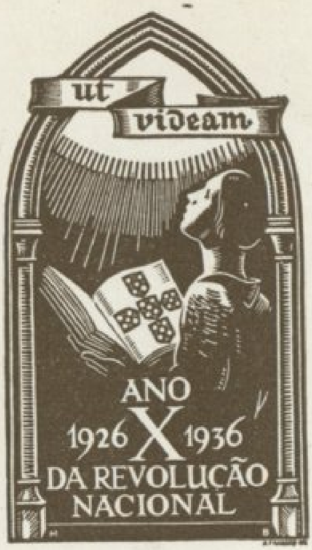
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

THEORIA

DOS

DETERMINANTES.

Concurso

THEORIA

DOS

DETERMINANTES

POR

Francisco da Costa Pessoa,

DOUTOR EM MATHEMATICA E BACHAREL EM PHILOSOPHIA
PELA UNIVERSIDADE DE COIMBRA.

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1880

A

SUA ESPOSA

Maria Clotilde Bandeira de Neiva.

Qu'est au fond la Théorie des Déterminants? C'est une Algèbre au dessus de l'Algèbre, un calcul qui nous met à même de combiner et de prédire les résultats des opérations algébriques, de la même manière que l'Algèbre nous permet de nous dispenser de l'exécution des opérations particulières de l'Arithmétique.

SYLVESTER.

La *Science des Déterminants* est l'un des instruments les plus puissants que l'Analyse mette à la disposition des Géomètres.

....

L'importance des Déterminants se manifeste par des progrès incessants; elle est partout proclamée, dans les Journaux scientifiques comme dans les Mémoires et les Cours publics.

DOSTOR.

INDICE.

PRIMEIRA PARTE.

THEORIA DOS DETERMINANTES.

SEGUNDA PARTE.

APPLICAÇÕES DOS DETERMINANTES.

CAPITULO III. — RESULTANTES SOB A FÓRMA DE DETERMINANTES.

CAPITULO IV. — DISCRIMINANTES, TRANSFORMAÇÕES LINEARES, INVARIANTES E COVARIANTES

A importancia notavel da *Theoria dos Determinantes*, que recentemente tamanho desenvolvimento tem experimentado, dá a razão da preferencia que démos a este assumpto para objecto d'esta publicação.

Esta fecunda theoria simplifica os methodos, generalisa as formulas e dá-lhes uma expressão figurada e concisa que muito facilita o calculo. D'ahi a sua applicação efficaz á Theoria dos Numeros, á das Equações, á Analyse em geral, á Geometria e á Mecanica.

Desde o principio d'este seculo tem sido incessante e rapido o seu progresso. Os mais profundos analystas lhe têm prestado a sua attenção, e continuamente publicado novos trabalhos sobre este interessante ramo da Analyse e suas numerosas applicações.

A Theoria dos Determinantes é já professada nas escholas de muitos paizes, nomeadamente da Allemanha, da Inglaterra, da Italia e da França; e em toda a parte se proclama a sua importancia, e reconhece a vantagem da sua introducção no ensino publico.

Remonta a LEIBNITZ a origem dos Determinantes.

Propondo-se em 1639 resolver duas equações lineares entre duas variaveis e tres entre tres variaveis, chegou este sabio, pela eliminação d'estas, a resultados em que notou certa symetria ou lei de formação. Era a lei de formação dos Determinantes, que em 1750 CRAMER de novo achou e confirmou, e mais tarde BEZOUT generalisou para um numero qualquer de equações.

Alguns annos depois LAPLACE, VANDERMONDE e LAGRANGE descobriram muitas propriedades dos Determinantes.

No principio d'este seculo GAUSS, BINET e CAUCHY successivamente demonstraram novas propriedades dos Determinantes, e com a sua applicação obtiveram em calculos longos e complicados admiravel rapidez e simplicidade.

Mais recentemente, desde 1841, epocha em que JACOBI publicou o primeiro tratado sobre Determinantes, sabios analystas, entre os quaes sobresahem MM. CAYLEY, SYLVESTER, HESSE, BORCHARDT, MALMSTEIN, JOACHIMSTHAL, têm desenvolvido extraordinariamente este poderoso instrumento da Analyse, descobrindo novas propriedades, e muitas e interessantes applicações dos Determinantes á Algebra, á Trigonometria, á Geometria e á Mecanica.

Modernamente M. HERMITE, dedicando-se a este novo ramo da Sciencia algebrica, tem concorrido poderosamente para o seu desenvolvimento com as suas profundas investigações sobre a Theoria dos Numeros e a das Funcções.

M. SALMON, tomando por base a Theoria dos Determinantes e fazendo d'ella curiosas e variadas applicações á Algebra e á Geometria, redigiu de um modo novo as suas Lições de Algebra superior e os seus Tratados de Geometria analytica, que mais apertaram os laços, já estreitos, que prendiam a Analyse á Geometria.

Finalmente M. Dostor, publicando, sobre a Theoria dos Determinantes e suas applicações, um novo tratado, apreciavel pelo methodo e lucidez com que a doutrina é exposta, acaba de contribuir valiosamente para a propagação d'esta Sciencia.

Entre as numerosas e variadas applicações dos Determinantes distinguem-se, pela sua importancia, as que dizem respeito á resolução das equações lineares, á eliminação, á formação e propriedades dos resultantes, dos discriminantes, das funcções que não são alteradas por uma transformação linear das variaveis — os invariantes e covariantes.

Eis porque, para elucidação da Theoria, e com o intuito de tornar patentes as vantagens do emprego dos Determinantes, faremos, após a exposição d'esta, uma succinta applicação dos Determinantes áquellas interessantes questões da Analyse.

PRIMEIRA PARTE.

THEORIA DOS DETERMINANTES.

CAPITULO I.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES.

§ I. — Permutações e inversões.

1. Se tivermos uma serie de n elementos, representados por uma letra affectada d'indices de grandeza crescente

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_n,$$

ou por letras differentes em ordem alphabetica

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ l,$$

e os agruparmos n'uma ordem qualquer, resultará o que se chama uma *disposição* (*) ou *permutação*; e é sabido que o numero de permutações differentes

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,\ \ a_2 a_3 a_1 \ldots a_n,\ \ a_2 a_n a_3 \ldots a_1,\ \ \ldots$$

que com os n elementos é possivel effectuar, é dado pela formula

$$(1).\qquad 1.2.3.4\ldots n.$$

(*) Hoüel, *Notions élém. sur les déterminants,* 1871.

2. Para formar methodicamente estas permutações tomam-se as dos dous primeiros elementos a_1 e a_2, que são evidentemente

(2) $$a_1 a_2, \quad a_2 a_1;$$

colloca-se o terceiro elemento a_3 seguidamente em cada um dos tres logares a partir da direita de cada uma d'estas permutações; e assim se obtêm as $1.2.3 = 6$ permutações possiveis de tres elementos

(3) $$a_1 a_2 a_3, \quad a_1 a_3 a_2, \quad a_3 a_1 a_2, \quad a_2 a_1 a_3, \quad a_2 a_3 a_1, \quad a_3 a_2 a_1.$$

Faz-se depois percorrer ao quarto elemento a_4 todos os quatro logares de cada uma d'estas ultimas permutações; assim a haremos as $1.2.3.4 = 24$ permutações possiveis de quatro elementos

$$\begin{array}{llll} a_1 a_2 a_3 a_4, & a_1 a_2 a_4 a_3, & a_1 a_4 a_2 a_3, & a_4 a_1 a_2 a_3, \\ a_1 a_3 a_2 a_4, & a_1 a_3 a_4 a_2, & a_1 a_4 a_3 a_2, & a_4 a_1 a_3 a_2, \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;} \end{array}$$

e continuando assim formar-se-hiam todas as permutações de $5, 6, \dots n$ elementos.

3. Dada uma permutação, denomina-se *desarranjo* (*) ou *inversão* (**) todo o grupo binario constituido por um dos seus elementos seguido de qualquer dos elementos seguintes de *indice inferior* ou de *letra anterior*.

Assim a permutação

$$a_4 a_2 a_5 a_1 a_3$$

contém seis inversões

$$a_4 a_2, \quad a_4 a_1, \quad a_4 a_3, \quad a_2 a_1, \quad a_5 a_1, \quad a_5 a_3;$$

a permutação

$$g\,a\,e\,d\,c$$

encerra sete inversões

$$ga, \quad ge, \quad gd, \quad gc, \quad ed, \quad ec, \quad dc.$$

(*) Houel, log. cit.

(**) Dostor, *Éléments de la théorie des déterminants*, 1877.

Todas as $1.2.3\ldots n$ permutações, que com n elementos podem formar-se, foram por Cramer divididas em duas classes: a primeira, a classe *par* ou *positiva,* comprehende todas as permutações *pares,* isto é, que contêm um numero par de inversões; a segunda, a classe *impar* ou *negativa,* encerra todas as permutações *impares,* quer dizer, em que ha um numero impar de inversões.

Dizem-se então duas permutações da *mesma paridade,* quando são ambas pares ou ambas impares; e de *paridade differente,* quando uma é par e a outra impar.

4. *Se n'uma permutação trocarmos entre si dous dos seus elementos, ella mudará de paridade.* Este theorema é o principio fundamental das inversões. Vamos demonstral-o.

Seja

Bezout

$$\mathrm{A}\,h\,\mathrm{B}\,l\,\mathrm{C}$$

a permutação dada, onde A representa a serie de elementos que precedem o elemento h, B a serie de elementos comprehendidos entre h e l, e C os elementos seguintes a l.

Trocando os elementos h e l, dos quaes seja, por exemplo, l o de mais elevado indice, resulta a permutação

$$\mathrm{A}\,l\,\mathrm{B}\,h\,\mathrm{C}.$$

Como os grupos A, B, C se conservaram fixos, nenhuma alteração experimentou o numero de inversões de cada um d'elles em si, e dos tres entre si; e como h e l, não obstante trocarem-se, ficaram ainda, como anteriormente, antes de C e depois de A, tambem não soffreu alteração o numero de inversões produzidas entre h e l e os elementos de A e C.

Resta pois só examinar o numero de inversões causadas pela mudança de $h\mathrm{B}l$ em $l\mathrm{B}h$.

Seja N o numero de elementos de B, entre os quaes ha, supponhamos, n mais elevados que h, e n' mais elevados que l.

Não considerando o numero de inversões da serie B, vê-se que o grupo $h\mathrm{B}$ conterá $\mathrm{N}-n$ inversões, porque havendo em B n elementos mais elevados que h, haverá $\mathrm{N}-n$ menos elevados, os quaes junctos a h formarão outras tantas $\mathrm{N}-n$ inversões. O grupo $\mathrm{B}l$ conterá n' inversões, visto haver em B n' elementos mais elevados que l, os quaes com l dão outras tantas n' inversões.

O grupo hBl conterá por consequencia o numero

$$N - n + n'$$

de inversões.

Examinemos agora o grupo lBh.

O grupo lB contém $N - n'$ inversões, visto que B encerra n' elementos de ordem mais elevada que l, e portanto $N - n'$ de ordem menos elevada. O grupo Bh contém n inversões, por ter B n elementos mais elevados que h. Além d'isso ha o desarranjo lh.

Terá pois lBh o numero

$$N - n' + n + 1$$

de inversões.

A differença dos numeros de inversões nos dous casos será

$$\pm(N - n' + n + 1) \mp (N - n + n') = \pm\{2(n - n') + 1\},$$

numero este essencialmente impar.

Logo, se a primeira das duas permutações $AhBlC$ e $AlBhC$ for *par*, a segunda será *impar*, e vice-versa; as duas permutações têm pois *differente paridade* e pertencem a classes differentes.

5. *Dadas duas permutações quaesquer dos mesmos elementos, é possivel transformar-se uma na outra por uma serie de mudanças reciprocas de dous elementos consecutivos.*

Tomem-se, com effeito, as duas permutações

$$gaedfhc,$$

$$dahgecf,$$

e vejamos como se passa da primeira para a segunda.

Como d deve occupar o primeiro logar, mudemos na primeira permutação d com e, depois com a e com g, o que dará

$$dgaefhc.$$

Como a deve ter o segundo logar, mudemos nesta disposição a com g; virá

$$dagefhc.$$

Troquemos agora h com f, depois com e e com g; teremos

$$dahgefc.$$

Resta trocar f e c, e resultará

$$dahgecf,$$

que é a segunda permutação proposta.

Contando as mudanças que fizemos, achamos

$$3+1+3+1=8.$$

Ora por cada troca de dous elementos a permutação muda de paridade (n.º 4); mudou pois de paridade oito vezes, um numero par: logo a segunda permutação ficou com a mesma paridade da primeira.

Podemos concluir, em geral, que *duas permutações pertencem á mesma classe ou a classes differentes, conforme temos de empregar, para passar de uma para a outra, um numero par ou um numero impar de mudanças de elementos consecutivos.*

6. Se n'uma permutação mudarmos o primeiro elemento para o ultimo logar, teremos uma *permutação circular.*

Assim, se na disposição de n elementos

$$badc\ \ldots\ egf,$$

collocarmos b em ultimo logar, resultará

$$adc\ \ldots\ egfb;$$

e aquella disposição terá experimentado uma *permutação circular.*

Esta mudança equivale a trocar b primeiro com a, depois com d, com c, etc., formando

$$abdc\ldots,\ adbc\ldots,\ adcb\ldots,\ \text{etc.},$$

até b chegar ao ultimo logar; isto é, equivale a $n-1$ mudanças de dous elementos consecutivos: logo *uma disposição de* n *elementos, que experimenta uma permutação circular, mudará ou não de classe, segundo* $n-1$ *for impar ou par, ou, n'outros termos, segundo* n *for par ou impar.*

7. *Entre as* $1.2.3\ldots n$ *permutações possiveis de* n *elementos, o numero das que pertencem á classe par é egual ao numero das que pertencem á classe impar.*

Seja com effeito N o numero das permutações pares, e N′ o das impares: será $N+N'$ o numero total das permutações.

Se em cada uma d'estas $N+N'$ permutações se mudarem entre si dous quaesquer elementos h e l, reproduzir-se-hão as mesmas $N+N'$ permutações. Porque em primeiro logar o numero das novas permutações é o mesmo numero $1.2.3\ldots n$, visto que o numero n dos elementos não variou; e em segundo logar as novas permutações são *differentes das primitivas*, por terem h e l invertidos e *differentes entre si*, porque, se duas permutações primitivas $AhBlC$ e $A'hB'lC'$ differirem entre si na composição dos grupos A, B, C e A', B', C', as novas disposições $AlBhC$ e $A'lB'hC'$ differirão entre si na formação dos mesmos grupos.

Em virtude da troca dos elementos h e l, as N permutações de classe par se mudarão em N permutações de classe impar, e as N′ de classe impar se mudarão em N′ permutações de classe par.

Será pois

$$N = N_1, \tag{4}$$

representando por N_1 o numero de permutações impares depois da mudança de h em l.

Mas as permutações, como vimos, ficam as mesmas em *numero* e *constituição:* logo o numero das permutações impares, antes e depois da mudança, é o mesmo, isto é,

$$N' = N_1.$$

D'esta egualdade e de (4) resulta

$$N = N',$$

quer dizer, *o numero total* $N + N' = 1.2.3\ldots n$ *das permutações divide-se em dous numeros* $\frac{1}{2}(1.2.3\ldots n)$ *eguaes de permutações de classe par e de classe impar.*

§ II. — Definição e notação dos determinantes.

8. Consideremos n linhas horisontaes de n elementos cada uma, as quaes ao mesmo tempo formarão n linhas verticaes ou columnas de n elementos. Affectemos cada elemento de dous indices, um *inferior* indicando a ordem de cada *linha horisontal*, outro *superior* mostrando o logar de cada columna ou *linha vertical*. Assim comporemos um quadro de n^2 elementos

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots & a_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n . \end{matrix}$$

O primeiro elemento da primeira linha horisontal, o segundo da segunda, o terceiro da terceira, etc., até o ultimo a_n^n, cada um com os dous indices eguaes, constituem a *diagonal* do quadro.

Se em vez de indices superiores, marcando a ordem das columnas, empre garmos n letras differentes, o quadro tomará a fórma

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & l_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n . \end{matrix}$$

Posto isto, dá-se o nome de *determinante* de um tal systema de n^2 elementos á *somma algebrica de todos os productos possiveis dos elementos* n *a* n, *tomando em cada producto um só elemento de cada linha horisontal e um só de cada columna*. E diz-se este determinante *da ordem* n, porque em cada producto entram n elementos.

Para formar todos estes productos, permutem-se de todas as maneiras possiveis os n indices inferiores (n.° 2), conservando na sua ordem os superiores ou as letras.

D'este modo se obtêm os $1.2.3\ldots n$ productos possiveis.

E em quanto ao signal, cada producto terá o signal $+$ ou o signal $-$, conforme a disposição dos indices pertencer á classe par ou á classe impar.

Assim o producto $a_1 b_2 c_3$ deve affectar-se do signal $+$, porque não encerra inversão alguma; o producto $a_3 b_2 c_1$, contendo tres desarranjos, 3 2, 3 1 e 2 1, deve ter o signal $-$; o producto $a_4 b_2 c_3 d_1$, contendo cinco desarranjos, 4 2, 4 3, 4 1, 2 1, 3 1, deve tambem affectar-se do signal $-$.

Não é todavia preciso contar as inversões em cada producto que se obtem. Basta applicar o processo (n.° 2) para formar as permutações, e a cada troca de indices mudar o signal. Assim $a_1 b_2 c_3 d_4$, não tendo inversão, tem o signal $+$; $a_1 b_2 c_4 d_3$ o signal $-$, porque se trocaram 4 e 3, e, segundo o theorema fundamental (n.° 4), se aquelle producto é par ou positivo, este será negativo; $a_1 b_4 c_2 d_3$ terá o signal $+$, porque em relação ao antecedente $a_1 b_2 c_4 d_5$ houve troca de dous indices 4 e 2; $a_4 b_1 c_2 d_3$ terá o signal $-$, etc.

9. Representa-se um determinante, que para o deante designaremos por Δ, escrevendo o quadro de seus elementos entre duas linhas verticaes.

Assim na notação de Leibnitz (*), *de duplo indice*, a mais usada em mathematicas superiores, um determinante do grau n é representado por

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots & a_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

(*) Leibnitz, *Ouvrages mathématiques*, tomo 2.°

Esta notação é tambem chamada *de indices sobrepostos,* para a distinguir da seguinte, *de indices consecutivos:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cauchy (*) e Jacobi (**), designando os elementos de cada columna pela mesma letra, representam o mesmo determinante por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}.$$

Simplifica-se algumas vezes a notação de Leibnitz supprimindo a letra a. D'este modo escreve-se

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n) \end{vmatrix}.$$

Emprega-se tambem frequentemente a notação abreviada (***)

$$\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \dots a_n^n \quad \text{e} \quad \Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3 \dots l_n,$$

ou simplesmente

$$(a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \dots a_n^n) \quad \text{e} \quad (a_1\, b_2\, c_3 \dots l_n),$$

(*) Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique,* 17.º cad.

(**) Jacobi, *De formatione et proprietatibus determinantium,* e *Journal de Crelle,* t. 15.

(***) Baltzer, *Théorie et application des déterminants,* 1861; — Salmon, *Leçons d'Algèbre supérieure,* 1868.

formada pelo producto dos elementos da diagonal, e na qual os indices devem ser permutados de todas as maneiras possiveis, e cada producto ter o signal $+$ ou $-$, segundo a sua paridade (n.° 8).

VANDERMONDI (*) representa um determinante collocando a serie dos indices superiores por cima dos inferiores. D'este modo o symbolo d'aquelle determinante é

$$\frac{1}{1}\Bigg|\frac{2}{2}\Bigg|\frac{\dots}{\dots}\Bigg|\frac{n}{n}$$

ou simplesmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

No decurso d'este trabalho empregaremos umas e outras, segundo as conveniencias do calculo.

10. Para compor o determinante de 2.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

formam-se com 1 e 2 as permutações possiveis (n.° 2) 1 2, 2 1, e dão-se ás letras a e b estes numeros por indices, affectando o primeiro resultado $a_1 b_2$, que não contem *inversão,* do signal $+$, e o segundo, que encerra uma inversão, do signal $-$.

Assim temos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Para formar o de 3.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

(*) VANDERMONDI, *Histoire de l'Académie de Paris,* t. 2.°

toma-se o de 2.ª

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

e á direita de cada um d'estes termos escreve-se o ultimo elemento c_3, o que produzirá os dous termos

$$a_1 b_2 c_3, \quad - a_2 b_1 c_3,$$

que conservarão os mesmos signaes, por isso que, sendo 3 maior que 1 e 2, não se alterou o numero das inversões já existentes em cada um dos termos $a_1 b_2$, $- a_2 b_1$.

Fazendo depois, conforme ao processo (n.º 2) para obter as permutações, caminhar o indice 3 da direita para a esquerda de modo que occupe seguidamente os dois restantes logares, e mudando o signal do termo a cada passagem em virtude do principio fundamental ou do que dissemos em o n.º 8, resultarão mais quatro termos, que com os dois formarão o determinante de 3.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 .$$

Similhantemente, tomando os productos do determinante de 3.ª ordem

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 \ldots,$$

e fazendo percorrer todos os quatro logares da direita para a esquerda ao elemento d_4, mudando o signal a cada passagem, formaremos o determinante de 4.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = \begin{cases} a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_4 b_1 c_2 d_3 \\ - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_3 c_4 d_2 - a_1 b_4 c_3 d_2 + a_4 b_1 c_3 d_2 \\ + a_3 b_1 c_2 d_4 - a_3 b_1 c_4 d_2 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_4 b_3 c_1 d_2 \\ - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_1 c_4 d_3 - a_2 b_4 c_1 d_3 + a_4 b_2 c_1 d_3 \\ + a_2 b_3 c_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 + a_2 b_4 c_3 d_1 - a_4 b_2 c_3 d_1 \\ - a_3 b_2 c_1 d_4 + a_3 b_2 c_4 d_1 - a_3 b_4 c_2 d_1 + a_4 b_3 c_2 d_1 ; \end{cases}$$

e assim para os determinantes de 5.ª, 6.ª, ... ordem.

O primeiro termo

$$a_1 b_2 c_3 d_4 \ldots, \text{ ou } a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 \ldots,$$

producto de todos os elementos da *diagonal*, denomina-se *termo principal;* e tanto a serie de indices inferiores, como a das letras ou indices superiores, não contém neste termo inversão alguma, pelo que pertencem á classe par.

Dous elementos chamam-se *conjugados*, quando, occupando um d'elles uma certa posição n'uma linha horisontal, o outro occupa a mesma posição na columna correspondente da mesma ordem.

Assim, nos determinantes acima, b_1 e a_2 ou c_1 e a_3 ou d_1 e a_4 são elementos conjugados.

Quando os elementos conjugados são eguaes, o determinante diz-se *symetrico*. Tal é o determinante do 3.º grau

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

11. Em geral, dado um determinante de grau n ou de n^2 elementos, poderemos por meio d'elle formar o determinante de grau $n+1$, ou de $(n+1)^2$ elementos.

Seja

$$T = \alpha \,.\, a_{i_1} \; b_{i_2} \; c_{i_3} \ldots l_{i_n}$$

um termo qualquer do determinante de grau n, sendo $\alpha = \pm 1$.

Escrevendo em seguida a este termo um novo elemento $m_{i_{n+1}}$, o numero de inversões não será alterado, pois que o seu indice é superior a todos os antecedentes, e o novo termo

$$T' = \alpha' \,.\, a_{i_1} \; b_{i_2} \; c_{i_3} \ldots l_{i_n} m_{i_{n+1}}$$

deverá ter $\alpha' = \alpha$, e pertencerá á mesma classe que T.

Façamos agora passar successivamente o indice $n+1$ do ultimo logar ao primeiro, por uma serie de mutuas trocas de dous indices consecutivos.

Como são $n+1$ os logares, obteremos $n+1$ termos, que deverão ter alternadamente os signaes $+$ e $-$, por isso que a cada mudança de indices aquella permutação muda de classe. Praticando o mesmo em todos os $1.2.3\ldots n$ termos do determinante de grau n, formaremos os $1.2.3\ldots n(n+1)$ termos do determinante de grau $n+1$.

§ III. — Transformação dos determinantes.

12. *Não se altera um determinante, quando as linhas horisontaes se mudam em verticaes da mesma ordem, e reciprocamente.*

Com effeito os dous determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots & a_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix},$$

dos quaes um tem por linhas horisontaes as linhas verticaes do outro, são identicos, porque, sendo o primeiro determinante a somma

$$\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2 \ldots a_n^n$$

de todos os productos que se obtêm permutando de todas as maneiras possiveis os n primeiros numeros inteiros $1,2,3\ldots n$, qualquer producto

$$a_3^1\, a_1^2\, a_5^3 \ldots a_8^n$$

do segundo determinante necessariamente fará parte dos productos do primeiro, pois que a permutação dos seus indices,

$$3\ 1\ 5 \ldots 8,$$

será uma das permutações possiveis dos indices $1, 2, 3\ldots n$ do primeiro determinante. E, sendo os termos eguaes, a paridade dos indices e por tanto os signaes serão tambem os mesmos.

Os dous determinantes Δ e Δ', sendo pois constituidos por termos respectivamente eguaes e affectados dos mesmos signaes, serão *identicos*.

Assim é

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$= \sum \pm a_1 b_2 c_3$

$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 +$

$+ a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3$

13. *Se permutarmos duas linhas horisontaes ou duas columnas, o determinante mudará de signal, conservando o mesmo valor.*

Mudemos com effeito entre si, n'um determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \dots l_n,$$

duas linhas parallelas, o que equivale a trocar em cada termo do determinante os indices correspondentes a estas linhas.

Seja n'este determinante

$$a_r \, b_s \, c_t \dots$$

um termo qualquer, que em o novo determinante Δ' se tornará

$$a_t \, b_s \, c_r \dots,$$

onde os indices r e t se acham permutados.

Como o determinante dado encerra todas as permutações possiveis dos indices $r, s, t \dots$, elle conterá tambem, abstrahindo do signal, este ultimo termo; e sendo $r, s, t \dots$ e $t\ s\ r \dots$ permutações de differente paridade, aquelles termos terão signaes contrarios.

Assim pois os termos do novo determinante Δ' serão eguaes e de signaes contrarios aos do determinante dado Δ; isto é, o determinante *conserva o mesmo valor absoluto, mas muda de signal.*

D'este modo é

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} b_2 & a_2 & c_2 \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^1 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ a_2^2 & a_2^1 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^2 & a_n^1 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

14. Pois que a mudança reciproca de duas linhas horisontaes ou verticaes faz que o determinante mude de signal, ou, n'outros termos, que elle seja multiplicado por -1, se fizermos m mudanças de duas linhas horisontaes e n de duas columnas, o determinante será multiplicado por

$$(-1)^{m+n}.$$

E, se fizermos a permutação circular dos n indices d'um determinante, isso equivale a $n-1$ mudanças dos indices dous a dous, ou a multiplicar o determinante por

$$(-1)^{n-1},$$

e este mudará ou não de signal segundo n for *par* ou *impar*.

Assim é

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1^2 & \ldots & a_1^n & a_1^1 \\ a_2^2 & \ldots & a_2^n & a_2^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^2 & \ldots & a_n^n & a_n^1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a_2^2 & \ldots & a_2^n & a_2^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^2 & \ldots & a_n^n & a_n^1 \\ a_1^2 & \ldots & a_1^n & a_1^1 \end{vmatrix}.$$

15. *Mudar as diagonaes d'um determinante* é dispor as linhas horisontaes ou verticaes de modo que a segunda diagonal (aquella que vai do vertice superior direito ao vertice inferior esquerdo) occupe o logar da primeira e *vice-versa.*

Para mudar as diagonaes d'um determinante, *permutam-se as linhas horisontaes ou as columnas extremas, assim como as linhas ou as columnas equidistantes das extremas.* E como cada permutação de duas linhas ou de duas columnas entre si faz que o determinante mude de signal (n.° 13), segue-se que o determinante que resulta da mudança das diagonaes *mudará ou não de signal, segundo se fizer um numero impar ou um numero par de mudanças de linhas ou columnas entre si;* n'outros termos, *segundo for impar ou par o maior numero inteiro contido na metade do grau* n.

Operando assim, será

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix},$$

e

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \\ d_3 & c_3 & b_3 & a_3 \\ d_4 & c_4 & b_4 & a_4 \end{vmatrix}.$$

16. *Para transformar um determinante, sem alterar o seu valor, de modo que um elemento qualquer a_n^m seja o seu primeiro elemento, transporta-se successivamente á primeira ordem cada uma das duas linhas horisontal e vertical que se cruzam segundo a_n^m, e multiplica-se depois o determinante por* $(-1)^{m+n}$.

Com effeito, pertencendo o elemento a_n^m á linha vertical de ordem m e á horisontal de ordem n, passemos para a primeira ordem a columna de ordem m, para o que (n.° 14) teremos de multiplicar o determinante por

$$(-1)^{m-1}.$$

Transporte-se depois tambem para a primeira ordem a linha horisontal de ordem n, para o que multiplicaremos o determinante por

$$(-1)^{n-1}.$$

D'este modo o elemento em questão a_n^m se achará o primeiro do determinante, e este se terá multiplicado por

$$(-1)^{m-1}\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^{m+n-2}=\frac{(-1)^{m+n}}{(-1)^2}=(-1)^{m+n}.$$

Assim, querendo que no seguinte determinante o primeiro elemento seja a_4^3, faremos

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} a_4^3 & a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_1^3 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^3 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^3 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_5^3 & a_5^1 & a_5^2 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}.$$

Se for $m=n$, o elemento $a_n^m=a_n^n$ pertence á diagonal, e passa a ser o primeiro termo do determinante sem lhe mudar o signal, por ser então

$$(-1)^{2n}=+1.$$

17. *Um determinante não se altera, quando se mudam um no outro os dous indices de cada elemento.*

Sejam

(1) $$g\ h\ i\dots,$$

(2) $$r\ s\ t\dots$$

duas quaesquer permutações dos indices $1, 2, 3\dots n$, e α, α' os signaes indicativos da sua paridade.

Se no determinante

(3) $$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

os indices superiores tomarem a disposição (1), o determinante será (n.º 16) multiplicado por um factor α; e, se depois os indices inferiores tomarem a disposição (2), o determinante será ainda multiplicado por α'. O determinante (3) será pois egual ao transformado

$$(4) \qquad \alpha\alpha' \begin{vmatrix} a_r^g & a_r^h & a_r^i & \dots \\ a_s^g & a_s^h & a_s^i & \dots \\ a_t^g & a_t^h & a_t^i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Se tivessemos dado primeiro aos indices inferiores a disposição (1) e depois aos superiores a disposição (2), teriamos de multiplicar o determinante (3) por $\alpha\alpha'$, de modo que o determinante (3) pode ainda tomar a fórma

$$(5) \qquad \alpha\alpha' \begin{vmatrix} a_g^r & a_g^s & a_g^t & \dots \\ a_h^r & a_h^s & a_h^t & \dots \\ a_i^r & a_i^s & a_i^t & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

ou, mudando as linhas horisontaes em verticaes e reciprocamente (n.º 12),

$$(6) \qquad \alpha\alpha' \begin{vmatrix} a_g^r & a_h^r & a_i^r & \dots \\ a_g^s & a_h^s & a_i^s & \dots \\ a_g^t & a_h^t & a_i^t & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Temos pois (3) = (4) = (6), ou

$$\begin{vmatrix} a_r^g & a_r^h & a_r^i & \dots \\ a_s^g & a_s^h & a_s^i & \dots \\ a_t^g & a_t^h & a_t^i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_g^r & a_h^r & a_i^r & \dots \\ a_g^s & a_h^s & a_i^s & \dots \\ a_g^t & a_h^t & a_i^t & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

onde se vê que os dous indices de cada elemento se mudaram sem que o valor do determinante se alterasse.

É, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 & a_2^2 \\ a_1^1 & a_1^3 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 & a_2^2 \\ a_1^1 & a_3^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_3^3 & a_2^3 \end{vmatrix}.$$

18. *Se duas linhas ou duas columnas se tornam identicas, o determinante reduz-se a zero.*

Se, com effeito, permutarmos estas duas linhas ou columnas, o determinante mudará de signal (n.º 13), tornando-se $-\Delta$; mas por outro lado a permutação de duas linhas identicas em nada pode alterar o determinante: logo será

$$\Delta = -\Delta \quad \text{ou} \quad 2\Delta = 0,$$

d'onde

$$\Delta = 0.$$

Temos, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & \dots & a_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

19. *Se multiplicarmos ou dividirmos por um factor os elementos d'uma linha ou d'uma columna d'um determinante, este ficará multiplicado ou dividido por esse factor.*

Com effeito o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ pa_h^1 & pa_h^2 & \dots & pa_h^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots pa_h^h \dots a_n^n,$$

no qual todos os termos da linha de ordem h de Δ se acham multiplicados por

p, tem em cada um dos seus termos um elemento d'esta linha, e por conseguinte o factor p, que pode tirar-se para fóra do determinante, resultando

$$p\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n = p \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_h^1 & a_h^2 & \ldots & a_h^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = p\Delta,$$

o que prova a primeira parte do theorema.

E similhantemente, se o factor fosse $\frac{1}{q}$, resultaria

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{q}a_h^1 & \frac{1}{q}a_h^2 & \ldots & \frac{1}{q}a_h^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \frac{1}{q} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_h^1 & a_h^2 & \ldots & a_h^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{q},$$

o que demonstra a segunda parte.

20. A proposição precedente mostra que *podemos, sem alterar o valor d'um determinante, supprimir um factor commum a todos os elementos d'uma linha ou columna, com tanto que o determinante se multiplique por esse factor*; e tambem *multiplicar todos os elementos d'uma linha ou columna por um factor, comtanto que o determinante se divida por esse factor.*

D'este modo é

$$\begin{vmatrix} pa_1 & pb_1 & pc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \\ pa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ -6 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 9 & -15 & -24 \\ -6 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Se o factor for -1, será

$$\begin{vmatrix} -a_1^1 & -a_1^2 & \dots & -a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ -a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

d'onde se conclue que, *se mudarmos os signaes a todos os elementos d'uma linha ou columna, o determinante mudará de signal.*

Assim teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ -2 & -3 & 6 \\ 4 & 7 & -9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix},$$

mudando no primeiro determinante os signaes da segunda linha horisontal, e no segundo os signaes da terceira columna.

Se o factor for zero, isto é, se se annullarem os elementos d'uma linha ou columna, *o determinante será nullo.*

21. O mesmo principio dá-nos o meio de simplificar um determinante em alguns casos.

Tratemos, por exemplo, de simplificar o determinante de 4.ª ordem

$$\Delta = \begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ cda & b & b^2 & b^3 \\ dab & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Multipliquemos as quatro linhas respectivamente por a, b, c, d: será

$$abcd\,\Delta = \begin{vmatrix} abcd & a^2 & a^3 & a^4 \\ abcd & b^2 & b^3 & b^4 \\ abcd & c^2 & c^3 & c^4 \\ abcd & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = abcd \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix},$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix},$$

determinante no qual os elementos da primeira columna se acham reduzidos á unidade.

Em geral é sempre possivel reduzir á unidade os elementos d'uma linha ou d'uma columna d'um determinante.

Para o mostrar tomemos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

no qual queremos, por exemplo, reduzir á unidade os elementos da primeira linha.

Multiplique-se cada columna pelo producto dos primeiros elementos das outras duas, a saber $b_1 c_1$, $a_1 c_1$, $a_1 b_1$; o determinante ficará multiplicado por $b_1 c_1 \,.\, a_1 c_1 \,.\, a_1 b_1 = a_1^2 b_1^2 c_1^2$; e, tirando o factor $a_1 b_1 c_1$ commum da primeira linha, será

$$a_1^2 b_1^2 c_1^2 \Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 & a_1 b_1 c_1 & a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_1 c_1 & a_1 b_2 c_1 & a_1 b_1 c_2 \\ a_3 b_1 c_1 & a_1 b_3 c_1 & a_1 b_1 c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_1 c_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 b_1 c_1 & a_1 b_2 c_1 & a_1 b_1 c_2 \\ a_3 b_1 c_1 & a_1 b_3 c_1 & a_1 b_1 c_3 \end{vmatrix},$$

d'onde, dividindo por $a_1^2 b_1^2 c_1^2$, resulta

$$\Delta = \frac{1}{a_1 b_1 c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 b_1 c_1 & a_1 b_2 c_1 & a_1 b_1 c_2 \\ a_3 b_1 c_1 & a_1 b_3 c_1 & a_1 b_1 c_3 \end{vmatrix},$$

como pretendiamos provar.

22. Se os elementos da linha que se quer transformar não são primos entre si, *multiplicaremos cada columna pelo quociente respectivo que resulta da divisão do menor multiplo d'esses elementos por cada um d'elles*. E d'este modo se obtêm resultados mais simples do que pelo processo geral do numero precedente.

Operando assim, teremos

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6.2.3.4} \begin{vmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 \\ 6 & 8 & 15 & 8 \\ 42 & 6 & 24 & 4 \\ 12 & 8 & 9 & 20 \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 15 & 8 \\ 42 & 6 & 24 & 4 \\ 12 & 8 & 9 & 20 \end{vmatrix}$$

O menor multiplo de 2, 6, 4 e 3 é 12, que, dividido por aquelles elementos, dá em quociente os numeros 6, 2, 3, 4, pelos quaes ao mesmo tempo multiplicámos as quatro columnas e dividimos o determinante, o que não alterou o valor d'este; por fim, tirando para fóra o factor 12, resultou o determinante simplificado.

23. *Quando os elementos de duas linhas, horisontaes ou verticaes, só differem n'um factor constante, o determinante é nullo;* porque, tirando para fóra esse factor, resulta um determinante com duas linhas identicas (n.º 18), que é nullo.

Assim

$$\begin{vmatrix} a_1 & pa_1 & c_1 \\ a_2 & pa_2 & c_2 \\ a_3 & pa_3 & c_3 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = p \times 0 = 0,$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \alpha^n \\ \alpha & b & \alpha^{n+1} \\ \alpha^2 & c & \alpha^{n+2} \end{vmatrix} = \alpha^n \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ \alpha & b & \alpha \\ \alpha^2 & c & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^n \times 0 = 0.$$

24. *Quando os elementos de duas linhas, horisontaes ou verticaes, são proporcionaes, o determinante é nullo.*

Supponhamos que no determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

é

$$a_1 : b_1 : c_1 : \dots :: a_2 : b_2 : c_2 : \dots,$$

ou

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \dots$$

Multiplicando os elementos da segunda linha a_2, b_2, $c_2 \dots$ respectivamente por $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$, $\frac{c_1}{c_2} \dots$, que são eguaes, teremos, para não alterar o determinante, de o dividir por $\frac{a_1}{a_2}$, ou de o multiplicar por $\frac{a_2}{a_1}$, e resultará

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{a_2}{a_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

determinante *nullo* por conter duas linhas identicas (n.º 18).

§ IV. — Determinantes menores.

25. Dá-se o nome de *determinante menor*, com relação a um determinante dado, ao determinante que resulta da suppressão, feita n'este, de um certo numero de linhas e de egual numero de columnas. E diz-se de primeira, segunda, terceira ... ordem, segundo resulta da suppressão de 1, 2, 3 ... linhas e 1, 2, 3 ... columnas.

Tendo designado por Δ o determinante primitivo, representaremos por ∂ o determinante menor.

X **26.** *Se os elementos d'uma linha, horisontal ou vertical, d'um determinante se annullam, á excepção d'um só, o determinante reduz-se ao producto d'esse elemento pelo determinante* menor, *cujos elementos se obtêm supprimindo no determinante proposto as duas linhas que se cruzam segundo esse elemento.*

Com effeito, seja dado o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

cujos elementos na primeira linha horisontal são nullos, á excepção do primeiro a_1^1.

É propriedade essencial de qualquer determinante *ser uma funcção linear e homogenea dos elementos d'uma linha ou columna*, por isso que cada um dos seus termos contém sempre um elemento d'uma linha e d'uma columna (n.° 8).

Cada termo do determinante proposto deve pois conter um factor da primeira linha (n.° 8); todos portanto se annullarão, á excepção d'aquelles que tiverem por factor o primeiro elemento a_1^1; e como nestes termos não pode entrar mais nenhum elemento da primeira columna, os $n-1$ elementos

$$a_2^1,\ a_3^1,\ \dots\ a_n^1,$$

não entrarão na composição do determinante, sendo por isso arbitrarios.

O determinante reduz-se pois á somma de todos os productos possiveis, $n-1$ a $n-1$, dos elementos

$$\begin{array}{c} a_2^2,\ a_2^3,\ \dots\ a_2^n, \\ a_3^2,\ a_3^3,\ \dots\ a_3^n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n^2,\ a_n^3,\ \dots\ a_n^n, \end{array}$$

multiplicados por a_1^1.

Para formar estes productos permutam-se, conforme o methodo geral, no termo principal

$$a_2^2\ a_3^3\ a_4^4\ \dots\ a_n^n,$$

os indices inferiores de todas as maneiras possiveis, e affecta-se cada um do signal $+$ ou $-$, segundo a paridade da disposição dos indices.

Estes productos formarão o *determinante menor* de 1.ª ordem, que representamos por $\partial_{a_1^1}$, e que, multiplicado por a_1^1, constituirá o determinante proposto

$$\Delta = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 \, \partial_{a_1^1}.$$

D'este modo é

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

27. *Se, além dos elementos a_1^2, a_1^3, ... a_1^n da primeira linha, forem tambem nullos os elementos a_2^3, a_2^4, ... a_2^n da segunda, poderemos não só supprimir as linhas que se cruzam segundo a_1^1, mas ainda as que se crusam segundo a_2^2, resultando um determinante menor de segunda ordem, que multiplicaremos por $a_1^1 a_2^2$.*

Com effeito, em virtude do principio demonstrado em o numero antecedente, é successivamente

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \begin{vmatrix} a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

e se a_2^2 fôsse nulo!

quaesquer que sejam os elementos a_2^1, a_3^1 ... a_n^1 e a_3^2 ... a_n^2.

Se fosse $a_1^1 = a_2^2 = 1$, estes determinantes seriam eguaes.

28. *Se todos os elementos situados do mesmo lado da diagonal forem nullos, poderemos supprimir todas as linhas, e o determinante se reduzirá ao producto dos elementos da diagonal, isto é, ao termo principal.*

Com effeito, em virtude do principio do n.º 26, é

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^2 & a_3^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \dots = a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n.$$

29. Se o unico elemento differente de zero d'uma linha não é o primeiro do determinante, podemos transportal-o ao primeiro logar pela transposição das duas linhas que o contêm, conforme o exposto em o n.º 14.

Seja a_h^i um elemento differente de zero da linha de ordem h e da columna de ordem i, e supponhamos que todos os outros elementos da mesma columna são nullos.

Será (n.º 14)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{i-1} & 0 & a^{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h-1}^1 & a_{h-1}^2 & \dots & a_{h-1}^{i-1} & 0 & a_{h-1}^{i+1} & \dots \\ a_h^1 & a_h^2 & \dots & a_h^{i-1} & a_h^i & a_h^{i+1} & \dots \\ a_{h+1}^1 & a_{h+1}^2 & \dots & a_{h+1}^{i-1} & 0 & a_{h+1}^{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1)^{i+h} \begin{vmatrix} a_h^i & a_h^1 & a_h^2 & \dots & a_h^{i-1} & a_h^{i+1} & \dots \\ 0 & a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{i-1} & a_1^{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{h-1}^1 & a_{h-1}^2 & \dots & a_{h-1}^{i-1} & a_{h-1}^{i+1} & \dots \\ 0 & a_{h+1}^1 & a_{h+1}^2 & \dots & a_{h+1}^{i-1} & a_{h+1}^{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+h} a_h^i \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{i-1} & a_1^{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h-1}^1 & a_{h-1}^2 & \dots & a_{h-1}^{i-1} & a_{h-1}^{i+1} & \dots \\ a_{h+1}^1 & a_{h+2}^2 & \dots & a_{h+1}^{i-1} & a_{h+1}^{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

qualquer que seja o valor de $a_h^1, a_h^2, \dots a_h^{i-1}, a_h^{i+1}, \dots$

D'este resultado conclue-se que *um determinante, cujo elemento a_h^i é o unico elemento differente de zero d'uma linha, reduz-se ao producto do factor $(-1)^{i+h} a_h^i$ pelo determinante menor de primeira ordem, que se fórma supprimindo as duas linhas que se cruzam segundo a_h^i.*

Tal é o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4} d^3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = -d^3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}.$$

30. Reciprocamente *qualquer determinante póde transformar-se em um determinante de grau mais elevado com elementos arbitrarios.*

Podemos, por exemplo, transformar em determinante de 3.ª, de 4.ª, de 5.ª ... ordem o determinante de 2.ª

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & 1 \end{vmatrix} = \text{etc.},$$

ficando arbitrarios os elementos a_3, b_3, a_4, b_4, ...

Em geral é

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+1}^1 & \dots & a_{n+1}^n \\ 0 & a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+2}^{n+1} & a_{n+2}^1 & \dots & a_{n+2}^n \\ 0 & 1 & a_{n+1}^1 & \dots & a_{n+1}^n \\ 0 & 0 & a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \text{etc.},$$

sendo arbitrarios os elementos introduzidos.

31. *Quando um elemento é egual a zero, o determinante póde reduzir-se a um determinante do mesmo grau, no qual os outros elementos da linha e da columna que contêm este zero são eguaes á unidade.*

Com effeito, multiplicando no determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

a segunda e a terceira linha respectivamente por a_3, a_2, e dividindo ao mesmo tempo o determinante por $a_3 a_2$, vem

$$\Delta = \frac{1}{a_2 a_3} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 a_3 & a_3 b_2 & a_3 c_2 \\ a_2 a_3 & a_2 b_3 & a_2 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_3 b_2 & a_3 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 & a_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando n'este ultimo determinante a segunda e a terceira columna por c_1 e b_1, e dividindo o determinante por $b_1 c_1$, resulta

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_3 b_2 & a_3 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 & a_2 c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_1 c_1} \begin{vmatrix} 0 & b_1 c_1 & b_1 c_1 \\ 1 & a_3 b_2 c_1 & a_3 b_1 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 c_1 & a_2 b_1 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_3 b_2 c_1 & a_3 b_1 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 c_1 & a_2 b_1 c_3 \end{vmatrix}.$$

Temos pois

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_3 b_2 c_1 & a_3 b_1 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 c_1 & a_2 b_1 c_3 \end{vmatrix}.$$

Analogamente se acha o determinante de 4.ª ordem

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_3 a_4 b_2 c_1 d_1 & a_3 a_4 b_1 c_2 d_1 & a_3 a_4 b_1 c_1 d_2 \\ 1 & a_2 a_4 b_3 c_1 d_1 & a_2 a_4 b_1 c_3 d_1 & a_2 a_4 b_1 c_1 d_3 \\ 1 & a_2 a_3 b_4 c_1 d_1 & a_2 a_3 b_1 c_4 d_1 & a_2 a_3 b_1 c_4 d_1 \end{vmatrix};$$

e do mesmo modo os determinantes de ordem superior.

32. *Quando n'um determinante os elementos da diagonal são zeros, e os da primeira linha são respectivamente os seus conjugados da primeira columna, este determinante é egual a um outro da mesma ordem, cujos elementos da diagonal são ainda nullos, e os da primeira linha e da primeira columna eguaes á unidade.*

É com effeito o determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & f & 0 & g \\ c & h & i & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2c^2} \begin{vmatrix} 0 & abc & abc & abc \\ a & 0 & acd & abe \\ b & bcf & 0 & abg \\ c & bch & aci & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & acd & abe \\ b & bcf & 0 & abg \\ c & bch & aci & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & cd & be \\ 1 & cf & 0 & ag \\ 1 & bh & ai & 0 \end{vmatrix},$$

onde multiplicámos a segunda, a terceira e a quarta columna do primeiro determinante por bc, ac e ab, dividindo-o ao mesmo tempo por $a^2b^2c^2$; dividimos a primeira linha do segundo por abc, multiplicando-o por abc; e finalmente dividimos respectivamente a segunda, a terceira e a quarta linha do terceiro determinante por a, b, c, multiplicando-o por abc.

O mesmo calculo e principio se applica a um determinante de outra qualquer ordem.

§ V. — Desenvolvimento dos determinantes.

33. Desenvolver um determinante *é deduzir do quadro ou symbolo que o representa a serie de termos do polynomio que o constitue.*

Vejamos como desenvolver o determinante geral

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_h^1 & a_h^2 & \dots & a_h^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Um determinante é uma funcção linear e homogenea dos elementos da mesma linha e da mesma columna (n.º 26). Cada termo pois de Δ encerra um dos elementos

$$a_h^1,\ a_h^2,\ a_h^3,\ \ldots\ a_h^i,\ \ldots\ a_h^n,$$

da linha horisontal de ordem h, e só encerra um.

Designando por A_h^1, $A_h^2 \ldots A_h^i \ldots A_h^n$ as sommas de todos os termos que em Δ multiplicam os elementos a_h^1, $a_h^2 \ldots a_h^i \ldots a_h^n$, será, ordenando segundo estes elementos,

$$(2) \qquad \Delta = A_h^1 a_h^1 + A_h^2 a_h^2 + \ldots + A_h^i a_h^i + \ldots + A_h^n a_h^n.$$

Supponhamos n'esta expressão $a_h^i = 1$, e nullos todos os outros elementos a_h^1, $a_h^2 \ldots a_h^n$; resultará (n.º 29)

$$\Delta = A_h^i = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots\ldots\ldots & & & & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h-1}^1 & \ldots & a_{h-1}^{i-1} & a_{h-1}^i & a_{h-1}^{i+1} & \ldots\ a_{h-1}^n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots\ 0 \\ a_{h+1}^1 & \ldots & a_{h+1}^{i-1} & a_{h+1}^i & a_{h+1}^{i+1} & \ldots\ a_{h+1}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+h} \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots\ldots\ldots & & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h-1}^1 & \ldots\ a_{h-1}^{i-1} & a_{h-1}^{i+1} & \ldots\ a_{h-1}^n \\ a_{h+1}^1 & \ldots\ a_{h+1}^{i-1} & a_{h+1}^{i+1} & \ldots\ a_{h+1}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = (-1)^{i+h} \partial_{a_h^i},$$

chamando $\partial_{a_h^i}$ ao determinante menor do primeiro grau, que no desenvolvimento de Δ é coefficiente de a_h^i.

Temos pois, fazendo n'esta expressão $i = 1, 2, \ldots n$, e substituindo em (2) os resultados,

$$\Delta = (-1)^{1+h} \partial_{a_h^1} a_h^1 + (-1)^{2+h} \partial_{a_h^2} a_h^2 + (-1)^{3+h} \partial_{a_h^3} a_h^3 + \ldots + (-1)^{n+h} \partial_{a_h^n} a_h^n$$

ou

$$(3) \qquad \Delta = (-1)^{1+h} \left\{ \partial_{a_h^1} a_h^1 - \partial_{a_h^2} a_h^2 + \partial_{a_h^3} a_h^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \partial_{a^n} a_h^n \right\}.$$

Para $h=1$, isto é, ordenando segundo os elementos da primeira linha horisontal, é

$$\Delta = \partial_{a_1^1} a_1^1 - \partial_{a_1^2} a_1^2 + \partial_{a_1^3} a_1^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \partial_{a_1^n} a_1^n.$$

Para $h=2$, isto é, ordenando segundo os elementos da segunda linha horisontal, será

$$\Delta = -\left\{ \partial_{a_2^1} a_2^1 - \partial_{a_2^2} a_2^2 + \partial_{a_2^3} a_2^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \partial_{a_2^n} a_2^n \right\},$$

e assim para as outras linhas, vindo alternadamente os signaes $+$ e $-$.

Se, em vez de ordenar o determinante Δ segundo os elementos da mesma linha horisontal, o ordenarmos segundo os elementos da columna de ordem i,

$$a^i,\ a_2^i,\ a_3^i \ldots a_h^i \ldots a_n^i,$$

teremos, em vez de (2), a expressão

$$(4) \qquad \Delta = A_1^i a_1^i + A_2^i a_2^i + A_3^i a_3^i + \ldots + A_h^i a_h^i + \ldots + A_n^i a_n^i,$$

que, suppondo nullos todos os elementos da columna á excepção de um, $a_h^i = 1$, dá

$$\Delta = A_h^i = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^{i-1} & 0 & a_1^{i+1} & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_h^1 & \ldots & a_h^{i-1} & 1 & a_h^{i+1} & \ldots & a_h^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^{i-1} & 0 & a_n^{i+1} & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+h} \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^{i-1} & a^{i+1} & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h-1}^1 & \ldots & a_{h-1}^{i-1} & a_{h-1}^{i+1} & \ldots & a_{h-1}^n \\ a_{h+1}^1 & \ldots & a_{h+1}^{i-1} & a_{h+1}^{i+1} & \ldots & a_{h+1}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^{i-1} & a_n^{i+1} & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{i+h} \partial_{a_h^i}.$$

Pondo n'esta expressão $h=1, 2, \ldots n$ e substituindo em (4) os resultados, teremos o valor de Δ ordenado segundo os elementos da columna i.

Será, assim ordenado,

$$\Delta=(-1)^{i+1}\,\partial_{a_1^i}\,a_1^i+(-1)^{i+2}\,\partial_{a_2^i}\,a_2^i+(-1)^{i+3}\,\partial_{a_3^i}\,a_3^i+\ldots+(-1)^{i+n}\,\partial_{a_n^i}\,a_n^i,$$

ou

$$(5)\qquad \Delta=(-1)^{i+1}\left\{\partial_{a_1^i}\,a_1^i-\partial_{a_2^i}\,a_2^i+\partial_{a_3^i}\,a_3^i-\ldots+(-1)^{n-1}\,\partial_{a_n^i}\,a_n^i\right\}.$$

Se essa columna for a primeira, será $i=1$, e

$$\Delta=\partial_{a_1^1}\,a_1^1-\partial_{a_2^1}\,a_2^1+\partial_{a_3^1}\,a_3^1-\ldots+(-1)^{n-1}\,\partial_{a_n^1}\,a_n^1.$$

Se for a segunda, será $i=2$, e

$$\Delta=-\left\{\partial_{a_1^2}\,a_1^2-\partial_{a_2^2}\,a_2^2+\partial_{a_3^2}\,a_3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\,\partial_{a_n^2}\,a_n^2\right\},$$

e assim para as demais columnas, vindo nos valores de Δ alternadamente os signaes $+$ e $-$.

As formulas (3) e (5) fornecem o meio de desenvolver um determinante, ordenando-o segundo os elementos de uma linha horisontal ou de uma linha vertical; e mostram que *o coefficiente de um elemento, onde se cruzam a linha* h *e a columna* i, *é um determinante menor de primeira ordem* $\partial_{a_h^i}$, *que se obtem supprimindo no determinante dado essa linha e essa columna; e o signal é dado pelo factor* $(-1)^{i+h}$ *que o multiplica.*

D'ahi se conclue o methodo geral de desenvolver um determinante: — *ordena-se este segundo os elementos de uma linha ou columna; os coefficientes d'estes elementos são determinantes menores, que do mesmo modo se ordenam segundo os elementos d'uma linha ou columna; e assim por deante até chegarmos a coefficientes determinantes de segunda ordem, que se desenvolvem immediatamente, restando a final effectuar as multiplicações.*

34. Appliquemos este methodo a alguns exemplos.

Exemplo I.— Ordenando segundo os elementos da primeira columna, acha-se o determinante de 3.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1)$$

$$+ a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_2 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

Exemplo II.— Do mesmo modo se desenvolve o determinante de 4.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \left\{ b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \right\} - a_2 \left\{ b_1 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \right\} + \dots$$

$$= a_1b_2(c_3d_4 - c_4d_3) - a_1b_3(c_2d_4 - c_4d_2) + a_1b_4(c_2d_3 - c_3d_2) - \dots$$

$$= a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 + a_1b_3c_4d_2 + a_1b_4c_2d_3 - a_1b_4c_3d_2 + \dots;$$

e semelhantemente os determinantes de 5.ª, 6.ª ... ordem.

Exemplo III.— Por meio do desenvolvimento podemos calcular o valor d'um determinante.

Assim

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(24 - 25) - 3(18 - 20) + 4(15 - 16) = -2 + 6 - 4 = 0.$$

Exemplo IV.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 8 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 64 + 3(3 - 40) + 5(24 + 5) = 1 + 64 - 111 + 145 = 99.$$

Exemplo V.

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$

$$= -a \begin{vmatrix} -a & d & c \\ d & -a & b \\ c & b & -a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & c & d \\ d & -a & b \\ c & b & -a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} b & c & d \\ -a & d & c \\ c & b & -a \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c & d \\ -a & d & c \\ d & -a & b \end{vmatrix}$$

$$= -a \left\{ -a \begin{vmatrix} -a & b \\ b & -a \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} d & c \\ b & -a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & c \\ -a & b \end{vmatrix} \right\} - b \left\{ b \begin{vmatrix} -a & b \\ b & -a \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} c & d \\ b & -a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} c & d \\ -a & b \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ c \left\{ b \begin{vmatrix} d & c \\ b & -a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} c & d \\ b & -a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix} \right\} - d \left\{ b \begin{vmatrix} d & c \\ -a & b \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} c & d \\ -a & b \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix} \right\}$$

$$= a^2(a^2 - b^2) + ad(-ad - bc) - ac(bd + ac) - b^2(a^2 - b^2) + bd(-ac - bd)$$

$$- bc(bc + ad) + bc(-ad - bc) + ac(-ac - bd) + c^2(c^2 - d^2)$$

$$- bd(bd + ac) - ad(bc + ad) - d^2(c^2 - d^2)$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 8abcd - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2.$$

Exemplo VI.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 7 & -6 \\ -3 & -7 & 1 & 5 \\ -4 & 6 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & -6 \\ -7 & 1 & 5 \\ 6 & -5 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -7 & 1 & 5 \\ 6 & -5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \\ 6 & -5 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2.2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 2.7 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 2.6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3.2 \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 3.6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 4.2 \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 4.7 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 25 + 7(7-30) + 6(35+6) \ldots = 3166.$$

Exemplo VII.

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 A} \begin{vmatrix} a^2 & b \operatorname{sen} A & c \operatorname{sen} A \\ b \operatorname{sen} A & 1 & \cos A \\ c \operatorname{sen} A & \cos A & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A} \left\{ a^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos A \\ \cos A & 1 \end{vmatrix} - b \operatorname{sen} A \begin{vmatrix} b \operatorname{sen} A & c \operatorname{sen} A \\ \cos A & 1 \end{vmatrix} + c \operatorname{sen} A \begin{vmatrix} b \operatorname{sen} A & c \operatorname{sen} A \\ 1 & \cos A \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A} \left\{ a^2(1-\cos^2 A) - b \operatorname{sen} A (b \operatorname{sen} A - c \operatorname{sen} A \cos A) + c \operatorname{sen} A (b \operatorname{sen} A \cos A - c \operatorname{sen} A) \right\}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A} (a^2 \operatorname{sen}^2 A - b^2 \operatorname{sen}^2 A + bc \operatorname{sen}^2 A \cos A + bc \operatorname{sen}^2 A \cos A - c^2 \operatorname{sen}^2 A)$$

$$= a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc \cos A).$$

35. M. Sarrus, sabio professor da universidade de Strasburgo, concebeu um meio graphico simples de desenvolver o determinante de 3.ª ordem.

Consiste em escrever por baixo das tres linhas do determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

outra vez as duas primeiras linhas, ligando-as por meio de traços, como o indica o seguinte quadro

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2, \end{array}$$

e formar depois com os tres elementos de cada diagonal seis productos, dando o signal $+$ aos productos cujas diagonaes descem da esquerda para a direita, e o signal — áquelles cujas diagonaes descem da direita para a esquerda. D'este modo obtem-se facilmente o determinante de 3.ª ordem

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3,$$

ou

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1.$$

36. Da theoria exposta resulta o importante theorema: — *se multiplicarmos todos os elementos d'uma linha ou d'uma columna pelos* determinantes menores *relativos aos elementos correspondentes de uma outra linha ou columna, a somma algebrica dos productos obtidos, tomados alternadamente com os signaes $+$ e —, é egual a zero.*

Consideremos com effeito um determinante qualquer, e desenvolvamol-o em ordem aos elementos d'uma linha de ordem h.

Teremos [n.º 33, formula (3)]

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_h^1 & a_h^2 & \dots & a_h^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^1 & a_k^2 & \dots & a_k^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{1+h} \left\{ \partial_{a_h^1} a_h^1 - \partial_{a_h^2} a_h^2 + \partial_{a_h^3} a_h^3 - \dots \right\}.$$

Substituamos em ambos os membros os elementos a_h^1, a_h^2, ... a_h^n pelos elementos a_k^1, a_k^2, ... a_k^n da linha de ordem k; resultará

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^1 & a_k^2 & \dots & a_k^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^1 & a_k^2 & \dots & a_k^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{1+h} \left\{ \partial_{a_h^1} a_k^1 - \partial_{a_h^2} a_k^2 + \partial_{a_h^3} a_k^3 - \dots \right\}.$$

E, sendo o primeiro membro nullo por ter duas linhas identicas (n.º 18), tambem será nullo o segundo, ou

$$\partial_{a_h^1} a_k^1 - \partial_{a_h^2} a_k^2 + \partial_{a_h^3} a_k^3 - \dots = 0,$$

como se pretendia provar.

CAPITULO II.

OPERAÇÕES SOBRE DETERMINANTES.

adicão das linhas

§ I. — Addição e subtracção dos determinantes.

37. *Se os elementos d'uma linha ou d'uma columna são compostos cada um de* m *termos, o determinante decompõe-se na somma de* m *determinantes.*

Seja, com effeito, dado o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^i & \dots \\ a_2^1 & \dots & a_2^i & \dots \\ a_3^1 & \dots & a_3^i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & \alpha_1^i + \beta_1^i + \gamma_1^i + \dots \\ a_2^1 & \dots & \alpha_2^i + \beta_2^i + \gamma_2^i + \dots \\ a_3^1 & \dots & \alpha_3^i + \beta_3^i + \gamma_3^i + \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

no qual os elementos da columna i são polynomios

$$a_1^i = \alpha_1^i + \beta_1^i + \dots,\quad a_2^i = \alpha_2^i + \beta_2^i + \dots,\quad a_3^i = \alpha_3^i + \beta_3^i + \dots,\quad \dots.$$

Desenvolvendo este determinante segundo os elementos polynomios, vem [n.º 33, formula (5)]

$$\Delta = (-1)^{i+1}\left\{\partial_{a_1^i}(\alpha_1^i + \beta_1^i + \gamma_1^i + \dots) - \partial_{a_2^i}(\alpha_2^i + \beta_2^i + \gamma_2^i + \dots) + \dots\right\}$$

$$= (-1)^{i+1}\left\{(\partial_{a_1^i}\alpha_1^i - \partial_{a_2^i}\alpha_2^i + \partial_{a_3^i}\alpha_3^i - \dots) + (\partial_{a_1^i}\beta_1^i - \partial_{a_2^i}\beta_2^i + \partial_{a_3^i}\beta_3^i - \dots) + \dots\right\}$$

$$= (-1)^{i+1}(\partial_{a_1^i}\alpha_1^i - \partial_{a_2^i}\alpha_2^i + \partial_{a_3^i}\alpha_3^i - \dots) + (-1)^{i+1}(\partial_{a_1^i}\beta_1^i - \partial_{a_2^i}\beta_2^i + \partial_{a_3^i}\beta_3^i - \dots) + \dots,$$

ou

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 \dots \alpha_1^i \dots \\ a_2^1 \dots \alpha_2^i \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 \dots \beta_1^i \dots \\ a_2^1 \dots \beta_2^i \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 \dots \gamma_1^i \dots \\ a_2^1 \dots \gamma_2^i \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} + \dots,$$

expressão que mostra como o determinante proposto equivale á somma de m determinantes.

Assim o determinante

$$\begin{vmatrix} a+a' & a_1 & a_2 \\ b+b' & b_1 & b_2 \\ c+c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

38. *Se mais de uma linha de um determinante é formada de elementos polynomios, é facil, applicando seguidamente ás differentes linhas polynomias o mesmo processo, reduzir o determinante proposto á somma de determinantes de elementos monomios.*

Considerando primeiro $(a'+b')$ e $(a'_1+b'_1)$ como monomios, será, em virtude do principio ha pouco demonstrado,

$$\begin{vmatrix} a+b & a'+b' \\ a_1+b_1 & a'_1+b'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a'+b' \\ a_1 & a'_1+b'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a'+b' \\ b_1 & a'_1+b'_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' \\ a_1 & a'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ a_1 & b'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a' \\ b_1 & a'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b' \\ b_1 & b'_1 \end{vmatrix};$$

e assim o determinante se decompõe na somma de quatro determinantes.

39. Reciprocamente, *dous determinantes, que só differem n'uma linha ou n'uma columna, podem reduzir-se a um só.*

Com effeito a formula (1) do n.º 37 invertida

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots \alpha_1^i \dots \\ a_2^1 & a_2^2 \dots \alpha_2^i \dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots \beta_1^i \dots \\ a_2^1 & a_2^2 \dots \beta_2^i \dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} + \dots = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots \alpha_1^i + \beta_1^i + \dots \\ a_2^1 & a_2^2 \dots \alpha_2^i + \beta_2^i + \dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

mostra como estes determinantes se sommam ou compõem n'um só.

Por este meio reconhece-se que os dois determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

são eguaes e de signal contrario, porque, sendo a sua somma

$$\Delta + \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

por ter duas columnas identicas, d'ahi resulta

$$\Delta = -\Delta'.$$

40. Se nos propozessemos subtrahir os dous determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \lambda_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

que só differem na primeira linha, fariamos, em virtude do numero antecedente,

$$\Delta - \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \lambda_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 & \dots & -\lambda_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-\alpha_1 & b_1-\beta_1 & \dots & l_1-\lambda_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

logo: — *para subtrahir dous determinantes que só differem n'uma linha ou n'uma columna, effectua-se a subtracção entre os elementos respectivos das linhas ou columnas differentes.*

41. *Se os elementos d'uma linha ou d'uma columna são eguaes á somma dos elementos correspondentes de duas ou mais linhas ou columnas, multiplicados respectivamente por factores constantes, o determinante é nullo.*

Com effeito é, em virtude dos n.os 37 e 18,

$$\begin{vmatrix} ma_1+nb_1+pc_1+\dots & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ ma_2+nb_2+pc_2+\dots & a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ ma_3+nb_3+pc_3+\dots & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ma_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ ma_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ ma_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nb_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ nb_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ nb_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pc_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ pc_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ pc_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots$$

$$=m\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + n\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ b_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ b_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ c_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ c_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots$$

$$= m\times 0 + n\times 0 + p\times 0 + \dots = 0.$$

42. *Não se altera o valor d'um determinante, quando a uma de suas linhas, horisontaes ou verticaes, se junta ou tira uma ou mais d'outras linhas parallelas, multiplicadas respectivamente por factores constantes.*

Supponhamos dado o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & h_1 & \dots & l_1 & \dots \\ a_2 & \dots & h_2 & \dots & l_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

e aos elementos da primeira columna juntem-se os da columna h multiplicados por p, os da columna l multiplicados por q, etc., podendo $p, q, \ldots$ ter os signaes $+$ ou $-$.

Em virtude dos n.os 37 e 18 será

$$\begin{vmatrix} a_1 + ph_1 + ql_1 + \ldots & h_1 & \ldots & l_1 & \ldots \\ a_2 + ph_2 + ql_2 + \ldots & h_2 & \ldots & l_2 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 \ldots h_1 \ldots l_1 \ldots \\ a_2 \ldots h_2 \ldots l_2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} h_1 \ldots h_1 \ldots l_1 \ldots \\ h_2 \ldots h_2 \ldots l_2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} l_1 \ldots h_1 \ldots l_1 \ldots \\ l_2 \ldots h_2 \ldots l_2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} + \ldots$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 \ldots h_1 \ldots l_1 \ldots \\ a_2 \ldots h_2 \ldots l_2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \Delta,$$

que é o determinante proposto.

§ II. — Calculo dos determinantes.

43. Expozemos (Cap. I, § V) o *methodo geral* para desenvolver um determinante. Este methodo, por meio do qual se pode calcular o determinante, com quanto seja theoricamente simples, torna-se muitas vezes na prática summamente laborioso.

Opera-se mais facilmente o calculo d'um determinante — *reduzindo-o a outro de menor grau, transformando este n'outro de grau inferior, e assim por deante até apparecer um determinante do segundo grau, que se calcula directamente.*

Para abaixar de uma unidade o grau d'um determinante — transforma-se, em geral, este em um determinante equivalente, no qual os elementos de uma linha ou de uma columna sejam eguaes á unidade, para o que se procede conforme o exposto em o n.º 21. Em seguida subtrahe-se uma das linhas ou columnas cujo primeiro elemento é a unidade, de todas as outras cujo primeiro elemento é tambem a unidade, e assim se obtem um determinante, no qual uma linha ou uma columna tem um elemento egual á unidade, e os outros eguaes a zero; este determinante equivale a um *determinante menor,* que tem esta unidade por coefficiente.

Muitas vezes se obtem immediatamente, por addições ou subtracções convenientes, este ultimo determinante, sem que se tenham, segundo o processo geral, reduzido á unidade todos os elementos da mesma linha ou columna.

Elucidemos este processo, applicando-o a alguns exemplos, tanto numericos como algebricos.

Exemplo I.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

Do primeiro determinante se passou para o segundo, subtrahindo da segunda columna o triplo da primeira, e da terceira o dobro da primeira mais o dobro da segunda (n.º 42); assim resulta o segundo determinante, que se reduz ao menor, terceiro determinante, o qual, calculado directamente, dá $2.5 - 3.4 = -2$.

Exemplo II.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -20 & -9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 20 & 9 \end{vmatrix} = -29.$$

Do primeiro determinante deduziu-se o segundo, subtrahindo da primeira columna o quadruplo da terceira, e da segunda o dobro da terceira; d'este modo ficou aquelle reduzido a um determinante menor, o terceiro, que, sendo da segunda ordem, se calcula directamente.

Exemplo III.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 2.3.4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 72.$$

Do primeiro determinante deduziu-se o segundo, dividindo successivamente as tres columnas por 2, 3, 4; e d'este se passou para o terceiro, subtrahindo respectivamente da segunda e da terceira columna a primeira e o dobro da primeira; assim o determinante se reduziu ao quarto, de 2.ª ordem.

Exemplo IV.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2.8 = -16.$$

Obtem-se o segundo determinante, sommando no primeiro a primeira linha com cada uma das outras; assim se reduz o determinante dado ao terceiro, e o quarto deduz-se do terceiro, subtrahindo da segunda a terceira linha.

Exemplo V.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 9 & 14 & 20 & 27 \\ 2 & 11 & 25 & 45 & 72 \\ 7 & 18 & 43 & 88 & 160 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 14 & 20 & 27 \\ 7 & 11 & 25 & 45 & 72 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 14 & 20 & 27 \\ 11 & 25 & 45 & 72 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \\ 11 & 14 & 20 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 14 & 20 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 14 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

N'este exemplo *os elementos da primeira linha são eguaes á unidade, e cada elemento é a somma dos dous que se acham immediatamente por cima e á esquerda.*

Subtrahindo cada columna da seguinte no primeiro determinante e nos *menores* que successivamente resultam, acha-se o determinante proposto egual á unidade. E todos os determinantes, que satisfazem áquellas condições, têm a propriedade de serem *eguaes á unidade*.

Exemplo VI.

$$-\begin{vmatrix} 0 & -1 & b \\ -1 & 0 & a \\ A & B & C \end{vmatrix} = \frac{1}{b}\begin{vmatrix} 0 & -b & b \\ +1 & 0 & a \\ -A & Bb & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ -A & Bb & C \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \\ -A & Bb+C & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ -A & Bb+C \end{vmatrix} = Aa + Bb + C.$$

No primeiro d'estes determinantes mudámos o signal á primeira columna, e multiplicámos por b a segunda; assim se obteve o segundo determinante, o qual, dividida a primeira linha por b, deu o terceiro; e este, juntando-se a terceira linha á segunda, tornou-se no quarto, d'onde immediatamente resultaram o quinto e o sexto.

Exemplo VII.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 0 & d-b & d^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & c^2-a^2 \\ d-b & d^2-b^2 \end{vmatrix} = (c-a)(d^2-b^2) - (d-b)(c^2-a^2)$$

$$= (c-a)(d+b)(d-b) - (d-b)(c+a)(c-a) = (c-a)(d-b)(d+b-c-a).$$

Subtrahindo a primeira da terceira linha, resultou o segundo determinante, que se reduziu ao terceiro, e d'este se deduziu o quarto, diminuindo a primeira linha da terceira.

Exemplo VIII.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} abcd & abcd & abcd & abcd \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} bcd & acd & abd & abc \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ bcd & acd & abd & abc \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ bcd & cd(a-b) & bd(a-c) & bc(a-d) \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} cd(a-b) & bd(a-c) & bc(a-d) \\ a-b & a-c & a-d \\ (a+b)(a-b) & (a+c)(a-c) & (a+d)(a-d) \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(a-c)(a-d) \begin{vmatrix} cd & bd & bc \\ 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & a+d \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ cd & bd & bc \\ a+d & b+d & c+d \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ cd & d(b-c) & c(b-d) \\ a+b & c-b & d-b \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(a-d) \begin{vmatrix} d(b-c) & c(b-d) \\ b-c & b-d \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) \begin{vmatrix} d & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Multiplicámos a primeira linha do primeiro determinante por $abcd$, dividindo-o ao mesmo tempo pela mesma quantidade; em cada columna do segundo determinante supprimimos um dos factores communs a, b, c e d; invertemos as duas primeiras linhas do terceiro; no quarto subtrahimos a primeira columna de cada uma das outras; o quinto determinante reduz-se ao sexto; n'este tirámos para fóra o factor commum de cada columna; no septimo invertemos as duas primeiras linhas; no oitavo subtrahimos da segunda e terceira columnas a primeira, o que reduz o nono ao decimo determinante; n'este finalmente tirámos para fóra os factores communs, e d'ahi resultou a ultima expressão.

Exemplo IX.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(xyz)^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & xyz^2 & xy^2z \\ y & xyz^2 & 0 & x^2yz \\ z & xy^2z & x^2yz & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(xyz)^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x^2yz & 0 & xyz^2 & xyz^2 \\ xy^2z & xyz^2 & 0 & x^2yz \\ xyz^2 & xy^2z & x^2yz & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -x & z-x & y-x \\ y & z-y & -y & x-y \\ z & y-z & x-z & -z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} -x & z-x & y-x \\ z-y & -y & x-y \\ y-z & x-z & -z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ z-y & -y & x-y \\ y-z & x-z & -z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} x & y & -z \\ y-z & y & x-y \\ z-y & z-x & -z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} x+y-z & y & -z \\ x+y-z & y & x-y \\ -x-y+z & z-x & -z \end{vmatrix} = -(x+y+z) \begin{vmatrix} x+y+z & y & -z \\ x+y+z & y & x-y \\ x+y+z & x-z & -z \end{vmatrix}$$

$$= -(x+y+z)(x+y-z) \begin{vmatrix} 1 & y & -z \\ 1 & y & z-x \\ 1 & x-z & z \end{vmatrix}$$

$$= -(x+y+z)(x+y-z) \begin{vmatrix} 1 & y & -z \\ 0 & 0 & x-y+z \\ 0 & x-y-z & 2z \end{vmatrix}$$

$$= -(x+y+z)(x+y-z) \begin{vmatrix} 0 & x-y+z \\ x-y-z & 2z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z).$$

Multiplicámos por x, y e z respectivamente as tres ultimas linhas e as tres ultimas columnas do primeiro determinante, e por xyz os tres ultimos elementos da primeira columna do segundo determinante; dividimos por xyz as tres ultimas linhas do terceiro determinante; e assim se obteve o quarto determinante, mais simples, que desenvolvemos.

Para isso juntámos á primeira linha a somma das outras tres, d'onde resultou um factor commum na primeira linha que tirámos para fóra, vindo assim o quinto determinante, o qual, subtrahindo a primeira columna da segunda, terceira e quarta, se reduziu ao septimo, de grau inferior; juntando á primeira a segunda e a terceira linha, resultou o oitavo determinante, que se transformou em o nono pela mudança dos signaes das duas primeiras columnas.

Addicionando depois á primeira as outras duas columnas, e mudando os signaes da ultima linha, formámos os dous seguintes determinantes, d'onde, tirando o factor commum da primeira columna, resultou o decimo segundo; e d'este, subtrahindo da primeira a segunda e a terceira linha, se deduziu o decimo quarto, menor de 2.ª ordem, e d'ahi a ultima expressão.

Assim foi o determinante proposto desenvolvido no producto de quatro factores lineares.

§ III. — Multiplicação dos determinantes.

44. *O producto de dous determinantes da mesma ordem pode exprimir-se por um determinante da mesma ordem, cujos elementos são as sommas dos productos dos elementos de cada linha de um dos determinantes pelos elementos correspondentes de todas as linhas successivas do outro.*

Segundo este theorema, devido a Cauchy, o producto de dous determinantes de 2.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

será

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}.$$

Com effeito o segundo membro d'esta expressão é egual ao primeiro, por ser (n.os 38, 20 e 18)

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\alpha_1 \\ a_1\beta_1 & b_1\beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 \\ a_2\beta_2 & b_1\beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2\alpha_2 & b_2\alpha_2 \\ a_2\beta_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + a_1 b_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + a_2 b_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} + a_2 b_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + a_1 b_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} - a_2 b_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + 0 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Do mesmo modo se prova que, se os dous determinantes forem de 3.ª ordem, é o seu producto

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 & c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 \\ a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

E semelhantemente para os determinantes de 4.ª, 5.ª ... ordem.

Como, sem alterar o valor d'um determinante, podemos mudar as linhas horisontaes em verticaes e reciprocamente, ha quatro maneiras de effectuar o producto de dous determinantes, conforme se multiplicam: — 1.º, as linhas verticaes do primeiro pelas verticaes do segundo; — 2.º, verticaes do primeiro por horisontaes do segundo; — 3.º, horisontaes do primeiro por verticaes do segundo; — 4.º, horisontaes do primeiro por horisontaes do segundo.

Com effeito, pelo que acabamos de mostrar, o producto

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

é egual:

1.º a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix};$$

2.º a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix};$$

3.º a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + b_1\beta_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix};$$

4.º a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}.$$

E do mesmo modo para determinantes de ordens superiores.

Exemplo I.

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Ax + By + C & A'x + B'y + C' & A''x + B''y + C'' \\ Ax' + By' + C & A'x' + B'y' + C' & A''x' + B''y' + C'' \\ Ax'' + By'' + C & A'x'' + B'y'' + C' & A''x'' + B''y'' + C'' \end{vmatrix}.$$

Exemplo II.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \\ 0 & 1 & c & \gamma \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 1 & 0 & b & \beta \\ 1 & 0 & c & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 + \alpha^2 & ab + \alpha\beta & ac + \alpha\gamma \\ 1 & ab + \alpha\beta & b^2 + \beta^2 & bc + \beta\gamma \\ 1 & ac + \alpha\beta & bc + \beta\gamma & c^2 + \gamma^2 \end{vmatrix}.$$

45. *Se os dous determinantes a multiplicar são de ordem differente, transforma-se o de menor grau em um determinante da ordem do mais elevado* (n.º 30), *e applica-se depois a regra geral.*

Assim

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1\alpha_1 + c_1\beta_1 & b_1\alpha_2 + c_1\beta_2 \\ a_2 & b_2\alpha_1 + c_2\beta_1 & b_2\alpha_2 + c_2\beta_2 \\ a_3 & b_3\alpha_1 + c_3\beta_1 & b_3\alpha_2 + c_3\beta_2 \end{vmatrix}.$$

46. *Se o segundo determinante for egual ao primeiro, teremos o quadrado d'este sob a fórma d'um determinante symetrico do mesmo grau.*

Com effeito, pondo nas fórmulas do n.º 44

$$\alpha_1 = a_1, \quad \alpha_2 = a_2, \quad \beta_1 = b_1, \quad \beta_2 = b_2,$$

resulta o quadrado do determinante de 2.ª ordem sob tres formas differentes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a^2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2 b_1 & a_1 b_1 + b_1 b_2 \\ a_1 a_2 + a_2 b_2 & a_2 b_1 + b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_2^2 + b_2^2 \end{vmatrix}$$

O quadrado do determinante do terceiro grau obtem-se do mesmo modo, introduzindo na fórmula correspondente do n.º 44 as hypotheses

$$\alpha_1 = a_1, \quad \alpha_2 = a_2, \quad \alpha_3 = a_3, \quad \beta_1 = b_1, \quad \ldots$$

Assim

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

E semelhantemente para determinantes de ordens superiores.

47. Se n'um determinante os elementos da primeira linha ou da primeira columna são eguaes á unidade, simplifica-se a notação supprimindo esta linha ou columna, e dobrando os traços que limitam o determinante. O numero das linhas será então differente do das columnas.

Assim a notação

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

equivale a

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix},$$

e representa (ordenando em ordem aos elementos da primeira linha) a somma de tres determinantes, pelo que se denomina *determinante multiplo*.

Assim

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

E como (n.º 18) de

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

resulta, ordenando segundo os elementos da primeira linha (n.° 33),

$$a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0,$$

$$a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0,$$

estas duas relações ligam os tres determinantes simples de (1).

Do mesmo modo é o *determinante multiplo*

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

e estes determinantes se acham ligados entre si por meio de relações que se formam, como acima, ordenando os determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}=0, \text{ etc.},$$

segundo os elementos da primeira linha, taes como

$$a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}+d_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

. . . .

Em geral *a somma de* $n+1$ *determinantes de ordem* n, *que entre si differem só n'uma linha ou n'uma columna, pode ser representada pelo determinante multiplo*

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n+1} \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{n+1} \end{matrix} \right\|.$$

48. *Pode applicar-se aos determinantes multiplos o processo da multiplicação dos determinantes simples.*

Supponhamos dous determinantes multiplos

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|.$$

Entendendo por *producto d'estes determinantes* a somma dos productos dos tres determinantes simples do primeiro pelos tres determinantes simples correspondentes do segundo, isto é,

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

vamos mostrar que é identicamente

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Com effeito, é (n.os 38 e 18)

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\alpha_1 \\ a_1\alpha_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 & c_2\gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 \\ b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & b_2\beta_1 \\ b_1\beta_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & c_2\gamma_1 \\ b_1\beta_2 & c_2\gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1\gamma_1 & a_2\alpha_2 \\ c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1\gamma_1 & b_2\beta_1 \\ c_1\gamma_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1\gamma_1 + c_2\gamma_1 \\ c_1\gamma_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} + a_1 b_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + a_1 c_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + a_2 b_1 \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} + b_1 b_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$+ b_1 c_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + a_2 c_1 \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} + b_2 c_1 \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + c_1 c_2 \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} - a_2b_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + a_1c_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - a_2c_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + b_1c_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - b_2c_1 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1) \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + (a_1c_2 - a_2c_1) \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + (b_1c_2 - b_2c_1) \times \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Vmatrix}.$$

E analogamente para determinantes de outra ordem.

49. *Se o numero das columnas é inferior ao das linhas*, como acontece nos determinantes

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{Vmatrix},$$

o producto é nullo.

Com effeito, decompondo o producto d'estes determinantes em determinantes parciaes, será (n.^{os} 48 e 38)

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 \\ a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\alpha_1 & a_3\alpha_1 \\ a_1\alpha_2 & a_2\alpha_2 & a_3\alpha_2 \\ a_1\alpha_3 & a_2\alpha_3 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\alpha_1 & b_3\beta_1 \\ a_1\alpha_2 & a_2\alpha_2 & b_3\beta_2 \\ a_1\alpha_3 & a_2\alpha_3 & b_3\beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\beta_1 & a_3\alpha_1 \\ a_1\alpha_2 & b_2\beta_2 & a_3\alpha_2 \\ a_1\alpha_3 & b_2\beta_3 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\beta_1 & b_3\beta_1 \\ a_1\alpha_2 & b_2\beta_2 & b_3\beta_2 \\ a_1\alpha_3 & b_2\beta_3 & b_3\beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 & a_3\alpha_1 \\ b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 & a_3\alpha_2 \\ b_1\beta_3 & a_2\alpha_3 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 & b_3\beta_1 \\ b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 & b_3\beta_2 \\ b_1\beta_3 & a_2\alpha_3 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & b_2\beta_1 & a_3\alpha_1 \\ b_1\beta_2 & b_2\beta_2 & a_3\alpha_2 \\ b_1\beta_3 & b_2\beta_3 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & b_2\beta_1 & b_3\beta_1 \\ b_1\beta_2 & b_2\beta_2 & b_3\beta_2 \\ b_1\beta_3 & b_2\beta_3 & b_3\beta_3 \end{vmatrix};$$

e todos estes termos se annullam por conterem cada um duas columnas, que só differem n'uma constante (n.° 23).

O producto reduz-se pois a zero; e do mesmo modo se prova o theorema para outros determinantes.

SEGUNDA PARTE.

APPLICAÇÕES DOS DETERMINANTES.

CAPITULO I.

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGEBRICAS.

50. Se o primeiro membro d'uma equação algebrica apresentar a fórma de determinante, o desenvolvimento d'este nos dará as suas raizes, ás quaes muitas vezes poderemos tambem dar a fórma de determinante.

Tratemos com effeito de resolver a equação

$$\begin{vmatrix} Pz+Q & M & N \\ mz+p & -1 & 0 \\ nz+q & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o seu primeiro membro, teremos

$$z\begin{vmatrix} P & M & N \\ m & -1 & 0 \\ n & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Q & M & N \\ p & -1 & 0 \\ q & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'onde

$$z = -\frac{\begin{vmatrix} Q & M & N \\ p & -1 & 0 \\ q & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P & M & N \\ m & -1 & 0 \\ n & 0 & -1 \end{vmatrix}},$$

expressão em determinantes da raiz da equação proposta.

Desenvolvendo estes determinantes, o valor de z toma a fórma

$$z = -\frac{Q\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - p\begin{vmatrix} M & N \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} M & N \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{P\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} M & N \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + n\begin{vmatrix} M & N \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{Mp + Nq + Q}{Mm + Nn + P}.$$

51. Para achar as raizes x da equação

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0,$$

calcule-se o determinante do seguinte modo:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} x^2 & ax & bx & cx \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} x^2 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 1 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2\begin{vmatrix} x^2-c^2 & 1 & 1 & 0 \\ a^2 & 1 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 1 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} x^2-c^2 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 0 \\ b^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} x^2-b^2-c^2 & 1 & 0 \\ a^2 & 1 & 0 \\ b^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2\begin{vmatrix} x^2-b^2-c^2 & 1 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} = x^2(x^2-a^2-b^2-c^2) = 0.$$

Resultá d'aqui

$$x^2 = 0, \quad x^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 0,$$

ou

$$x' = x'' = 0, \quad x''' = \sqrt{a^2 + b_2 + c^2}, \quad x^{\text{IV}} = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

que são as raizes da equação proposta.

52. Procuremos os valores de x que satisfazem á equação

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahindo a primeira columna de cada uma das outras, e dividindo depois por $x - a$ as tres ultimas, vem

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a-x & a-x & a-x \\ a & x-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x-a & 0 \\ a & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^3 \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x+a & -1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{(1)}$$

$$= (x-a)^3 \begin{vmatrix} x+a & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x+2a & -1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{(1)}$$

$$= (x-a)^3 \begin{vmatrix} x+3a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3(x+3a) = 0.$$

Logo ha tres raizes

$$x' = x'' = x''' = a,$$

e uma

$$x^{\text{IV}} = -3a.$$

53. Resolvamos a equação

$$\begin{vmatrix} a^2 - x & ab - x\cos\theta \\ ab - x\cos\theta & b^2 - x \end{vmatrix} = 0.$$

(1) juntando a últ. linha à 1.ª

Desenvolvendo, será

$$\begin{vmatrix} a^2-x & ab-x\cos\theta \\ ab-x\cos\theta & b^2-x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & -x\cos\theta \\ ab & -x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x & ab \\ -x\cos\theta & b^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x & -x\cos\theta \\ -x & -x \end{vmatrix}$$

$$=ab\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}+ax\begin{vmatrix} a & -\cos\theta \\ b & -1 \end{vmatrix}+bx\begin{vmatrix} -1 & a \\ -\cos\theta & b \end{vmatrix}+x^2\begin{vmatrix} -1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -1 \end{vmatrix}$$

$$=ax(-a+b\cos\theta)+bx(-b+a\cos\theta)+x^2(1-\cos^2\theta)$$

$$=x(x\,\mathrm{sen}^2\theta-a^2-b^2+2ab\cos\theta)=0.$$

Logo será

$$x=0,\quad x\,\mathrm{sen}\,\theta-a^2-b^2+2ab\cos\theta=0,$$

d'onde resultam para x os dous valores

$$x'=0,\quad x''=\frac{a^2+b^2-2ab\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}.$$

54. Para calcular as raizes da equação

$$\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix}=0,$$

juntem-se á primeira columna as tres seguintes, tire-se para fóra do determinante o factor commum, e mudem-se successivamente os signaes da segunda e terceira columnas, da primeira e terceira, e da primeira e segunda, repetindo de cada vez aquellas operações.

Resultará, chamando, por simplificar, Δ_1, Δ_2, Δ_3 e Δ_4 os determinantes coefficientes dos diversos factores,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c & x \\ x+a+b+c & a & x & c \\ x+a+b+c & x & a & b \\ x+a+b+c & c & b & a \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \,.\, \Delta_1$$

$$= \begin{vmatrix} a & -b & -c & x \\ b & -a & -x & c \\ c & -x & -a & b \\ x & -c & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a-b-c & -b & -c & x \\ -x-a+b+c & -a & -x & c \\ -x-a+b+c & -x & -a & b \\ x+a-b-c & -c & -b & a \end{vmatrix} = (x+a-b-c) \,.\, \Delta_2$$

$$= \begin{vmatrix} -a & b & -c & x \\ -b & a & -x & c \\ -c & x & -a & b \\ -x & c & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+b-a-c & b & -c & x \\ -x-b+a+c & a & -x & c \\ x+b-a-c & x & -a & b \\ -x-b+a+c & c & -b & a \end{vmatrix} = (x+b-a-c) \,.\, \Delta_3$$

$$= \begin{vmatrix} -a & -b & c & x \\ -b & -a & x & c \\ -c & -x & a & b \\ -x & -c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+c-a-b & -b & c & x \\ x+c-a-b & -a & x & c \\ -x-c+a+b & -x & a & b \\ -x-c+a+b & -c & b & a \end{vmatrix} = (x+c-a-b) \,.\, \Delta_4.$$

A inspecção d'este calculo mostra que o determinante proposto é divisivel pelos factores

$$(x+a+b+c),\ (x+a-b-c),\ (x+b-a-c),\ (x+c-a-b),$$

e por conseguinte divisivel pelo seu producto, que é, como elle, do quarto grau.

Logo o determinante dado reduz-se a este producto, e a equação proposta a

$$(x+a+b+c)\,(x+a-b-c)\,(x+b-a-c)\,(x+c-a-b)=0,$$

cujas raizes são

$$x'=-a-b-c,\quad x''=b+c-a,\quad x'''=a+c-b,\quad x^{\text{iv}}=a+b-c.$$

CAPITULO II.

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES LINEARES.

55. Na resolução das equações lineares cumpre distinguir dous casos, segundo *o numero das equações é ou não egual ao das incognitas;* e em cada um d'estes as equações podem *ser ou não ser homogeneas.*

Consideremos estes differentes casos.

§ I. — Equações não homogeneas em numero egual ao das incognitas.

56. Supponhamos, em geral, dado para resolver o systema de n equações lineares não homogeneas a n incognitas

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^n x_n = u_1, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^n x_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \ldots + a_n^n x_n = u_n. \end{array}\right.$$

O determinante d'este systema de equações será

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix},$$

que primeiramente supporemos differente de zero.

Multiplicando estas equações, a partir da primeira, respectivamente pelos determinantes menores

$$\partial_{a_1^1},\quad -\partial_{a_2^1},\quad \partial_{a_3^1},\ \ldots\ (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1},$$

correspondentes aos coefficientes a_1^1, a_2^1, a_3^1, ... a_n^1 de x_1, teremos

$$\partial_{a_1^1} a_1^1 x_1 + \partial_{a_1^1} a_1^2 x_2 + \partial_{a_1^1} a_1^3 x_3 + \ldots + \partial_{a_1^1} a_1^n x_n = \partial_{a_1^1} u_1,$$

$$-\partial_{a_2^1} a_2^1 x_1 - \partial_{a_2^1} a_2^2 x_2 - \partial_{a_2^1} a_2^3 x_3 - \ldots - \partial_{a_2^1} a_2^n x_n = -\partial_{a_2^1} u_2,$$

$$\partial_{a_3^1} a_3^1 x_1 + \partial_{a_3^1} a_3^2 x_2 + \partial_{a_3^1} a_3^3 x_3 + \ldots + \partial_{a_3^1} a_3^n x_n = \partial_{a_3^1} u_3,$$

....

$$(-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} a_n^1 x_1 + (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} a_n^2 x_2 + \ldots + (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} a_n^n x_n = (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} u_n,$$

de cuja somma resulta, ordenando segundo as incognitas x_1, x_2, ... x_n,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left\{\partial_{a_1^1} a_1^1 - \partial_{a_2^1} a_2^1 + \partial_{a_3^1} a_3^1 - \ldots + (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} a_n^1\right\} x_1\\
&+\left\{\partial_{a_1^1} a_1^2 - \partial_{a_2^1} a_2^2 + \partial_{a_3^1} a_3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} a_n^2\right\} x_2\\
&+\left\{\partial_{a_1^1} a_1^3 - \partial_{a_2^1} a_2^3 + \partial_{a_3^1} a_3^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} a_n^3\right\} x_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left\{\partial_{a_1^1} a_1^n - \partial_{a_2^1} a_2^n + \partial_{a_3^1} a_3^n - \ldots + (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} a_n^n\right\} x_n\\
&= \partial_{a_1^1} u_1 - \partial_{a_2^1} u_2 + \partial_{a_3^1} u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}\partial_{a_n^1} u_n\ .
\end{aligned}\right.$$

Vê-se que o coefficiente de x_1 n'esta expressão é o determinante dos coefficientes das equações propostas ordenado em relação aos elementos $a_1^1, a_2^1, \dots a_n^1$ (n.º 33), e que os coefficientes das outras incognitas $x_2, x_3, \dots x_n$ são *nullos* (n.º 36), porque se deduzem do coefficiente de x_1, isto é, do determinante Δ, pela substituição da columna $a_1^1\, a_2^1 \dots a_n^1$ por uma das outras columnas $a_1^2\, a_2^2 \dots a_n^2$, $a_1^3\, a_2^3 \dots a_n^3$, etc., e constituem assim outros tantos determinantes com duas columnas identicas, e por isso nullos.

Nota-se ainda que o segundo membro é o mesmo coefficiente de x_1 ou determinante Δ, no qual se substituiram pelos elementos $a_1^1, a_2^1, \dots a_n^1$ os termos conhecidos $u_1, u_2, \dots u_n$ das equações propostas.

Aquella expressão equivale pois á seguinte:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} u_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

d'onde se deduz

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}},$$

ou

$$(5) \qquad x_1 = \frac{\Sigma\, u_1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n}{\Sigma\, a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n}.$$

Para obter o valor de x_2, multiplicariamos as n equações respectivamente pelos determinantes menores

$$\partial_{a_1^2}, \quad -\partial_{a_2^2}, \quad \partial_{a_3^2}, \quad \dots \quad (-1)^{n-1}\partial_{a_n^2},$$

correspondentes aos coefficientes de x_2, e sommariamos os resultados como acima; o valor de $x_3, x_4, \dots x_n$ obter-se-hia analogamente multiplicando as equações pelos determinantes correspondentes aos coefficientes de $x_3, x_4, \dots x_n$.

D'este modo resultaria

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 u_1 a_1^3 \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 u_n a_n^3 \dots a_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 a_n^2 \dots a_n^n \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 u_1 \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 a_n^2 u_n \dots a_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n a_n^2 \dots a_n^n \end{vmatrix}}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \dots u_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n^1 a_n^2 \dots u_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots \\ a_n^1 a_n \dots a_n^n \end{vmatrix}},$$

ou

$$(6) \qquad x_2 = \frac{\Sigma a_1^1 u_2 a_3^3 \dots a_n^n}{\Sigma a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n}, \quad x_3 = \frac{\Sigma a_1^1 a_2^2 u_3 \dots a_n^n}{\Sigma a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\Sigma a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots u_n}{\Sigma a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n}.$$

A inspecção d'este calculo mostra que — *dadas* n *equações lineares não homogeneas a* n *incognitas, cujos segundos membros são grandezas conhecidas, o valor de cada incognita é egual a uma fracção, que tem por denominador o determinante das incognitas, e por numerador este mesmo determinante depois de substituidos os coefficientes da incognita pelos termos conhecidos.*

Foi Leibnitz (*) quem pela primeira vez indicou esta solução, cuja importancia e generalidade foram depois assignaladas pelos analystas Cramer (**) e Bezout (***).

57. Suppozemos em o numero precedente que o determinante Δ dos coefficientes das incognitas não era nullo.

Se este determinante se reduzir a zero, as incognitas terão valores *infinitos* ou *indeterminados*, segundo o polynomio numerador das formulas (5) e (6) for ou não differente de zero, pois que então os valores das incognitas tomarão a forma $\frac{A}{0}$ ou $\frac{0}{0}$.

(*) *Lettre à L'Hospital du 28 avril 1639.*
(**) *Analyse des courbes algébriques*, 1750.
(***) *Histoire de l'Académie royale des sciences*, 1764.

No primeiro caso o systema (3) reduz-se a

$$0 \, . \, x_1 = \Sigma \, u_1 \, a_2^2 \, \ldots \, a_n^n, \quad \text{ou} \quad 0 \, . \, x_2 = \Sigma \, a_1^1 \, u_1 \, \ldots \, a_n^n, \quad \text{etc.},$$

isto é, zero egual a uma grandeza finita, o que é impossivel.

O systema proposto não tem pois solução.

Se tambem o numerador $\Sigma \, u_1 \, a_2^2 \ldots a_n^n$ ou $\Sigma \, a_1^1 \, u_2 \ldots a_n^n, \ldots$ é nullo, o systema (3), equivalente ao systema (1) proposto, reduz-se a

$$0 = 0,$$

uma identidade; e n'este caso *o systema das equações dadas será satisfeito por uma infinidade de valores.*

58. *Se apenas uma das equações propostas não é homogenea*, isto é, se os segundos membros de (1) são todos nullos á excepção de um só, por exemplo u_1, as equações (4) e (6) tomam então a fórma

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} u_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 0 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & u_1 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & 0 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & 0 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^2 & \ldots & u_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

ou

$$(7) \qquad \Delta x_1 = \partial_{a_1^1} u_1, \quad \Delta x_2 = \partial_{a_1^2} u_1, \quad \Delta x_3 = \partial_{a_1^3} u_1, \quad \ldots \quad \Delta x_n = \partial_{a_1^n} u_1,$$

d'onde

$$(8) \qquad \frac{u_1}{\Delta} = \frac{x_1}{\partial_{a_1^1}} = \frac{x_2}{\partial_{a_1^2}} = \frac{x_3}{\partial_{a_1^3}} = \ldots = \frac{x_n}{\partial_{a_1^n}}.$$

D'este resultado conclue-se que — *se n'um systema de* n *equações a* n *incognitas os segundos membros são nullos á excepção d'um só, os valores das incognitas são proporcionaes aos determinantes menores formados com relação aos coefficientes das incognitas da equação não homogenea.*

59. Para elucidação d'esta theoria resolvamos o systema das tres equações

$$3x - 4y + 6z = 18,$$
$$4x - 5y = -7,$$
$$3y - 2z = 1.$$

Calculemos as expressões [n.° 56, formulas (5) e (6)]

$$x = \frac{\Sigma\, u_1 a_2^2 a_3^3}{\Sigma\, a_1^1 a_2^2 a_3^3}, \quad y = \frac{\Sigma\, a_1^1 u_1 a_3^3}{\Sigma\, a_1^1 a_2^2 a_3^3}, \quad z = \frac{\Sigma\, a_1^1 a_2^2 u_1}{\Sigma\, a_1^1 a_2^2 a_3^3}.$$

Teremos

$$\Delta = \Sigma\, a_1^1 a_2^2 a_3^3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 70.$$

$$\Sigma\, u_1 a_2^2 a_3^3 = \begin{vmatrix} 18 & -4 & 6 \\ -7 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 5 & 0 \\ -7 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 21 & 5 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 140.$$

$$\Sigma\, a_1^1 u_1 a_3^3 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 6 \\ 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 0 \\ 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 210.$$

$$\Sigma\, a_1^1 a_2^2 u_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 18 \\ 4 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -4 & 18 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 48 + 232 = 280.$$

Logo será

$$x = \frac{140}{70} = 2, \quad y = \frac{210}{70} = 3, \quad z = \frac{280}{70} = 4.$$

§ II. — Equações homogeneas em numero egual ao das incognitas.

60. Para que as equações (1) do n.º 56 se tornem *homogeneas,* é necessario que seja

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0,$$

e n'esse caso o systema tomará a fórma

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = 0, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = 0. \end{cases}$$

no qual todas as equações são homogeneas.

As egualdades (7) do n.º 58, subsistindo para qualquer valor de u_1, terão logar para $u_1 = 0$, e n'este caso tornar-se-hão

$$\Delta x_1 = 0, \quad \Delta x_2 = 0, \quad \ldots \quad \Delta x_n = 0,$$

o que exige que seja

$$\Delta = 0,$$

ou

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots \quad x_n = 0.$$

Logo: — *para que* n *equações lineares homogeneas, a* n *incognitas, sejam compativeis, é necessario e basta que o determinante das incognitas seja nullo; e, não o sendo, que todas as raizes sejam eguaes a zero.*

A expressão (8) mostra ser n'este caso

$$\frac{x_1}{\delta_{a_1^1}} = \frac{x_2}{\delta_{a_1^2}} = \frac{x_3}{\delta_{a_1^3}} = \ldots = \frac{x_n}{\delta_{a_1^n}},$$

assim como

$$\frac{x_1}{\partial_{a_2^1}} = \frac{x_2}{\partial_{a_2^2}} = \frac{x_3}{\partial_{a_2^3}} = \ldots = \frac{x_n}{\partial_{a_2^n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1}{\partial_{a_n^1}} = \frac{x_2}{\partial_{a_n^2}} = \frac{x_3}{\partial_{a_n^3}} = \ldots = \frac{x_n}{\partial_{a_n^n}};$$

onde se vê que — *os valores das incognitas são proporcionaes aos determinantes menores, que se formam ordenando o determinante* Δ *em relação aos coefficientes d'uma qualquer das equações propostas.*

Dos valores acima deduz-se que

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n &:: \partial_{a_1^1} : \partial_{a_1^2} : \partial_{a_1^3} \ldots : \partial_{a_1^n}, \\ &:: \partial_{a_2^1} : \partial_{a_2^2} : \partial_{a_2^3} \ldots : \partial_{a_2^n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &:: \partial_{a_n^1} : \partial_{a_n^2} : \partial_{a_n^3} \ldots : \partial_{a_n^n}, \end{aligned}$$

isto é, — *quando um determinante* Δ *se annulla, os determinantes menores correspondentes a duas linhas de elementos parallelas formam duas series de grandezas proporcionaes.*

§ III. — Equações lineares em numero differente do das incognitas.

61. Se nas equações (1) suppozermos $x_n = 1$, teremos n equações não homogeneas a $n - 1$ incognitas

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^{n-1} x_{n-1} + a_1^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^{n-1} x_{n-1} + a_n^n = 0. \end{array} \right.$$

Para restabelecer a homogeneidade, substituamos as incognitas pelas suas relações $\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots \frac{x^n}{\lambda}$ com uma grandeza arbitraria λ; teremos, multiplicando por λ,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^{n-1} x_{n-1} + a_1^n \lambda = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^{n-1} x_{n-1} + a_n^n \lambda = 0. \end{array} \right.$$

Para que estas equações assim homogeneas, e por tanto as equações (1) que lhes equivalem, sejam compativeis, é necessario e basta (n.º 60) que seja o determinante

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{array} \right| = 0.$$

Logo: — *a condição de compatibilidade de* n *equações lineares não homogeneas, a* n — 1 *incognitas, consiste em que seja nullo o determinante das mesmas equações tornadas homogeneas.*

Os valores das incognitas serão dados pelas proporções do n.º 60.

CAPITULO III.

RESULTANTES SOB A FORMA DE DETERMINANTES.

§ I. — Resultante de duas equações algebricas.

61. Quando n'um systema de n equações não homogeneas, a $n-1$ variaveis, se faz por qualquer methodo a eliminação d'estas, resulta por fim uma expressão, funcção apenas dos coefficientes do systema dado, que egualada a zero exprime a *condição necessaria e sufficiente* para que aquellas equações sejam satisfeitas por um mesmo systema de raizes.

Áquella expressão, que designaremos por R, chamou Bezout *resultante* ou *eliminante;* e tambem denominou *resultante, equação final* (*æquatio finalis genua*) a equação

$$R = 0.$$

Foi effectuando aquella eliminação entre n equações do primeiro grau a $n-1$ incognitas, e entre duas equações algebricas a uma incognita, que Leibnitz, notando a symetria dos resultados, descobriu os *determinantes*.

Eliminando com effeito x entre duas equações lineares a uma incognita,

$$ax + b = 0, \quad a'x + b' = 0,$$

para o que basta multiplicar a primeira por a', a segunda por a, e subtrahir, achou Leibnitz

$$ab' - a'b = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0,$$

resultante em forma de determinante.

Para obter a *resultante* das duas equações do segundo grau a uma incognita

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

multiplique-se a primeira por a', a segunda por a, e subtraia-se: virá

$$(ab' - a'b)\,x + (ac' - a'c) = 0;$$

e multiplicando a primeira por c', a segunda por c, subtrahindo, e dividindo por x,

$$(ac' - a'c)\,x + (bc' - b'c) = 0.$$

O problema acha-se reduzido a eliminar x entre estas duas equações lineares, e a resultante achada por Leibnitz foi

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0,$$

ou, em notação abreviada (n.º 9),

$$\begin{vmatrix} (ac') & (bc') \\ (ab') & (ac') \end{vmatrix} = 0,$$

que é um determinante.

E semelhantemente para as equações do terceiro, quarto ... grau.

62. O methodo de eliminação que acabamos de applicar, e que primeiro naturalmente lembra, identico na essencia ao do maior divisor commum, tem o inconveniente de introduzir *raizes estranhas*.

Empregam-se por isso de preferencia outros methodos, que vamos succintamente expôr, e que, por meio d'um calculo notavelmente simples, nos dão a *resultante sob a forma de determinante*.

§ II. — Methodos de eliminação entre duas equações algebricas.

63. Methodo de Euler.

Sejam respectivamente

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0$$

duas equações simultaneas dos graus m e n.

Se α é raiz commum, ambas terão por factor $x - \alpha$, e será

$$f(x) = (x - \alpha)(A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m),$$

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_n),$$

representando por estes polynomios os quocientes da divisão de $f(x)$ e $\varphi(x)$ por $x - \alpha$.

Dividindo membro a membro estas identidades, e desembaraçando dos denominadores, vem

$$f(x)(B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_n) = \varphi(x)(A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m);$$

e esta identidade significa que, se multiplicarmos $f(x)$ por uma funcção arbitraria de x do grau $n - 1$, o que introduz n constantes arbitrarias $B_1, B_2, \ldots B_n$; depois $\varphi(x)$ por uma funcção arbitraria do grau $m - 1$, o que introduz m arbitrarias $A_1, A_2, \ldots A_n$; teremos dous polynomios do grau $m + n - 1$, que, egualados termo a termo, nos darão $m + n$ equações homogeneas do primeiro grau com relação ás $m + n$ arbitrarias.

Para que estas equações, e por tanto as propostas, de que ellas são uma combinação, sejam compativeis, é necessario e basta que o seu determinante seja nullo (n.° 60). Teremos assim *a resultante em fórma de determinante.*

Achada a resultante, o methodo que adeante exporemos (§ III) dar-nos-ha as raizes.

Procuremos, para exemplo, a resultante das equações do 2.° grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \quad \varphi(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Applicando o methodo de EULER, vem

$$(ax^2+bx+c)(A_1x+A_2)=(a'x^2+b'x+c')(B_1x+B_2),$$

d'onde, effectuando a multiplicação, e egualando, conforme a theoria das funcções identicas, os coefficientes das mesmas potencias de x, resultam as quatro equações

$$\begin{aligned}
A_1a \qquad\quad - B_1a' \qquad\quad &= 0,\\
A_1b + A_2a - B_1b' - B_2a' &= 0,\\
A_1c + A_2b - B_1c' - B_2b' &= 0,\\
A_2c \qquad\quad - B_2c' &= 0,
\end{aligned}$$

lineares em A_1, A_2, B_1 e B_2.

Eliminando estas arbitrarias, a resultante das propostas será o determinante d'estas quatro equações egualado a zero (n.º 60)

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ 0 & c & 0 & c' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} (ac') & (bc') \\ (ab') & (ac') \end{vmatrix} = 0.$$

64. Este mesmo methodo fornece as condições para que as equações tenham dous factores communs.

Sejam α e β as raizes communs: será n'este caso

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(A_1x^{m-2}+\ldots+A_m),$$

$$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(B_1x^{n-2}+\ldots+B_n),$$

d'onde se deduz

$$f(x)(B_1x^{n-2}+\ldots+B_n)=\varphi(x)(A_1x^{m-2}+\ldots+A_m).$$

Quer dizer: — se multiplicarmos $f(x)$ por uma funcção do grau $n-2$ contendo $n-1$ arbitrarias, e $\varphi(x)$ por uma funcção do grau $m-2$ encerrando $m-1$ arbitrarias, teremos dous polynomios identicos do grau $m+n-2$; egualando então os coefficientes das mesmas potencias de x nos dous membros, resultarão $m+n-1$ equações; e eliminando depois entre estas as $m+n-2$ constantes introduzidas, obteremos a resultante procurada.

Busquemos as condições necessarias para que as duas equações do 3.º grau

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0$$

tenham duas raizes communs.

Será identicamente

$$(ax^3+bx^2+cx+d)(A_1x+A_2)=(a'x^3+b'x^2+c'x+d')(B_1x+B_2),$$

d'onde

$$\begin{aligned}
A_1a \qquad\quad &-B_1a' \qquad\quad =0,\\
A_1b+A_2a &-B_1b'-B_2a'=0,\\
A_1c+A_2b &-B_1c'-B_2b'=0,\\
A_1d+A_2c &-B_1d'-B_2c'=0,\\
+A_2d \qquad &\qquad\quad -B_2d'=0.
\end{aligned}$$

Eliminando A_1, A_2, B_1, B_2, obtem-se para resultante o *determinante multiplo*

$$\left\|\begin{matrix} a & 0 & a' & 0\\ b & a & b' & a'\\ c & b & c' & b'\\ d & c & d' & c'\\ 0 & d & 0 & d' \end{matrix}\right\| = 0.$$

65. Methodo de M. Sylvester.

Este methodo desfaz em certo modo as relações que existem entre as potencias das variaveis, tratando-as como variaveis independentes, pelo que M. Syl-

VESTER o denominou *methodo dialytico*. É identico ao de EULER quanto aos resultados, porém mais simples nas applicações.

Se multiplicarmos successivamente as duas equações dadas

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx + l = 0,$$

$$a'x^n + b'x^{n-1} + c'x^{n-2} + \ldots + k'x + l' = 0,$$

a primeira, de grau m, por

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots\ x^2,\ x^1,\ x^0,$$

e a segunda, de grau n, por

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots\ x^2,\ x^1,\ x^0,$$

formaremos $m+n$ equações entre as $m+n-1$ potencias de x

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots\ x^2,\ x^1.$$

Eliminando então d'estas $m+n$ equações, que podem considerar-se do primeiro grau, aquellas $m+n-1$ potencias, como se fossem outras tantas variaveis, obter-se-ha a *resultante* das equações propostas.

Appliquemos este processo ao systema de equações

$$ax^2 + bx + c = 0,\quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Multiplicando por x^1 e x^0, resultam as quatro equações

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx \qquad &= 0,\\ ax^2 + bx + c &= 0,\\ a'x^3 + b'x^2 + c'x \qquad &= 0,\\ a'x^2 + b'x + c' &= 0, \end{aligned}$$

do primeiro grau em x^3, x^2 e x^1.

Temos pois quatro equações lineares com as incognitas x^3, x^2 e x^1, cuja condição de compatibilidade é (n.º 61) que o seu determinante seja nullo; a resultante das equações propostas será pois o determinante d'estas equações egualado a zero

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

o mesmo que nos deu o methodo de EULER.

66. Se as equações dadas fossem de differente grau, taes como

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

multiplicariamos a primeira por x^1 e x^0, e a segunda por x^2, x^1 e x^0, o que nos daria cinco equações

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \qquad &= 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 \qquad &= 0, \\ a'x^3 + b'x^2 + c'x \qquad &= 0, \\ a'x^2 + b'x + c' &= 0, \end{aligned}$$

do primeiro grau em x^4, x^3, x^2 e x^1.

A resultante das propostas será pois o determinante d'estas equações (n.° 61) egualado a zero

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

67. Querendo eliminar x das equações

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

multipliquem-se por x^2, x^1 e x^0. Teremos as seis equações

$$
\begin{aligned}
ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 \qquad\qquad &= 0,\\
ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \qquad &= 0,\\
ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0,\\
a'x^5 + b'x^4 + c'x^3 + d'x^2 \qquad\qquad &= 0,\\
a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x \qquad &= 0,\\
a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' &= 0,
\end{aligned}
$$

do primeiro grau em x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, cuja condição de compatibilidade, e por conseguinte das propostas, é que seja o seu determinante egual a zero; a resultante é pois

$$
\begin{vmatrix}
a & b & c & d & 0 & 0\\
0 & a & b & c & d & 0\\
0 & 0 & a & b & c & d\\
a' & b' & c' & d' & 0 & 0\\
0 & a' & b' & c' & d' & 0\\
0 & 0 & a' & b' & c' & d'
\end{vmatrix} = 0.
$$

68. Methodo de Bezout aperfeiçoado por Cauchy.

Este methodo tem sobre os precedentes a vantagem de dar a resultante sob a forma d'um determinante mais simples, e por isso mais facil de calcular.

Sejam

$$
(1) \qquad \begin{cases} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,\\ b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0, \end{cases}
$$

as duas equações dadas, suppostas por em quanto *do mesmo grau.*

Passemos em cada uma os termos para o segundo membro, deixando no primeiro só o primeiro termo, depois os dois primeiros termos, depois os tres primeiros, etc., até os m primeiros termos; assim formaremos m pares de equações.

Dividindo membro a membro, uma pela outra, as duas equações de cada par, e supprimindo as potencias communs

$$x^m,\ \ x^{m-1},\ \ldots\ x^2,\ \ x,$$

teremos as n equações

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{a_0}{b_0}=\dfrac{a_1 x^{m-1}+a_2 x^{m-2}+\ \dots\ +a_{m-1}x+a_m}{b_1 x^{m-1}+b_2 x^{m-2}+\ \dots\ +b_{m-1}x+b_m}, \\[3ex]
\dfrac{a_0 x+a_1}{b_0 x+b_1}=\dfrac{a_2 x^{m-2}+\dots+a_{m-1}x+a_m}{b_2 x^{m-2}+\dots+b_{m-1}x+b_m}, \\[3ex]
\dfrac{a_0 x^2+a_1 x+a_2}{b_0 x^2+b_1 x+b_2}=\dfrac{a_3 x^{m-3}+\dots+a_{m-1}x+a_m}{b_3 x^{m-3}+\dots+b_{m-1}x+b_m}, \\[3ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[3ex]
\dfrac{a_0 x^{m-2}+a_1 x^{m-3}+\ \dots\ +a_{m-2}}{b_0 x^{m-2}+b_1 x^{m-3}+\ \dots\ +b_{m-2}}=\dfrac{a_{m-1}x+a_m}{b_{m-1}x+b_m}, \\[3ex]
\dfrac{a_0 x^{m-1}+a_1 x^{m-2}+\ \dots\ +a_{m-2}x+a_{m-1}}{b_0 x^{m-1}+b_1 x^{m-2}+\ \dots\ +b_{m-2}x+b_{m-1}}=\dfrac{a_m}{b_m}.
\end{array}
\right.
$$

Desembaraçando estas equações de seus denominadores, resulta, empregando a notação abreviada dos determinantes,

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{array}{lllll}
(a_0b_1)x^{m-1} & +\ (a_0b_2)x^{m-2} & +\ (a_0b_3)x^{m-3} & +\dots+(a_0b_m) & =0, \\[1.5ex]
(a_0b_2)x^{m-1} & +\left\{(a_0b_3)+(a_1b_2)\right\}x^{m-2} & +\left\{(a_0b_4)+(a_1b_3)\right\}x^{m-3} & +\dots+(a_1b_m) & =0, \\[1.5ex]
(a_0b_3)x^{m-1} & +\left\{(a_0b_4)+(a_1b_3)\right\}x^{m-2} & +\left\{(a_0b_5)+(a_1b_4)\right\}x^{m-3} & +\dots+(a_2b_m) & =0, \\[1.5ex]
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\[1.5ex]
(a_0b_{m-1})x^{m-1} & +\left\{(a_0b_m)+(a_1b_{m-1})\right\}x^{m-2} & +\left\{(a_1b_m)+(a_2b_{m-1})\right\}x^{m-3} & +\dots+(a_{m-2}b_m) & =0, \\[1.5ex]
(a_0b_m)x^{m-1} & +(a_1b_m)x^{m-2} & +\ (a_2b_m)x^{m-3} & +\dots+(a_{m-1}b_m) & =0.
\end{array}
\right.
$$

Temos assim m equações do primeiro grau ás $m-1$ incognitas

$$x^{m-1},\quad x^{m-2},\ \ldots\ x^2,\quad x,$$

e todo o valor que satisfizer ás propostas (1) satisfará tambem ás equações (2) e (3), que são *combinações legitimas* d'aquellas; e por tanto, se as propostas tiverem uma raiz commum, esta raiz satisfará ás equações (3), as quaes serão então compativeis, e o *seu determinante nullo* (n.º 61).

A resultante das propostas será pois

$$\Delta=\begin{vmatrix}
(a_0b_1) & (a_0b_2) & (a_0b_3) & \ldots & (a_0b_{m-1}) & (a_0b_m) \\
(a_0b_2) & (a_0b_3)+(a_1b_2) & (a_0b_4)+(a_1b_3) & \ldots & (a_0b_{m-2})+(a_1b_{m-1}) & (a_1b_m) \\
(a_0b_3) & (a_0b_4)+(a_1b_3) & (a_0b_5)+(a_1b_4) & \ldots & (a_1b_m)+(a_2b_{m-1}) & (a_2b_m) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(a_0b_{m-1}) & (a_0b_m)+(a_1a_{m-1}) & (a_1b_m)+(a_2b_{m-1}) & \ldots & (a_{m-1}b_m)+(a_{m-2}b_{m-1}) & (a_{m-2}b_m) \\
(a_0b_m) & (a_1b_m) & (a_2b_m) & \ldots & (a_{m-2}b_m) & (a_{m-1}b_m)
\end{vmatrix}=0.$$

Obtida assim a resultante das equações propostas, resta achar as raizes pelo methodo adeante exposto (§ III).

69. Suppozémos em o numero precedente que as equações dadas eram do mesmo grau.

Se as equações

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned} a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m&=0,\\ b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n&=0,\end{aligned}\right.$$

forem de graus differentes m e n, sendo por exemplo $m>n$, e se multiplicarmos a segunda por x^{m-n}, ella se tornará na equação do grau m

$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_nx^{m-n}=0.$$

Applicando a esta e á primeira das equações (4) o processo de Cauchy, até se separarem os n primeiros termos, resultarão as n equações

$$\frac{a_0}{b_0}=\frac{a_1 x^{m-1}+a_2 x^{m-2}+\ldots+a_m}{b_1 x^{m-1}+b_2 x^{m-2}+\ldots+b_n x^{m-n}},$$

$$\frac{a_0 x+a_1}{b_0 x+b_1}=\frac{a_2 x^{m-2}+\ldots+a_m}{b_2 x^{m-2}+\ldots+b_n x^{m-n}},$$

....

$$\frac{a_0 x^{n-1}+a_1 x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}}{b_0 x^{n-1}+b_1 x^{n-2}+\ldots+b^{n-1}}=\frac{a_n x^{m-n}+\ldots+a_m}{b_n x^{m-n}},$$

que multiplicadas pelos denominadores se tornarão

$$(b_0 a_1) x^{m-1}+(b_0 a_2) x^{m-2}+\ldots+b_0 a_m=0,$$

$$(b_0 a_2) x^{m-1}+\left\{(b_0 a_3)+(b_1 a_2)\right\} x^{m-2}+\ldots+b_1 a_m=0,$$

....

$$(b_0 a_n) x^{m-1}+(b_1 a_n) x^{m-2}+\ldots+b_{n-1} a_m=0.$$

D'este modo teremos n equações.

Multiplicando agora a segunda das equações dadas pelas $m-n$ primeiras potencias de x

$$x^{m-1-n},\ x^{m-2-n},\ x^{m-3-n},\ \ldots\ x^2,\ x^1,\ x^0,$$

obteremos mais $m-n$ equações, que juntaremos áquellas; taes são

$$b_0 x^{m-1}+b_1 x^{m-2}+b_2 x^{m-3}+\ldots+b_n x^{m-1-n}=0,$$

$$b_0 x^{m-2}+b_1 x^{m-3}+\ldots+b_n x^{m-2-n}=0,$$

$$b_0 x^{m-3}+\ldots+b_n x^{m-3-n}=0,$$

....

$$b_0 x^n+b_1 x^{n-1}+\ldots+b_n=0.$$

Assim, da combinação das propostas formámos m equações do grau $m-1$ em x, mas *do primeiro grau* com relação ás $m-1$ potencias

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots\ x;$$

e para que estas m equações do primeiro grau a $m-1$ incognitas sejam compativeis, é necessario e basta (n.º 61) que o seu determinante seja nullo, isto é, que seja

$$(5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} (b_0\,a_1) & (b_0\,a_2) & (b_0\,a_3) & \ldots & b_0\,a_m \\ (b_0\,a_2) & (b_0\,a_3)+(b_1\,a_2) & (b_0\,a_4)+(b_1\,a_3) & \ldots & b_1\,a_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (b_0\,a_n) & (b_1\,a_n) & (b_2\,a_n) & \ldots & b_{n-1}\,a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \end{vmatrix} = 0.$$

Este determinante é do grau m com relação aos coefficientes da primeira das equações (4), e do grau n com relação aos coefficientes da segunda das mesmas equações.

Constitue pois a resultante das equações propostas.

A raiz commum calcula-se pelo processo que adeante expômos (§ III).

70. Appliquemos o methodo de Bezout e Cauchy a alguns exemplos.

Querendo eliminar x das equações do terceiro grau

$$(6)\qquad ax^3+bx^2+cx+d=0,\quad a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0,$$

procuremos a resultante.

Pelo processo de Cauchy teremos

$$\frac{a}{a'} = \frac{bx^2 + cx + d}{b'x^2 + c'x + d'},$$

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{cx + d}{c'x + d'},$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{d}{d'}.$$

Desembaraçando do denominador, vem as tres equações

$$(7) \qquad \begin{cases} (ab')\,x^2 + (ac')\,x & + (ad') = 0, \\ (ac')\,x^2 + \{(ad') + bc')\}x & + (bd') = 0, \\ (ad')\,x^2 + (bd')\,x & + (cd') = 0, \end{cases}$$

do primeiro grau em x^2 e x.

A resultante será pois o determinante symetrico de 3.ª ordem

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (bd') \\ (ad') & (bd') & (cd') \end{vmatrix}.$$

Em quanto o methodo de M. Sylvester nos deu, para resultante de duas equações do terceiro grau, um determinante de 6.ª ordem (n.° 67), o de Bezout e Cauchy dá-nos, como se vê, para resultante um determinante de 3.ª ordem.

O mesmo methodo, applicado ás equações do quarto grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

$$a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' = 0,$$

entre as quaes se pretende eliminar x, dá separando,

$$\frac{a}{a'}=\frac{bx^3+cx^2+dx+e}{b'x^3+c'x^2+d'x+e'},$$

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}=\frac{cx^2+dx+e}{c'x^2+d'x+e'},$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=\frac{dx+e}{d'x+e'},$$

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{a'x^3+b'x^2+c'x+d'}=\frac{e}{e'},$$

e reduzindo a inteiros,

$$(9)\quad\begin{cases}(ab')\,x^3+(ac')\,x^2 & +\,(ad')\,x & +\,(ae')=0,\\ (ac')\,x^3+\left\{(ad')+(bc')\right\}x^2+\left\{(ae')+(bd')\right\}x+(be')=0,\\ (ad')\,x^3+\left\{(ae')+(bd')\right\}x^2+\left\{(be')+(cd')\right\}x+(ce')=0,\\ (ae')\,x^3+(be')\,x^2 & +\,(ce')\,x & +\,(de')=0,\end{cases}$$

quatro equações lineares ás tres incognitas x^3, x^2 e x^1.

Para que estas equações, e por tanto as propostas, tenham uma raiz commum, é preciso que o seu determinante seja nullo (n.º 61),

$$(10)\quad\begin{vmatrix}(ab') & (ac') & (ad') & (ae')\\ (ac') & (ad')+(bc') & (ae')+(bd') & (be')\\ (ad') & (ae')+(bd') & (be')+(cd') & (ce')\\ (ae') & (be') & (ce') & (de')\end{vmatrix}=0.$$

Assim obtivemos a resultante do systema dado.

Analogamente se obteria a resultante das duas equações do quinto grau

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0,$$

$$a'x_5+b'x^4+c'x^3+d'x^2+e'x+f'=0,$$

que seria o determinante de 5.ª ordem

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') & (af') \\ (ac') & (ad')+(bc') & (ae')+(bd') & (af')+(be') & (bf') \\ (ad') & (ae')+(bd') & (af')+(be')+(cd') & (bf')+(ce') & (cf') \\ (ae') & (af')+(be') & (bf')+(ce') & (cf')+(de') & (df') \\ (af') & (bf') & (cf') & (df') & (ef') \end{vmatrix} = 0.$$

71. Exemplifiquemos o caso de serem as duas equações propostas *de differente grau.*

Sejam

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

as duas equações cuja resultante se procura.

Conforme o methodo geral (n.º 69), multipliquemos a segunda equação por x^2; teremos o systema

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= 0, \\ a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 \qquad\qquad &= 0, \end{aligned}$$

de duas equações do mesmo grau, que pelo methodo de Bezout e Cauchy dão

$$\frac{a}{a'} = \frac{bx^3 + cx^2 + dx + e}{b'x^3 + c'x^2},$$

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{cx^2 + dx + e}{c'x^2};$$

as quaes, desembaraçadas dos denominadores, se tornam

$$\begin{aligned} &(ba')x^3 + (ca')x^2 + da'x + ea' = 0, \\ &(ca')x^3 + \{(cb') + (da')\}\, x^2 + (db' + ea')x + eb' = 0. \end{aligned}$$

Juntando a estas a segunda equação proposta, multiplicada seguidamente por x^1 e x^0,

$$a'x^3+b'x^2+c'x \qquad =0,$$

$$a'x^2+b'x+c'=0,$$

teremos quatro equações lineares ás tres incognitas x_3, x_2 e x_1.

A resultante d'estas quatro equações, e por tanto das propostas, será pois o determinante do quarto grau

$$\begin{vmatrix} (ba') & (ca') & (da') & (ea') \\ (ca') & (cb')+(da') & (db')+(ea') & (eb') \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

§ III. — Calculo das raizes communs.

72. Achada por qualquer dos methodos expostos a resultante de duas equações algebricas sob a forma de determinante, segue-se calcular as suas raizes.

Consideremos ainda as duas equações geraes de grau m

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0,$$

as quaes, como vimos (n.º 68), se têm uma raiz commum, terão para resultante o determinante

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots F_1 & G_1 & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots F_2 & G_2 & H_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} & \ldots F_{m-1} & G_{m-1} & H_{m-1} \\ A_m & B_m & C_m & \ldots F_m & G_m & H_m \end{vmatrix} = 0,$$

onde, por simplificar, representámos pelos symbolos A_1, B_1, C_1 ... os elementos $(a_0 b_1)$, $(a_0 b_2)$, $(a_0 b_3)$ ... do determinante Δ do n.º 68.

Admittamos por em quanto que um dos determinantes menores, correspondentes aos elementos da ultima columna H de (1), *não seja nullo,* por exemplo, o que corresponde a H_m.

No systema de equações (3) do n.º 68 supprima-se a ultima, e tomem-se as $m-1$ restantes

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + C_1 x^{m-3} + \ldots + F_1 x^2 + G_1 x + H_1 = 0, \\ A_2 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + C_2 x^{m-3} + \ldots + F_2 x^2 + G_2 x + H_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-1} x^{m-1} + B_{m-1} x^{m-2} + C_{m-1} x^{m-3} + \ldots + F_{m-1} x^2 + G_{m-1} x + H_{m-1} = 0. \end{array}\right.$$

Teremos assim $m-1$ equações não homogeneas do primeiro grau a $m-1$ incognitas

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots\ x^2,\ x,$$

que podemos resolver segundo os principios do n.º 56, notando que ao determinante $\Sigma\, a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n$ d'aquelle numero corresponde aqui o determinante $\Sigma\, A_1 B_2 C_3 \ldots H_{m-1}^{m-1}$; aos termos conhecidos u_1, u_2, u_3, ... u_n correspondem aqui H_1, H_2, ... H_{m-1}; e ás incognitas x_1, x_2, ... x_n correspondem x, x^2, ... x^{m-1}.

Será pois

$$(3)\qquad x = -\frac{\Sigma\, A_1 B_2 \ldots F_{m-2} H_{m-1}}{\Sigma\, A_1 B_2 \ldots F_{m-2} G_{m-1}} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \ldots F_1 & H_1 \\ A_2 & B_2 & \ldots F_2 & H_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & \ldots F_{m-1} & H_{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \ldots F_1 & G_1 \\ A_2 & B_2 & \ldots F_2 & G_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & \ldots F_{m-1} & G_{m-1} \end{vmatrix}},$$

e bem assim

$$(4)\qquad x^2 = -\frac{\Sigma A_1 B_2 \ldots H_{m-2} G_{m-1}}{\Sigma A_1 B_2 \ldots F_{m-2} G_{m-1}} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \ldots H_1 & G_1 \\ A_2 & B_2 & \ldots H_2 & G_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & \ldots H_{m-1} & G_{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \ldots F_1 & G_1 \\ A_2 & B_2 & \ldots F_2 & G_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & \ldots F_{m-1} & G_{m-1} \end{vmatrix}},$$

....

$$x^{m-1} = -\frac{\Sigma H_1 B_2 \ldots F_{m-2} G_{m-1}}{\Sigma A_1 B_2 \ldots F_{m-2} G_{m-1}} = -\frac{\begin{vmatrix} H_1 & B_1 & \ldots F_1 & G_1 \\ H_2 & B_2 & \ldots F_2 & G_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{m-1} & B_{m-1} & \ldots F_{m-1} & G_{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \ldots F_1 & G_1 \\ A_2 & B_2 & \ldots F_2 & G_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & \ldots F_{m-1} & G_{m-1} \end{vmatrix}}.$$

Suppozemos que um, pelo menos, dos determinantes menores correspondentes aos elementos da ultima columna de Δ não era nullo.

Se todos esses determinantes fossem nullos, teriamos em (2) um systema de $m-1$ equações a $m-1$ incognitas, cujo determinante $\Sigma A_1 B_2 \ldots G_{m-1}$ seria nullo.

Haveria n'este caso indeterminação, por isso que o valor (3), tendo o denominador nullo, teria a fórma $\frac{0}{0}$, ou $\frac{M}{0}$, sendo M uma grandeza finita; e esta ultima forma, que exprimiria *a impossibilidade do problema,* fica excluida pela consideração de que, sendo $\Delta = 0$, têm effectivamente as duas equações propostas uma raiz commum, que satisfaz ao systema (2), e não ha por tanto impossibilidade.

Suppozémos ainda que as equações propostas eram do mesmo grau.

Se fossem de *grau differente*, as formulas correspondentes a este caso (n.º 69) conduziriam aos mesmos resultados, e operar-se-hia de um modo analogo.

73. Appliquemos este methodo a alguns exemplos.

Seja proposto para resolver o systema de equações

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

O methodo de Cauchy dá as equações

$$\frac{a}{a'} = \frac{bx + c}{b'x + c'},$$

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{c}{c'},$$

ou

$$(ab')\,x + (ac') = 0,$$

$$(ac')\,x + (bc') = 0,$$

cujo determinante é

$$\Delta = \begin{vmatrix} (ab') & (ac') \\ (ac') & (bc') \end{vmatrix};$$

e, se este determinante for nullo, as propostas terão uma raiz commum, que será

$$x = -\frac{(ac')}{(ab')} = -\frac{(bc')}{(ac')}.$$

Para calcular a raiz commum ás equações

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

temos já as equações (7) e o determinante (8) do n.º 70, e verificado que este é nullo, condição para que as propostas tenham uma raiz commum, as duas primeiras das equações (7)

$$(ab')x^2 + (ac')x \qquad + (ad') = 0,$$

$$(ac')x^2 + \{(ad') + (bc')\}x + (bd') = 0,$$

e a formula (3)

$$x = -\frac{\Sigma A_1 B_1 \ldots F_{m-2} H_{m-1}}{\Sigma A_1 B_1 \ldots F_{m-2} G_{m-1}},$$

dão

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} (ab') & (ad') \\ (ac') & (bd') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (ab') & (ac') \\ (ae') & (ad') + (bc') \end{vmatrix}};$$

e a formula (4) daria

$$x^2 = -\frac{\begin{vmatrix} (ad') & (ac') \\ (bd') & (ad') + (bc') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (ab') & (ac') \\ (ac') & (ad') + (bc') \end{vmatrix}}.$$

Para obter a raiz commum do systema de equações do quarto grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' = 0,$$

formam-se as equações (9) e o determinante (10) do n.º 70; e verificado que este é nullo, haverá raiz commum, que podemos calcular.

Para isso tomem-se estas equações menos a ultima

$$(ab')x^3 + (ac')x^2 \qquad + (ad')x \qquad + (ae') = 0,$$

$$(ac')x^3 + \{(ad') + (bc')\}x^2 + \{(ae') + (bd')\}x + (be') = 0,$$

$$(ad')x^3 + \{(ac') + (bd')\}x^2 + \{(bc') + (cd')\}x + (ce') = 0;$$

e estas equações e a formula (4) nos dão para x o valor

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ae') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (be') \\ (ad') & (ae') + (bd') & (ce') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') \\ (ad') & (ac') + (bd') & (be') + (cd') \end{vmatrix}},$$

para x^2 o valor

$$x^2 = \frac{\begin{vmatrix} (ab') & (ae') & (ad') \\ (ac') & (be') & (ae') + (bd') \\ (ad') & (ce') & (bc') + (cd') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') \\ (ad') & (ac') + (bd') & (bc') + (cd') \end{vmatrix}},$$

e analogamente o de x^3, substituindo a primeira columna pelos termos conhecidos.

CAPITULO IV.

DISCRIMINANTES, TRANSFORMAÇÕES LINEARES, INVARIANTES E COVARIANTES.

§ I. — Discriminantes.

74. Entre as numerosas applicações dos determinantes á Analyse, á Geometria e á Trigonometria, é talvez a mais importante a que respeita á investigação das *funcções que não são alteradas por uma transformação linear das variaveis.*

Como esta transformação corresponde a uma mudança de coordenadas, aquellas funcções exprimem propriedades completamente independentes da escolha dos eixos. D'ahi se infere a importancia geometrica d'estas funcções, cujo estudo nos vai occupar n'este capitulo.

75. Com M. Salmon (*) daremos, em geral, o nome de *fórma* a qualquer funcção homogenea; e póde esta ser do segundo grau ou *quadratica,* do terceiro ou *cubica,* do quarto, quinto ... grau; e póde além d'isso ser binaria, ternaria, quaternaria, etc., segundo contém 2, 3, 4 ... variaveis.

Assim por *fórma cubica binaria* entende-se uma funcção homogenea do terceiro grau a duas variaveis, tal como

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3;$$

(*) G. Salmon, *Leçons d'Algèbre supérieure,* pag. 74, 1868.

por *fórma quadratica ternaria* uma funcção homogenea do segundo grau a tres variaveis, tal como

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

Posto isto, se tivermos uma fórma de n variaveis, e a derivarmos com relação a cada uma d'ellas como independente, o resultante d'estas n derivadas egualadas a zero é o *discriminante* d'aquella fórma.

Se a fórma é do segundo grau, as derivadas serão do primeiro; e estas, egualadas a zero, formarão n equações homogeneas lineares entre as quaes a eliminação das n variaveis dá o seu determinante. D'ahi se conclue que — *o discriminante d'uma fórma quadratica a* n *variaveis é o determinante das suas* n *derivadas, tomadas com relação a essas* n *variaveis.*

Designaremos por $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$, ... os discriminantes das fórmas de 2, 3, ... variaveis, e por $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{D}^3$ ... os discriminantes do 2.º, 3.º, ... grau.

Formemos os discriminantes d'algumas fórmas.

76. 1.º *Fórma quadratica binaria.*

Para obter o discriminante da fórma

$$\varphi(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

derivemos successivamente esta funcção em ordem a x e y.

Designando por um indice a variavel independente em ordem á qual se faz a derivação, teremos

$$\frac{1}{2}\varphi'_x = ax + by = 0,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_y = bx + cy = 0;$$

e o *discriminante* da fórma proposta será o resultante d'estas equações, que é o determinante (n.º 60)

$$\mathbf{D}_2^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2.$$

2.° *Fórma quadratica ternaria.*

O discriminante da fórma

$$\varphi(x,y,z) = ax^2 + cy^2 + fz^2 + 2bxy + 2dxz + 2eyz$$

é o resultante das tres equações derivadas

$$\frac{1}{2}\varphi'_x = ax + by + dz = 0,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_y = bx + cy + ez = 0,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_z = dx + ey + fz = 0,$$

que é o determinante (n.° 60)

$$D_3^2 = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2.$$

3.° *Fórma quadratica quaternaria.*

O discriminante da fórma

$$\varphi(x,y,z,v) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + a'''v^2$$
$$+ 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cxv + 2c'yv + 2c''zv$$

é o resultante das equações derivadas

$$\frac{1}{2}\varphi'_x = ax + b''y + b'z + cv = 0,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_y = b''x + a'y + bz + c'v = 0,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_z = b'x + by + a''z + c''v = 0,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_v = cx + c'y + c''z + a'''v = 0,$$

que é o determinante

$$\mathrm{D}_4^2 = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & a''' \end{vmatrix} = d\,(aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2)$$

$$+ c^2 (b^2 - a'a'') + c'^2 (b'^2 - aa'') + c''^2 (b''^2 - aa')$$

$$+ 2c'c'' (ab - b'b'') + 2cc'' (a'b' - bb'') + 2cc' (a''b'' - bb').$$

4.° *Fórma cubica binaria.*

Para obter o discriminante da fórma

$$\varphi(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

derivemos esta funcção, e multipliquemos as derivadas por x e por y; teremos as quatro equações homogeneas

$$\frac{1}{3}\, x\,\varphi'_x = ax^3 + 2bx^2y + cxy^2 \qquad = 0,$$

$$\frac{1}{3}\, y\,\varphi'_x = \qquad ax^2y + 2bxy^2 + cy^3 = 0,$$

$$\frac{1}{3}\, x\,\varphi'_y = bx^3 + 2cx^2y + dxy^2 \qquad = 0,$$

$$\frac{1}{3}\, y\,\varphi'_y = \qquad bx^2y + 2cxy^2 + dy^3 = 0,$$

entre as incognitas x^3, xy^2, xy^2 e y^3.

O discriminante será pois o resultante d'estas equações (n.° 60), isto é, o determinante

$$\mathrm{D}_2^3 = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 - 4\,(b^2 - ac)\,(c^2 - bd).$$

5.° *Fórma binaria do quarto grau.*

O discriminante da fórma

$$\varphi(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

obter-se-ha derivando-a, e multiplicando as duas derivadas successivamente por x^2, xy, y^2.

Resultarão as seis equações a seis incognitas x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4 e y^5

$$\begin{aligned}
&ax^5 + 3bx^4y + 3cx^3y^2 + dx^2y^3 &&= 0,\\
&ax^4y + 3bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + dxy^4 &&= 0,\\
&ax^3y^2 + 3bx^2y^3 + 3cxy^4 + dy^5 &&= 0,\\
&bx^5 + 3cx^4y + 3dx^3y^2 + cx^2y^3 &&= 0,\\
&bx^4y + 3cx^3y^2 + 3dx^2y^3 + exy^4 &&= 0,\\
&bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + 3dxy^4 + ey^5 &&= 0,
\end{aligned}$$

cujo resultante será o descriminante da fórma proposta, isto é, o determinante (n.° 60)

$$D_2^4 = \begin{vmatrix}
a & 3b & 3c & d & 0 & 0\\
0 & a & 3b & 3c & d & 0\\
0 & 0 & a & 3b & 3c & d\\
b & 3c & 3d & c & 0 & 0\\
0 & b & 3c & 3d & e & 0\\
0 & 0 & b & 3c & 3d & e
\end{vmatrix}$$

$$= (ae - 4bd + 3c^2)^2 + 27\,(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - e^3)^3.$$

§ II. — Transformações lineares.

77. Denomina-se *transformação linear* de uma fórma de n variaveis o resultado que se obtem, quando n'esta se substituem as variaveis por funcções lineares de outras variaveis.

Sendo

$$\varphi(x, y, z \ldots)$$

uma fórma de n variaveis $x, y, z \ldots$, produzir-se-ha uma transformação linear, se n'esta expressão substituirmos por $x, y, z \ldots$ os valores

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' + \ldots$$

$$y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' + \ldots$$

$$z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

e resultará uma *fórma transformada*

$$\psi(x', y', z' \ldots).$$

Se, por exemplo, na *fórma quadratica binaria*

$$\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \tag{1}$$

fizermos

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y'$$

$$y = \alpha_2 x' + \beta_2 y'$$

resultará, desenvolvendo os quadrados, effectuando as multiplicações e ordenando, a fórma transformada

$$(2) \qquad \psi(x', y') = \mathrm{A}x'^2 + 2\,\mathrm{B}x'y' + \mathrm{C}y'^2,$$

sendo

$$\mathrm{A} = a\,\alpha_1^2 \quad + 2b\,\alpha_1\,\alpha_2 + c\,\alpha_2^2$$

$$\mathrm{B} = a\,\alpha_1\,\beta_1 + b\,(\alpha_1\,\beta_2 + \alpha_2\,\beta_1) + c\,\alpha_2\,\beta_2$$

$$\mathrm{C} = a\,\alpha_1^2 \quad + 2b\,\alpha_1\,\alpha_2 + c\,\alpha_2^2$$

78. Calculemos o discriminante D'_2 da transformada (2) em funcção dos coefficientes da forma primitiva.

Será o discriminante da transformada (n.° 76)

$$\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = ac\,\alpha_1^2\,\beta_2^2 + ac\,\alpha_2^2\,\beta_1^2 - 2ac\,\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2 - b^2\,\alpha_1^2\,\beta_2^2 - b^2\,\alpha_2^2\,\beta_1^2$$

$$= ac\,(\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)^2 - b^2\,(\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)^2,$$

d'onde

$$(3) \qquad \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = (ac - b^2)\,(\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)^2,$$

ou

$$\mathrm{D}'_2 = \mathrm{D}_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2,$$

d'onde se conclue que — *o discriminante da transfarmada é egual ao discriminante da forma primitiva multiplicado pelo quadrado do determinante das formulas de transformação.*

Este determinante chama-se *modulo de transformação.*

§ III. — Invariantes e covariantes.

79. Dá-se, em geral, o nome de *invariante* d'uma fórma a uma funcção dos seus coefficientes tal que, se effectuarmos na fórma uma substituição linear, a funcção semelhante dos coefficientes da transformada seja egual á funcção primitiva multiplicada por uma potencia do modulo de transformação.

Assim, sendo em o numero precedente

$$AC - B^2 = (ac - b^2)(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2,$$

quando pela substituição linear

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y', \quad y = \alpha_2 x' + \beta_2 y'$$

a fórma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

se muda em

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

é

$$ac - b^2$$

o *invariante* de

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Se a potencia do modulo é egual á unidade, o invariante diz-se *absoluto*.

Um *covariante* é uma funcção que comprehende não só os coefficientes d'uma fórma, mas ainda as variaveis, e tal que, se effectuarmos na fórma uma substituição linear, a nova funcção dos coefficientes e variaveis da transformada é egual á funcção primitiva multiplicada por uma potencia do modulo de transformação.

A theoria dos *invariantes* e *covariantes* tem uma importancia notavel pelas suas applicações geometricas.

Na geometria das curvas e das superficies as transformações das coordenadas operam-se por substituições lineares. Um *invariante* d'uma fórma ternaria ou quaternaria é uma funcção dos coefficientes, cuja reducção a zero exprime alguma propriedade da curva ou da superficie independente da escolha dos eixos, tal como a existencia d'um ponto duplo; um *covariante* representa uma outra curva ou uma outra superficie, cujos pontos têm com a curva ou com a superficie dada alguma relação independente da escolha dos eixos. D'ahi resulta a importancia geometrica da theoria dos invariantes e covariantes.

Demonstremos o theorema fundamental d'esta theoria.

80. *Os discriminantes são invariantes.*

Acabamos de vêr como *o discriminante* de uma fórma quadratica binaria é um *invariante d'essa forma.*

Mas esta proposição tem logar para qualquer numero de variaveis.

Vamos ainda demonstral-a para tres variaveis, mas, por sua natureza, o raciocinio é geral, e geral por tanto a proposição.

Consideremos a fórma quadratica ternaria

$$\varphi(x,\, y,\, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy,$$

cujo discriminante (n.º 76) é o determinante

$$D_3^2 = \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix}.$$

Façamos na fórma as substituições

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z',$$

$$y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z',$$

$$z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z';$$

resultará a transformada

$$\psi(x', y', z') = a(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')^2 + b(\alpha_2 x' + \beta_2 z' + \gamma_2 z')^2 + c(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')^2$$

$$+ 2d(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z')(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')$$

$$+ 2e(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')$$

$$+ 2f(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z').$$

Busquemos o seu discriminante.

Derivando em x', será

$$\frac{1}{2}\psi'_{x'} = a\alpha_1(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + b\alpha_2(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + c\alpha_3(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')$$

$$+ d\alpha_3(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + d\alpha_2(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')$$

$$+ e\alpha_3(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + e\alpha_1(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')$$

$$+ f\alpha_2(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + f\alpha_1(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z'),$$

ou

$$\frac{1}{2}\psi'_{x'} = (a\alpha_1 + f\alpha_2 + e\alpha_3)(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')$$

$$+ (f\alpha_1 + b\alpha_2 + d\alpha_3)(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z')$$

$$+ (e\alpha_1 + d\alpha_2 + c\alpha_3)(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z'),$$

e do mesmo modo se acha o valor de $\frac{1}{2}\psi'_{y'}$, $\frac{1}{2}\psi'_{z'}$.

Estas tres derivadas egualadas a zero formam o systema das tres equações

$$\mathrm{A}(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + \mathrm{B}(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + \mathrm{C}(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z') = 0,$$

$$\mathrm{A}_1(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + \mathrm{B}_1(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + \mathrm{C}_1(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z') = 0,$$

$$\mathrm{A}_2(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + \mathrm{B}_2(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + \mathrm{C}_2(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z') = 0,$$

nas quaes é

$$\mathrm{A} = a\alpha_1 + f\alpha_2 + e\alpha_3, \quad \mathrm{B} = f\alpha_1 + b\alpha_2 + d\alpha_3, \quad \mathrm{C} = e\alpha_1 + d\alpha_2 + c\alpha_3$$

$$\mathrm{A}_1 = a\beta_1 + f\beta_2 + e\beta_3, \quad \mathrm{B}_1 = f\beta_1 + b\beta_2 + d\beta_3, \quad \mathrm{C}_1 = e\beta_1 + d\beta_2 + c\beta_3$$

$$\mathrm{A}_2 = a\gamma_1 + f\gamma_2 + e\gamma_3, \quad \mathrm{B}_2 = f\gamma_1 + b\gamma_2 + d\gamma_3, \quad \mathrm{C}_2 = e\gamma_1 + d\gamma_2 + c\gamma_3$$

Ordenando aquellas equações em ordem a x', y' e z', ellas se tornarão

$$(A\,\alpha_1 + B\,\alpha_2 + C\,\alpha_3)\,x' + (A\,\beta_1 + B\,\beta_2 + C\,\beta_3)\,y' + (A\,\gamma_1 + B\,\gamma_2 + C\,\gamma_3)\,z' = 0,$$

$$(A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3)\,x' + (A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\beta_3)\,y' + (A_1\gamma_1 + B_1\gamma_2 + C_1\gamma_3)\,z' = 0,$$

$$(A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3)\,x' + (A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\beta_3)\,y' + (A_2\gamma_1 + B_2\gamma_3 + C_2\gamma_3)\,z' = 0,$$

cujo determinante será o discriminante da transformada. Designando-o por D'_3, será (n.° 44)

$$D'_3 = \begin{vmatrix} A\,\alpha_1 + B\,\alpha_2 + C\,\alpha_3 & A\,\beta_1 + B\,\beta_2 + C\,\beta_3 & A\,\gamma_1 + B\,\gamma_2 + C\,\gamma_3 \\ A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 & A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\beta_3 & A_1\gamma_1 + B_1\gamma_2 + C_1\gamma_3 \\ A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3 & A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\beta_3 & A_2\gamma_1 + B_2\gamma_2 + C_2\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

e, substituindo por A, B, C ... os seus valores, resultará

$$D'^{3} = \begin{vmatrix} a\alpha_1 + f\alpha_2 + e\alpha_3 & f\alpha_1 + b\alpha_2 + d\alpha_3 & e\alpha_1 + d\alpha_2 + c\alpha_3 \\ a\beta_1 + f\beta_2 + e\beta_3 & f\beta_1 + b\beta_2 + d\beta_3 & e\beta_1 + d\beta_2 + c\beta_3 \\ a\gamma_1 + f\gamma_2 + e\gamma_3 & f\gamma_1 + b\gamma_2 + d\gamma_3 & e\gamma_1 + d\gamma_2 + c\gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha^3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2,$$

ou

$$D'_3 = D_3 \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 .$$

D'esta expressão conclue-se que, ainda no caso de uma fórma quadratica ternaria, o discriminante da transformada é egual ao discriminante da primitiva multiplicada pelo quadrado do modulo de transformação; e por conseguinte é este ultimo discriminante um invariante da fórma proposta.

Este systema de calculo é, como se vê, independente do numero de variaveis; e, qualquer que fosse o numero d'estas, pelo mesmo teor se provaria a proposição.

É pois geral aquella proposição, fundamento da theoria fecunda dos invariantes e covariantes.

FIM.

5

1880

C. PESSOA - DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

PHILOSOPHIA