0,32....	0,3491259	0,56....	0,5716157
0,09....	0,1012806	0,33....	0,3592785	0,57....	0,5798158
0,10....	0,1124630	0,34....	0,3693644	0,58....	0,5879229
0,11....	0,1236230	0,35...	0,3793819	0,59...	0,5959365
0,12....	0,1347584	0,36....	0,3893296	0,60....	0,6038561
0,13....	0,1458671	0,37....	0,3992059	0,61....	0,6116812
0,14....	0,1569470	0,38....	0,4090093	0,62....	0,6194114
0,15....	0,1679959	0,39....	0,4187380	0,63....	0,6270463
0,16....	0,1790117	0,40....	0,4283922	0,64...	0,6345857
0,17....	0,1899923	0,41....	0,4379690	0,65....	0,6420292
0,18....	0,2009357	0,42....	0,4474676	0,66....	0,6493765
0,19....	0,2118398	0,43....	0,4568867	0,67....	0,6566275
0,20....	0,2227025	0,44....	0,4662251	0,68....	0,6637820
0,21....	0,2335218	0,45....	0,4754818	0,69...	0,6708399
0,22....	0,2442958	0,46....	0,4846555	0,70....	0,6778010
0,23....	0,2550225	0,47....	0,4937452	0,71....	0,6846654

λ.	θ.	λ.	θ.	λ.	θ.
0,72...	0,6914330	1,08....	0,8733261	1,44....	0,9582966
0,73....	0,6981038	1,09....	0,8768030	1,45....	0,9596950
0,74....	0,7046780	1,10....	0,8802050	1,46....	0,9610535
0,75....	0,7111556	1,11....	0,8835330	1,47....	0,9623729
0,76....	0,7175367	1,12....	0,8867879	1,48....	0,9636541
0,77....	0,7238216	1,13....	0,8899707	1,49....	0,9648979
0,78....	0,7300104	1,14....	0,8930823	1,50....	0,9661052
0,79....	0,7361035	1,15 ...	0,8961238	1,51....	0,9672768
0,80. ..	0,7421010	1,16....	0,8990962	1,52....	0,9684135
0,81....	0,7480033	1,17....	0,9020004	1,53....	0,9695162
0,82....	0,7538108	1,18...	0,9048374	1,54....	0,9705857
0,83....	0,7595238	1,19....	0,9076083	1,55....	0,9716227
0,84....	0,7651427	1,20....	0,9103140	1,56....	0,9726281
0,85....	0,7706680	0,21....	0,9129555	1,57....	0,9736026
0,86....	0,7761002	0,22....	0,9155359	1,58....	0,9745470
0,87....	0,7814398	0,23....	0,9180501	1,59....	0,9754620
0,88....	0,7866873	1,24....	0,9205052	1,60...	0,9763484
0,89 ...	0,7918432	1,25....	0,9229001	1,61....	0,9772069
0,90....	0,7969082	1,26....	0,9252359	1,62....	0,9780381
0,91....	0,8018828	1,27....	0,9275136	1,63....	0,9788429
0,92....	0,8067677	1,28....	0,9297342	1,64....	0,9796218
0,93....	0,8115635	1,29....	0,9318987	1,65....	0,9803756
0,94....	0,8162710	1,30....	0,9340080	1,66....	0,9811049
0,95....	0,8208908	1,31....	0,9360632	1,67....	0,9818104
0,96....	0,8254236	1,32....	0,9380652	1,68....	0,9824928
0,97....	0,8298703	1,33....	0,9400150	1,69....	0,9831526
0,98....	0,8342315	1,34....	0,9419137	1,70....	0,9837904
0,99 ...	0,8385081	1,35....	0,9437622	1,71....	0,9844070
1,00 ...	0,8427008	1,36....	0,9455614	1,72....	0,9850028
1,01....	0,8468105	1,37....	0,9473124	1,73....	0,9855785
1,02....	0,8508380	1,38....	0,9490160	1,74. ..	0,9861346
1,03....	0,8547842	1,39....	0,9506733	1,75....	0,9866717
1,04....	0,8586499	1,40....	0,9522851	1,76....	0,9871903
1,05....	0,8624360	1,41....	0,9538524	1,77....	0,9876910
1,06....	0,8661435	1,42....	0,9553762	1,78....	0,9881742
1,07....	0,8697732	1,43....	0,9568573	1,79....	0,9886406

λ.	θ.	λ.	θ.	λ.	θ.
1,80....	0,9890905	2,16....	0,9977472	2,52....	0,9996345
1,81....	0,9895245	2,17....	0,9978511	2,53....	0,9996537
1,82....	0,9899431	2,18....	0,9979505	2,54....	0,9996720
1,83....	0,9903467	2,19....	0,9980459	2,55....	0,9996893
1,84....	0,9907359	2,20....	0,9981372	2,56...	0,9997058
1,85....	0,9911110	2,21....	0,9982244	2,57....	0,9997215
1,86....	0,9914725	2,22....	0,9983079	2,58....	0,9997364
1,87....	0,9918207	2,23 ...	0,9983878	2,59....	0,9997505
1,88....	0,9921562	2,24....	0,9984642	2,60 ...	0,9997640
1,89....	0,9924793	2,25....	0,9985373	2,61....	0,9997767
1,90....	0,9927904	2,26 ...	0,9986071	2,62....	0,9997888
1,91....	0,9930899	2,27....	0,9986739	2,63....	0,9998003
1,92....	0,9933782	2,28 ...	0,9987377	2,64....	0,9998112
1,93....	0,9936557	2,29....	0,9987986	2,65....	0,9998215
1,94...	0,9939226	2,30....	0,9988568	2,66....	0,9998313
1,95....	0,9941794	2,31....	0,9989124	2,67...	0,9998406
1,96....	0,9944263	2,32....	0,9989655	2,68....	0,9998494
1,97....	0,9946637	2,33 ...	0,9990162	2,69....	0,9998578
1,98....	0,9948920	2,34....	0,9990646	2,70....	0,9998657
1,99....	0,9951114	2,35....	0,9991107	2,71....	0,9998732
2,00....	0,9953223	2,36 ...	0,9991548	2,72 ...	0,9998803
2,01....	0,9955248	2,37 ...	0,9991968	2,73...	0,9998870
2,02....	0,9957195	2,38....	0,9992369	2,74....	0,9998933
2,03....	0,9959063	2,39 ...	0,9992751	2,75....	0,9998994
2,04 ...	0,9960858	2,40 ...	0,9993115	2,76....	0,9999051
2,05....	0,9962581	2,41....	0,9993462	2,77 ...	0,9999105
2,06....	0,9964235	2,42....	0,9993793	2,78....	0,9999156
2,07....	0,9965822	2,43....	0,9994108	2,79 ...	0,9999204
2,08....	0,9967344	2,44....	0,9994408	2,80....	0,9999250
2,09 ...	0,9968805	2,45....	0,9994694	2,81....	0,9999293
2,10....	0,9970205	2,46....	0,9994966	2,82....	0,9999334
2,11....	0,9971548	2,47....	0,9995226	2,83....	0,9999372
2,12....	0,9972836	2,48....	0,9995472	2,84....	0,9999409
2,13....	0,9974070	2,49....	0,9995707	2,85....	0,9999443
2,14....	0,9975253	2,50....	0,9995930	2,86....	0,9999476
2,15....	0,9976386	2,51....	0,9996143	2,87....	0,9999507

λ.	θ.	λ.	θ.	λ.	θ.
2,88...	0,9999536	3,24 ..	0,9999954	3,60...	0,99999964414
2,89. .	0,9999563	3,25...	0,9999957	3,61...	0,99999966975
2,90 ..	0,9999589	3,26 ..	0,9999960	3,62...	0,99999969358
2,91...	0,9999613	3,27...	0,9999962	3,63...	0,99999971574
2,92...	0,9999636	3,28...	0,9999965	3,64...	0,99999973636
2,93...	0,9999658	3,29...	0,9999967	3,65...	0,99999975551
2,94 ..	0,9999679	3,30...	0,9999996	3,66...	0,99999977333
2,95...	0,9999698	3,31...	0,9999971	3,67...	0,99999978990
2,96...	0,9999716	3,32...	0,9999973	3,68...	0,99999980528
2,97...	0,9999733	3,33. .	0,9999975	3,69...	0,99999981957
2,98...	0,9999750	3,34...	0,9999977	3,70...	0,99999983285
2,99...	0.9999765	3,35...	0,9999978	3,71 ..	0,99999984517
3,00 ..	0,9999779	3,36...	0,9999980	3,72 ..	0,99999985663
3,01...	0,9999793	3,37...	0,9999981	3,73...	0,99999986726
3,02...	0,9999805	3,38...	0,9999982	3,74...	0,99999987712
3,03...	0,9999817	3,39...	0,9999984	3,75...	0,99999988629
3,04...	0,9999829	3,40 ..	0,9999985	3,76 ..	0,99999989477
3,05...	0,9999839	3,41...	0,9999986	3,77...	0,99999990265
3,06...	0,9999849	3,42...	0,9999987	3,78...	0,99999990995
3,07...	0,9999859	3,43...	0,9999988	3,79...	0,99999991672
3,08. .	0,9999867	3,44...	0,9999989	3,80...	0,99999992200
3,09...	0,9999876	3,45...	0,9999989	3,81...	0,99999992881
3,10...	0,9999884	3,46...	0,99999900780	3,82...	0,99999993421
3,11...	0,9999891	3,47..	0,99999907672	3,83 ..	0,99999993921
3,12..	0,9999898	3,48...	0,99999914101	3,84...	0,99999994383
3,13...	0,9999904	3,49...	0,99999920097	3,85. .	0,99999994812
3,14...	0,9999910	3,50 ..	0,99999925691	3,86...	0,99999995208
3,15...	0,9999916	3,51 ..	0,99999930905	3,87...	0,99999995575
3,16...	0,9999921	3,52...	0,99999935766	3,88 ..	0,99999995915
3,17...	0,9999926	3,53 ..	0,99999940296	3,89...	0,99999996230
3,18...	0,9999931	3,54...	0,99999944519	3,90...	0,99999996522
3,19...	0,9999936	3,55...	0,99999948452	3,91...	0,99999996790
3,20 ..	0,9999940	3,56...	0,99999952115	3,92...	0,99999997039
3,21...	0,9999944	3,57 ..	0,99999955527	3,93 ..	0,99999997260
3,22...	0,9999947	3,58...	0,99999958703	3,94 ..	0,99999997482
3,23 ..	0,9999951	3,59...	0,99999961661	3,95. .	0,99999997678

λ.	θ.	λ.	θ.	λ.	θ.
3,96...	0,99999997860	4,10 ..	0,99999999330	4,50..	0,99999999981
3,97...	0,99999998028	4,20...	0,99999999714	4,60...	0,99999999992
3,98 ..	0,99999998183	4,30 .	0,99999999880	4,70...	0,99999999997
3,99...	0,99999998327	4,40 .	0,99999999951	4,80...	0,99999999999
4,00...	0,99999998459				

Proposição XIV

A um afastamento absoluto

$$k = \lambda\sqrt{2mpq}$$

corresponde para $\frac{(p)}{(q)}$ uma expressão da forma

$$\frac{(p)}{(q)} = \frac{mp + \lambda\sqrt{2mpq}}{mq - \lambda\sqrt{2mpq}},$$

onde supomos o afastamento no sentido do acontecimento da probabilidade p; donde,

$$\frac{(p)}{(q)} - \frac{p}{q} = \frac{mp + \lambda\sqrt{2mpq}}{mq - \lambda\sqrt{2mpq}} - \frac{p}{q}$$

$$= \frac{\lambda\sqrt{2mpq}}{mq^2 - \lambda q\sqrt{2mpq}} = \frac{\lambda\sqrt{2pq}}{q^2\sqrt{m} - \lambda q\sqrt{2pq}}.$$

Se o afastametto fosse considerado no sentido do q, não tinhamos mais do que mudar o sinal ao λ. Em qualquer caso teremos que

$$\left| \frac{(p)}{(q)} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{\lambda\sqrt{2pq}}{q^2\sqrt{m} - \lambda q\sqrt{2pq}} \right| > \varepsilon,$$

se

$$\left| \lambda \right| > \frac{\varepsilon q^2 \sqrt{m}}{\sqrt{2pq}\,(1 \pm \varepsilon q)} \qquad (1)$$

A probabilidade de que (1) seja satisfeita será (prop. XII)

$$\mathrm{P} = 1 - \theta \left[\frac{\varepsilon q^2 \sqrt{m}}{\sqrt{2pq}\,(1 \pm \varepsilon q)} \right].$$

Por mais pequeno que ε seja, P tenderá rapidamente para zero, por causa do factor $\sqrt{m}$.

Exemplo:

Jogam-se 200 jogos de *cara* ou X, a tostão cada jogo. Qual a probabilidade de ganhar ou perder uma quantia superior a 10 tostões ?

Resp.:

Neste caso é

$$p = q = \frac{1}{2}: \quad m = 200; \quad k > 10;$$

logo, se

$$k = \lambda\sqrt{2 \,.\, 200 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2}} = 10 \,.\, \lambda > 10,$$

será

$$\lambda > 1 \quad \text{e} \quad 1 - \theta(1) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25},$$

aproximadamente.

Proposição XV

Borel [1] generalizou a lei dos desvios

$$\theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

para o caso das tiragens serem feitas em urnas de composições diferentes.

Assim, sejam

$$p_1 \text{ e } q_1, \quad p_2 \text{ e } q_2, \quad \ldots \quad p_n \text{ e } q_n$$

as composições respectivas de n urnas contendo bolas brancas e bolas pretas.

Façamos m_1 tiragens na primeira urna, m_2 na segunda... m_n na última. O número mais provável de bolas brancas será

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots + m_n p_n .$$

Mas, em geral, não será êste número, a que poderiamos

---

(1) E. Borel, *Éléments de la Théorie des Probabilités*, deuxième édition, pág. 77.

chamar *normal*, o obtido. Haverá, em geral, um afastamento absoluto h, soma algebrica de n afastamentos, h_1, h_2, ..., h_n, provenientes das urnas respectivas.

Ora Borel demonstrou, dum modo muito fácil aliás, que a lei dos desvios ainda terá a mesma forma, caso se tome para unidade do afastamento h a raiz quadrada da soma dos quadrados dos afastamentos correspondentes às diversas urnas.

CAPÍTULO VI

ESPERANÇA MATEMÁTICA E VALOR MÉDIO

CAPITULO VI

ESPERANÇA MATEMÁTICA E VALOR MÉDIO

DEFINIÇÃO 1.ª

Seja (A) uma classe possível contendo a classe (A′). A cada elemento de (A′) façamos corresponder um número. Obtemos assim uma função que representaremos por $f(A')$. Multiplicando a probabilidade de cada elemento de (A′) pelo valor correspondente da função $f(A')$ e somando, obtemos um número que é de costume chamar-se *esperança matemática da classe* (A′), *relativa à função* $f(A')$.

Supondo que a probabilidade dos elementos de (A′) é relativa à classe (A), à esperança matemática da classe (A′) quando ela coincide com (A), chama-se *valor médio* ou *valor provável* da função $f(A)$ [1].

Representaremos a esperança matemática com o símbolo

$$E[f(A)]$$

---

[1] Embora esta distinção entre esperança matemática e valor médio não costume vir explicitamente feita nos livros de Probabilidades, todos os autores dão a êstes termos a significação que acabamos de atribuir-lhes.

e o valor médio ou provável com o símbolo

$$M[f(A)].$$

Assim, se a cada face dum dado fizermos corresponder o respectivo número de pontos, construimos uma função cujo valor médio é

$$M = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5.$$

A esperança matemática relativa às faces 1, 2, será

$$E = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = 0,5.$$

Proposição I

A esperança matemática duma classe é igual à soma das esperanças matemáticas das suas partes, como resulta imediatamente da def. 1.ª

Proposição II

É igualmente evidente que *a esperança matemàtica de uma soma é igual à soma das esperanças matemáticas das parcelas.*

Proposição III

Sejam (A) e (B) duas classes possíveis e (A, B) a classe composta das duas e suponhamos que fazemos

$$f(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \,.\, f(\mathrm{B}) \,.$$

Nestas condições teremos

$$\mathrm{E}\,[f(\mathrm{A}, \mathrm{B})] = \mathrm{E}\,[f(\mathrm{A})] \,.\, \mathrm{E}\,[f(\mathrm{B})],$$

isto é, *a esperança matemática da classe composta é igual ao produto das esperanças matemáticas das classes componentes.*

Com efeito, representando por P_x a probabilidade do elemento x, teremos

$$\mathrm{E}\,[f(\mathrm{A})] = \Sigma f(\mathrm{A})\, \mathrm{P}_\mathrm{A} \,;\; \mathrm{E}\,[f(\mathrm{B})] = \Sigma f(\mathrm{B})\, \mathrm{P}_\mathrm{B} \,;$$
$$\mathrm{E}\,[f(\mathrm{A}, \mathrm{B})] = \Sigma f(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, \mathrm{P}_{\mathrm{A}\,\mathrm{B}} \,;$$

ora

$$\Sigma f(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, \mathrm{P}_{\mathrm{A}\,\mathrm{B}} = \Sigma f(\mathrm{A}) \,.\, f(\mathrm{B}) \,.\, \mathrm{P}_\mathrm{A} \,.\, \mathrm{P}_\mathrm{B}$$
$$= \Sigma f(\mathrm{A}) \,.\, \mathrm{P}_\mathrm{A} \,.\, \Sigma f(\mathrm{B}) \,.\, \mathrm{P}_\mathrm{B} \,;$$

logo

$$\mathrm{E}\,[f(\mathrm{A}, \mathrm{B})] = \mathrm{E}\,[f(\mathrm{A})] \,.\, \mathrm{E}\,[f(\mathrm{B})],$$

c. d. d.

DEFINIÇÃO 2.ª

Seja M um ponto livre ou sujeito, variando numa região que contêm a região (A) e representemos por P (M) a sua lei de probabilidade em relação a (A). Seja, alêm disso, $\varphi(M)$ uma função das coordenadas de M, definida em (A). Sendo (A′) uma região contida em (A), ao número

$$E_{(A')}[\varphi(M)] = \int_{(A')} P(M)\,\varphi(M)\,d(A)$$

chamaremos *esperança matemática da região* (A′) *relativa à função* φ (M). No caso particular de (A′) coìncidir com (A), chamaremos a êsse número *valor médio* ou *valor provável* de φ (M).

Proposição IV

É evidente que, se

$$(A') = (A_1) + (A_2) + \ldots + (A_n),$$

será

$$E(A') = E(A_1) + E(A_2) + \ldots + E(A_n)$$

Proposição V

É igualmente evidente que

$$E[\varphi_1(M) + \varphi_2(M) + \ldots] = E[\varphi_1(M)] + E[\varphi_2(M)] + \ldots$$

Proposição IV

Se M fôr um ponto variando em (A) e N outro variando em (B), será, análogamente ao caso da prop. III,

$$E_{(A,\,B)}\left[\varphi(M)\,.\,\psi(N)\right] = \int_{(A,\,B)} P(M)\,P(N)\,\varphi(M)\,\psi(N)\,d(A,B)$$

$$= \int_{(A)} P(M)\,\varphi(M)\,d(A) \int_{(B)} P(N)\,\psi(N)\,d(B)$$

$$= E_{(A)}\left[\varphi(M)\right]\,.\,E_{(B)}\left[\psi(N)\right].$$

Proposição VII

Seja M um ponto variando numa certa região que contêm (A), $f(M)$ uma dada função das suas coordenadas, e P(M) a sua lei de probabilidade relativamente a (A). Já vimos que, por definição, é

$$E_{(A)}\left[f(M)\right] = \int_{(A)} P(M)\,f(M)\,d(A).$$

Ora, pondo $f(M) = z$, teremos

$$E = \int_{(A')} z\,P(M)\,d(A) = \int_{z_0}^{z} z \int P(M)\,d(A)$$

sendo o segundo integral estendido à região de (A) em que z toma valores compreendidos entre z e $z+dz$. Mas êste integral é, por definição de P(M), a probabilidade de que z esteja compreendido entre z e $z+dz$ e o seu valor pode representar-se por

$$P(z)\,dz,$$

sendo $P(z)$ a lei da probabilidade de z. Logo,

$$E_{(A)}[\varphi(M)] = \int_{z_0}^{z} z\,P(z)\,dz = E_{(z)}(z).$$

Por um exemplo que adiante daremos, se verá a utilidade desta proposição na determinação das esperanças matemáticas.

Proposição VIII

Sendo dada a lei da probabilidade da variável z, *a esperança matemática de qualquer função de* z, $\varphi(z)$, *será dada por*

$$E_{(z)}[\varphi(z)] = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,P(z)\,dz.$$

Para provar isto, bastaria fazer

$$f(M) = \varphi(z)$$

na proposição antecedente e tomar ainda o segundo integral estendido à região em que z *toma valores compreendidos entre* z e $z + dz$.

Proposição IX

A esperança matemática duma constante é igual à própria constante multiplicada pela probabilidade da região isto é

$$E_{(A)}(C) = C \cdot P_{(A)}$$

como resulta imediatamente da definição.

Para o valor médio será

$$P_{(A)} = 1 \quad \text{e} \quad M(C) = C.$$

Proposição X

Se uma função $f(M)$ *é sempre positiva e o seu valor médio se pode tornar inferior a qualquer número* δ, *por mais pequeno que* δ *seja, a probabilidade de que* $f(M)$ *se mantenha superior a certo numero* m, *numa região* (A'), *é menor do que* $\frac{\delta}{m}$.

Com efeito, se, ao longo de (A'), é

$$f(M) \geqslant m,$$

segue-se que

$$\int_{(A)} f(M)\,P(M)\,d(A) = \int_{(A-A')} f(M)P(M)d(A) + \int_{(A')} f(M)P(M)d(A)$$

$$> \int_{(A')} f(M)\,P(M)\,d(A)$$

$$> m\,.\,P_{(A')}\,;$$

logo

$$m\,.\,P_{(A')} < \delta$$

e

$$P_{(A')} < \frac{\delta}{m}$$

c. d. d.

Problema

Consideremos um polígono articulado aberto, de lados

$$l_1,\ \ l_2,\ \ \ldots,\ \ l_n,$$

e sejam A e B os seus pontos extremos. Lança-se, à sorte, esse polígono sôbre um plnao: determinar

$$M_n\,(d^2),$$

sendo

$$d = A\,B.$$

Solução

No cálculo de $M_n(d^2)$ nós podemos (prop. VIII) entrar com a lei da probabilidade de d. Além disso, à lei da probabilidade de d, nós podemos substituir a lei de probabilidade de qualquer ponto M, a d convenientemente ligado (Prop. VII); o ponto equivalente do polígono, por exemplo. Posto isto, consideremos o caso do polígono ter um lado só, l_1; será (prop. IX)

$$M_1(d^2) = M_1(l_1^2) = l_1^2 .$$

Consideremos agora o caso do polígono ter dois lados; teremos (prop. VIII)

$$M_2(d^2) = \int_0^{l_1+l_2} P(d) \,.\, d^2 \,.\, d(d);$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\pi} (l_1^2 + l_2^2 - 2\, l_1 l_2 \cos\alpha)$$

$$= l_1^2 + l_2^2 ,$$

sendo α o ângulo de l_1 com l_2.

Suponhamos que no caso de i lados ainda tinhamos

$$M_i(d^2) = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_i^2$$

e provemos que nesse caso ainda

$$M_{i+1}(d^2)$$

nos é dado pela mesma lei.

Representando por δ o segmento que une a origem de l_1 com a extremidade de l_i, teremos, por hipótese,

$$M_i(d^2) = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_i^2.$$

Ora, representando por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$, os ângulos das articulações, d^2 será uma função $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i)$ dêsses ângulos e o valor médio procurado será de forma

$$M_{i+1} = \int f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i) \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{2\pi} \cdots \frac{d\alpha_i}{2\pi}$$

$$= \int \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{2\pi} \cdots \frac{d\alpha_{i-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i) \frac{d\alpha_i}{2\pi}$$

$$= \int \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{2\pi} \cdots \frac{d\alpha_{i-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} (\delta^2 + l^2_{i-1} + 2\delta l_{i+1} \cos \alpha_i) d\alpha_i$$

$$= \int \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{2\pi} \cdots \frac{d\alpha_{i-1}}{2\pi} (\delta^2 + l^2_{i+1})$$

$$= M_i (\delta^2 + l_{i+1}^2)$$

$$= M_i (\delta^2) + M_i (l^2_{i+1})$$

$$= l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_i^2 + l^2_{i+1},$$

c. d. d.

Logo,

$$M_n(d^2) = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2.$$

Se os lados forem todos iguais e representarmos o perímetro por L, será

$$M_n = n\, l_1^2 = \frac{L^2}{n}.$$

Daqui resulta, para $n = \infty$, que

O valor provável do quadrado da distância que separa os pontos extremos duma curva flexível, lançada á sorte sôbre um plano, é nulo, qualquer que seja o comprimento da curva, logo que seja finito.

Proposição XI

A esperança matemática pode, às vezes, calcular-se sem a determinação prévia das parcelas que a constituem ou sem a determinação da lei da probabilidade. Determina-se a soma duma só vez. Vamos dar disso um exemplo curioso servindo-nos do problema da agulha. Como vimos na nota da página 64, dividindo a agulha em partes iguais, cada parte ficava com probabilidades iguais. Se as partes em vez de se conservarem topo a topo, e sôbre a mesma recta, tomarem outra posição relativa, a sua probabilidade ainda será a mesma, como fácilmente se pode vêr; se essas partes, em vez de se conservarem invariavelmente ligadas, formarem um sistema articulado, a probabilidade de cada parte a mesma será ainda, como resulta da definição de lançamento, à sorte, duma figura de forma variável.

Suponhamos, agora, que a cada encontro de qualquer lado do sistema que estamos considerando com uma das paralelas, fazemos corresponder um mesmo número, a unidade. A esperança matemática de cada parte será igual à sua probabilidade. A soma de todas estas esperanças, será proporcional ao número dessas partes que supomos de igual comprimento e, por isso, proporcional ao perímetro do sistema. Isto qualquer que seja o sistema, rígido ou articulado, qualquer que seja o comprimento dos seus lados. Passando para o limite, podemos ainda dizer que o integral das esperanças elementares duma curva flexível ou rígida é proporcional ao seu comprimento:

$$E(l) = K\,l,$$

sendo K independente da forma, natureza e perímetro da figura considerada.

Para determinar K, consideremos uma circunferência de diâmetro igual à distância de duas paralelas consecutivas.

Lançando, à sorte, esta circunferência sôbre o plano das paralelas, ela encontrará sempre uma paralela e uma só, em dois pontos; logo

$$E(\pi a) = K\pi a = 2$$

e

$$K = \frac{2}{\pi a}.$$

O valor achado para K dá-nos

$$E(l) = \frac{2l}{\pi a}.$$

Êste valor coíncide com a probabilidade de encontro achado, no problema da agulha, para o caso de $l < a$. E assim deve ser, porque, caso $l < a$, a agulha só pode ter um encontro ou nenhum e por isso a sua esperança matemática coìncidirá com a probabilidade. Podiamos aproveitar este facto para resolver o problema da agulha neste caso.

*

Se as rectas paralelas fossem substituidas por círculos concêntricos e equidistantes, a esperança matemática seria a mesma, mas nada podiamos concluir acêrca da probabilidade do encontro dum segmento rectílinio com as circunferências dêsses círculos.

Proposição XII

Consideremos um fenómeno de duas modalidades e sejam p e q as suas respectivas probabilidades; à modalidade de probabilidade p façamos corresponder o número a e à modalidade q, o número b.

O valor médio da função assim construida, será

$$M = ap + bq.$$

Provoquemos o fenómeno em questão um grande número de vezes e suponhamos que a modalidade p se repete (p) vezes e a modalidade q, (q) vezes.

Seja

$$M' = \frac{(p)a + (q)b}{(p) + (q)}$$

a média arimética dos valores obtidos para a dita função.

Consideremos a expressão

$$\left| M - M' \right| = \left| ap + bq - \frac{a(p) + b(q)}{(p) + (q)} \right|$$

$$< |a| . \left| p - \frac{(p)}{(p)+(q)} \right| + |b| . \left| q - \frac{(q)}{(p)+(q)} \right| ;$$

ela tende para *zero*, à medida que $(p) + (q)$ aumenta, ou melhor, a probabilidade de que $| M - M' |$ se mantenha inferior a ε, por menor que ε seja, tendera para *zero*, à medida que $(p) + (q)$ tenda para o infinito (3.° teorema de Bernoulli).

*

O que acaba de dizer-se dêsse fenómeno de duas modalidades diz-se dum fenómeno dum número qualquer de modalidades.

*

O que se disse do valor médio, diz-se igualmente da esperança matemática de qualquer classe. Daí a seguinte proposição:

A esperança matemática duma classe finita de elementos *numéricos, isto é, de elementos a que se fazem corresponder-números, é igual ao limite da soma dos números dessa classe, obtidos numa série de experiências, dividida pelo número total de experiências, quando êste último número tende para o infinito.*

É a esta proposição que a esperança matemática deve toda a sua importância.

No caso da classe considerada coìncidir com a *classe possível*, a *esperança matemática* confunde-se com o *valor médio* e a proposição antecedente transforma-se nesta outra :

O valor médio duma função susceptível de passar por um numero finito de valores, é igual ao limite da média arithmética dos valores achados para a função, numa série de experiências cujo numero aumenta indefinidamente.

Daí toda a importância de que gosa a média arithmética nas aplicações do Cálculo das Probabilidades.

*

As proposições antecedentes podem ainda generalizar-se para uma função variando dum modo contínuo, numa dada região.

Generalizemos a proposição para o valor médio que só difere da esperança matemática, na forma.

Seja (A) a região, $f(M)$ a função, $P(M)$ a lei da probabilidade.

O valor médio da função será

$$M = \int_{(A)} f(M) \, . \, P(M) \, . \, d(A) \, .$$

Decomponhamos (A) em n partes e numeremo-las de 1 a n. A esperança matemática da região parcial (A_i), será

$$E_i = \int_{(A_i)} f(M) \, P(M) \, d(A)$$

$$= f(M_i) \int_{(A_i)} P(M) \, d(A)$$

$$= f(M_i) \, . \, P_{(A_i)} \qquad (1)$$

visto que P(M) é uma função sempre positiva e portanto podemos aplicar o 1.º teorema da média; em (1), $f(M_i)$ representará, portanto, o valor de $f(M)$ num ponto de (A_i) e $P_{(A_i)}$ a probabilidade da região (A_i).

Por outro lado, teremos que

$$M = \Sigma \, E_i = \Sigma f(M_i) \, P_{(A_i)} \, .$$

Suponhamos agora que grupamos os valores obtidos para a fumção $f(M)$ em classes correspondentes às regiões parciais (A_i) e, dentro de cada uma dessas regiões (A_i), substituamos $f(M)$ por $f(M_i) + \varepsilon_i$ onde ε_i, em virtude da suposta continuidade de $f(M)$, será infinitamente pequeno em relação a $f(M_i)$ e, portanto, tenderá para *zero*, à medida que (A_i) tenda para *zero*.

Consideremos a média dos valores de $f(M)$ decomposta em duas parcelas, a primeira correspondente aos valores $f(M_i)$ e a segunda correspondente aos valores de ε_i. Quando o número de experiências aumente indefinidamente, a primeira parcela tende (prop. antecedente) para $\Sigma f(M_i)\,P_{(A_i)}$ e portanto para M, qualquer que seja o modo da divisão de (A); a segunda parcela tenderá para um número cujo valor absoluto é inferior a outro número positivo, tão pequeno quanto se queira, visto que nós podemos fazer a divisão de (A) em partes tão pequenas quanto queiramos.

A segunda parcela tenderá, pois, para *zero*.

O limite da média dos valores de $f(M)$ *existirá*, portanto, e será igual ao *valor médio* ou *provável* de $f(M)$,

c. d. d.

*

* *

Como vimos no capítulo precedente, a probabilidade de que o afastamento relativo λ se mantenha, em valor absoluto, inferior a λ é dada por

$$\theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2}\, d\lambda$$

A lei de probabilidade da variável λ será, pois,

$$P(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\lambda^2}.$$

O valor médio de λ, será

$$M(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e\lambda \, d\lambda = 0 \, ;$$

o valor médio de | λ |, será

$$M(|\lambda|) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} |\lambda| \, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} 2e^{-\lambda^2} \lambda \, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[-e^{-\lambda^2} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, .$$

o valor médio de (λ^2), será

$$M(\lambda^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \lambda^2 d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \lambda \, . \, e^{-\lambda^2} \, 2\lambda \, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\lambda e^{-\lambda^2} + \int e^{-\lambda^2} d\lambda \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \, .$$

Donde se conclue que

$$\frac{M(\lambda^2)}{[M(|\lambda|)]^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\pi}} = \frac{\pi}{2}.$$

A proposição XII do presente capítulo, dá a esta relação uma significação notável: a de podermos rectificar a circunferência, por meio de lançamentos à sorte.

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VII

Nos capítulos precedentes vimos o que se entende por probabilidade dum fenómeno que pode identificar-se com uma tiragem feita, à sorte, numa classe finita de elementos, ou com um lançamento, feito à sorte, numa região, no caso de sermos nós mesmos os agentes dessa tiragem ou lançamento e a classe ou região serem por nós conhecidas qualitativa e quantitativamente. Vimos também como reduzir qualquer conjunto de tiragens ou lançamentos, a uma só tiragem ou lançamento, feitos numa classe ou região.

Vejamos agora como, servindo-nos dos princípios neles estabelecidos, poderemos alargar o campo de acção desta sciência.

Mas, para mais fácil e claramente fazermos esse estudo, principiemos por fazer uma classificação dos factos que pretendemos estudar.

Para isso admitiremos que, seres a nós semilhantes e agentes doutra natureza, podem, *em certas circumstâncias*, fazer tiragens análogas às tiragens (ou lançamentos) feitas, à sorte, por nós mesmos. Depois justificaremos e esclareceremos esta hipótese.

Admitida ela, devidiremos os fenómenos que cahem debaixo da alçada desta sciência, em três grupos. No primeiro grupo, ficarão os fenómenos que podem identificar-se com lançamentos ou tiragens, feitas à sorte, por nós mesmos; no segundo, os fenómenos análogos a tiragens ou lançamentos, feitos por um ser semelhante a nós; no terceiro, os fenómenos análogos a lançamentos ou tiragens feitas por agentes doutra natureza.

Cada um dêstes grupos, devidi-lo-hemos em dois sub-grupos. No 1.° desses sub-grupos, ficarão os fenómenos dos quais se considera um número finito de modalidades; no 2.°, os fenómenos dos quais se considera um conjunto de modalidades formando um *contínuo*.

Em cada um dêstes sub-grupos consideraremos, ainda, três casos. Assim, no 1.° sub-grupo de cada grupo, podemos conhecer o fenómeno qualitativa e quantitativamente (1.° caso); conhecê-lo qualitativamente e desconhecê-lo quantitativamente (2.° caso); ou desconhecê-lo qualitativa e quantitativamente (3.° caso).

No 2.° sub-grupo de cada grupo, podemos conhecer a lei de probabilidade do fenómeno e o seu campo de existência (1.° caso); conhecer o campo de existência, mas desconhecer a lei (2.° caso); desconhecer a lei e o seu campo de existência (3.° caso).

A primeira divisão tem por critério a natureza do agente da tiragem ou lançamento; a segunda, a natureza do fenómeno; a terceira o nosso grau de conhecimento.

Como vimos na Introdução a estes *Elementos,* nós supunhamos conhecido todo o fenómeno que podia indentificar-se com uma tiragem (ou lançamento) feita, à sorte, por nós mesmos, numa classe (ou região) conhecida qualitativa e quantitativamente. É esse o nosso *fenómeno padrão,* o nosso *facto elementar*. Todo o fenómeno, para que possa fazer parte do estudo desta sciência, deve poder reduzir-se a este.

Principiaremos essa redução pelo

1.º Grupo

que, como já vimos, é caracterizado por nele, as tiragens ou lançamentos serem feitos, à sorte, por nós mesmos.

Neste grupo, vimos, também, haver dois sub-grupos, sendo o

1.º SUB-GRUPO

constituído pelos fenómenos nos quais consideravamos um número finito de modalidades, isto é, por fenómenos análogos a tiragens feitas em classes finitas e descontínuas, ou a lançamentos feitos em regiões, divididas num número finito de partes.

O

1.º caso

dêste sub-grupo foi já estudado nos capítulos I, II e III dos presentes *Elementos*. É nele que está incluído o fenómeno padrão e é, portanto, a ele que teremos de reduzir o

2.º caso

que passamos a estudar e, em seguida o 3.º. Este 2.º caso é caracterizado por as tiragens serem feitas em classes conhecidas qualitativamente e desconhecidas quantitativamente.

Reduzir o 2.º caso ao 1.º, será, pois, determinar quantitativamente a classe em que as tiragens são feitas.

Essa determinação poder-se-hà fazer com uma *probabi-*

lidade [1] *e aproximação* tão grandes quanto se queira, logo que possamos fazer tantas tiragens quantas quizermos (3.° teorema de J. Bernoulli).

A determinação será, pois, *aproximada e provável*. Mas a probabilidade de que a aproximação dê lugar a um êrro, em valôr absoluto, inferior a ε, por mais pequeno que ε seja, diferirá de *um* tão pouco quanto quizermos. Este 2.° caso, fica, pois, separado do 1.°, pelo mesmo hiato que separa a *probabilidade* da *certeza* [2].

---

[1] Com «uma probabilidade tão grande quanto se queira» deve entender-se — uma probabilidade tão próxima de *um* quanto se queira.

[2] A *certeza* é, para nós, a *probabilidade* de tirar uma bola branca duma urna que só contêm bolas dessa côr. Para Laplace havia uma *diferença essencial* entre *probabilidade* e *certeza:* «Quand tous les cas sont favorables à un évènement, sa probabilité se change en certitude, et son expression devient égale à l'unité. Sous ce rapport, la certitude et la probabilité sont comparables, quoiqu'il y ait une différence essentielle entre les deux états de l'esprit, lorsqu'une vérité lui est rigoureusement démontrée, ou lorsqu'il aperçoit encore une petite source d'erreur» (Laplace, *Essai Philosophique sur Les probabilités*). Para Jacob Bernoulli, essa *diferença essencial* não existia: «Certitudo rerum, spectata in ordine ad nós, non omnium eadem est, sed multipliciter variat secundum majis et minus. Illa de quibus revelatione, ratione, sensu, experientia, ἀνιοψία aut aliter ita constat, ut de eorum existentia vel futuritione nullo modo dubitare possimus, summa et absoluta certitudine gaudent. Caetera omnia imperfectiorem ejus mensuram in mentibus nostris obtinent, majorem minoremve, prout plures vel pauciores sunt probabilitates, quae suadent rem aliquam esse, fore aut fuisse».

Probabilitas enim est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pars à toto (J. Bernoulli, *Ars Conjectandi,* Pars Quarta, C. I).

A identificação não poderá deixar de ser *provável,* mas à falta de melhor, aceitá-la-hemos, visto que o conhecimento duma probabilidade representa, para nós, alguma coisa de útil.

Na avaliação da probabilidade das coisas «reside toda a sciência dos filósofos e toda a prudência dos políticos» *(... in quo solo omnis Philosophi sapientia et Politici prudentia versatur)* (1).

A identificação do

3.º caso

com o 1.º, faz-se do mesmo modo; os elementos a determinar são, agora, dois, em vez de um. Mas o processo da sua determinação é ainda o mesmo do caso antecedente.

Consideremos, agora, o

2.º SUB-GRUPO

que, como vimos era constituído por fenómenos dos quais se considerava um número infinito de modalidades, formando um *contínuo* que nós suporemos de *segunda espécie,* na terminologia de H. Poincaré (2). Suporemos, pois, que a cada modalidade do fenómeno em questão, fazemos corresponder um ponto do espaço (a um número conveniente de dimensões). O

1.º caso

deste sub-grupo, que é caracterizado por nele se supôr conhecida a lei de probabilidade e o seu campo de exis-

(1) Jacob Bernoulli, *Ars Conjectandi,* pars quarta, cap. II.
(2) H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse,* chap. II.

tência, foi já estudado nos capítulos II, III e IV. Passemos, portanto, para o

2.º caso

no qual se supõe conhecido o campo de existência da lei de probabilidade, sendo, porêm, essa lei desconhecida. A redução deste grupo ao antecedente, consiste na determinação dessa lei.

Quando fazemos uma série de lançamentos, à sorte, numa região e observamos os pontos directamente lançados, a razão do número de pontos que cahem dentro duma parte dessa região para o número de pontos que cahem dentro doutra de igual extensão, tende para unidade, à medida que o número de pontos lançados aumenta (3.º teorema de BERNOULLI). Isto é, à medida que o número de lançamentos aumenta, a distribuição dos pontos lançados tende a tornar-se uniforme.

Já se não dá o mesmo se, em vez de observarmos o ponto lançado directamente, à sorte, observarmos uma sua imagem ou projecção. Neste caso, ainda em virtude do mesmo teorema de BERNOULLI, a distribuição far-se-hà de harmonia com a correspondente *lei de probabilidade*. Os pontos observados condensar-se-hão nas vizinhanças dos *máximos* dessa lei. Conhecendo a lei de probabilidade podemos, pois, *prevêr* a distribuição das imagens ou projecções dos pontos lançados à sorte, com uma probabilidade que aumenta com o número de pontos a abservar.

Recíprocamente, nós poderemos, observando um grande número de lançamentos, determinar a lei de probabilidade do ponto observado, com uma probabilidade tão grande quanto se queira; ou antes, podemos determinar o valôr do integral dessa função desconhecida, estendido a qualquer segmento da região considerada (3.° teorema de Bernoulli).

Este facto fornece-nos dois métodos para a determinação da lei desconhecida.

1.°

Pode dar-se que, razões inerentes à natureza do fenómeno a estudar, nos justifiquem a adopção, *á priori*, duma lei de probabilidade, como, por exemplo, acontece com os êrros de observação. Neste caso, faremos um grande número de séries de lançamentos, sendo cada série formada por um número de lançamentos suficientemente grande, para que seja deminuta a probabilidade de que a sua distribuição se não harmonize com a distribuição prevista pela lei admitida *à priori*, se essa lei fôr a verdadeira.

A razão do número de séries que se harmonizarem com a lei admitida, para o número total de séries, dar-nos-hà um número a que (como já vimos no 2.° caso do 1.° grupo) poderemos chamar probabilidade dessa lei. Se julgarmos essa probabilidade suficiente, a lei será admitida; se não, será regeitada.

O

2.°

método consiste no seguinte: divide-se a região em que varia o ponto observado, região esta que se supõe conhecida, num número de partes suficientemente [1] grande.

Faz-se, em seguida, um número suficientemente grande de lançamentos à sorte. A razão do número de pontos

[1] O número de partes e o número de lançamentos a fazer, dependerá do rigôr de que precisarmos nos resultados.

observados em cada uma dessas partes, para o número total de lançamentos, dár-nos-hà, com uma aproximação e probabilidade que podemos tornar tão grandes quanto queiramos, o integral da função desconhecida, ao longo de cada uma dessas regiões parciais.

Dividindo cada número achado, pela grandeza da região correspondente, obtemos outros tantos valôres da função procurada. Mas isto não basta para determinar a lei.

Hà uma infinidade de funções que, integradas ao longo das regiões consideradas, dão números iguais aos antecedentes. Como escolher uma, dentre tantas?

Todas as funções cujos integrais sejam iguais aos números achados, são igualmente bôas visto que se harmonizam igualmente com o 3.° teorema de BERNOULLI. Escolheremos, à falta de razão mais forte, aquela que mais bem se preste às aplicações que lhe quizermos dar, isto é, a mais simples, para o fim que tenhamos em vista.

Como no sub-grupo antecedente, o

3.° caso

reduz-se ao 2.°. Os pontos observados distribuir-se-hão numa região de contôrno absolutamente arbitrário.

Podemos, mesmo, supôr que o campo de existência da lei é ilimitado em todos os sentidos; a determinação da lei nos diz depois quais as partes dessa região de probabilidade nula; isto é, a própria lei limitará o seu campo de existência.

Do mesmo modo, no 3.° caso do 1.° sub-grupo, nós podiamos supôr que o fenómeno era qualitativamente indeterminado; a determinação quantitativa da classe nos diria depois quais as modalidades de probabilidade nula.

Debaixo deste ponto de vista, estes dois últimos casos não são distintos um do outro. Convêm, porêm, distingui-los, para facilitar a exposição.

Nota

No que acabamos de dizer, nós supômos, implicitamente que as classes (ou regiões) em que as tiragens são feitas, se manteem qualitativa e quantitativamente invariáveis. De contrário, nada podia fazer-se. A não ser que a variação se fizesse duma maneira lenta e regular e fôsse possível determinar a lei de variação, de modo a poder fazer as devidas *correcções*.

Passemos agora para o

2.º Grupo

de fenómenos e justifiquemos, em primeiro lugar, a hipótese em que apoiamos a sua construção, ou antes, expliquemos o que queremos dizer com ela.

A proposição *tirar, à sorte, um elemento duma classe*, tem para nós um sentido quando nós somos os agentes da tiragem.

Mas quando o agente da tiragem seja um ser semilhante a nós, essa proposição não tem, para nós, sentido, ou antes, não tem, para nós, um sentido diferente do da proposição *tirar um elemento duma classe*. Casos haverá, porêm, em que seja legítimo dar a esta proposição o mesmo sentido da primeira.

Com efeito, em que condições devemos nós de fazer uma tiragem, para que a possamos dizer *feita, à sorte?*

Em primeiro lugar, devemos desconhecer, por completo, a distribuíção dos elementos na classe em que a tiragem é feita.

Em segundo lugar, devemos fazer a tiragem de modo que não possamos *prevêr* o elemento que vai sair, nem tão pouco a sua qualidade, não podendo essa *previsão* ser feita *por nós*, nem por nenhum *ser semelhante a nós*.

Ora, todas as vezes que as tiragens sejam feitas nestas circunstâncias, por um ser semelhante a nós, nada se opõe, *à priori*, a que façamos a hipótese de que as tiragens darão os mesmos resultados que dariam se elas fôssem feitas por nós mesmos.

Assim, dada uma urna, contendo nove décimos de bolas brancas para um décimo de bolas pretas, nós apostariamos que saíria uma bola branca, numa tiragem feita, à sorte, se nós mesmos fôssemos os agentes da tiragem. E continuariamos a apostar na mesma côr, se, o agente da tiragem sendo outrem, ela fôsse feita nas circunstâncias atrás descritas, isto é, se puzéssemos o agente da tiragem em condições de não poder *prevêr* o elemento que ia tirar, nem de poder ter o menor indício da distribuíção das bolas dentro da urna. É na admissão desta hipótese que se fundam todos os jogos de azar e é para a justificação dela que, por exemplo, se baralham as cartas dum baralho, antes de serem dadas e se dá ao verso das mesmas uma aparência identica.

*

Todas as vezes que esta hipótese não possa ser feita, por falta duma ou de ambas as condições, o fenómeno saírá fora do domínio desta sciência.

*

A hipótese de que esse agente está a fazer tiragens à sorte, deve ser posta de parte, todas as vezes que os resultados se não harmonisem com as leis de BERNOULLI e análogas, porque aqui, como aliás em qualquer sciência, as condições exteriores podem enganar-nos.

Assim o pensava o padre GALIANI, filósofo e economista do século XVIII, como se vê por esta anedota que dele conta BERTRAND:

«Un jour, à Naples, un home de Basilicate, en présence de l'abbé GALIANI, agita trois dés dans un cornet e paria d'amener rafle de 6; il l'amena sur-le-champ. Cette chance est possible, dit-on; l'home réunit une seconde fois, et l'on répéta la même chose; il réunit les dés dans le cornet trois, quatre, cinq fois, et toujours rafle de 6. *Sangue di Bacco,* s'ecria l'abbé, *les dés sont pipés*» [1].

*

Pelo que acabamos de vêr, os fenómenos do segundo grupo, ou bem se identificam com os do primeiro e nesse caso já estão estudados; ou não se identificam e nesse caso não fazem parte do objecto desta sciência.

*

No que acabamos de dizer àcêrca dos fenómenos do

[1] J. BERTRAND *Calcul des Probabilités,* Préface.

segundo grupo, não nos referimos explicitamente aos fenómenos do segundo sub-grupo, porque a analogia que existe entre a *composição qualitativa* duma classe e o campo de existência da lei de probabilidade, *composição quantitativa* e *forma* da mesma lei, nos dispensa dessa referência.

Consideremos, agora, o

3.º Grupo

de fenómenos.

Quando fazemos uma série de tiragens (ou lançamentos), à sorte, os elementos obtidos sucedem-se desordenadamente, isto é, sem obedecerem a nenhuma lei. De contrário, podê-los-hiamos *prever*, o que é incompatível com o que a intuição nos diz das tiragens feitas à sorte, consideradas nos casos já estudados. Ora, quando as modalidades dum qualquer fenómeno se sucedem dum modo desordenado, esse facto desperta, também, em nós, uma vaga noção de *sorte* ou *acaso*.

Poderemos nós reduzir, identificar, esta vaga noção de *acaso*, agora considerada, com a de hà pouco? Isto é, poderemos nós determinar *quantitativamente* uma classe, formada *qualitativamente* pelas modalidades do fenómeno em questão, de modo a podermos *supôr* que os fenómenos, produzidos pelas suas causas naturais, se sucedem como se fôssem tirados, à sorte, por nós mesmos, nessa classe? Ou, no caso de conhecermos apenas em parte o número de modalidades do fenómeno (o que podemos *sempre* supôr), poderemos nós determinar qualitativa e quantitativamente a classe correspondente?

Admitiremos que sim.

Como justificar esta hipótese?

Duma só maneira: verificando que as conclusões que dela se tiram, se harmonizam com os factos.

Essas conclusões teem todas, por remate, os teoremas de Bernoulli e proposições análogas.

A primeira conclusão a verificar, seria a correspondente ao 3.° teorema de Bernoulli, porque ela nos servia para determinar qualitativa e quantitativamente a classe.

Ora, o 3.° teorema de Bernoulli diz-nos que: hà uma probabilidade *sempre crescente* de que a razão do número de fenómenos observados duma modalidade para o número total de experiências, difira da probabilidade dessa modalidade tão pouco quante se queira. Por outras palavras: se, após cada experiência, dividirmos o número de vezes que obtivemos cada uma das modalidades, pelo número total de experiências, obtemos números que tendem para um limite que é a probabilidade da modalidade correspondente; a probabilidade de que esses números se avizinhem dos respectivos limites, aumenta com o número de experiências.

De modo que, enquanto o número de experiências fôr deminuto, os números obtidos variarão muito irregularmente (visto que a probabilidade de que se avizinhem do limite, é deminuta); mas essa irregularidade irá deminuindo à medida que o número de experiências aumentar.

Se os factos observados se não harmonizarem com o que acabamos de dizer, é porque a hipótese de que partimos não é ligítima, quer porque os fenómenos não sejam identicos a tiragens feitas à sorte, quer porque a classe em que as tiragens são feitas, varie.

Se a verificação se fizer, não só para o 3.° teorema de

Bernoulli, mas tambêm para as proposições análogas, é porque a hipótese era legítima durante o intervalo de tempo gasto nessa verificação.

E, enquanto que o meio em que o fenómeno se produz, não variar sensivelmente, nada se opõe a que continuemos a ter a hipótese por aceitável. Se o meio variar, a hipótese ainda pode ser aceitável; mas pode a variação do meio alterar a composição da classe e nesse caso será preciso determiná-la de novo e tantas vezes quantas as precisas para determinar a lei de variação, se essa lei existir.

INDICE

INDICE

DISSERTAÇÃO

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

P. D'AMORIM