ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA

PARA

O PROGRESSO DAS SCIÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA

PARA

O PROGRESSO DAS SCIÊNCIAS

PRIMEIRO CONGRESSO

CELEBRADO NA CIDADE DO PORTO
DE 26 DE JUNHO A 1 DE JULHO DE 1921
JUNTAMENTE COM
O OITAVO CONGRESSO DA ASSOCIAÇÃO ESPANHOLA
PARA O PROGRESSO DAS SCIÊNCIAS

SECÇÕES DE MATEMÁTICA, ASTRONOMIA E SCIÊNCIAS FÍSICO-QUÍMICAS

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1923

SOBRE AS NOÇÕES FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE INFINITESIMAL

CONFERÊNCIA

PELO

DR. PEDRO JOSÉ DA CUNHA

É assombrosa a extensão que a Análise Infinitesimal tem atingido nos nossos dias. Não só se têm expandido consideràvelmente quási tôdas as divisões desta Sciência já conhecidas das gerações anteriores, como também se têm desenvolvido novas e importantes ramificações, mercê dos fecundos trabalhos de investigação dos sábios do nosso tempo.

Dominando todo êste vastíssimo conjunto há um certo número de *ideas* ou *noções fundamentais;* algumas apareceram logo ao alvorecer da sciência, como que inactas no espírito dos primeiros pensadores; outras foram surgindo à medida que a sciência se ia desenvolvendo; e de tôdas se partia, sem uma análise discreta da sua essência, para a investigação de novos factos e para a sua relacionação. Foi só quando se tornou considerável o pêso das suas conseqüências, que os sábios reconheceram a necessidade de profundá-las, fazendo-as o objecto duma revisão cuidadosa. E revisões destas têm naturalmente de operar-se ainda muitas vezes na série dos tempos. A Análise Infinitesimal é como que um grande edifício, a que se vão juntando constantemente novas alas e novos andares; nada mais natural do que, de vez em quando, reforçarem-se-lhe os alicerces.

O exame crítico das noções fundamentais, em que assenta todo êste edifício da Análise, pode ser feito sob vários aspectos, mas vou limitar-me a considerar aquele que interessa mais particularmente aos professores de ensino superior.

Sendo limitada a duração dos cursos universitários, e ilimitado e ràpidamente crescente o âmbito da sciência, há-de sempre haver diferença, e cada vez maior, entre a massa total dos conhecimentos adquiridos num dado ramo scientífico e a parte que um estudante pode assimilar durante a sua passagem por êsses cursos. Oferece-se, portanto, ao ensino superior o seguinte problema:

Sendo materialmente impossível saírem os alunos das Universidades, conhecendo todos os factos averiguados da sciência do seu tempo, evitar que, ao lançarem-se na vida prática, haja uma *diferença de fase* que os iniba de se porem ràpidamente em dia com as ideas dominantes e de se integrarem no movimento scientífico contemporâneo.

Êste problema só pode ser resolvido dirigindo-se a acção dos professores mais à *qualidade* do que à *quantidade* do ensino a ministrar. É preciso habilitar os alunos, não a reproduzirem de memória o maior número de coisas que possam reter, do cabedal de conhecimentos armazenado pela sua geração e pelas gerações anteriores, mas a apreenderem com o seu próprio esfôrço tôda a obra scientífica já realizada no domínio para que os atraírem as suas disposições naturais, e a alargarem as aplicações e os horizontes da sciência a que se consagrarem, usando com êxito dos seus processos de trabalho e, porventura, dos seus métodos de investigação.

Em perfeita concordância de ideas vejo o sr. Paul Appell, o ilustre reitor da Academia de Paris, sustentar, numa conferência realizada em 1 de Fevereiro de 1920 perante a Associação Geral dos Estudantes daquela capital, que se deve opôr absolutamente o espírito scientífico ao espírito de erudição; que o fim do ensino público é o desenvolvimento do espírito scientífico; que êste é caracterizado pela acção, pela procura da verdade acima de tudo; e que o ensino superior deve tender, não apenas a desenvolver conhecimentos, mas a provocar o espírito de iniciativa e o gôsto pela investigação.

Nesta ordem de ideas é forçoso que o professor aproveite o melhor possível a duração dos seus cursos para insuflar nos alunos ideas claras e precisas sôbre os conceitos fundamentais da sciência que professa, sôbre os factos capitais da mesma sciência que se deve sempre ter em vista nas suas aplicações, e sôbre os seus métodos de exposição e de investigação, de forma que cada um dêles, ao concluir a sua formatura, conheça as novas directrizes em que se desenvolve o esfôrço investigador dos seus contemporâneos; esteja apto a prosseguir os seus estudos, alargando os seus conhecimentos em qualquer ramo especial da sciência a que deseje dedicar-se; esteja senhor dos métodos de investigação, que são próprios dêsse ramo da sciência, para poder contribuir para os seus progressos, se para isso tiver disposição natural; e esteja em condições de aplicar a sciência adquirida na resolução dos problemas que interessam à vida prática, designadamente à engenharia, à indústria e à agricultura.

Estas considerações genéricas são inteiramente aplicáveis à Análise Infinitesimal. No seu ensino deve ter-se em vista mais a *qualidade* do que a *quantidade*, isto é, alcançado um mínimo de conhecimentos, definido pelas necessidades dos cursos subseqüentes, não importa que a cultura especial que um aluno tenha adquirido, em confronto com o estado contemporâneo da Análise, denuncie uma *diferença de intensidade;* essa diferença é mesmo inevitável; o que importa é que não haja uma *diferença de fase.* O aluno deve estar familiarizado com as ideas correntes, os modos de ser e os métodos de investigação da Análise moderna; não deve ter cristalizado dentro dos horizontes mais estreitos e dos métodos menos fecundos e eficazes das gerações que o precederam.

Se do exposto deriva a necessidade dum cuidado especial na organização dos programas, na escolha das matérias sôbre que há-de versar o ensino, ressalta ao mesmo tempo a conveniência de apresentar as noções fundamentais da Análise sob o aspecto por que devem ser encaradas à face dos últimos desenvolvimentos que ela tem experimentado; de lhes dar, portanto, o maior grau possivel de generalidade, sem prejuízo da clareza e do rigor.

Vou passar em revista essas noções fundamentais, apresentando-as, sem pretenções a originalidade, pela forma que melhor me parece coadunar-se com as condições que formulei.

*

* *

Remontam quási à origem das sciências matemáticas, intimamente ligados um ao outro, dois dos conceitos mais fecundos destas sciências; são os de *limite* e de *infinitamente pequeno*, que podem dizer-se já conhecidos de Archimedes. Hoje considera-se um conceito ainda mais geral. É o de *função*, que domina tôda a sciência.

Como é sabido, os antigos chamavam *funções* às variáveis cujos valores dependem dos das variáveis independentes, seja qual fôr a natureza desta dependência; e entendiam por *variáveis independentes* as variáveis cujos valores são inteiramente arbitrários.

Estas noções, assim apresentadas, eram pouco precisas. Mesmo com relação às variáveis independentes, podemos multiplicar à vontade as questões em que as variáveis, a considerar como tais, só podem tomar valores tirados de determinadas classes de números, e não são por isso inteiramente arbitrárias.

Dizemos hoje que mais precisamente as quantidades $x, y, \ldots$ são variáveis independentes, quando não existe nenhuma relação entre elas, por forma que, fixados os valores de tôdas menos uma, a restante pode tomar todos aqueles de que é susceptível.

Por outro lado, dizemos que u é função de $x, y, \ldots$, quando u está ligado com estas variáveis de tal sorte que a cada ponto $(x, y, \ldots)$ pertencente a um dado conjunto (E) corresponde um, e um só, valor de u. Assim a noção de função aparece ligada à de *conjunto de pontos*, o que mostra a vantagem de fazer preceder as noções da Análise Infinitesimal do estudo das principais propriedades da teoria dos conjuntos.

Impõe-se inicialmente a consideração das noções de conjunto e de potência, a distinção entre os conjuntos com a potência do contínuo e com a potência do numerável, e o estabelecimento das propriedades fundamentais duns e doutros.

Em seguida é necessário considerar os conjuntos de pontos, deduzir as suas principais propriedades e tratar da sua medição, para o que, nesta altura, basta aplicar o critério de Jordan.

Pode objectar-se que aquela definição de função, apesar de parecer muito geral, não o é na realidade, pois exclue as variáveis que admitem mais do que um valor para cada sistema de valores doutras de que dependem. Sabe-se, porém, que esta dúvida se afasta decompondo essas variáveis em ramos, e estudando cada um dêles separadamente.

A verdade é que a definição é tão geral que abrange até as grandezas que não são susceptíveis duma representação analítica, sempre a mesma, em todos os pontos do conjunto em que são definidas. Assim, por exemplo, se a todos os pontos do intervalo 0–1, de abscissa racional, fizermos corresponder o número 1, e a todos os de abscissa irracional o número 0, definiremos nesse intervalo uma função, que só pode ter um dos valores 0 ou 1; ela cabe realmente bem dentro da nossa definição de função, mas não podemos representá-la por uma expressão analítica única.

Esta consideração é suficiente para evidenciar que, embora y seja função de x, não se pode dizer, duma maneira geral, que, recìprocamente, x seja função de y. No exemplo citado, se quiséssemos fazer de y a variável independente, esta só teria os valores 0 e 1, e a cada um dêles corresponderia uma infinidade de valores de x. Nem pela definição antiga, nem, muito menos, pela nova definição, se pode considerar neste caso x como função de y.

Para os antigos, que tinham sempre em mente a representação gráfica das funções, os valores destas eram as ordenadas dos pontos das suas curvas representativas, e os da variável independente, as abscissas. Ora tanto fazia exprimir as ordenadas em função das abscissas como as abscissas em função das ordenadas; donde a noção intuïtiva, que hoje temos que pôr de parte como conseqüência da generalização da noção de função, de que, sendo y função de x, é x, recìprocamente, função de y.

Resulta desta grande generalidade com que apresentamos a noção de função, que é impossível estabelecer uma propriedade qualquer que seja aplicável a tôdas as funções em geral. Pode dizer-se que raciocínio algum é factível sem que se parta de hipóteses restritivas, que lhe sirvam de base. Somos assim levados a considerar classes de funções, tais como as *funções limitadas*, as *funções integráveis* e tantas outras, conforme as propriedades que lhes atribuímos.

*

* *

Passemos agora à noção de *limite*.

Os antigos partiam da seguinte definição:

Quando uma grandeza variável toma sucessivamente valores que se aproximam cada vez mais duma grandeza constante, de modo que a diferença para com esta se possa tornar e manter menor que qualquer quantidade dada, diz-se que a constante é o *limite* da variável; e isto quer a variável esteja sempre abaixo, sempre acima, ou ora abaixo, ora acima, da constante. E para precisar melhor a noção acrescentava Duhamel nos seus *Éléments de Calcul Infinitésimal* que se a diferença entre a constante e os valores sucessivos da variável, depois de se tornar inferior a uma quantidade designada, se tornar em seguida maior que ela, depois mais pequena, em seguida maior, e assim indefinidamente, a constante não deve ser considerada como limite da variável.

A idea de limite, assim enunciada, parece, à primeira vista, excluir o caso de certas funções que, quando a variável de que dependem varia sempre no mesmo sentido aproximando-se dum número dado, oscilam indefinidamente em tôrno dum valor limite, sendo cada vez menor a amplitude das oscilações; tal é, por exemplo, a função $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, que tende para zero quando x tende para o infinito, e passa e repassa indefinidamente pelo valor zero.

Por outro lado, as expressões *tornar-se* e *manter-se menor*, não traduzidas por símbolos matemáticos, não ofereciam nitidez e precisão suficientes.

Foi para tirar a esta noção tudo o que ela tinha de vago e de impreciso que se adoptou a seguinte definição:

Diz-se que uma variável u, que passa por uma infinidade de valores diferentes

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

tende para um limite A, quando, por menor que seja a quantidade positiva δ, existe sempre um número n_1 tal que, para todos os valores de n superiores a n_1 se tem

$$|A - u_n| < \delta.$$

Tomando esta definição como ponto de partida estabelece-se o teorema de Cauchy, que dá a condição necessária e suficiente para a existência do limite, e baseados nele se deduzem muitos outros princípios que são de uso freqüente na Análise matemática; mas a referida definição ainda se presta a um reparo, que tem, a meu ver, uma grande importância. A maneira como designamos os valores sucessivos da variável, distinguindo-os uns dos outros por índices numéricos, mostra que êsses valores formam uma sucessão numerável; ora, na maior parte das aplicações, a variável, que está em jôgo, passa por uma infinidade de valores contínuos.

É certo que dum conjunto com a potência do contínuo se pode sempre extrair conjuntos numeráveis, e até duma infinidade de maneiras; mas êsses conjuntos numeráveis, ainda que todos tendam para limites, podem ter limites diferentes.

Se considerarmos, por exemplo, a fracção $\frac{1}{x}$, e fizermos crescer x indefinidamente passando por valores que formem um conjunto com a potência do contínuo, poderemos destacar dêsse conjunto uma infinidade de outros, numeráveis, e tais que a todos êles corresponda o limite zero; neste caso compreende-se que se diga que $\frac{1}{x}$ tende para zero quando x cresce indefinidamente, ainda que se suponha que o conjunto dos valores por que passa x tenha a potência do contínuo.

Mas se a variável a considerar se exprime por $(1+x)\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, e queremos o seu limite para $x=0$, podemos fazer

$$x=\frac{1}{2n\pi+\alpha},$$

sendo n um número inteiro, e α um arco qualquer $\gtreqless 0$ e $<2\pi$.

Para cada valor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, atribuído a α, podemos dar a n todos os valores inteiros e positivos desde zero até ao infinito, e extrair, portanto, do conjunto dos valores da variável uma infinidade de sucessões numeráveis:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)\operatorname{sen}\alpha_1,\ \left(1+\frac{1}{2\pi+\alpha_1}\right)\operatorname{sen}\alpha_1,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{2n\pi+\alpha_1}\right)\operatorname{sen}\alpha_1,\ \ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_2}\right)\operatorname{sen}\alpha_2,\ \left(1+\frac{1}{2\pi+\alpha_2}\right)\operatorname{sen}\alpha_2,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{2n\pi+\alpha_2}\right)\operatorname{sen}\alpha_2,\ \ldots,$$

. . . .

Os elementos da primeira sucessão tendem para $\operatorname{sen}\alpha_1$; os da segunda, para $\operatorname{sen}\alpha_2$; e assim sucessivamente. Ao contrário, pois, do que sucedia no exemplo anterior, cada uma destas sucessões tem um limite diferente, e não há pròpriamente limite para a variável quando se restabelece a hipótese dela passar por um conjunto de valores com a potência do contínuo.

Diremos, pois, que uma variável u tende para o limite A, quando, passando por uma sucessão discontínua de valores

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots$$

se verifica a condição

$$|A-u_n|<\delta$$

para $n>n_1$; ou quando, passando por uma infinidade contínua de valores, tôdas e quaisquer sucessões numeráveis, que dela se podem extrair, tendem para o limite comum A.

Empregando a linguagem de teoria dos conjuntos, o limite é, no primeiro caso, um *ponto limite* ordinário, e no segundo, um *ponto de condensação*.

Na última hipótese podemos dizer, duma maneira bem expressiva, que a variável tende para um *limite determinado*.

Esta possibilidade de a variável passar, ou não, por uma sucessão de valores que tenham a potência do contínuo, leva-nos a reflectir um pouco na generalidade dos princípios que se estabelecem na teoria dos limites. Eis o facto que me parece mais digno de registo:

Costuma-se demonstrar, como uma conseqüência do teorema de Cauchy, que uma variável que cresce (ou decresce) constantemente, sem nunca exceder (ou se tornar inferior a) um número dado, tende para um limite. O teorema fica assim estabelecido só para o caso das sucessões numeráveis. É, pois, interessante reconhecer que êle é verdadeiro, mesmo que a variável passe por um conjunto de valores que tenha a potência do contínuo; isto é, que os limites de tôdas as sucessões numeráveis, que dêsse conjunto se podem tirar, são, neste caso, necessàriamente iguais entre si.

*

* *

Conhecida a noção de limite, nenhuma dificuldade oferece a de *infinitamente pequeno*. No meu entender, convém reünir num só corpo de doutrina os princípios relativos a essas variáveis, que muitas vezes se encontram dispersos. Refiro-me aos teoremas sôbre a classificação dos infinitamente pequenos, à noção fecudíssima de *infinitamente pequenos equivalentes* e aos princípios relativos à substituïção dos infinitamente pequenos. É muito interessante salientar o quanto tem de relativa a noção de infinitamente pequeno; que a mesma quantidade pode ser considerada como infinitamente pequena, como finita ou como infinitamente grande, conforme a que se toma como infinitamente pequeno de referência. Esta nota tem importância em muitos casos, sobretudo quando se quere determinar os verdadeiros valores de certas expressões que, para dados valores das variáveis, se apresentam sob formas indeterminadas.

*

* *

Examinemos agora a noção de *conjunto limitado*, donde deriva a de *função limitada*, que considero uma das mais importantes de entre tôdas as noções fundamentais da análise moderna.

Seja um conjunto (E) a uma só dimensão.

Se todos os seus elementos são números inferiores a um número fixo L, dizemos que o conjunto é limitado *superiormente* ou *à direita*.

Para estes conjuntos existe sempre um ponto M tal que não há em (E) nenhum elemento maior que M; e por menor que seja o número positivo δ, existe sempre algum elemento de (E) que seja $> M - \delta$ e $\leqq M$.

Anàlogamente, se todos os elementos do conjunto são números superiores a um número fixo l, dizemos que o conjunto é limitado *inferiormente* ou *à esquerda*. E para estes conjuntos existe sempre um ponto m tal que não há em (E) nenhum elemento menor que m; e, por menor que seja o número positivo δ, existe sempre algum elemento de $(E) \geqq m$ e $< m + \delta$.

O número M, *limite superior*, é a fronteira comum do conjunto (E_1), formado por todos os números maiores do que todos os elementos de (E), e do seu conjunto complementar (C_1); e o número m, *limite inferior*, a fronteira comum do conjunto formado por todos os números menores do que todos os elementos de (E) e do seu conjunto complementar.

Referir-me hei agora em especial ao limite superior, porque o que se diz dêle aplica-se *mutatis mutandis* ao limite inferior.

Da própria definição dêsse número se conclue que êle pode pertencer, ou não, ao conjunto que se considera, ou, por outras palavras, que pode ser, ou não, *atingido*. Com efeito, por definição de ponto fronteira, M tanto pode pertencer ao conjunto (E_1) como ao seu complementar (C_1), e se pertence a (E_1) não pertence a (E). Fazendo parte de (C_1), ainda pode não pertencer a (E), visto que todos os pontos de (E) são pontos de (C_1), mas pode suceder que nem todos os pontos de (C_1) sejam pontos de (E). E vem a propósito dizer que, se alguns autores, como o sr. Jordan, consideram sinónimas as designações de *limite superior* ou *máximo*, por um lado, e de *limite inferior* ou *mínimo*, por outro, eu inclino-me de preferência para a maneira de ver dos que só consideram os limites, superior e inferior, como máximo, ou mínimo, quando são atingidos.

A grande variedade e importância das teorias, em que intervem a noção do conjunto limitado, têm-me convencido da conveniência de insistir um pouco no estabelecimento desta noção, apreciando-a sob todos os espectos por que pode ser analisada.

Assim, examinando a possibilidade de o limite superior ser, ou não, atingido, três casos se podem dar:

1.º O limite M é atingido, mas existe um número δ suficientemente pequeno para que entre M e $M - \delta$ não haja nenhum elemento do conjunto;

2.º O limite M não é atingido, mas por menor que seja o número positivo δ, existe sempre algum elemento do conjunto entre M e $M - \delta$;

3.° O limite M é atingido, e, por menor que seja o número positivo δ, existe sempre algum elemento do conjunto entre M e $M-\delta$.

Interessa, pois, poder conhecer, tendo em atenção as aplicações:

a) Se, sendo o limite M atingido, existe, ou não, algum elemento do conjunto compreendido entre M e $M-\delta$, por menor que seja δ; ou

b) Se, existindo sempre algum elemento do conjunto entre M e $M-\delta$, por menor que seja δ, M pertence, ou não, ao conjunto.

Na primeira hipótese a resposta é evidentemente afirmativa se o conjunto é denso nas vizinhanças de M, porque então entre qualquer elemento do conjunto situado nessas vizinhanças e o próprio M pode-se sempre intercalar um terceiro elemento, e portanto uma infinidade.

Mas esta condição da densidade do conjunto, que é suficiente, não é de modo algum necessária. Se o conjunto é perfeito, todos os seus pontos (e portanto M) são pontos limites. A condição de haver elementos entre M e $M-\delta$ verifica-se necessàriamente. Ora um conjunto pode ser perfeito e não ser denso em intervalo algum; é o que sucede, por exemplo, ao conjunto de tôdas as fracções decimais, limitadas ou não, que se escrevem com os algarismos 0 e 1, ou ao conjunto de tôdas as fracções contínuas ilimitadas em que figura um número limitado de quocientes incompletos diferentes.

Mas a condição de o conjunto ser perfeito, ou concentrado, também não é necessária, porquanto pode o conjunto ser fechado e M ser um dos seus pontos limites. Entretanto, o ser o conjunto simplesmente fechado não é condição suficiente, pois que nos conjuntos fechados há pontos que não são pontos limites, e M pode ser precisamente um dêsses pontos.

Na segunda hipótese, M é necessàriamente atingido se o conjunto é fechado, pois que é um ponto limite do conjunto, e êste abrange todos os seus pontos limites. Mas a condição de o conjunto ser fechado não é necessária, pois que, sendo concentrado, pode o ponto M ser precisamente um dos pontos comuns a êsse conjunto e ao seu derivado.

Resulta desta discussão que só para os conjuntos perfeitos limitados superiormente é que podemos afirmar *à priori* que o limite superior M goza das três seguintes propriedades:

1.ª Não há no conjunto nenhum elemento maior que M;

2.ª Há no conjunto um elemento igual a M; e

3.ª Por menor que seja o número positivo δ, existe sempre no conjunto algum elemento compreendido entre M e $M-\delta$.

A questão de um limite ser, ou não, atingido pode apresentar-se sob uma modalidade diferente na forma, pôsto que equivalente no fundo. O limite superior, por exemplo, é atingido, quando há no conjunto um elemento que é maior do que todos os outros; não é atingido no caso contrário. Esta última hipótese pode exemplificar-se com o conjunto dos números irracionais compreendidos entre o e 1, o qual tem evidentemente 1 como limite superior não atingido. Por mais próximo que um dêstes números irracionais esteja da unidade, entre êle e 1 pode sempre intercalar-se um terceiro, o que mostra a impossibilidade de haver no conjunto um elemento maior do que todos os outros. O primeiro caso verifica-se com o conjunto dos números reais compreendidos entre o e 1 no sentido lato, onde existe o elemento 1, maior do que todos os outros, que é um limite superior atingido.

*

* *

Não vale a pena demorar-me na generalização da noção de conjunto limitado aos conjuntos a qualquer número de dimensões, nem insistir na noção de função limitada, no conjunto em que é definida; nenhum dêstes conceitos dá lugar a considerações especiais.

Referir-me hei, apenas, à conveniência de acentuar bem, para vincar nìtidamente o que seja uma *função limitada*, que, para que uma função seja limitada não basta que não se torne infinita. Uma função $f(x)$, definida no conjunto dos números reais, de modo que, para $x=0$, se tenha $f(0)=0$, e, em todos os outros pontos, $f(x)=\frac{1}{x^2}$, não é infinita em ponto algum, mas nas vizinhanças do ponto o pode tomar um valor tão grande quanto se queira, e por conseguinte maior do que qualquer número dado.

Esta particularidade curiosa, de uma função poder não ser limitada sem se tornar infinita, não custa a conceber, dada a generalidade com que se estabelece a noção de função; mas é útil ponderar que essa particularidade pode dar-se mesmo com as funções que são susceptíveis duma representação analítica, sempre a mesma, em todos os pontos do conjunto em que são definidas.

Consideremos, por exemplo, a série

$$\varphi(x)=x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x^2)^n}+\cdots$$

cuja soma é zero para $x=0$, e

$$x+\frac{1}{x},$$

para qualquer outro valor de x.

Como a função, que ela define, é impar, poderemos limitar-nos a considerar os valores positivos de x. Dado, então, um número positivo N, tão grande quanto se queira, basta atribuir a x um valor que torne $\frac{1}{x}>N$ $\left(\text{ou } x<\frac{1}{N}\right)$ para que se tenha, por maioria de razão, $\varphi(x)>N$, donde se conclui que $\varphi(x)$ não é limitada. Mas esta função também não pode tornar-se infinita, porque isso só poderia verificar-se para $x=0$, e neste caso $\varphi(x)$ anula-se.

*

* *

A noção de função limitada, conjugada com a de conjunto mensurável, permite estabelecer desde logo a noção de *integral definido* com uma grande generalidade. Em vez de se iniciar o estudo da integração pelos integrais ordinários das funções contínuas, pode começar-se pelos *integrais de Darboux*, donde se passa imediatamente para o *integral de Riemann* e para as *funções integráveis*. Assim, com o mesmo trabalho, estabelece-se a noção de integral estendida a um domínio a qualquer número de dimensões, e sem nos prendermos com a continuïdade da função integranda. E a própria condição de integrabilidade nos permite associar desde logo às funções contínuas, dentro do conjunto das funções integráveis, outra classe importante, a das *funções de variação limitada.*

*

* *

A noção de *continuïdade* é uma daquelas que mais têm evolucionado. O célebre aforismo — *natura non facit saltus* — que por tanto tempo reinou como verdade incontroversa, fez crer aos homens de sciência que a continuïdade se manifestava em todos os fenómenos naturais, e que era por isso mesmo, salvo pontos isolados, uma propriedade intrínseca das funções que relacionam analìticamente os elementos dêsses fenómenos. Admitia-se *à priori* a existência da continuïdade, ligando-a até indissolùvelmente à existência da derivada. Hoje sabe-se que há funções contínuas que não têm derivada em ponto algum, e outras que num intervalo finito não têm derivada num número infinito de pontos.

O alargamento da primitiva noção de função colocou a continuïdade no número das propriedades que tanto podem verificar-se como não, de sorte que as funções, em que ela se manifesta, constituem apenas uma classe entre a infinidade de classes diferentes em que tôdas as funções possíveis se poderiam distribuir. Sabe-se mesmo que, ao passo que as funções contínuas formam um conjunto com a potência do contínuo, as funções, que apresentam discontinuïdades, formam um conjunto com uma potência superior.

Livros antigos, de há 50 anos a esta parte, ainda definiam a continuïdade dizendo que uma *variável é contínua* quando não pode passar dum valor para outro sem passar por todos os valores intermédios; e que uma *função* é contínua quando, fazendo variar duma maneira contínua as variáveis de que depende, ela varia também duma maneira contínua, isto é, não passa dum valor para outro sem passar por todos as valores intermédios.

Como conseqüência desta definição mostrava-se que, sendo $f(x)$ uma função contínua de x num intervalo dado, a acréscimos infinitamente pequenos dados a x nesse intervalo correspondem acréscimos infinitamente pequenos de $f(x)$. Ora é fácil apresentar funções que, num intervalo determinado, passem por todos os valores compreendidos entre dois números dados, e tais que a um acréscimo infinitamente pequeno dado a um valor da variável compreendido nesse intervalo corresponda um acréscimo finito da função. É o que se dá com a expressão

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{x + I\left(\frac{1}{1+x^2}\right)},$$

em que o símbolo $I(z)$ designa o maior número inteiro contido em z. Esta função, no intervalo de -2 a $+2$ passa por todos os valores compreendidos entre -1 e $+1$; anula-se para $x=0$; e para valores de x infinitamente próximos de zero pode tomar valores finitos.

Hoje exprime-se a continuïdade da função $f(x)$ no ponto x_0 por meio das desigualdades

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| < \delta$$

para

$$|h| < \varepsilon,$$

que se podem condensar na expressão única

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

ou, o que é o mesmo,

$$\lim_{x=x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mas para que haja realmente continuïdade é preciso que estas condições se verifiquem qualquer que seja a lei segundo a qual h tende para zero (ou x para x_0).

Para apresentar esta noção com todo o rigor exigível, pondo as coisas no seu verdadeiro pé, isto é, para dar a impressão de que a continuïdade é uma propriedade tão precária como qualquer outra, pode proceder-se assim:

Por meio de exemplos simples é fácil mostrar que nem sempre se tem

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

qualquer que seja a sucessão de valores por que passa h ao tender para zero, ou que $f(x)$ nem sempre converge para um limite determinado quando x tende para x_0. Nesse pressuposto, diz-se que a função $f(x)$ é indeterminada no ponto x_0; o limite superior e o limite inferior dos valores para que tende $f(x)$ quando x tende para x_0 passando por valores superiores a x_0, dizem-se o *limite superior de indeterminação* e o *limite inferior de indeterminação* à direita do ponto x_0. Podemos afirmar que estes números existem sempre, porque, se o conjunto daqueles valores é limitado, os limites de indeterminação são os limites do próprio conjunto; se não é limitado, dizemos que são iguais a $\pm\infty$. Do mesmo modo, o limite superior e o limite inferior dos valores para que tende $f(x)$ quando se faz tender x para x_0 passando por valores inferiores a x_0, limites que também podemos considerar sempre existentes, são o *limite superior de indeterminação* e o *limite inferior de indeterminação* à esquerda do mesmo ponto.

É o que se pode exemplificar com as funções sen $\frac{1}{x}$, ou tang $\frac{1}{x}$. Estas funções são indeterminadas no ponto zero, e quando se faz tender x para zero, os limites superiores e inferiores de indeterminação, à direita e à esquerda do mesmo ponto, são, respectivamente, ± 1 para a primeira e $\pm\infty$ para a segunda.

Pode suceder que os dois limites de indeterminação à direita sejam iguais entre si, ou, por outras palavras, que $f(x)$ tenda para um limite determinado quando x tende para x_0 passando por valores superiores a x_0. Êsse limite designa-se, como é sabido, por $f(x_0+0)$, reservando-se o símbolo $f(x_0)$ para exprimir o valor que toma $f(x)$ no ponto x_0.

Do mesmo modo pode acontecer que os dois limites de indeterminação à esquerda sejam iguais entre si, ou, o que é o mesmo, que $f(x)$ tenda para um limite determinado quando x tender para x_0, passando por valores menores do que x_0. Êsse limite exprime-se, como se sabe, por $f(x_0-0)$.

Os três números $f(x_0+0)$, $f(x_0)$ e $f(x_0-0)$ podem ser todos diferentes; ou dois iguais e o terceiro diferente; ou todos iguais. E o caso intermédio ainda se decompõe em três, que tantas são as combinações distintas de 3 objectos tomados 2 a 2.

A consideração da questão sob êste aspecto geral é conseqüência forçada da idea que formamos de função, e nada mais fácil do que mostrar com exemplos concretos a possibilidade de tôdas estas hipóteses se verificarem.

Se não existe, ou é infinito, qualquer dos três números $f(x_0+0)$, $f(x_0)$ e $f(x_0-0)$, ou se, existindo com valores finitos, não são todos três iguais entre si, diz-se que a função $f(x)$ é *discontínua* no ponto x_0, ou que x_0 é um *ponto de discontinuïdade* de $f(x)$.

No caso particular de ser

$$f(x_0+0)=f(x_0)\gtrless f(x_0-0),$$

a função $f(x)$ é *semicontínua à direita* do ponto x_0; sendo

$$f(x_0-0)=f(x_0)\gtrless f(x_0+0),$$

$f(x)$ é *semicontínua à esquerda* do ponto x_0; quando se tem, ainda em números finitos,

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0),$$

é então que se diz que a função $f(x)$ é *contínua* no ponto x_0 e que x_0 é um *ponto de continuïdade* da mesma função.

A continuïdade de $f(x)$ no ponto x_0 pressupõe conseguintemente a verificação das quatro seguintes condições:

1.ª A existência do número finito $f(x_0+0)$;

2.ª A existência do número finito $f(x_0 - 0)$;
3.ª A igualdade dêstes números; e
4.ª A coïncidência do seu valor comum com $f(x_0)$.

Estabelecida assim a noção da continuïdade, conveniente é identificá-la com estoutra, que às vezes é mais cómoda nas aplicações:

Se $f(x)$ é contínua no ponto x_0, dado um número positivo δ, tão pequeno quanto se queira, existe sempre um número positivo ε tal que, a todos os valores de x compreendidos entre $x_0 - \varepsilon$ e $x_0 + \varepsilon$ correspondem valores de $f(x)$ compreendidos entre $f(x_0) - \delta$ e $f(x_0) + \delta$.

A noção de continuïdade estende-se muito naturalmente às funções de mais duma variável, sem que seja necessário fazer considerações especiais sôbre o assunto.

*

* *

Definida a continuïdade num ponto, segue-se examinar o que deva entender-se por continuïdade duma função em todo o conjunto em que é definida.

A maior parte dos autores dizem que uma função é contínua num conjunto quando é contínua em todos os seus pontos. Neste caso, aos diferentes pontos M, M', ... dêsse conjunto correspondem, para um dado valor de δ, determinados números ε, ε', ..., acima dos quais não se verifica a desigualdade:

$$|f(x+h) - f(x)| < \delta.$$

Estes números ε, e ε', ... *(módulos de continuïdade)* podem ter, ou não, um limite inferior η maior que zero; e, se êsse limite existe, tôdas as desigualdades daquela forma, relativas aos diferentes pontos do conjunto, se verificam para

$$|h| < \eta.$$

Neste caso a continuïdade diz-se *uniforme*, e η é o *módulo da continuïdade uniforme* correspondente ao valor considerado de δ.

Outros autores só consideram contínua a função num conjunto quando existe êsse limite η diferente de zero; isto é, quando os primeiros consideram uniforme a continuïdade.

Quanto a mim, por coerência, prefiro o primeiro modo de ver.

Voltando, por exemplo, à série

$$x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x^2)^n}+\cdots$$

reconheço que ela é convergente para qualquer valor de x, mas que não é uniformemente convergente num intervalo que contenha o ponto zero: não digo, porém, que ela seja divergente neste ponto. Por analogia, dada uma função, que é contínua em todos os pontos dum conjunto, mas para a qual os respectivos módulos de continuïdade tem um limite inferior nulo, não digo que ela não seja contínua nesse conjunto; digo que é contínua, embora junte que não o é uniformemente.

*

* *

A questão da continuïdade num conjunto leva-nos assim ao conceito abstracto da *uniformidade*, que desempenha um papel muito importante em várias teorias, e designadamente na das funções definidas por séries ou por integrais.

*

* *

Assim como as funções contínuas estão incluídas no conjunto das funções integráveis, assim também as funções deriváveis estão incluídas no conjunto das funções contínuas.

No estabelecimento da noção de derivada acho conveniente seguir-se o critério indicado para a continuïdade, para dar desde logo a noção nítida, de que as funções que admitem derivada, constituem apenas uma classe dentro do conjunto de tôdas as funções possíveis.

A noção fundamental da teoria da derivação é evidentemente a noção de *derivada* num ponto duma função duma só variável.

Suponhamos então uma função $f(x)$, duma só variável x, definida num intervalo (E).

Sendo x_0 um ponto dêsse intervalo, admitamos que damos a x_0 acréscimos h tais que os pontos x_0+h ainda pertençam ao mesmo intervalo.

De cada um dêstes acréscimos h dados a x_0 advém para a função um acréscimo

$$f(x_0+h)-f(x_0),$$

e pode suceder que a razão

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

não tenda para um limite determinado quando h tender para zero. Neste caso os limites, superior e inferior, de indeterminação, à direita e à esquerda do ponto x_0, tomam, respectivamente, os nomes de *números derivados*, superiores e inferiores, à direita e à esquerda dêsse ponto.

É o que se dá com a função

$$f(x)=x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

no ponto 0; e os seus números derivados nesse ponto são, como é fácil de ver, $+1$ os dois superiores e -1 os dois inferiores.

Se os dois números derivados à direita (ou à esquerda) são iguais entre si, diz-se que a função $f(x)$ tem no ponto x_0 uma *semiderivada à direita* (ou à esquerda). É o caso de

$$f(x)=(x-a)\, e^{-\frac{1}{x-a}},$$

que tem uma semiderivada nula à direita do ponto a, e uma semiderivada infinita à esquerda do mesmo ponto.

Se no ponto x_0 existem as duas semiderivadas, e são iguais entre si, diz-se que o seu valor comum é a derivada de $f(x)$ no ponto x_0. A derivada de $f(x)$ no ponto x_0, quando existe, é então o limite determinado para que tende

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

quando h tende para zero passando por uma sucessão de valores quaisquer.

Se aquela razão cresce indefinidamente quando h tende para zero, ainda se diz que existe derivada, mas que esta derivada é infinita.

Estabelecida a noção de derivada num ponto, passa-se imediatamente para a de *função derivada* ou simplesmente *derivada* duma função num intervalo, e prova-se que tôda a função, que admite derivada, é contínua nos pontos em que a derivada é finita.

A existência da derivada finita pressupõe, conseguintemente, a verificação das quatro condições que caracterizam a continuïdade; mas é preciso juntar-lhes mais uma, que é a de o acréscimo da função ser da mesma ordem que o acréscimo da variável, salvo os pontos em que a derivada é nula.

*
* *

Da noção de derivada passa-se para a de *diferencial*, cujo significado e importância são manifestos, depois das propriedades, que já se conhecem, dos infinitamente pequenos equivalentes. E estas noções fàcilmente se generalizam ao caso das funções definidas num domínio a qualquer número de dimensões, tendo em vista a definição de variáveis independentes, o que conduz às noções de *derivada parcial* e de *diferencial total*.

Por outro lado, a consideração dos integrais definidos de limite superior variável leva-nos à noção de *integral indefinido*, ou a uma primeira noção de *função primitiva*, e à relação de reciprocidade, ou antes de inversão, que existe entre o cálculo diferencial e o cálculo integral, e que tão grande papel desempenha nos raciocínios subseqüentes.

*
* *

Ocioso será encarecer a conveniência de interpretar geomètricamente estas noções, sobretudo as de integral definido, de derivada e de diferencial; não só essa interpretação nos permite compreendermos melhor êsses conceitos fundamentais, como também, conjugada com a noção de *diferencial dum arco de curva*, é o ponto de partida de tôdas as aplicações geométricas do cálculo infinitesimal.

*
* *

As considerações feitas reportam-se às funções de variáveis reais; mas as noções fundamentais, que temos considerado, são o alicerce de todo o edifício do cálculo, e pode dizer-se que, para penetrarmos nas vastas dependências da análise moderna, em que as funções de variáveis imaginárias desempenham um importantíssimo papel, só nos falta uma noção fundamental, a de *função analítica* ou *monogénea* de variável imaginária.

Por muito tempo consideraram-se idênticas as funções de variável complexa que Cauchy chamou *monogéneas*, e as que Weierstrass denominou *analíticas;* graças, porém, aos trabalhos do sr. Borel, está averiguado que os domínios de Weierstrass não são os domínios mais gerais em que se pode definir uma função monogénea no sentido de Cauchy, donde se depreende a existência de funções monogéneas não analíticas.

O critério de Cauchy reveste, conseguintemente, maior grau de generalidade; tem ainda a seu favor o ser o mais intuïtivo, o mais natural e o que pode assimilar-se com menor preparação.

Como se sabe, diz-se que a expressão

$$P(x, y) + i\, Q(x, y),$$

em que P e Q designam funções reais de x e y, é uma função analítica ou monogénea de $z = x + i\, y$, quando tem derivada em relação a esta variável. As condições necessárias e suficientes para o facto se dar, ou sejam

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

dizem-se as *condições de monogeneidade.*

Sôbre esta definição só tenho que observar que nela se tomam como equivalentes as designações de *analítica* e *monogénea*, que, segundo os recentes trabalhos do sr. Borel, a que já me referi, correspondem na realidade a coisas diferentes. Não vejo, todavia, inconveniente em que elas continuem a usar-se como sinónimas, subentendendo-se que tomamos a designação de função analítica *no sentido de Cauchy.*

*

* *

E tendo assim passado em ligeira revista as noções fundamentais da anàlise infinitesimal, porei têrmo às minhas considerações para não fatigar mais a atenção dos meus ouvintes.

O programa traçado está cumprido. Apenas lamento não ter podido explaná-lo com maior proficiência, ou que não fôsse pessoa mais autorizada quem, perante esta douta assemblea, desenvolvesse, sob todos os seus aspectos, os temas importantes em que ao de leve toquei.

1921, Junho.

SOBRE O DETERMINANTE DE RONSKY

PELO

DR. PACHECO DE AMORIM

PROPOSIÇÃO 1.ª

Seja

$$R = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

um determinante de Ronsky e

$$R_1 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1' & A_2' & \dots & A_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(n-1)} & A_2^{(n-1)} & \dots & A_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

outro determinante do mesmo tipo, formado com os complementos algébricos dos elementos da última linha do 1.º Digo que

$$R_1 = R^{n-1}.$$

*

* *

Com efeito, por força das propriededes dos menores dum determinante qualquer, é:

$$(1) \quad \begin{cases} (1) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j)} = 0 & (j < n-1) \\ (2) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(n-1)} = R. \end{cases}$$

Derivando a equação (1), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} + \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(j)} = 0. \qquad [(j < n-1)$$

Mas, em virtude da mesma equação (1),

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} = 0$$

para todos os valores de j, tais que $j+1 < n-1$; e, em virtude (2),

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} = R$$

para $j+1 = n-1$.

Logo

$$(2) \qquad \begin{cases} (3) & \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(j)} = 0 & (j < n-2) \\ (4) & \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(n-2)} = (-1) \cdot R. \end{cases}$$

Derivando as equações (3) e procedendo do mesmo modo, obtemos o systema

$$(3) \qquad \begin{cases} (5) & \sum_{i=1}^{n} A_i'' u_i^{(j)} = 0 & (j < n-3) \\ (6) & \sum_{i=1}^{n} A_i'' u_i^{(n-3)} = (-1)^2 \cdot R. \end{cases}$$

É manifesto que, procedendo desta forma k vezes, obtemos o sistema

$$(k+1) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i^{(k)} u_i^{(j)} = 0 & (j < n-k-1) \\ \sum_{i=1}^{n} A_i^{(k)} u_i^{(n-k-1)} = (-1)^k \cdot R. \end{cases}$$

Seguindo com estas operações até $k = n-1$, obtemos a equação final

$$(n-1) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n-1)} u_i = (-1)^{n-1} \cdot R.$$

Posto isto, multipliquemos os determinantes propostos R e R_1, linha a linha. Se dispuzermos os resultados obtidos em colunas, vir-nos há

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1' & A_2' & \dots & A_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(n-1)} & A_2^{(n-1)} & \dots & A_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} O & O & \dots & O & \mp R \\ O & O & \dots & \pm R & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & -R & \dots & * & * \\ R & * & \dots & * & * \end{vmatrix},$$

onde os asteriscos representam elementos que não importam ao valor do produto.

Na verdade, multiplicando os elementos da primeira linha de R_1 pelos elementos das diversas linhas de R, obtemos os primeiros membros das equações do sistema (1) e foi com os segundos membros destas equações que formámos a primeira coluna do determinante produto. E da mesma forma se obtiveram as restantes colunas do produto à custa das equações dos sistemas (2), (3), etc.

O desenvolvimento dêste determinante produto dá lugar a um só termo, cujo sinal é dado pelo factor $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$, por ser n a ordem suposta de R.

Por sua vez os elementos que entram neste termo são

$$R, \quad (-1)R, \quad (-1)^2 R, \quad \dots \quad (-1)^{n-1} R,$$

elementos cujo produto é

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot R^n.$$

Donde concluimos que

$$R_1 \cdot R = R^n$$

e que

$$R_1 \equiv R^{n-1},$$

c. d. d.

Corolário 1.º — Se o determinante R for nulo ou constante, o determinante R_1 também o será, e recìprocameute.

Corolário 2.º — Se for nulo o complemento algébrico de um elemento qualquer da última linha do determinante de Ronsky, êste determinante também o será.

Corolário 3.º — Se dois quaisquer elementos

$$A_1 A_2 \ldots A_n,$$

de R_1 forem constantes, ou se três quaisquer dos mesmos elementos forem funções lineares da variavel independente x, ou quatro forem polinómios do segundo gráu em x, etc., R_1 e R serão nulos, como é fácil de ver.

Corolário 4.º — Do corolário 2.º deduz-se ainda que será nulo qualquer determinante de Ronsky em que seja nulo o complemento algébrico de um menor qualquer contido nas suas últimas linhas; ou por outra, o determinante de Ronsky será nulo se também o for um menor qualquer contido nas primeiras linhas.

Seja, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nesta suposição diremos que

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ u''_1 & u''_1 & u''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

pelo corolário 2.º

E, continuando desta sorte, chegamos por fim à igualdade

$$R = 0.$$

Scólio. — É de notar que os elementos

$$u_1 \, u_2 \, \ldots \, u_n$$

satisfazem, como já vimos, ao seguinte sistema:

$$\begin{array}{l} A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_n u_n = 0 \\ A'_1 u_1 + A'_2 u_2 + \cdots + A'_n u_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1^{(n-2)} u_1 + A_2^{(n-2)} u_2 + \cdots + A_n^{(n-2)} u_n = 0 \\ A_1^{(n-1)} u_1 + A_2^{(n-1)} u_2 + \cdots + A_n^{(n-1)} u_n = (-1)^{n-1} \cdot R. \end{array}$$

PROPOSIÇÃO 2.ª

Representando por $C[A_k^{(n-1)}]$ o complemento algébrico do elemento $A_k^{(n-1)}$ do determinante R_1, digo que

$$C[A_k^{(n-1)}] = (-1)^{n+1} u_k R^{n-2}.$$

Com efeito,

$$C[A_k^{(n-1)}] = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots A_k & \ldots A_n \\ A'_1 & A'_2 & \ldots A'_k & \ldots A'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1^{(n-2)} & A_2^{(n-2)} & \ldots A_k^{(n-2)} & \ldots A_n^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \ldots 1 & \ldots 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando $C[A_k^{(n-1)}]$ por R, obtemos

$$C[A_k^{(n-1)}]\cdot R \equiv \begin{vmatrix} O & O & \dots & O & u_k \\ O & O & \dots & \pm O & u_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & -R & \dots & * & u_k^{(n-2)} \\ R & * & \dots & * & u_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} O & O & \dots & \pm R \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ O & -R & \dots & * \\ R & * & & * \end{vmatrix} . u_k$$

$$\equiv (-1)^{n+1} R^{n-1} \cdot u_k.$$

Donde se conclue que

$$C[A_k^{(n-1)}] \equiv (-1)^{n+1} \cdot u_k \cdot R^{n-2},$$

c. d. d.

PROPOSIÇAO 3.ª

Representando por

$$C\begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

o complemento algébrico do menor

$$\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

contido nas duas *últimas* linhas de R_1, digo que

$$C\begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix} = (-1)^{2(n+1)} \cdot R^{n-3} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & u'_k \end{vmatrix}.$$

Com efeito,

$$C\begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix} . R \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} A_1 \ldots A_j \ldots A_k \ldots A_n \\ A'_1 \ldots A'_j \ldots A'_k \ldots A'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ O \ldots 1 \ldots O \ldots O \\ O \ldots O \ldots 1 \ldots O \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_1 \quad \ldots u_n \\ \\ \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots \\ \\ u_1^{(n-1)} \ldots u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} O & O \ldots & u_j & u_k \\ O & O \ldots & u'_j & u'_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & -R \ldots & u_j^{(n-2)} & u_k^{(n-2)} \\ R & * \ldots & u_j^{(n-1)} & u_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-1)^{2(n+1)} \cdot R^{n-2} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & u'_k \end{vmatrix}.$$

Donde se conclue que

$$C\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix} = (-1)^{2(n+1)} R^{n-3} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & u'_k \end{vmatrix}.$$

c. d. d.

Scólio. — É de notar: 1.º, que os produtos de R_1 por R, e de $C\begin{bmatrix} A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \\ A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \end{bmatrix}$ por R, são determinantes que só diferem pelas duas últimas colunas; 2.º que os menores

$$\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & n'_k \end{vmatrix}$$

são contidos em colunas das mesmas ordens, sendo, porém, o primeiro contido nas duas últimas linhas da R_1 e o segundo contido nas duas primeiras linhas de R. Chamaremos *correspondentes* aos menores de R_1 e de R relacionados pela forma que fica dito, seja qual for a sua ordem.

PROPOSIÇÃO 4.ª

Representando por M um menor qualquer de R_1 contido nas últimas i linhas e em quaisquer i colunas, e por m o menor correspondente do determinante R e ainda por $C[M]$ o complemento algébrico de M, digo que

$$C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} \cdot m \cdot R^{n-i-1}.$$

Com efeito, efectuando o produto $C(M) \cdot R$ como efectuamos o de $C \begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$ por R, obtemos um determinante que só difere do determinante produto de $R_1 \cdot R$ pelas últimas i colunas que são precisamente as i colunas de R em que se contém m.

Desenvolvendo êste determinante em relação aos menores contidos nas suas últimas i colunas, obtém-se um só termo que é

$$\pm m R^{n-i}.$$

Para lhe determinar o sinal, notemos que a paridade dum menor contido nas primeiras i linhas e nas últimas i colunas do determinante de ordem n, é a do número

$$1+2+\cdots+i+(n+n-1+\cdots+n-i+1)=i+ni=i(n+1):$$

ou seja

$$C[M] \cdot R \equiv (-1)^{i(n+1)} \cdot m \cdot R^{n-i};$$

donde se conclue que

$$C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} \cdot m R_1^{n-i-1}$$

c. d. d.

Scólio. — O complemento algébrico de M, $C[M]$ é, com o seu sinal ou com sinal trocado, igual a um menor de R_1 contido nas $n-i$ primeiras linhas. O teorema que acabamos de demonstrar, diz-nos que estes menores admitem como factor a R ou a uma potência de R, logo que a sua ordem seja igual ou superior a duas unidades.

Corolário 1.º — Se R fôr nulo, são nulos todos os menores de R_1 contidos nas suas K primeiras linhas, qualquer que seja $K \geqq 2$.

Corolário 2.º — No caso particular de $K = 2$, teremos:

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j \\ A_i' & A_j' \end{vmatrix} \equiv 0$$

para todos os valores de i e j desde 1 até n.

Corolário 3.º — Mostram-nos estas identidades que se um dos elementos $A_1\, A_2 \ldots A_n$ for constante e diferente de zero, todos os outros elementos serão também constantes, nulas ou não.

Corolário 4.º — Para os valores de i e j tais que A_i' e A_j' sejam diferentes de zero, teremos:

$$\frac{A_i'}{A_i} \equiv \frac{A_j'}{A_j} \equiv \cdots$$

donde se conclue que

$$\frac{A_i}{\alpha_i} \equiv \frac{A_j}{\alpha_j} \equiv \cdots,$$

sendo α_i e $\alpha_j \ldots$ constantes, não arbitrárias, mas perfeitamente determinadas pelas expressões de $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Associando estes resultados com a identidade

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i \equiv 0,$$

obtem-se

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_j \equiv 0$$

que é a bem conhecida relação linear e homogénea existente entre os elementos

$$u_1 u_2 \ldots u_n,$$

do determinante de Ronsky nulo.

PROPOSIÇAO 5.ª

Da relação

$$C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} m R^{n-i-1}$$

demonstrada na proposição 4.ª, deduz-se:

$$M \cdot C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} m M R^{n-i-1}.$$

Somando todas as relações análogas que se obtém com os menores M contidos nas últimas i linhas de R_1, vem:

$$R_1 \equiv (-1)^{i(n+1)} R^{n-i-1} \Sigma m M.$$

E como

$$R_1 \equiv R^{n-1},$$

segue-se que:

$$\Sigma m M \equiv (-1)^{i(n+1)} R^i.$$

No caso particular de $i=1$, esta relação dá-nos a equação

$$\Sigma A_j^{(n-1)} u_j \equiv (-1)^{n+1} R,$$

já por nós determinada na proposição 1.ª

*

* *

Dados que sejam os elementos $u_1 u_2 \ldots u_n$ de R fàcilmente se calculam os elementos $A_1 A_2 \ldots A_n$ de R_1, que são, como dissémos, os complementos algébricos dos elementos da última linha de R.

Dados que sejam os elementos $A_1 A_2 \ldots A_n$ de R_1, também se podem calcular, em geral, os elementos $u_1 u_2 \ldots u_n$ de R, com a auxílio das proposições atrás demonstradas.

Seja

$$(1) \qquad A_1 = \varphi_1(x), \quad A_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots \quad A_n = \varphi_n(x)$$

sendo $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$ funções dadas.

Pedem-se as expressões de $u_1 u_2 \ldots u_n$ em x.

As equações (1) constituem um sistema de equações diferenciais de ordem $n-1$, a n variáveis.

Para o integrar, derivemo-lo $(n-1)$ vezes, o que nos dá o seguinte quadro:

$$\begin{array}{llll}
A_1 & = \varphi_1(x) & \ldots A_n & = \varphi_n(x) \\
A_1' & = \varphi_1'(x) & \ldots A_n' & = \varphi_n'(x) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_1^{(n-1)} & = \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots A_n^{(n-1)} & = \varphi_n^{(n-1)}(x).
\end{array}$$

Multiplicando as equações da primeira coluna por u_1, as da segunda por u_2, ... as da última por u_n, e somando em seguida as equações correspondentes a uma mesma linha, obtemos o seguinte sistema:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l}
\varphi_1(x) u_1 + \varphi_2(x) u_2 + \ldots + \varphi_n(x) u_n = 0 \\
\varphi_1'(x) u_1 + \varphi_2'(x) u_2 + \ldots + \varphi_n'(x) u_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1^{(n-1)}(x) u_1 + \varphi_2^{(n-1)}(x) u_2 + \ldots + \varphi_n^{(n-1)}(x) u_n = (-1)^{n-1} \cdot R,
\end{array} \right.$$

que é formado pelas equações postas em evidência no scólio da proposição 1.ª

Do sistema (1) deduz-se, pois, o sistema (2). Recìprocamente de (2) deduz-se (1), se $R \neq 0$. Para isso basta derivar $(n-1)$ vezes o systema (2) e notar que entre as equações assim obtidas se encontram as do systema:

$$\begin{array}{l}
\varphi_1(x) u_1 + \varphi_2(x) u_2 + \ldots + \varphi_n(x) u_n = 0 \\
\varphi_1(x) u_1' + \varphi_2(x) u_2' + \ldots + \varphi_n(x) u_n' = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1(x) u_1^{(n-1)} + \varphi_2(x) u_2^{(n-1)} + \ldots + \varphi_n(x) u_n^{(n-1)} = R.
\end{array}$$

Daqui se conclue, se for $R \neq 0$, que

$$\varphi_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 & \dots & u_n \\ 0 & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ R & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{R} = A_1.$$

E da mesma forma se obtém as demais equações do systema (1).

No caso de $R \neq 0$, os dois systemas (1) e (2) são, pois, equivalentes e as soluções de um são as do outro.

Mas as soluções de (2) são

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ 0 & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1} R & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} = \frac{R}{R_1} \begin{vmatrix} \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_2^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \end{vmatrix}.$$

Dum modo geral

$$u_k = \frac{(-1)^{n-1} R}{R_1} C[\varphi_k^{(n-1)}],$$

representando por $C[\varphi_k^{(n-1)}]$ o complemento algébrico do elemento $\varphi_k^{(n-1)}(x)$ do determinante do sistema (2) que é R_1.

Como

$$R_1 = R^{n-1},$$

virá:

$$u_k = (-1)^{n+1} \frac{C[\varphi_k^{(n-1)}]}{R^{n-2}},$$

relação esta já achada na proposição 2.ª

Vê-se pois que o sistema (1) proposto, admite um sistema de soluções desprovidas de constantes arbitrárias, se $R_1 \neq 0$ e que êsse sistema é único.

No caso de $R_1 = 0$, ou bem se verificam as relações expostas no corolário 2.° da proposição 4.ª, ou não.

Se não, o sistema proposto é incompatível, o que significa que as funções dadas

$$\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \ldots \quad \varphi_n(x)$$

não podem corresponder aos valores dos complementos algébricos dos elementos da última linha dum determinante de Ronsky, porque se correspondessem, de facto, as ditas relações haviam de verificar-se.

Se as ditas relações se verificam, teremos então que

$$\frac{\varphi_1(x)}{\alpha_1} = \frac{\varphi_2(x)}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\varphi_n(x)}{\alpha_n} = \lambda(x)$$

e as equações propostas transformam-se em

$$(3) \qquad A_1 = \alpha_1 \lambda(x); \quad A_2 = \alpha_2 \lambda(x) \quad \ldots \quad A_n = \alpha_n \lambda(x).$$

Destas equações deduz-se, por ser $R = 0$,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0.$$

Ora, do sistema formado por esta equação e por uma qualquer das equações (3), deduzem-se todas as outras equações (3).

Seja, por exemplo,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0 \\ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \ldots & u_n \\ u_2' & u_3' & \ldots & u_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_2^{(n-2)} & u_3^{(n-2)} & \ldots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix} = \alpha_1 \lambda(x). \end{array} \right.$$

Eleminando u_2 entre estas duas equações, obtemos

$$A_2 = \alpha_2 \lambda(x).$$

Eliminando u_3, obtemos

$$A_3 = \alpha_3 \lambda(x);$$

e assim para as demais.

Vê-se, pois, que quaisquer valores de $u_1 u_2 \ldots u_n$ que satisfaçam ao sistema (4), satisfarão a (3). Mas o sistema (4) é indeterminado. Logo (3) também o será.

Em resumo, o sistema (1) de equaçães diferenciais de ordem $(n-1)$ admite um sistema de soluções desprovidas de constantes arbitrárias, caso $R_1 \neq 0$. De contrário, ou é indeterminado, ou incompatível, segundo se verificam ou não as relações

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(x) & \varphi_j(x) \\ \varphi_i'(x) & \varphi_j'(x) \end{vmatrix} = 0$$

que se obtém dando a i e a j todos os valores desde 1 a n.

SOBRE UMA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS RAIZES DA EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

POR

F. GOMES TEIXEIRA

O método dado por J. Walker nos *Proceedings of the London mathematical Society*[1] (t. II, p. 161) para determinar as tangentes à cissoide de Diocle que passam por um ponto dado sugere a seguinte representação geométrica das raizes da equação do 3.° grau.

Seja

$$t^3 + Ht + L = 0 \tag{1}$$

uma equação do 3.° grau dada, e consideremos a cissoide representada pela equação

$$2(x^2 + y^2) = 2ay^2$$

ou paramètricamente

$$x = \frac{2az^2}{1+z^2}, \quad y = \frac{2az^3}{1+z^2}.$$

O circulo representado pela equação

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + m = 0$$

corta a cissoide considerada em quatro pontos correspondentes aos valores de z dados pela equação

$$z^4 - \frac{k}{a} z^3 + \frac{m - 4ah}{4a^2} z^2 + \frac{m}{4a^2} = 0,$$

---

[1] Ver: Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, t. I, pág 4.

e tres dêstes valores serão idênticos aos das raizes da equação (1), se for

$$t^4 - \frac{k}{a}t^3 + \frac{m-4ah}{4a^2}t^2 + \frac{m}{4a^2} = (t-t_0)(t^3 + Ht + L),$$

e portanto

$$\frac{k}{a} = t_0, \quad \frac{m-4ah}{4a^2} = H, \quad L - Ht_0 = 0, \quad \frac{m}{4a^2} = -Lt_0$$

ou

$$t_0 = \frac{L}{H}, \quad h = -a\frac{H+L^2}{H}, \quad k = a\frac{L}{H}, \quad m = -4a^2\frac{L^2}{H}.$$

Logo a equação do círculo (C) que corta a cissoide no ponto correspondente a t_0 e em tres pontos correspondentes aos valores de t que representam as raizes da equação (1) é

$$(2) \qquad H(x^2+y^2) + 2a(H^2+L^2)x - 2aLy - 4a^2L^2 = 0.$$

Observando agora que $\frac{y}{x}t$ e $\frac{L}{H} = t_0$, vê-se que um dos pontos em que o círculo (C) corta a cissoide coincide com um ponto de intersecção desta curva com a recta correspondente à equação

$$(3) \qquad Hy - Lx = 0.$$

Notemos agora que o círculo que entra na definição que Diocles deu da cissoide tem por equação [1]

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

e que esta equação dá

$$x - 2a = -\frac{y^2}{x}.$$

Substituindo na equação (2) êste valor de $x - 2a$ nos termos $2aL^2(x-2a)$ e x^2+y^2 por $2ax$, esta equação toma a

[1] Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, t. I, pág. 1.

forma

$$L^2 y^2 + Lxy - (H + H^2) x^2 = 0,$$

e dá para $\frac{y}{x}$ os valores

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{L}, \quad \frac{y}{x} = -\frac{1+H}{L}.$$

Logo o círculo (2) corta o círculo (4) em dois pontos que coincidem com os pontos em que êste último círculo é cortado pelas rectas representadas pelas equações

$$(5) \qquad Ly - Hx = 0, \quad Ly + (H+1)x = 0.$$

Portanto as rectas (3) e (5) cortam, a primeira a cissoide e as duas últimas o círculo que entra na sua definição, em três pontos que determinam o círculo (C), que corta a mesma cissoide em três novos pontos que determinam tres rectas que passam pelo ponto de reversão da cissoide e cujos coeficientes angulares representam as raizes da equação (1).

Convem notar que uma mesma cissoide serve para tôdas as equações.

Apliquemos esta doutrina à concoide de Nicomedes representada pela equação

$$\rho = \frac{h}{\cos\theta} + k.$$

Os pontos de inflexão de um ramo correspondem aos valores de C que satisfazem à equação [1]

$$(6) \qquad 2\rho^3 - 3h^2\rho - a^2k = 0,$$

e os do outro ramo aos valores de ρ que satisfazem à equação

$$(7) \qquad 2\rho^3 - 3h^2\rho + a^2k = 0.$$

Pondo $\rho = ht$ a primeira destas equações toma a forma

$$(8) \qquad 2ht^3 - 3ht - k = 0.$$

Aplicando as fórmulas dadas anteriormente, pondo $H = -\frac{3}{2}$,

---

[1] Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, t. 1, pág. 262.

$L = -\frac{k}{2h}$, temos a regra seguinte para determinar os pontos de inflexão do ramo considerado da concoide:

Trace-se uma cissoide de Diocles cujo ponto de reversão e cujo eixo coincidam com o ponto duplo O e com o eixo da concoide dada, e depois tirem-se pelo ponto O as rectas representadas pelas equações

$$3hy - kx = 0, \quad 3hx + ky = 0, \quad ky + hx = 0$$

as quais passam respectivamente pelos pontos $(3h, k)$, $(k, 3h)$, $(k, -h)$. Pelo ponto onde a primeira corta de novo a cissoide e pelos pontos onde as outras cortam de novo o círculo que entra na definição da cissoide descrevamos uma circunferência, a qual corta a cissoide em três novos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Os coeficientes angulares das rectas que passam por estes pontos e por O representam as raizes da equação (8), e, representando por ρ', ρ'', ρ''' as raizes da equação (6), temos as relações

$$\rho' = h\frac{y_1}{x_1}, \quad \rho'' = h\frac{y_2}{x_2}, \quad \rho''' = h\frac{y_3}{x_3},$$

que mostram que a perpendicular ao eixo da cissoide tirado pelo ponto $(h, 0)$ corta as rectas que passam pelo vértice da concoide e pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) nos pontos cujas ordenadas representam as raizes da equação (6).

Do mesmo modo se acham os pontos de inflexão que existem no outro ramo da concoide.

Os pontos de inflexão da concoide de Nicomedes foram determinados por Huygens, Sluze, etc., por meio das cónicas. O método que acabamos de expor parece-nos mais simples.

A NUMERAÇÃO FRACCIONÁRIA
NO PAPIRO DE RHIND
E EM HERÃO DE ALEXANDRIA

POR

FERNANDO DE VASCONCELOS

Professor de Cálculo Diferencial, Integral e de Probabilidades
no Instituto Superior de Agronomia

I

O *Manual do Calculador egípcio*, traduzido e comentado, há pouco mais de quarenta anos por Augusto Eisenlohr [1], pertence, como é sabido, à colecção Rhind conservada no *Bristish Museum* e foi escrito 1700 a 2000 anos a. J. C. por Ahmes, célebre escriba ou sacerdote que, sob o título *Instrucções para conhecer todas as coisas secretas*, apresenta um sumário de regras e de questões, com uma colecção de problemas de aritmética e de geometria, cujo valor é de excepcional importância na história das matemáticas, porque nos dá directamente uma idea dos conhecimentos matemáticos dos antigos Egipcios, e nos mostra, como não eram exagerados os louvores que os autores gregos e latinos, consagravam neste particular ao Egipto, que, ainda no século IV a. J. C., decorridos perto de 200 anos sôbre a fundação das Escolas jónica e pitagórica, era considerada pelos Gregos, como uma escola importante de matemáticas e de conhecimentos humanos, que todo o sábio devia conhecer e directamente consultar.

Trata a primeira parte do *Manual de Ahmes* da redução de fracções $\frac{2}{n+1}$, em que n toma todos os valores inteiros desde 1 a 49, numa soma de fracções tendo tôdas por nu-

---

(1) A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (1.ª ed., Leipzig, 1877; 2.ª ed., 1891); Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1880.

merador a unidade, fracções estas que, para distinguir das fracções ordinárias da forma moderna, de numerador e denominador inteiros, mas quaisquer, chamaremos *fracções elementares* ou, com os autores ingleses e americanos, *fracções primárias* ou ainda, como Loria (1), *fracções fundamentais*. A redução é feita sem que se indique o método ou regra usada na decomposição das fracções, apresentando, como se verifica da célebre Memória de Paul Tannery, intitulada *Questões heronianas* (2) em que o assunto é larga e profundamento estudado, os resultados que seguem:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6},$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$
$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18},$$
$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66},$$
$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104},$$
$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30},$$
$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68},$$
$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114},$$
$$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42},$$
$$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276},$$
$$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75},$$
$$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54},$$
$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232},$$
$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155},$$
$$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66},$$
$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42},$$
$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296},$$
$$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78},$$
$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328},$$
$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301},$$
$$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90},$$
$$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470},$$
$$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196},$$

(1) Gino Loria, *Le scienze esatte nell'Antica Grecia* (2.ª ed., Milano, 1914).

(2) *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2.ª série, t. VIII, 1884); Paul Tannery, *Memoires scientifiques* publiés par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen (t. 2.º, 1912).

$$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102},$$

$$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795},$$

$$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330},$$

$$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114},$$

$$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531},$$

$$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610},$$

$$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126},$$

$$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195},$$

$$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536},$$

$$\frac{2}{69}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138},$$

$$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710},$$

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365},$$

$$\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150},$$

$$\frac{2}{77}=\frac{1}{44}+\frac{1}{308},$$

$$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790},$$

$$\frac{2}{81}=\frac{1}{54}+\frac{1}{162},$$

$$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498},$$

$$\frac{2}{85}=\frac{1}{51}+\frac{1}{255},$$

$$\frac{2}{87}=\frac{1}{58}+\frac{1}{174},$$

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890},$$

$$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130},$$

$$\frac{2}{93}=\frac{1}{62}+\frac{1}{186},$$

$$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{576},$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},$$

$$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}.$$

Apresentada assim a Tábua de Ahmes, é interessante procurar saber quais as regras que presidiram à sua elaboração, interêsse que sobe de ponto, tornando mesmo necessário um estudo aprofundado do assunto, quando, como diz P. Tannery, na Memória citada, quisermos estabelecer o termo de comparação com as sucessões de fracções elementares, na Escola heroniana. De facto, Tannery na sua Memória, intitulada *L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (1) mostrou que o modo de extracção das raízes quadradas incomensuráveis na Escola heroniana está intimamente ligado ao sis-

(1) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (2.ª série, t. IV, 1882); P. Tannery, t. 1.º, pág. 182-225.

tema de representação das fracções por uma sucessão de fracções primárias; e, «ao reünir algumas observações sôbre a história dêste sistema», escreve ([1]):

«Na verdade, as questões, a que dá origem o emprêgo dêste sistema dos Egípcios, constituem assunto quási completamente esgotado, quer por M. Cantor, na exposição feita no primeiro capítulo dos seus *Vorlesungen*, quer por F. Hultsch, no trabalho da confrontação do original com esta Obra. Mas, ainda que eu venha a limitar-me a repetir pouco mais ou menos o que já foi dito por estes dois ilustres sábios, julgo indispensável fazê-lo, para bem estabelecer o termo de comparação com as sucessões de fracções primárias na Escola heroniana».

A importância, pois, do estudo da numeração fraccionária do papiro de Rhind está, pelo que se acaba de dizer, perfeitamente afirmada, e, pela autoridade incontestada do seu autor, inteiramente comprovada. Por outro lado, o mesmo ilustre sàbio P. Tannery, geómetra eminente, cuja obra scientífica é verdadeiramente notável no estudo das sciências exactas na antiguidade, na já referida Memória *L'Arith. des Grecs dans Héron d'Aléxandrie* ([2]), diz:

«A forma que êle emprega — trata-se de Herão — para a redacção, embora inteiramente diferente da dos problemas geométricos euclidianos, é idêntica à que se encontrou num *Manual do Calculador egípcio*, obra que pertence talvez ao décimo quinto século antes da era cristã. Esta identidade de forma supõe, para a maneira de tratar estes problemas, uma tradição escrita ininterrupta, tradição que nos parece, além disso, estabelecida pela existência nas colecções chamadas heronianas de soluções anteriores às determinações exactas, soluções tôdas semelhantes às do *Manual egípcio* acima citado».

E, sôbre as vantagens do emprêgo no cálculo dêste sistema de numeração, lê-se ainda na mesma Memória ([3]):

«Êste sistema de numeração, recebido sem alteração dos calculadores egípcios, como o prova o papiro de Rhind, tem vantagens notáveis, quando, como era de uso, o denominador mais elevado não excede 100; com efeito, com um pouco de prática, chega-se a operar muito ràpidamente a multiplicação por uma fracção elementar, quer dum número inteiro, quer duma outra fracção semelhante. Quanto à adição, para a redução de duas fracções elementares de denominadores iguais

---

([1]) P. Tannery, *Mém. sc.*, t. 2.°, págs. 137-138.
([2]) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 1.°, pág. 198.
([3]) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 1.°, pág. 205.

e ímpares, sabemos, precisamente pelo documento egípcio, que era objecto dum exercício particular. A subtracção exige também alguns artifícios simples; mas, em suma, com êste sistema, a prática das quatro regras é cómoda e a aproximação para as necessidades ordinárias é satisfatória.

«É ùnicamente a existência dêste sistema que devemos ter em vista, para o objectivo das nossas investigações, e devemos primeiramente preguntar: ¿admitido um tal modo de numeração, como procederiamos *naturalmente* para prosseguir à extracção duma raiz quadrada cuja parte inteira estivesse já determinada?»

O que acabamos de transcrever é suficiente para comprovar como o sistema de numeração fraccionária com fracções tendo tôdas por numerador a unidade, herdado dos Egípcios, dominou, por largos séculos no cálculo aritmético dos Gregos, que, não obstante conhecerem bem cedo — parece que já desde os fins do século V a. J. C. — o sistema moderno das fracções ordinárias com numerador e denominador qualquer, empregaram quási sempre o primeiro, de preferência, para a representação das fracções, sendo de notar que nos escritos gregos do século XIV, ainda o processo egípcio foi empregado, como se vê na *Geometria* de G. Pediasismos [1], guarda-selos do patriarca de Constantinopla, no reinado de Andrónico II (1328-1341), e nos escritos um pouco posteriores de Isaac Argírio [2].

A êste respeito, lê-se nas *Questões heronianas* [3]:

«O sistema moderno das fracções ordinárias, que se encontra, de facto, empregado concorrentemente com os desenvolvimentos em fracções elementares na colecção dos escritos heronianos, foi imaginado cedo pelos Gregos, como conseqüência das suas especulações sôbre as relações numéricas dos intervalos musicais; parece já conhecido no tempo de Platão e foi empregado já antes de Arquimedes, por Aristarco de Samos, ainda que apenas sob a forma de relação entre dois números.

«Mas o triunfo do novo sistema não foi nunca definitivo na prática dos cálculos: deve-se notar, especialmente, que Ptolemeu, quando não emprega a notação sexagesimal, se serve, de preferência, do antigo processo para a representação das fracções. Diofanto mesmo parece tê-lo empregado em-

---

(1) *Joannes Pediasismus oder Galenus Geometrie zum ersten Male herausgegeben und erläutert*, von G. Friedlein, Berlin, 1866.

(2) J. Baillet, *Le papirus mathématique d'Akmim*. Paris, 1892, pág. 37.

(3) Paul Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 155.

quanto lhe foi possível, não obstante a natureza dos problemas que tratava o conduzir necessàriamente, a preferir o outro sistema».

De tudo quanto temos dito, resulta pois, que o sistema antigo da numeração fracionária exige, pela sua alta antiguidade e, precisamente, pela sua persistência constante, através dos séculos, na logística grega, a apreciação e o exame cuidadoso dos que se dedicam ao estudo, sempre cheio de novidades e de belezas, da história das matemáticas na antiguidade. Na essência, êste sistema coincide com o nosso; e, revestindo muito embora, por vezes, uma forma um pouco mais complicada que o sistema moderno das nossas fracções ordinárias, tem a vantagem, num grande número de casos, tratando-se principalmente de fracções irredutíveis de termos contendo mais de dois algarismos, de falar mais à inteligência, mostrando o modo da composição destas fracções.

Por exemplo, a fracção $\frac{239}{6460}$ exprime, sob esta forma, apenas a relação irredutível entre os números 239 e 6460, sem que mostre qualquer outra dependência ou ligação dos mesmos números entre si ou com os seus divisores. No entanto, é fácil verificar a possibilidade de decompôr a mesma fracção, na soma de três fracções elementares de denominadores muito mais simples que o denominador da fracção dada, conforme a seguinte igualdade [1]

$$\frac{239}{6460}=\frac{1}{68}+\frac{1}{85}+\frac{1}{95};$$

com a qual, efectuando as operações indicadas, se reconhecem novas relações de dependência entre o número primo 239 e os divisores de 6460, como segue:

$$6460=4\times5\times17\times19$$
$$239=4\times17+4\times19+5\times19.$$

Ainda, por exemplo, a decomposição expressa por

$$\frac{157}{348}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{29},$$

(1) Baillet, *ob. cit.*, págs. 39 e 76.

mostra-nos as seguintes relações

$$348 = 3 \times 4 \times 29$$
$$157 = 3 \times 4 + 5 \times 29$$

entre 157 e os divisores de 348; etc.

Além de que, há questões concretas e problemas cuja solução é mais prática com o emprêgo das fracções elementares do que com o emprêgo das fracções irredutíveis do sistema moderno.

E, se de facto, é certo que o sistema das fracções elementares não conduz a uma representação uniforme para cada fracção determinada e, ao contrário, apresenta formas bastante diferentes, cuja identidade é possível conhecer apenas pela redução ao mesmo denominador, também não é menos exacto que as fracções ordinárias que nós usamos, afectam, por vezes, também, aspectos e formas diferentes, cuja identidade, fora dos casos conhecidos da divisão por 2, 3, 5, 11 e alguns dos seus múltiplos, é reconhecida, apenas, depois de obtermos o máximo divisor comum entre os termos da fracção. Assim pois, e salvo o respeito devido a sábios eminentes, como P. Tannery [1] e o professor Gino Loria [2], não me parece que se possa apontar o sistema fraccionário egípcio como apresentando, exclusivamente, em si, o inconveniente de falta de uniformidade, que, fàcilmente, verificamos que também existe nos aspectos um tanto complicados, que tomam, por vezes, as fracções ordinárias.

Por exemplo, não é fácil reconhecer que as fracções $\frac{19}{23}$ e $\frac{2261}{2737}$ são idênticas, a menos que achemos o máximo divisor $119 = 7 \times 17$, entre os dois termos da última fracção.

Os cálculos da colecção heroniana apresentam o sistema mixto do emprêgo de fracções da forma moderna e transformação dos resultados em fracções elementares, sistema êste que, em muitos casos, pelas razões que atrás expendi quanto às fracções irredutíveis, me parece que haveria vantagem em adoptar nos cálculos, para um grande número de questões.

II

Na primeira parte dêste trabalho transcrevi a opinião de P. Tannery, quanto à vantagem e necessidade do estudo do

---

(1) P. Tannery, *ob. cit.*, t, 2.º, pág. 147.
(2) Gino Loria, *ob. cit.*, 2.ª ed., pág. 779.

4

sistema antigo de numeração fraccionária, estudo que, como foi dito, o mesmo ilustre geómetra apresenta desenvolvidamente nas *Questões heronianas*, embora, segundo afirme, pouco mais faça que repetir o que já fôra dito por Cantor e F. Hultsch que tinham, quási completamente, esgotado o assunto.

E, a êste respeito, lembra Tannery, ainda antes de entrar na apreciação dos princípios que poderiam ter servido para formar a Tábua de Ahmes, que o sistema de que se trata é constantemente seguido no papiro de Rhind, apenas com duas excepções: uma referente às fracções $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ do *bescha*, unidade de medida egípcia para os grãos e para os líquidos; a outra, respeitante à fracção $\frac{2}{3}$ que os Egípcios e depois os Gregos consideraram sempre fracção elementar, embora fôsse conhecida e expressamente notada a identidade $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, nas regras de cálculo daquele papiro, onde se lê sob o n.º 61:

«Tomar os $\frac{2}{3}$ duma fracção. Se te preguntam: quais são os $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$, tomas a sua metade e a sua sexta parte, e isso faz os seus $\frac{2}{3}$. Proceder do mesmo modo para qualquer outra fracção que se apresente.»

P. Tannery, em seguida, estuda a decomposição, dum modo geral da fracção $\frac{2}{p}$, no caso em que p é um número primo ímpar, em duas fracções elementares, e diz que há uma única solução possível

$$(1) \qquad \frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}p},$$

O exame da tabela mostra, porém, que êste modo de decomposição só poderia ter sido empregado para as fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{2}{23}$; e que os Egípcios não tiveram a noção da regra geral expressa na fórmula (1), e que só acidentalmente encontraram naquelas fracções a decomposição em duas fracções elementares, mostram-no nìtidamente os outros desenvolvimentos em três e quatro fracções que, todos, como se lê em P. Tannery se compreendem na fórmula

$$(2) \qquad \frac{2}{p}=\frac{1}{M}+\frac{1}{ap}+\frac{1}{bp}+\frac{1}{cp},$$

em que M é o menor múltiplo comum dos factores a, b, c, cujo número é 2 ou 3, pois que estas decomposições da tabela compreendem um máximo de quatro fracções elementares. No caso limite de ser $M=a$, ter-se há a decomposição em duas fracções.

Ora, considerando a fórmula (2) e, depois de ter verificado que os valores de M que se encontram na Tábua de Ahmes são os números 2, 3, 4, 6, 8, 12, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 56 e 60, conclui Tannery [1]:

«O processo geral do desenvolvimento é então fácil de reconhecer; devia-se escolher primeiro entre os números com vários divisores e, principalmente, na série dos divisores ou dos primeiros múltiplos de 12 $\left(\frac{3}{2}\right.$ sendo contado como inteiro$\left.\right)$ ou na série dos sub-múltiplos de 60, um número M compreendido entre p e $\frac{p}{2}$; a diferença $\frac{2}{p}-\frac{1}{M}=\frac{2M-p}{Mp}$ desenvolviu-se em seguida fàcilmente em fracções elementares, decompondo $2M-p$ numa soma de divisores de M. Naturalmente M devia ser tomado o menor possível e, por êste modo os Egípcios acharam acidentalmente a divisão em duas fracções primárias para cinco das fracções $\frac{2}{p}$.»

Então, aplicando a regra ácima enunciada ao desenvolvimento das fracções desde $\frac{2}{13}$ a $\frac{2}{89}$ e examinando os diferentes casos apresentados, conclui o ilustre geómetra [2]:

«Em resumo, parece, de acôrdo com todos estes casos, que os Egípcios procuraram resolver por tentativas o problema de obter os menores denominadores possível...»

E, examinando, em seguida, os casos de aparecer $M=56$ no desenvolvimento de $\frac{2}{97}$ e $M=42$ no de $\frac{2}{43}$, diz:

«Não se pode evidentemente recusar admitir a opinião de M. Cantor, de que a Tábua que estudamos não foi feita duma só vez, segundo um desígnio preciso e conforme regras antecipadamente conhecidas; por outro lado, a preferência para os pequenos denominadores, posta sobretudo em evidência por F. Hultseh, é suficientemente clara ainda que as decomposições correspondentes não tenham sido sempre atingidas.»

---

(1) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 140.
(2) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, págs. 144 e 145.

III

Indicado, no número anterior, o estudo e trabalho de-veras notáveis dos três sábios eminentes F. Hultsch, Cantor e P. Tannery sôbre a Tábua de Ahmes, para a decomposição das fracções $\frac{2}{p}$, no caso em que p é um número primo, não se pode deixar de reconhecer que o assunto não está completamente resolvido e, portanto, que aberto está o caminho para o estudo das regras e princípios que podem ter sido seguidos pelos Egípcios na redução a fazer daquelas fracções cuja decomposição é, como vimos, expressa pelas igualdades:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301},$$

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}, \qquad \frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470},$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}, \qquad \frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795},$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}, \qquad \frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531},$$

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}, \qquad \frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610},$$

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}, \qquad \frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536},$$

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}, \qquad \frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710},$$

$$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}, \qquad \frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365},$$

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}, \qquad \frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790},$$

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}, \qquad \frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498},$$

$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}, \qquad \frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890},$$

$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}, \qquad \frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}.$$

O exame dêstes desenvolvimentos mostra que a redução das fracções $\frac{2}{p}$ compreende duas, três ou quatro fracções elementares, a primeira das quais de denominador sempre inferior a p, mas maior que $\frac{p}{2}$, e as outras de denominadores formados pelos produtos de p por divisores do denominador da primeira fracção elementar, ou por êste, no caso das fracções $\frac{2}{3}$ a $\frac{2}{11}$.

Os denominadores das primeiras fracções do desenvolvimento são, sucessivamente, os números: 2; 3; 4; 6; 8; 12, que entra em três fracções sucessivas; 24, que entra também em três fracções $\frac{2}{29}$, $\frac{2}{37}$, $\frac{2}{41}$; 20, que entra no desenvolvimento de $\frac{2}{31}$; 42, que pertence à decomposição $\frac{2}{43}$; 30, empregado duas vezes; 36, uma vez; 40, três vezes; 60, quatro vezes; e, por último, 56. Isto é, os denominadores de que se trata, são: os divisores de 12, ou os seus múltiplos simples e os divisores de 60, devendo contar-se

$$8=\frac{2}{3}\times 12 \quad \text{e} \quad 40=\frac{2}{3}\times 60$$

como divisores simples, por ser $\frac{2}{3}$ fracção fundamental; encontrando-se, ainda isoladamente, 42 que é um múltiplo de 6, e 56 que é múltiplo de 8.

Pôsto isto, vejamos como os autores egípcios, apenas dentro de conhecimentos aritméticos limitados, podiam ter formado a Tábua de decomposição de $\frac{2}{p}$ no caso em que p é um número primo.

Notando que $\frac{2}{p}=2\times\frac{1}{p}$ e que 2 pode tomar a forma de fracção $\frac{2\times M}{M}$ com M número inteiro qualquer, resulta

$$\frac{2}{p}=\frac{2\times M}{M}\times\frac{1}{p}=\frac{2\times M}{M\times p}.$$

Ora, para a decomposição de $\frac{2\times M}{M\times p}$ em fracções elementares, como p é um número primo, é necessário que $2\times M$ seja um número que compreenda p e divisores de M, isto é, que seja

$$2\times M=p+a+b+c, \tag{3}$$

supondo que a, b, c são divisores de M, e que há um máximo de quatro fracções elementares, conforme resulta da tabela.

Ter-se há então, fàcilmente

$$(4) \qquad \frac{2}{p}=\frac{p+a+b+c}{M\times p}=\frac{p}{M\times p}+\frac{a}{M\times p}+\frac{b}{M\times p}+\frac{c}{M\times p},$$

donde

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{M}+\frac{1}{\frac{M}{a}\times p}+\frac{1}{\frac{M}{b}\times p}+\frac{1}{\frac{M}{c}\times p}$$

decomposição esta que exige que M seja um número inteiro maior que $\frac{p}{2}$. Evidentemente deve o factor M ser menor que p para evitar o emprêgo de grandes números como factores dos desenvolvimentos.

No caso limite, ter-se há

$$2\times M=p+1,$$

$$M=\frac{p+1}{2},$$

e, portanto,

$$(5) \qquad \frac{2}{p}=\frac{p+1}{p\frac{p+1}{2}},$$

$$\frac{2}{v}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{p\frac{p+1}{2}};$$

e no caso da decomposição definida por (3) pode o último divisor de M, b ou c conforme os casos, ser igual a 1.

São os desenvolvimentos correspondentes às fórmulas (4) e (5), e sob a forma nelas indicada, que é natural, em meu entender, que fôssem seguidos pelos autores egípcios na formação da Tábua de decomposição de $\frac{2}{p}$, quando p é um número primo, decomposição que foi feita, além disso, obedecendo às seguintes regras:

a) O valor de M pelo qual, em todos os casos, se multiplicam os dois termos da fracção $\frac{2}{p}$, satisfaz à desigualdade

$$\frac{p}{2}<M<p.$$

b) O número M que multiplica os dois termos da fracção $\frac{2}{p}$ deve ser o menor possível, mas conter grande número de divisores, para seu conveniente emprêgo em facilitar os cálculos exigidos pela decomposição expressa na fórmula (4); como conseqüência, o número M deve ser escolhido, de preferência, na série dos sub-múltiplos ou dos primeiros múltiplos de 12, na série dos sub-múltiplos de 60 e, excepcionalmente, fora dêstes divisores, nos outros múltiplos de 6 e de 8.

c) Os últimos denominadores da decomposição nunca poderão conter mais de três algarismos e terão o menor valor possível.

d) O número n de fracções elementares da decomposição deve ser levado ao mínimo, dentro das condições anteriores.

Com estas regras simples, pre-estabelecidas, podiam os Egípcios, dentro dos seus limitados conhecimentos aritméticos, formar a tabela de que se trata, em que se verifica:

1.º Como conseqüência das regras (*a*) e (*b*), que os valores de M usados na Tábua compreendem os seguintes números:

$$2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 20;\ 24,\ 30;\ 36;\ 40;\ 42;\ 56;\ 60;$$

que foram adoptados em definitiva, depois de exame e comparação, em cada caso, com outros números, e tendo em atenção as regras (*c*) e (*d*), como veremos;

2.º Como conseqüência das regras (*c*) e (*d*) que a partir da redução de $\frac{2}{13}$, nunca mais 1 aparece na decomposição de $2 \times M$ definida pela igualdade (3) e, a partir de $\frac{2}{19}$, cessa também de figurar nessa decomposição o número 2, excepto na redução de $\frac{2}{53}$, sendo, a partir desta fracção, sempre superior a 3 o último número da decomposição de $2 \times M$, e, a partir de $\frac{2}{71}$, sempre superior a 4.

Nota-se, além disso, como conseqüência da regra (*d*), que o número n das fracções de decomposição nunca excede $n = 4$.

Analisemos agora cada um dos desenvolvimentos da Tábua de Ahmes, aplicando os preceitos e regras que enunciámos.

A) — *Redução de* $\frac{2}{3}$. —

$$p = 3),\quad M = 2),\quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3+1}{3 \times 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

E esta a única decomposição possível.

B) — Redução de $\frac{2}{5}$. —

$$p=5),\quad M=3),\quad \frac{2}{5}=\frac{2\times 3}{5\times 3}=\frac{5+1}{5\times 3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},$$

$$M=4),\quad \frac{2}{5}=\frac{2\times 4}{5\times 4}=\frac{5+2+1}{5\times 4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}.$$

Dêstes dois desenvolvimentos deve, sem a menor dúvida, ser escolhido o primeiro, correspondente a $M=3$, que é o da Tábua.

C) — Redução de $\frac{2}{7}$. —

$$p=7),\quad M=4),\quad \frac{2}{7}=\frac{2\times 4}{7\times 4}=\frac{7+1}{7\times 4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$

$$M=6),\quad \frac{2}{7}=\frac{2\times 6}{7\times 6}=\frac{7+3+2}{7\times 6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}.$$

A decomposição correspondente a $M=4$ é a da Tábua e está de inteiro acôrdo com as condições pre-estabelecidas.

Se ensaiarmos a decomposição correspondente a $M=5$,

$$M=5),\quad \frac{2}{7}=\frac{2\times 5}{7\times 5}=\frac{7+3}{7\times 5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{35},$$

verificamos que nunca poderia ser adoptada, por não ser possível decompôr 3 nos divisores de 35. Para esta última decomposição, multiplicam-se os dois termos de $\frac{3}{35}$ por 18, conforme as regras atrás expostas, resultando

$$\frac{3}{35}=\frac{3\times 18}{35\times 18}=\frac{35+19}{35\times 18}=\frac{35+18+1}{35\times 18}=\frac{1}{18}+\frac{1}{35}+\frac{1}{35\times 18}.$$

D) — Redução de $\frac{2}{11}$. —

$$p=11),\quad M=6),\quad \frac{2}{11}=\frac{2\times 6}{11\times 6}=\frac{11+1}{11\times 6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66},$$

$$M=8),\quad \frac{2}{11}=\frac{2\times 8}{11\times 8}=\frac{11+4+1}{11\times 8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{22}+\frac{1}{88}.$$

Deve ser adoptada, evidentemente, a redução correspondente a $M=6$, de acôrdo com a Tábua.

Se ensaiássemos a redução correspondente a $M=10$, encontraríamos o seguinte resultado que deveria ser rejeitado

$$M=10),\quad \frac{2}{11}=\frac{2\times 10}{11\times 10}=\frac{11+5+4}{11\times 10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{22}+\frac{2+2}{11\times 10}.$$

E) — Redução de $\frac{2}{13}$. —

$$p=13),\quad M=8),\quad \frac{2}{13}=\frac{2\times 8}{13\times 8}=\frac{13+2+1}{13\times 8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104},$$

$$M=12),\quad \frac{2}{13}=\frac{2\times 12}{13\times 12}=\frac{13+6+4+1}{13\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{26}+\frac{1}{39}+\frac{1}{156},$$

$$=\frac{13+6+3+2}{13\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52}+\frac{1}{78}.$$

Deve ser adoptada a redução correspondente a $M=8$, que é a da Tábua de Ahmes.

Note-se que, nesta redução, o factor $M=7$ daria a redução mais simples

$$M=7),\quad \frac{1}{13}=\frac{2\times 7}{13\times 7}=\frac{13+1}{13\times 7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91},$$

que não deve ter sido considerada por não ser 7 divisor de 12.

Ensaiando $M=10$, viria

$$M=10),\quad \frac{2}{13}=\frac{2\times 10}{13\times 10}=\frac{13+5+2}{13\times 10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{26}+\frac{1}{65},$$

decomposição que também não deve ter sido considerada pelo motivo idêntico ao já apontado: 10 não é divisor simples de 12.

O exame das decomposições que apresentámos, correspondentes à redução desta fracção $\frac{2}{13}$, mostram à simples vista, como é vantajoso, para que os últimos denominadores dos desenvolvimentos sejam pequenos, que se adoptem valores de M tais que na decomposição de $2\times M$ deixe de figurar o divisor 1. Isto mesmo, com o simples ensaio de $M=12$, podem ter notado os autores egípcios, que fizeram a Tábua, na qual, a partir da fracção $\frac{2}{13}$, nunca mais figura na decomposição o divisor 1.

F) — Redução de $\frac{2}{17}$. —

$$p=17),\quad M=12),\quad \frac{2}{17}=\frac{2\times 12}{17\times 12}=\frac{17+4+3}{17\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68},$$

é a decomposição única, correspondente às regras que atrás estabelecemos.

Os ensaios correspondentes a $M=10$, $M=16=2\times 8$, dão os seguintes resultados

$$M=10),\quad \frac{2}{17}=\frac{2\times 10}{17\times 10}=\frac{17+2+1}{17\times 10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{85}+\frac{1}{170},$$

$$M=16),\quad \frac{2}{17}=\frac{2\times 16}{17\times 16}=\frac{17+8+4+2+1}{17\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{34}+\frac{1}{68}+\frac{1}{136}+\frac{1}{272}.$$

G) — Redução de $\frac{2}{19}$. —

$$p=19),\quad M=12),\quad \frac{2}{19}=\frac{2\times 12}{19\times 12}=\frac{19+4+1}{19\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{57}+\frac{1}{228},$$

$$=\frac{19+3+2}{19\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}.$$

O último desenvolvimento, de acôrdo com as regras pre-estabelecidas, é o da Tábua.

Experimentando os valores $M=10$, $M=16$, $M=18$, resulta

$$M=10),\quad \frac{2}{19}=\frac{2\times 10}{19\times 10}=\frac{19+1}{19\times 10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190};$$

$$M=16),\quad \frac{2}{19}=\frac{2\times 16}{2\times 19}=\frac{19+8+4+1}{19\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{38}+\frac{1}{76}+\frac{1}{304};$$

$$M=18),\quad \frac{2}{19}=\frac{2\times 18}{19\times 18}=\frac{19+9+6+2}{19\times 18}=\frac{1}{18}+\frac{1}{38}+\frac{1}{57}+\frac{1}{171}.$$

H) — Redução de $\frac{2}{23}$. —

$$p=23),\quad M=12),\quad \frac{2}{23}=\frac{2\times 12}{23\times 12}=\frac{23+1}{23\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$$

é a decomposição da Tábua, correspondente às regras enunciadas.

As decomposições correspondentes a $M=15$, $M=16$, $M=20$, dão os seguintes resultados:

$$M=15),\quad \frac{2}{23}=\frac{2\times 15}{23\times 15}=\frac{23+5+2}{23\times 15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{69}+\frac{2}{345},$$

$$M=16),\quad \frac{2}{23}=\frac{2\times 16}{23\times 16}=\frac{23+8+1}{23\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{46}+\frac{1}{368},$$

$$M=20),\quad \frac{2}{23}=\frac{2\times 20}{23\times 20}=\frac{23+10+5+2}{23\times 20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{46}+\frac{1}{92}+\frac{1}{230}.$$

I) — Redução de $\frac{2}{29}$. —

Conforme as regras, os ensaios a fazer são:

$$p=29),\quad M=20),\quad \frac{2}{29}=\frac{2\times 20}{29\times 20}=\frac{29+5+4+2}{29\times 20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{116}+\frac{1}{145}+\frac{1}{290},$$

$$M=24),\quad \frac{2}{29}=\frac{2\times 24}{29\times 24}=\frac{29+12+4+3}{29\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232},$$

devendo adoptar-se a última decomposição que é a da Tábua.

Os resultados correspondentes a $M=15$, $M=16$, são:

$$M=15),\quad \frac{2}{29}=\frac{2\times 15}{29\times 15}=\frac{29+1}{29\times 15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{435},$$

$$M=16),\quad \frac{2}{29}=\frac{2\times 16}{29\times 16}=\frac{29+2+1}{29\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{232}+\frac{1}{464}.$$

J) — Redução de $\frac{2}{31}$. —

$$p=31),\quad M=20),\quad \frac{2}{31}=\frac{2\times 20}{31\times 20}=\frac{31+5+4}{31\times 20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155},$$

$$M=24),\quad \frac{2}{31}=\frac{2\times 24}{31\times 24}=\frac{31+12+3+2}{31\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{62}+\frac{1}{248}+\frac{1}{372},$$

$$=\frac{31+8+6+3}{31\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{93}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248},$$

$$M=30),\quad \frac{2}{31}=\frac{2\times 30}{31\times 30}=\frac{31+15+6+5+3}{31\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{62}+\frac{1}{155}+\frac{1}{186}+\frac{1}{310},$$

são as decomposições correspondentes às regras pre-estabelecidas, devendo ser adoptada a primeira que é a da Tábua.

A decomposição correspondente a $M=16$,

$$M=16),\quad \frac{2}{31}=\frac{2\times 16}{31\times 16}=\frac{31+1}{31\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{496}.$$

K) — Redução de $\frac{2}{37}$. —

$$p=37),\quad M=20),\quad \frac{2}{37}=\frac{2\times 20}{37\times 20}=\frac{37+2+1}{37\times 20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{370}+\frac{1}{740},$$

$$M=24),\quad \frac{2}{37}=\frac{2\times 24}{37\times 24}=\frac{37+8+3}{37\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296},$$

$$M=30),\quad \frac{2}{37}=\frac{2\times 30}{37\times 30}=\frac{37+15+6+2}{37\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{74}+\frac{1}{185}+\frac{1}{555},$$

$$M=36),\quad \frac{2}{37}=\frac{2\times 36}{37\times 36}=\frac{37+18+12+4+1}{37\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{74}+\frac{1}{111}+\frac{1}{333}+\frac{1}{1332},$$

$$=\frac{37+18+9+6+2}{37\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{74}+\frac{1}{148}+\frac{1}{222}+\frac{1}{666}.$$

Conforme as regras estabelecidas, deve ser preferido o desenvolvimento correspondente a $M=24$, que é o da Tábua.

L) — Redução de $\frac{2}{41}$. —

$$p=41),\quad M=24),\quad \frac{2}{41}=\frac{2\times 24}{41\times 24}=\frac{41+4+3}{41\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328},$$

$$M=30),\quad \frac{2}{41}=\frac{2\times 30}{41\times 30}=\frac{41+10+6+3}{41\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{123}=\frac{1}{205}+\frac{1}{410},$$

$$M=36),\quad \frac{2}{41}=\frac{2\times 36}{41\times 36}=\frac{41+18+9+4}{41\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{82}+\frac{1}{164}+\frac{1}{369},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{41}=\frac{2\times 40}{41\times 40}=\frac{41+20+10+5+4}{41\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{82}+\frac{1}{164}+\frac{1}{328}+\frac{1}{410}.$$

A primeira decomposição é a da Tábua, conforme as regras.

M) — *Redução de* $\frac{2}{43}$. —

$$p=43),\quad M=24),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 24}{43\times 24}=\frac{43+3+2}{43\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{344}+\frac{1}{516},$$

$$M=30),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 30}{43\times 30}=\frac{43+15+2}{43\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{86}+\frac{1}{645},$$

$$M=36),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 36}{43\times 36}=\frac{43+18+9+2}{43\times 36}=$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{86}+\frac{1}{172}+\frac{1}{774},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 40}{43\times 40}=\frac{43+20+10+4+2+1}{43\times 40}=$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{86}+\frac{1}{172}+\frac{1}{430}+\frac{1}{860}+\frac{1}{1720},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 42}{43\times 42}=\frac{43+21+14+6}{43\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}.$$

Ainda, de acôrdo com as regras enunciadas, deve ser adoptada a decomposição correspondente ao último desenvolvimento que é o da Tábua; embora a $M=24$ e $M=30$ correspondam três fracções, vemos que a última, em ambos os desenvolvimentos, provém do divisor 2 que, como dissemos, desde $\frac{2}{19}$ nunca mais é adoptado nas decomposições a não ser na de $\frac{2}{53}$. Notemos ainda que o emprêgo dos factores 24 e 30 daria as últimas fracções da decomposição com denominadores excessivamente elevados, em comparação com os desenvolvimentos das fracções anteriores e com o que se obtém usando nesta redução o factor $M=42$.

N) — *Redução de* $\frac{2}{47}$. —

$$p=47),\quad M=24),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 24}{47\times 24}=\frac{47+1}{47\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{1128},$$

$$M=30),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 30}{47\times 30}=\frac{47+10+3}{47\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470},$$

$$p=47),\quad M=36),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 36}{47\times 36}=\frac{47+12+9+4}{47\times 36}=$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{141}+\frac{1}{188}+\frac{1}{423},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 40}{47\times 40}=\frac{47+20+10+2+1}{47\times 40}=$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{94}+\frac{1}{188}+\frac{1}{940}+\frac{1}{1880},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 42}{47\times 42}=\frac{47+21+14+2}{47\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{94}+\frac{1}{141}+\frac{1}{987}.$$

Deve ser adoptada a decomposição correspondente a $M=30$ que é a decomposição da Tábua.

O) — Redução de $\frac{2}{53}$. —

$$p=53),\quad M=30),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 30}{53\times 30}=\frac{53+5+2}{53\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795},$$

$$M=36),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 36}{53\times 36}=\frac{53+12+4+3}{53\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{159}+\frac{1}{477}+\frac{1}{636},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 40}{53\times 40}=\frac{53+20+5+2}{53\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{106}+\frac{1}{424}+\frac{1}{1060},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 42}{53\times 42}=\frac{53+21+7+3}{53\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{106}+\frac{1}{318}+\frac{1}{742},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 48}{53\times 48}=\frac{53+24+16+3}{53\times 48}=\frac{2}{48}+\frac{1}{106}+\frac{1}{159}+\frac{1}{848},$$

A decomposição da Tábua é a primeira, correspondente a $M=30$, que tem justificação dentro das regras apontadas, — embora os desenvolvimentos correspondentes a $M=36$ e $M=42$ tenham os últimos denominadores um pouco menores —, por isso que apresenta apenas três fracções elementares.

P) — Redução de $\frac{2}{59}$. —

$$p=59),\quad M=30),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 30}{59\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{1770},$$

$$M=36),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 36}{59\times 36}=\frac{59+9+4}{59\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531},$$

$$p=59),\quad M=40),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 40}{59\times 40}=\frac{59+10+5+4+2}{59\times 40}=$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{236}+\frac{1}{472}+\frac{1}{590}+\frac{1}{1180},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 42}{59\times 42}=\frac{59+21+3+1}{59\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{118}+\frac{1}{826}+\frac{1}{2478},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 48}{59\times 48}=\frac{59+24+12+1}{59\times 48}=$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{118}+\frac{1}{236}+\frac{1}{2832},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 54}{59\times 54}=\frac{59+27+18+3+1}{59\times 54}=$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{118}+\frac{1}{177}+\frac{1}{1062}+\frac{1}{3186},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 56}{59\times 56}=\frac{59+28+14+7+4}{59\times 56}=$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{118}+\frac{1}{236}+\frac{1}{472}+\frac{1}{826}.$$

Evidentemente, deve ser adoptado o desenvolvimento da Tábua, correspondente a $M=36$, conforme as regras enunciadas.

Q) — Redução de $\frac{2}{61}$. —

$$p=61),\quad M=36),\quad \frac{2}{61}=\frac{2\times 36}{61\times 36}=\frac{61+9+2}{61\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{244}+\frac{1}{1098},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{61}=\frac{2\times 40}{61\times 40}=\frac{61+10+5+4}{61\times 40}=$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{61}=\frac{2\times 42}{61\times 42}=\frac{61+14+7+2}{61\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{183}+\frac{1}{366}+\frac{1}{1281},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{61}=\frac{2\times 48}{61\times 48}=\frac{61+16+12+4+3}{61\times 48}=$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{183}+\frac{1}{244}+\frac{1}{732}+\frac{1}{976},$$

$$p=61),\ M=54),\ \frac{2}{61}=\frac{2\times 54}{61\times 54}=\frac{61+27+18+2}{61\times 54}=$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{122}+\frac{1}{183}+\frac{1}{1647},$$

$$M=56),\ \frac{2}{61}=\frac{2\times 56}{61\times 56}=\frac{61+28+14+7+2}{61\times 56}=$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{122}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{1708},$$

$$M=60),\ \frac{2}{61}=\frac{2\times 60}{61\times 60}=\frac{61+30+15+10+4}{61\times 60}=$$
$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{122}+\frac{1}{244}+\frac{1}{366}+\frac{1}{915}.$$

O exame dêstes polinómios mostra que deve ser adoptada a decomposição correspondente a $M=40$, que é a da Tábua.

R) — Redução de $\frac{2}{67}$. —

$$p=67),\ M=36),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 36}{67\times 36}=\frac{67+4+1}{67\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{603}+\frac{1}{2412},$$

$$M=40),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 40}{67\times 40}=\frac{67+8+5}{67\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536},$$

$$M=42),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 42}{67\times 42}=\frac{67+14+3}{67\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{201}+\frac{1}{938},$$

$$M=48),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 48}{67\times 48}=\frac{67+24+3+2}{67\times 48}=$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{134}+\frac{1}{1072}+\frac{1}{1608},$$

$$M=54),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 54}{67\times 54}=\frac{67+27+9+3+2}{67\times 54}=$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{134}+\frac{1}{402}+\frac{1}{1206}+\frac{1}{1809},$$

$$M=56),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 56}{67\times 56}=\frac{67+28+14+2+1}{67\times 56}=$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{134}+\frac{1}{268}+\frac{1}{1876}+\frac{1}{3752},$$

$$M=60),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 60}{67\times 60}=\frac{67+30+15+6+2}{67\times 60}=$$
$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{134}+\frac{1}{268}+\frac{1}{670}+\frac{1}{2010}.$$

Dêstes desenvolvimentos deve ser adoptado, evidentemente, o correspondente a $M=40$, que é o da Tábua.

S) — *Redução de* $\frac{2}{71}$. —

$$p=71),\quad M=36),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 36}{71\times 36}=\frac{71+1}{71\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{2556},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 40}{71\times 40}=\frac{71+5+4}{71\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 42}{71\times 42}=\frac{71+7+6}{71\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{426}+\frac{1}{497},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 48}{71\times 48}=\frac{71+16+6+3}{71\times 48}=$$

$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{213}+\frac{1}{568}+\frac{1}{1136},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 54}{71\times 54}=\frac{71+27+9+1}{71\times 54}=$$

$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{142}+\frac{1}{426}+\frac{1}{3834},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 56}{71\times 56}=\frac{71+28+7+4+2}{71\times 56}=$$

$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{142}+\frac{1}{568}+\frac{1}{994}+\frac{1}{1988},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 60}{71\times 60}=\frac{71+30+15+4}{71\times 60}=$$

$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{142}+\frac{1}{284}+\frac{1}{1065}.$$

Nos desenvolvimentos correspondentes a esta fracção, as decomposições para $M=40$ e $M=42$ contêm ambas três fracções elementares, com os últimos denominadores com três algarismos; e, conforme a regra *C*), se os autores egípcios tivessem ensaiado o factor 42, deveria ser adoptado o desenvolvimento correspondente. Na Tábua, porém, a redução de $\frac{2}{71}$ é feita com o factor $M=40$, facto que mostra a preferência já indicada, dos mesmos autores, para o emprêgo nos cálculos, de factores que devem ser procurados primeiro, entre a série dos submúltiplos e dos múltiplos de 12 e dos divisores de 60. Do uso dêstes factores afasta-se a Tábua, apenas duas vezes: uma, na redução de $\frac{2}{43}$ em que aparece o factor $M=42$, como vimos; outra, na redução de $\frac{2}{97}$ em que há necessidade de recorrer ao factor $M=56$, para evitar ter fracções elementares com denominadores contendo mais de três algarismos.

O factor $M=40$ foi usado nas duas reduções imediatamente anteriores: *à fortiori*, na redução de $\frac{2}{61}$, e, com grande vantagem, na redução de $\frac{2}{67}$. Podia ainda ter sido usado por simpatia na redução actual de $\frac{2}{71}$, mesmo que $M=42$ tivesse sido ensaiado, tanto mais que o último denominador da decomposição, 710, está dentro do valor mais alto dos denominadores das reduções anteriores.

T) — Redução de $\frac{2}{73}$. —

$$p=73),\quad M=40),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 40}{73\times 40}=\frac{73+5+2}{73\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{584}+\frac{1}{1460},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 42}{73\times 42}=\frac{73+6+3+2}{73\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{511}+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1533},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 48}{73\times 48}=\frac{73+12+8+3}{73\times 48}=$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{292}+\frac{1}{438}+\frac{1}{1168},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 54}{73\times 54}=\frac{73+27+6+2}{73\times 54}=$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{146}+\frac{1}{657}+\frac{1}{1971},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 56}{73\times 56}=\frac{73+28+7+4}{73\times 56}=$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{146}+\frac{1}{584}+\frac{1}{1022},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 60}{73\times 60}=\frac{73+20+15+12}{73\times 60}=$$
$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}.$$

O exame dos desenvolvimentos correspondentes aos factores de preferência, $M=40$, $M=48$, $M=60$, e aos factores eventuais, múltiplos de 6 e de 8, compreendidos entre estes números, mostram que, dentro das regras enunciadas, deve ser usada *à fortiori*, a decomposição que corresponde a $M=60$ conforme a Tábua.

Se tivesse sido ensaiado o valor $M=44$, achar-se-ia o desenvolvimento mais simples:

$$M=44),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 44}{73\times 44}=\frac{73+11+4}{73\times 44}=\frac{1}{44}+\frac{1}{292}+\frac{1}{803}.$$

U) — Redução de $\frac{2}{79}$. —

$$p=79),\quad M=40),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 40}{79\times 40}=\frac{79+1}{79\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{3160},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 42}{79\times 42}=\frac{79+3+2}{79\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{1106}+\frac{1}{1659},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 48}{79\times 48}=\frac{79+12+3+2}{79\times 48}=$$

$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{316}+\frac{1}{1264}+\frac{1}{1896},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 54}{79\times 54}=\frac{79+18+9+2}{79\times 54}=$$

$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{237}+\frac{1}{474}+\frac{1}{2133},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 56}{79\times 56}=\frac{79+14+8+7+4}{79\times 56}=$$

$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{316}+\frac{1}{553}+\frac{1}{632}+\frac{1}{1106},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 60}{79\times 60}=\frac{79+20+15+6}{79\times 60}=$$

$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}.$$

O exame dêstes desenvolvimentos mostra que o único possível é o correspondente a $M=60$, que é o da Tábua.

V) — Redução de $\frac{2}{83}$. —

$$p=83),\quad M=42),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 42}{83\times 42}=\frac{83+1}{83\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{3486},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 48}{83\times 48}=\frac{83+12+1}{83\times 48}=\frac{1}{48}+\frac{1}{332}+\frac{1}{3984},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 54}{83\times 54}=\frac{83+18+6+1}{83\times 54}=\frac{1}{54}+\frac{1}{249}+\frac{1}{747}+\frac{1}{4482},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 56}{83\times 56}=\frac{83+14+8+7}{83\times 56}=\frac{1}{56}+\frac{1}{332}+\frac{1}{581}+\frac{1}{664},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 60}{83\times 60}=\frac{83+15+12+10}{83\times 60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}.$$

A decomposição correspondente a $M=60$ é a mais conveniente e é a da Tábua.

X) — Redução de $\frac{2}{89}$. —

$$p=89),\quad M=48),\quad \frac{2}{89}=\frac{2\times 48}{89\times 48}=\frac{89+4+3}{89\times 48}=\frac{1}{48}+\frac{1}{1068}+\frac{1}{1424},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{89}=\frac{2\times 54}{89\times 54}=\frac{89+18+1}{89\times 54}=\frac{1}{54}+\frac{1}{267}+\frac{1}{4806},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{89}=\frac{2\times 56}{89\times 56}=\frac{89+14+7+2}{89\times 56}=\frac{1}{56}+\frac{1}{356}+\frac{1}{712}+\frac{1}{2492},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{89}=\frac{2\times 60}{89\times 60}=\frac{89+15+10+6}{89\times 60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}.$$

A decomposição correspondente a $M=60$, única que pode ser adoptada dentro das regras preestabelecidas, é a da Tábua.

Y) — Redução de $\frac{2}{97}$. —

$$p=97),\quad M=54),\quad \frac{2}{97}=\frac{2\times 54}{97\times 54}=\frac{97+9+2}{97\times 54}=\frac{1}{54}+\frac{1}{582}+\frac{1}{2619},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{97}=\frac{2\times 56}{97\times 56}=\frac{97+8+7}{97\times 56}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{97}=\frac{2\times 60}{97\times 60}=\frac{97+12+6+5}{97\times 60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{485}+\frac{1}{970}+\frac{1}{1164}.$$

Nesta redução não pode ser usado o factor $M=60$, por causa do denominador da última fracção, superior a 999. O desenvolvimento correspondente a $M=56$, que está dentro das regras enunciadas, é o da Tábua.

IV

Examinando os desenvolvimentos que minuciosamente apresentámos, podemos ver como os autores egípcios, sem regras nem fórmulas complicadas, sem lutas entre os factores de M, escolhidos — ao contrário do que se lê nas *Questões heronianas*(1) — naturalmente e simplesmente, foram levados a formar a Tábua da decomposição de $\frac{2}{p}$, no caso em que p é um número primo. O que era fundamental, ao que se reconhece, e estabelecidas as regras da decomposição que decorrem dos simples raciocínios que levaram às fórmulas (4) e (5), é que os denominadores das fracções elementares não atingissem a casa dos milhares, talvez porque os Egípcios dificilmente concebessem números muito pequenos, de modo análogo, ao que na origem sucedia aos Gregos, quanto aos números grandes, que tinham repugnância em considerar, conforme observa Hankel (2); sendo êste o motivo que determinou o emprêgo do factor $M=56$, fora dos múltiplos de 12 e dos divisores de 60, na redução de $\frac{2}{97}$, bem como se recorreu a $M=42$ na redução de $\frac{2}{43}$ para obter denominadores muito mais pequenos que os que resultariam de $M=24$ e $M=30$.

Em seguida, e muito lògicamente, tendo sido escolhidos nas fracções mais simples, 12 e os seus divisores para os valores do factor M que deve multiplicar $\frac{2}{p}$, a partir de $\frac{2}{23}$ houve necessidade de pôr de parte o número 12 para ser possível a decomposição, e é então, conforme os casos, como vimos, que o valor de M usado é, ou múltiplo de 12 ou submúltiplo de 60,

(1) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 142: «A partir de $p=29$, para a escolha de M, parece haver luta entre os múltiplos de 12 e os divisores de 60.»

(2) *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter.* Leipzig, 1874, pág. 17.

números estes de grande número de divisores, como se torna necessário empregar em reduções desta natureza.

É assim, que $M=24$ aparece na redução de $\frac{2}{29}$, porque produz uma decomposição mais vantajosa sob o ponto de vista do último denominador que $M=20$, e, é assim também, que êste último factor aparece no desenvolvimento de $\frac{2}{31}$, muito lògicamente, pois, como verificámos, a decomposição respectiva tem menor número de fracções elementares e com denominador bastante menor que a que corresponde a $M=24$. Êste último factor é usado, em seguida, na redução da fracção imediata $\frac{2}{37}$, com vantagem manifesta sôbre o desenvolvimento correspondente a $M=20$; e, assim sucessivamente, são usados os diferentes valores M, conforme se verifica e explica nas reduções das diferentes fracções $\frac{2}{p}$.

Notemos ainda, dentro da restrição imposta ao maior valor dos denominadores das fracções elementares, que a decomposição binária correspondente à fórmula geral

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}p}$$

não poderia ser mais empregada a partir da redução de $\frac{2}{43}$. Com efeito, a fracção seguinte é $\frac{2}{47}$, para a qual esta última fórmula dá o valor

$$\frac{2}{47}=\frac{1}{24}+\frac{1}{1128},$$

com o segundo denominador superior a 1000.

Lê-se nas *Questões heronianas* (¹): «No ponto de vista egípcio, a decomposição $\frac{2}{17}$ oferece uma particularidade a assinalar. Se $\frac{p+1}{2}=m^2$, tem-se

$$\frac{p}{2}=\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{mp}+\frac{1}{(m+1)p};$$

(¹) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 142.

os dois factores de p não diferem senão duma unidade. Esta decomposição acha-se efectivamente aplicada para $p=31$, e para $p=97$. No primeiro caso, vemos aparecer $M=20$, emquanto que $M=24$ é preferido nos números próximos; no segundo caso, temos $M=7\times 8$ fora da série sexagesimal; mas, ao contrário, a decomposição análoga $\frac{2}{71}=\frac{1}{42}+\frac{1}{6\times 71}+\frac{1}{7\times 71}$ não é dada, ainda que 42 seja escolhido para valor de M num caso menos favorável».

De facto, as decomposições correspondentes a $\frac{2}{17}$, $\frac{2}{31}$ e $\frac{2}{97}$ estão compreendidas na fórmula apresentada por Tannery; mas que os Egípcios não a conheceram, resulta claramente da decomposição adoptada $\frac{2}{71}$. Como já expliquei e resulta do exame dos diferentes desenvolvimentos, o factor $M=20$ é usado muito lògicamente na redução de $\frac{2}{31}$, e o emprêgo de $M=56$, na decomposição de $\frac{2}{97}$, tornou-se absolutamente necessário, porque a $M=60$ corresponde uma fracção elementar com denominador igual a 1164.

Lê-se ainda nas *Questões heronianas* (¹): «O múltiplo 36 não aparece senão uma vez

$$\frac{2}{59}-\frac{1}{36}=\frac{9+4}{36\times 59}=\frac{1}{4\times 59}+\frac{1}{9\times 59},$$

em logar de

$$\frac{2}{59}-\frac{1}{30}=\frac{1}{30\times 59}, \tag{6}$$

emquanto que

$$\frac{2}{53}-\frac{1}{30}=\frac{2+5}{30\times 53}=\frac{1}{6\times 53}+\frac{1}{15\times 53} \tag{7}$$

em logar de

$$\frac{2}{53}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3\times 53}+\frac{1}{9\times 53}+\frac{1}{12\times 53}. \tag{8}$$

(¹) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, págs. 143 e 144.

«Daqui por diante não há mais múltiplos de 12 antes de 60:

$$\frac{2}{61}-\frac{1}{49}=\frac{10+5+4}{40\times 61},\quad \text{em lugar de}\quad \frac{2}{61}-\frac{1}{36}=\frac{1}{4\times 61}+\frac{1}{18\times 61},$$

$$\frac{2}{67}-\frac{1}{40}=\frac{8+5}{40\times 67},\quad \text{em lugar de}\quad \frac{2}{67}-\frac{1}{36}=\frac{1}{12\times 67}+\frac{1}{18\times 67},$$

$$\frac{2}{71}-\frac{1}{40}=\frac{5+4}{40\times 71},\quad \text{em lugar de}\quad \frac{2}{71}-\frac{1}{36}=\frac{1}{36\times 71}.$$

«Mas 60 aparece antes que seja necessário

$$\frac{2}{73}-\frac{1}{60}=\frac{20+15+12}{60\times 73},\quad \text{em logar de}\quad \frac{2}{73}-\frac{1}{40}=\frac{5+2}{40\times 73},$$

$$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}=\frac{20+15+6}{60\times 79},\quad \text{em logar de}\quad \frac{2}{79}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40\times 79}.\text{»}$$

Pelo que tem sido dito, a decomposição (6) não podia ter sido empregada, e (7) é preferível a (8), como já foi explicado. $M=40$ e $M=60$ são empregados para substituirem os factores 36 e 40, exactamente, quando se torna necessário; com efeito, tem-se

$$18\times 61=1098,\quad 18\times 67=1206,\quad 36\times 71=2556;$$

e

$$40\times 73=2920,\quad 40\times 79=3610;$$

o que mostra que, ao contrário do que se lê nas *Questões heronianas*, não podem ser empregadas as decomposições de $\frac{2}{61}$, $\frac{2}{67}$ e $\frac{2}{71}$ com $M=36$, nem podem ser empregadas as decomposições $\frac{2}{73}$ e $\frac{2}{79}$ com $M=40$.

V

Passando agora a considerar as fracções $\frac{2}{p}$ em que p é um número composto, verificámos que entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{99}$ os valores de p são: ou potências inteiras simples de 3, de 5 ou de 7, ou o produto de dois factores primos, um dos quais é 3, 5 ou 7, figurando 3 ou o seu quadrado em treze fracções

$$(\alpha) \qquad \frac{2}{15}, \frac{2}{21}, \frac{2}{33}, \frac{2}{39}, \frac{2}{45}, \frac{2}{51}, \frac{2}{57}, \frac{2}{63}, \frac{2}{69}, \frac{2}{75}, \frac{2}{87}, \frac{2}{93}, \frac{2}{99};$$

5, em cinco fracções

$$(\beta) \qquad \frac{2}{35}, \frac{2}{55}, \frac{2}{65}, \frac{2}{85}, \frac{2}{95};$$

e 7, em duas fracções

$$(\gamma) \qquad \frac{2}{77}, \frac{2}{91}.$$

As fracções em que entram simples potências de 3, 5 e 7, são:

$$(\delta) \qquad \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{25}, \frac{2}{49}.$$

Dum modo geral, as trese fracções (α) e as três primeiras (δ) estão compreendidas na forma $\frac{2}{3a}$, as cinco fracções (β) e a 4.ª (δ) na forma $\frac{2}{5a}$, e as duas fracções (γ) e a 5.ª (δ) na forma $\frac{2}{7a}$.

Pôsto isto, verifica-se do exame da Tábua de Ahmes que, em tôdas as fracções em cujo denominador entra 3, como factor, os desenvolvimentos obedecem às seguintes relações

$$(8) \qquad \frac{2}{3a} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{6a},$$

de acôrdo com a regra enunciada no papiro para obter os $\frac{2}{3}$ duma fracção.

Os desenvolvimentos das fracções $\frac{2}{5a}$ não compreendidas na forma $\frac{2}{3a}$ e os das fracções $\frac{2}{7a}$ que se não compreendem nas formas anteriores, obedecem, como regra, às relações

$$(9) \qquad \frac{2}{5a} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right)\frac{1}{a} = \frac{1}{3a} + \frac{1}{15a}$$

$$(10) \qquad \frac{2}{7a} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right)\frac{1}{a} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{28a}$$

análogas à relação (8). À regra expressa nas relações (8), (9) e (10), fazem excepção, apenas, as seguintes fracções

$$(11) \qquad \frac{2}{35}=\frac{2}{5\times 7},\ \frac{2}{55}=\frac{2}{5\times 11},\ \frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19},\ \frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13};$$

sendo os desenvolvimentos de $\frac{2}{55}$ e $\frac{2}{95}$, correspondentes a

$$\frac{2}{55}=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{5},\quad \frac{2}{95}=\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{5},$$

em vez de

$$\frac{2}{55}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{11},\quad \frac{2}{95}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{19};$$

e os desenvolvimentos de $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$, compreendidos na fórmula

$$\frac{2}{ab}=\frac{2\frac{a+b}{2}}{ab\frac{a+b}{2}}=\frac{1}{a\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{b\frac{a+b}{2}}.$$

Porém, todos os desenvolvimentos das fracções $\frac{2}{p}$ em que p é um número composto, estão dentro das regras e preceitos que serviram para fazer as decomposições no caso em que p é um número primo, com as simplificações que resultam de ser p um múltiplo de 3, 5 ou de 7, pois que, neste caso, de ser

$$(12) \qquad \frac{2}{p}=\frac{2M}{p\times M}=\frac{2M}{3a\times M},\quad \text{ou}\quad =\frac{2M}{5a\times M},\quad \text{ou}\quad =\frac{2M}{7a\times M},$$

resulta que as reduções em fracções elementares se obtêm muito simplesmente, fazendo

$$2M=3+1,\quad \text{ou}\quad M=\frac{3+1}{2}=2,\quad \text{no 1.º caso;}$$

$$2M=5+1,\quad \text{ou}\quad M=\frac{5+1}{2}=3,\quad \text{no 2.º caso;}$$

$$2M=7+1,\quad \text{ou}\quad M=\frac{7+1}{2}=4,\quad \text{no 3.º caso.}$$

E, tem-se, então, com facilidade,

$$p = 3a), \quad \frac{2}{3a} = \frac{2\times 2}{3a\times 2} = \frac{3+1}{3a\times 2} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{6a},$$

$$p = 5a), \quad \frac{2}{5a} = \frac{2\times 3}{5a\times 3} = \frac{5+1}{5a\times 3} = \frac{1}{3a} + \frac{1}{15a},$$

$$p = 7a), \quad \frac{2}{7a} = \frac{2\times 4}{7a\times 4} = \frac{7+1}{7a\times 4} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{28a}.$$

Estas reduções muito simples e com factores simples 2, 3, 4, todos divisores de 12, são, em regra, as da Tábua, fazendo excepção as quatro fracções (11) cujos desenvolvimentos porém se não afastam ainda das regras e preceitos que têm sido indicados.

De facto, a redução da Tábua

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330},$$

obtém-se da expressão (12) sob a forma

$$\frac{2}{p} = \frac{2M}{5a\times M},$$

fazendo $2M = a + 1$, ou $M = \frac{a+1}{2}$. No caso sujeito, tem-se $M = \frac{11+1}{2} = 6$, o que dá

$$\frac{2}{55} = \frac{2}{5\times 11} = \frac{2\times 6}{5\times 11\times 6} = \frac{11+1}{5\times 11\times 6} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}.$$

As reduções

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \quad \frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130},$$

obtêm-se respectivamente das expressões (12),

$$\frac{2}{p} = \frac{2M}{5a\times M}, \quad \frac{2}{p} = \frac{2M}{7a\times M}$$

em que $2M = 5 + a$, $2M = 7 + a$, ou $M = \frac{5+a}{2}$, $M = \frac{7+a}{2}$.

Nos casos de que se trata, vem

$$\frac{2}{35}=\frac{2}{5\times 7}=\frac{2\times 6}{5\times 7\times 6}=\frac{5+7}{5\times 7\times 6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42},$$

$$\frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 10}{7\times 13\times 10}=\frac{13+7}{7\times 13\times 10}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130},$$

representando esta última decomposição o único caso dum factor $M<12$, que não é divisor dêste número, mas de 60.

Se aplicarmos à redução de $\frac{2}{95}$, processo idêntico ao usado nas decomposições $\frac{2}{33}$ e $\frac{2}{91}$, resultará $M=\frac{19+5}{2}=12$ e

$$\frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}=\frac{2\times 12}{5\times 19\times 12}=\frac{19+5}{5\times 19\times 12}=\frac{1}{60}+\frac{1}{228},$$

ou

$$=\frac{19+3+2}{5\times 19\times 12}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570},$$

como resulta da comparação dêste desenvolvimento com o que foi obtido de $\frac{2}{19}$ e consta da alínea *G*), como é facil verificar.

VI

De tudo quanto tem sido exposto, resulta ter de reconhecer-se que os Egípcios para a construção da Tábua de decomposição das fracções $\frac{2}{2n+1}$, em que $n<50$, usaram de processos gerais com as modificações correspondentes aos diferentes casos tratados; mostrando as diferentes reduções apresentadas a variedade dos seus conhecimentos, e, em geral, o justo critério com que foram escolhidos os polinómios da decomposição, como já vimos no exame detalhado dos possíveis desenvolvimentos que apresentámos no caso de p ser um número primo, e, como se pode ver da análise dos desenvolvimentos que provêm da aplicação dos critérios de redução que estudámos, no caso em que p é um número composto, desenvolvimentos em que se verificam os resultados que seguem.

a) — Redução de $\frac{2}{9}$. —

$$p=3a),\ a=3),\ M=\frac{3+1}{2}),\quad \frac{2}{9}=\frac{2}{3\times3}=\frac{2\times2}{3\times3\times2}=\frac{3+1}{3\times3\times2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{3},$$

é a decomposição da Tábua, e a única possível, dentro dos critérios de redução que foram estabelecidos.

b) — Redução de $\frac{2}{15}$. —

$$p=3a),\ a=5),\ M=\frac{3+1}{2}),\quad \frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}=\frac{2\times2}{3\times5\times2}=\frac{3+1}{3\times5\times2}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{5};$$

$$M=\frac{5+1}{2}),\quad \frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}=\frac{2\times3}{3\times5\times3}=\frac{5+1}{3\times5\times3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{45},$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{5+3}{2}),\quad \frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}=\frac{2\times4}{3\times5\times4}=\frac{5+3}{3\times5\times4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}.$$

O primeiro resultado, evidentemente mais cómodo e mais prático para os cálculos, é o da Tábua.

c) — Redução de $\frac{2}{21}$. —

$$p=3a),\ a=7),\ M=\frac{3+1}{2}),\quad \frac{2}{21}=\frac{2}{3\times7}=\frac{2\times2}{3\times7\times2}=\frac{3+1}{3\times7\times2}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{7};$$

$$M=\frac{7+1}{2}),\quad \frac{2}{21}=\frac{2}{3\times7}=\frac{2\times4}{3\times7\times4}=\frac{7+1}{3\times7\times4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{84},$$
$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{7+3}{2}),\quad \frac{2}{21}=\frac{2}{3\times7}=\frac{2\times5}{3\times7\times5}=\frac{7+3}{3\times7\times5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O último não deveria ser empregado por ser $M=5$.

d) — *Redução de* $\frac{2}{25}$. —

$$p=5a),\quad a=5),\quad M=\frac{5+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{25}=\frac{2}{5\times5}=\frac{2\times3}{5\times5\times3}=\frac{5+1}{5\times5\times3}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75},$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{5}.$$

É a decomposição da Tábua e a única possível dentro dos critérios estabelecidos.

e) — *Redução de* $\frac{2}{27}$. —

$$p=3a),\quad a=9),\quad M=\frac{3+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{27}=\frac{2}{3\times9}=\frac{2\times2}{3\times9\times2}=\frac{3+1}{3\times9\times2}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{9},$$
$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{9+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{27}=\frac{2}{3\times9}=\frac{2\times5}{3\times9\times5}=\frac{9+1}{3\times9\times5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{135},$$

$$M=\frac{9+3}{2}\Big),\quad \frac{2}{27}=\frac{2}{3\times9}=\frac{2\times6}{3\times9\times6}=\frac{9+3}{3\times9\times6}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo, correspondente a $M=5$, não deve ser usado.

f) — *Redução de* $\frac{2}{33}$. —

$$p=3a),\quad a=11),\quad M=\frac{3+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{33}=\frac{2}{3\times11}=\frac{2\times2}{3\times11\times2}=\frac{3+1}{3\times11\times2}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{11}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{11};$$

$$M=\frac{11+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{33}=\frac{2}{3\times11}=\frac{2\times6}{3\times11\times6}=\frac{11+1}{3\times11\times6}=\frac{1}{18}+\frac{1}{198},$$
$$=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{66}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{11+3}{2}\Big),\quad \frac{2}{33}=\frac{2}{3\times11}=\frac{2\times7}{3\times11\times7}=\frac{11+3}{3\times11\times7}=\frac{1}{21}+\frac{1}{77}$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O último, correspondente a $M=7$, não deve ser usado.

g) — Redução de $\frac{2}{35}$. —

$$p=5a),\ a=7),\ M=\frac{5+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{35}=\frac{2}{5\times7}=\frac{2\times3}{5\times7\times3}=\frac{5+1}{5\times7\times3}=\frac{1}{21}+\frac{1}{105},$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{7}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{7};$$

$$M=\frac{7+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{35}=\frac{2}{5\times7}=\frac{2\times4}{5\times7\times4}=\frac{7+1}{5\times7\times4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{140},$$

$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\frac{1}{5};$$

$$M=\frac{7+5}{2}\Big),\quad \frac{2}{35}=\frac{2}{5\times7}=\frac{2\times6}{5\times7\times6}=\frac{7+5}{5\times7\times6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}.$$

O último desenvolvimento é o da Tábua, como já se viu.

h) — Redução de $\frac{2}{39}$. —

$$p=3a),\ a=13),\ M=\frac{3+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{39}=\frac{2}{3\times13}=\frac{2\times2}{3\times13\times2}=\frac{3+1}{3\times13\times2}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78},$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{13}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{13};$$

$$M=\frac{13+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{39}=\frac{2}{3\times13}=\frac{2\times7}{3\times13\times7}=\frac{13+1}{3\times13\times7}=\frac{1}{21}+\frac{1}{273};$$

$$M=\frac{13+3}{2}\Big),\quad \frac{2}{39}=\frac{2}{3\times13}=\frac{2\times8}{3\times13\times8}=\frac{13+3}{3\times13\times8}=\frac{1}{24}+\frac{1}{104},$$

$$=\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\right)\frac{1}{3}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo não poderia ser usado por não ser $M=7$, divisor de 12, podendo usar-se $M=8$, conforme o terceiro desenvolvimento que, sob a forma $\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}+\frac{1}{156}+\frac{1}{312}$, é menos cómodo que o primeiro.

i) — *Redução de* $\frac{2}{45}$. —

$$p=3a),\quad a=15),\quad M=\frac{3+1}{2}),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{3\times 15}=\frac{2\times 2}{3\times 15\times 2}=\frac{3+1}{3\times 15\times 2}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90},$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{15}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{15},$$

$$=\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{15+1}{2}),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{3\times 15}=\frac{2\times 8}{3\times 15\times 8}=\frac{15+1}{3\times 15\times 8}=\frac{1}{24}+\frac{1}{360};$$

$$M=\frac{15+3}{2}),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{3\times 15}=\frac{2\times 9}{3\times 15\times 9}=\frac{15+3}{3\times 15\times 9}=\frac{1}{27}+\frac{1}{135}.$$

O primeiro desenvolvimento, muito prático e cómodo, é o da Tábua. O último, correspondente a $M=9$, não deve ser usado.

Notando-se que a redução desta fracção se pode fazer em relação aos factores 5 e 9 da decomposição de 45, poderemos considerar os desenvolvimentos que seguem:

$$M=\frac{5+1}{2}),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{5\times 9}=\frac{2\times 3}{5\times 9\times 3}=\frac{5+1}{5\times 9\times 3}=\frac{1}{27}+\frac{1}{135};$$

$$M=\frac{9+1}{2}),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{5\times 9}=\frac{2\times 5}{5\times 9\times 5}=\frac{9+1}{5\times 9\times 5}=\frac{1}{25}+\frac{1}{225};$$

$$M=\frac{9+5}{2}),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{5\times 9}=\frac{2\times 7}{5\times 9\times 7}=\frac{9+5}{5\times 9\times 7}=\frac{1}{35}+\frac{1}{63}.$$

Dêstes novos desenvolvimentos, só seria de considerar o primeiro que reproduz o terceiro da decomposição

$$45=3\times 15.$$

Os outros dois, com $M=5$ e $M=7$, não podiam ser usados.

j) — *Redução de* $\frac{2}{49}$. —

$$p=7a),\quad a=7),\quad M=\frac{7+1}{2}),\quad \frac{2}{49}=\frac{2\times 4}{7\times 7\times 4}=\frac{7+1}{7\times 7\times 4}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196},$$

$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\frac{1}{7}.$$

É o único desenvolvimento possível, e é o da Tábua.

k) — *Redução de* $\frac{2}{51}$. —

$$p=3a),\ a=17),\ M=\frac{3+1}{2}\Big),\ \frac{2}{51}=\frac{2}{3\times17}=\frac{2\times2}{3\times17\times2}=\frac{3+1}{3\times17\times2}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{17}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{17};$$
$$M=\frac{17+1}{2}\Big),\ \frac{2}{51}=\frac{2}{3\times17}=\frac{2\times9}{3\times17\times9}=\frac{17+1}{3\times17\times9}=\frac{1}{27}+\frac{1}{459};$$
$$M=\frac{17+3}{2}\Big),\ \frac{2}{51}=\frac{2}{3\times17}=\frac{2\times10}{3\times17\times10}=\frac{17+3}{3\times17\times10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{170}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua; corresponde à regra geral para obter $\frac{2}{3}$ duma fracção.

O segundo desenvolvimento, correspondente a $M=9$, não deve ser usado, mas, sim, $M=12>\frac{17}{2}$ e <17, que daria

$$\frac{2}{51}=\frac{2}{3\times17}=\frac{2\times12}{3\times17\times12}=\frac{17+4+3}{3\times17\times12}=\frac{1}{36}+\frac{1}{153}+\frac{1}{204},$$
$$=\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}\right)\frac{1}{3},$$

menos cómodo que o primeiro.

O terceiro, como regra, não deve ser considerado.

l) — *Redução de* $\frac{2}{55}$. —

$$p=5a),\ a=11),\ M=\frac{5+1}{2}\Big),\ \frac{2}{55}=\frac{2}{5\times11}=\frac{2\times3}{5\times11\times3}=\frac{5+1}{5\times11\times3}=\frac{1}{33}+\frac{1}{165},$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{11}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{11};$$
$$M=\frac{11+1}{2}\Big),\ \frac{2}{55}=\frac{2}{5\times11}=\frac{2\times6}{5\times11\times6}=\frac{11+1}{5\times11\times6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330},$$
$$=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{66}\right)\frac{1}{5};$$
$$M=\frac{11+5}{2}\Big),\ \frac{2}{55}=\frac{2}{5\times11}=\frac{2\times8}{5\times11\times8}=\frac{11+5}{5\times11\times8}=\frac{1}{40}+\frac{1}{88}.$$

O segundo desenvolvimento, como já foi dito, é o da Tábua.

m) — Redução de $\frac{2}{57}$. —

$$p=3a),\quad a=19),\quad M=\frac{3+1}{2}),\quad \frac{2}{57}=\frac{2}{3\times19}=\frac{2\times2}{3\times19\times2}=\frac{3+1}{3\times19\times2}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{19}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{19};$$

$$M=\frac{19+1}{2}),\quad \frac{2}{57}=\frac{2}{3\times19}=\frac{2\times10}{3\times19}=\frac{19+1}{3\times19\times10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{570};$$

$$M=\frac{19+3}{2}),\quad \frac{2}{57}=\frac{2}{3\times19}=\frac{2\times11}{3\times19\times11}=\frac{19+3}{3\times19\times11}=\frac{1}{33}+\frac{1}{209}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da regra e o da Tábua. O terceiro desenvolvimento não pode ser considerado pelo motivo que temos apontado relativo aos factores M. Se na decomposição correspondente ao segundo desenvolvimento, usássemos o factor $M=12$ que é $>\frac{19}{2}$ e <19, resultaria

$$\frac{2}{57}=\frac{2}{3\times19}=\frac{2\times12}{3\times19\times12}=\frac{19+3+2}{3\times19\times12}=\frac{1}{36}+\frac{1}{228}+\frac{1}{342},$$
$$=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}.$$

n) — Redução de $\frac{2}{63}$. —

$$p=3a),\quad a=21),\quad M=\frac{3+1}{2}),\quad \frac{2}{63}=\frac{2}{3\times21}=\frac{2\times2}{3\times21\times2}=\frac{3+1}{3\times21\times2}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{21}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{21};$$

$$M=\frac{21+1}{2}),\quad \frac{2}{63}=\frac{2}{3\times21}=\frac{2\times11}{3\times21\times11}=\frac{21+1}{3\times21\times11}=\frac{1}{33}+\frac{1}{693};$$

$$M=\frac{21+3}{2}),\quad \frac{2}{63}=\frac{2}{3\times21}=\frac{2\times12}{3\times21\times12}=\frac{21+3}{3\times21\times12}=\frac{1}{36}+\frac{1}{252},$$
$$=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{84}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{3}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo, que corresponde a $M=11$, não pode ser eonsiderado, devendo servir quando se quiser recorrer ao factor 21, o valor

$M=12$, cujo desenvolvimento comparado com o de $\frac{2}{21}$ para $M=4$, dá um desenvolvimento igual a $\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{3}$.

E, como 63 é também igual a 7×9, poderemos considerar as seguintes decomposições:

$$M=\frac{7+1}{2}), \quad \frac{2}{63}=\frac{2}{7\times 9}=\frac{2\times 4}{7\times 9\times 4}=\frac{7+1}{7\times 9\times 4}=\frac{1}{36}+\frac{1}{252};$$

$$M=\frac{9+1}{2}), \quad \frac{2}{63}=\frac{2}{7\times 9}=\frac{2\times 5}{7\times 9\times 5}=\frac{9+1}{7\times 9\times 5}=\frac{1}{35}+\frac{1}{315};$$

$$M=\frac{9+7}{2}), \quad \frac{2}{63}=\frac{2}{7\times 9}=\frac{2\times 8}{7\times 9\times 8}=\frac{9+7}{7\times 9\times 8}=\frac{1}{56}+\frac{1}{72};$$

dos quais a primeira reproduz o terceiro desenvolvimento correspondente a 3×21 e a segunda não pode ser usada.

o) — Redução de $\frac{2}{65}$. —

$$p=5a),\ a=13),\ M=\frac{5+1}{2}), \quad \frac{2}{65}=\frac{2}{5\times 13}=\frac{2\times 3}{5\times 13\times 3}=\frac{5+1}{5\times 13\times 3}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195},$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{13};$$

$$M=\frac{13+1}{2}), \quad \frac{2}{65}=\frac{2}{5\times 13}=\frac{2\times 7}{5\times 13\times 7}=\frac{13+1}{5\times 13\times 7}=\frac{1}{35}+\frac{1}{455};$$

$$M=\frac{13+5}{2}), \quad \frac{2}{65}=\frac{2}{5\times 13}=\frac{2\times 9}{5\times 13\times 9}=\frac{13+5}{5\times 13\times 9}=\frac{1}{45}+\frac{1}{585}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. Os outros dois não podem ser considerados, pois é $M=7$ e $M=9$. No segundo, recorrendo a $M=8$, resultaria

$$\frac{2}{65}=\frac{2}{5\times 13}=\frac{2\times 8}{5\times 13\times 8}=\frac{13+2+1}{5\times 13\times 8}=\frac{1}{40}+\frac{1}{260}+\frac{1}{520},$$

$$=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\right)\frac{1}{5}=\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{5}.$$

p) — Redução de $\frac{2}{69}$. —

$p=3a)$, $a=23)$, $M=\frac{3+1}{2}\Big)$, $\frac{2}{69}=\frac{2}{3\times23}=\frac{2\times2}{3\times23\times2}=\frac{3+1}{3\times23\times2}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138},$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{23}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{23};$$

$M=\frac{23+1}{2}\Big)$, $\frac{2}{69}=\frac{2}{3\times23}=\frac{2\times12}{3\times23\times12}=\frac{23+1}{3\times23\times12}=\frac{1}{36}+\frac{1}{828},$

$$=\frac{2}{23}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{276}\right)\frac{1}{3};$$

$M=\frac{23+3}{2}\Big)$, $\frac{2}{69}=\frac{2\times13}{3\times23\times13}=\frac{23+3}{3\times23\times13}=\frac{1}{39}+\frac{1}{299}.$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O terceiro, correspondente a $M=13$, não pode ser usado.

q) — Redução de $\frac{2}{75}$. —

$p=3a)$, $a=25)$, $M=\frac{3+1}{2}\Big)$, $\frac{2}{75}=\frac{2}{3\times25}=\frac{2\times2}{3\times25\times2}=\frac{3+1}{3\times25\times2}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150},$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{25}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{25};$$

$M=\frac{25+1}{2}\Big)$, $\frac{2}{75}=\frac{2}{3\times25}=\frac{2\times13}{3\times25\times13}=\frac{25+1}{3\times25\times13}=\frac{1}{69}+\frac{1}{1725};$

$M=\frac{25+3}{2}\Big)$, $\frac{2}{75}=\frac{2}{3\times25}=\frac{2\times14}{3\times25\times14}=\frac{25+3}{3\times25\times14}=\frac{1}{42}+\frac{1}{350}.$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo e o terceiro não podem ser usados. Querendo porém recorrer ao desenvolvimento correspondente a $a=25$, poderemos usar $M=15$, divisor de 60, e a redução dará

$$\frac{2}{75}=\frac{2}{3\times25}=\frac{2\times15}{3\times25\times15}=\frac{25+5}{3\times25\times15}=\frac{1}{45}+\frac{1}{225},$$

$$=\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{75}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{3}.$$

Fazendo agora as decomposições correspondentes à decomposição $75 = 5 \times 15$ tem-se:

$$M = \frac{5+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{75} = \frac{2}{5 \times 15} = \frac{2 \times 3}{5 \times 15 \times 3} = \frac{5+1}{5 \times 15 \times 3} = \frac{1}{45} + \frac{1}{225};$$

$$M = \frac{15+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{75} = \frac{2}{5 \times 15} = \frac{2 \times 8}{5 \times 15 \times 8} = \frac{15+1}{5 \times 15 \times 8} = \frac{1}{40} + \frac{1}{600};$$

$$M = \frac{15+5}{2}\Big), \quad \frac{2}{75} = \frac{2}{5 \times 15} = \frac{2 \times 10}{5 \times 15 \times 10} = \frac{15+5}{5 \times 15 \times 10} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150};$$

Destas reduções, a terceira, muito simples é, como já se disse, mas obtida por outra forma, a da Tábua.

r) — Redução de $\frac{2}{77}$. —

$$p = 7a),\ a = 11),\ M = \frac{7+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{77} = \frac{2}{7 \times 11} = \frac{2 \times 4}{7 \times 11 \times 4} = \frac{7+1}{7 \times 11 \times 4} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308},$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{11} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right)\frac{1}{11};$$

$$M = \frac{11+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{77} = \frac{2}{7 \times 11} = \frac{2 \times 6}{7 \times 11 \times 6} = \frac{11+1}{7 \times 11 \times 6} = \frac{1}{42} + \frac{1}{462},$$

$$= \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{66}\right)\frac{1}{7};$$

$$M = \frac{11+7}{2}\Big), \quad \frac{2}{77} = \frac{2}{7 \times 11} = \frac{2 \times 9}{7 \times 11 \times 9} = \frac{11+7}{7 \times 11 \times 9} = \frac{1}{63} + \frac{1}{99}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O último não pode ser considerado por ser $M = 9$.

s) — Redução de $\frac{2}{81}$. —

$$p = 3a),\ a = 27),\ M = \frac{3+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{81} = \frac{2}{3 \times 27} = \frac{2 \times 2}{3 \times 27 \times 2} = \frac{3+1}{3 \times 27 \times 2} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162},$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{27};$$

$$= \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{54}\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{3};$$

$$M = \frac{27+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{81} = \frac{2}{3 \times 27} = \frac{2 \times 14}{3 \times 27 \times 14} = \frac{27+1}{3 \times 27 \times 14} = \frac{1}{42} + \frac{1}{1134};$$

$$M = \frac{27+3}{2}\Big), \quad \frac{2}{81} = \frac{2}{3 \times 27} = \frac{2 \times 15}{3 \times 27 \times 15} = \frac{27+3}{3 \times 27 \times 15} = \frac{1}{45} + \frac{1}{405}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo, conforme as regras relativas aos valores M, não podia ser usado. Como é também $81 = 9 \times 9$, poderíamos ensaiar

$$M = \frac{9+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{81} = \frac{2}{9 \times 9} = \frac{2 \times 5}{9 \times 9 \times 5} = \frac{9+1}{9 \times 9 \times 5} = \frac{1}{45} + \frac{1}{405},$$

que, correspondendo a $M = 5$, não pode ser considerado.

t) — *Redução de* $\frac{2}{85}$. —

$$p = 3a), \quad a = 17), \quad M = \frac{5+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{85} = \frac{2}{5 \times 17} = \frac{2 \times 3}{5 \times 17 \times 3} = \frac{5 \times 1}{5 \times 17 \times 3} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255},$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{17} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right)\frac{1}{17};$$

$$M = \frac{17+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{85} = \frac{2}{5 \times 17} = \frac{2 \times 9}{5 \times 17 \times 9} = \frac{17+1}{5 \times 17 \times 9} = \frac{1}{45} + \frac{1}{765};$$

$$M = \frac{17+5}{2}\Big), \quad \frac{2}{85} = \frac{2}{5 \times 17} = \frac{2 \times 11}{5 \times 17 \times 11} = \frac{17+5}{5 \times 17 \times 11} = \frac{1}{55} + \frac{1}{187}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. Ao segundo desenvolvimento, conforme as regras enunciadas, deve substituir-se

$$\frac{2}{85} = \frac{2}{5 \times 17} = \frac{2 \times 12}{5 \times 17 \times 12} = \frac{17+4+3}{5 \times 17 \times 12} = \frac{1}{60} + \frac{1}{252} + \frac{1}{340},$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}\right)\frac{1}{5} = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{5}.$$

O terceiro não pode também ser usado.

u) — *Redução de* $\frac{2}{87}$. —

$$p = 3a), \quad a = 29), \quad M = \frac{3+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{87} = \frac{2}{3 \times 29} = \frac{2 \times 2}{3 \times 29 \times 2} = \frac{3+1}{3 \times 29 \times 2} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174},$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{29} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{29};$$

$$M = \frac{29+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{87} = \frac{2}{3 \times 29} = \frac{2 \times 15}{3 \times 29 \times 15} = \frac{1}{45} + \frac{1}{435};$$

$$M = \frac{29+3}{2}\Big), \quad \frac{2}{87} = \frac{2}{3 \times 29} = \frac{2 \times 16}{3 \times 29 \times 16} = \frac{29+3}{3 \times 29 \times 16} = \frac{1}{48} + \frac{1}{464}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. Como temos dito, o terceiro, que corresponde a $M=16$, não podia ser usado, e o segundo, só como excepção. Recorrendo a $M=24$ que é $>\frac{29}{2}$ e <29, resulta

$$\frac{2}{87}=\frac{2}{3\times 29}=\frac{2\times 24}{3\times 29\times 24}=\frac{29+12+4+3}{3\times 29\times 24}=\frac{1}{72}+\frac{1}{174}+\frac{1}{522}+\frac{1}{696},$$
$$=\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{29}\cdot\frac{1}{3}.$$

v) — Redução de $\frac{2}{91}$. —

$$p=7a),\ a=13),\ M=\frac{7+1}{2}\Big),\ \frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 4}{7\times 13\times 4}=\frac{7+1}{7\times 13\times 4}=\frac{1}{52}+\frac{1}{364},$$
$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{13}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\frac{1}{13};$$
$$M=\frac{13+1}{2}\Big),\ \frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 7}{7\times 13\times 7}=\frac{13+1}{7\times 13\times 7}=\frac{1}{49}+\frac{1}{637};$$
$$M=\frac{13+7}{2}\Big),\ \frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 10}{7\times 13\times 10}=\frac{13+7}{7\times 13\times 10}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}.$$

O último desenvolvimento, muito simples, é o da Tábua; e é, como dissémos, o único caso adoptado de decomposição, em que figura um factor M menor que 12, que não é divisor dêste número, mas de 60. O segundo não pode ser considerado, tendo, no caso de se querer fazer a decomposição recorrendo ao factor $a=13$, de recorrer ao valor $M=8$, que dará

$$\frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 8}{7\times 13\times 8}=\frac{13+2+1}{7\times 13\times 8}=\frac{1}{56}+\frac{1}{364}+\frac{1}{728},$$
$$=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\right)\frac{1}{7}=\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{7}.$$

x) — Redução de $\frac{2}{93}$. —

$$p=3a),\ a=31),\ M=\frac{3+1}{2}\Big),\ \frac{2}{93}=\frac{2}{3\times 31}=\frac{2\times 2}{3\times 31\times 2}=\frac{3+1}{3\times 31\times 2}=\frac{1}{62}+\frac{1}{186},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{31}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{31};$$
$$M=\frac{31+1}{2}\Big),\ \frac{2}{93}=\frac{2}{3\times 31}=\frac{2\times 16}{3\times 31\times 16}=\frac{31+1}{3\times 31\times 16}=\frac{1}{48}+\frac{1}{1488};$$
$$M=\frac{31+3}{2}\Big),\ \frac{2}{93}=\frac{2}{3\times 31}=\frac{2\times 17}{3\times 31\times 17}=\frac{31+3}{3\times 31\times 17}=\frac{1}{51}+\frac{1}{527}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo e o terceiro não podem ser usados.

Ao segundo desenvolvimento, de acôrdo com as regras relativas aos factores, poderemos substituir

$$\frac{2}{93}=\frac{2}{3\times 31}=\frac{2\times 20}{5\times 31\times 20}=\frac{31+5+4}{3\times 31\times 20}=\frac{1}{60}+\frac{1}{372}+\frac{1}{465},$$
$$=\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{31}\cdot\frac{1}{3}.$$

y) — Redução de $\frac{2}{95}$. —

$$p=5a),\quad a=19),\quad M=\frac{5+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}=\frac{2\times 3}{5\times 19\times 3}=\frac{5+1}{5\times 19\times 3}=\frac{1}{57}+\frac{1}{285},$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{19}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{19};$$
$$M=\frac{19+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}=\frac{2\times 10}{5\times 19\times 10}=\frac{19+1}{5\times 19\times 10}=\frac{1}{50}+\frac{1}{950};$$
$$M=\frac{19+5}{2}\Big),\quad \frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}=\frac{2\times 12}{5\times 19\times 12}=\frac{19+5}{5\times 19\times 12}=\frac{1}{60}+\frac{1}{228}.$$

De acôrdo com as regras que têm sido expostas, o segundo desenvolvimento não deve, como regra, ser considerado. O terceiro desenvolvimento é simples e mais cómodo que o primeiro; com a forma, talvez posterior, de decomposição

$$\frac{2}{95}=\frac{2\times 12}{5\times 19\times 12}=\frac{19+3+2}{5\times 19\times 12}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570},$$
$$=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}\right)\frac{1}{5}=\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{5},$$

obtem-se o resultado da Tábua.

z) — Redução de $\frac{2}{99}$. —

$$p=3a),\quad a=33),\quad M=\frac{3+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{99}=\frac{2}{3\times 33}=\frac{2\times 2}{3\times 33\times 2}=\frac{3+1}{3\times 33\times 2}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{33}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{33},$$
$$=\left(\frac{1}{22}+\frac{1}{66}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{33}\cdot\frac{1}{3};$$
$$M=\frac{33+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{99}=\frac{2}{3\times 33}=\frac{2\times 17}{3\times 33\times 17}=\frac{33+1}{3\times 33\times 17}=\frac{1}{51}+\frac{1}{1683};$$
$$M=\frac{33+3}{2}\Big),\quad \frac{2}{99}=\frac{2}{3\times 33}=\frac{2\times 18}{3\times 33\times 18}=\frac{33+3}{3\times 33\times 18}=\frac{1}{54}+\frac{1}{594}.$$

Dêstes desenvolvimentos, só o primeiro pode ser considerado; é o da regra geral relativa aos $\frac{2}{3}$ duma fracção e o da Tábua. Ainda poderão ser estudadas as decomposições relativas a $99=9\times 11$, como segue:

$$M=\frac{9+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{9\times 11}=\frac{2\times 5}{9\times 11\times 5}=\frac{9+1}{9\times 11\times 5}=\frac{1}{55}+\frac{1}{495},$$

$$M=\frac{11+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{99}=\frac{2}{9\times 11}=\frac{2\times 6}{9\times 11\times 6}=\frac{11+1}{9\times 11\times 6}=\frac{1}{54}+\frac{1}{594},$$

$$M=\frac{11+9}{2}\Big), \quad \frac{2}{99}=\frac{2}{9\times 11}=\frac{2\times 10}{9\times 11\times 10}=\frac{11+9}{9\times 11\times 10}=\frac{1}{90}+\frac{1}{110};$$

das quais a primeira, correspondente a $M=5$, não pode ser considerada, e a segunda que corresponde ao valor achado para $99=3\times 33$, no caso $M=\frac{a+b}{2}$, não apresenta vantagens práticas sôbre a que foi adoptada na Tábua, ao contrário da última que parece preferível nos cálculos; o que levou P. Tannery, a propósito do exame dêste caso e do da decomposição de $\frac{2}{95}$, expressa na relação

$$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{228},$$

decomposições estas obtidas em condições idênticas às que os Egípcios empregaram na redução das fracções $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$, a dizer [1]:

«Elas correspondem à fórmula $\frac{2}{pq}=\frac{1}{p\frac{p+q}{2}}+\frac{1}{q\frac{p+q}{2}}$, cuja aplicação sistemática teria permitido satisfazer, em certos casos, o *desideratum* dos Egípcios mais completamente do que o desenvolvimento da Tábua.»

O exame das decomposições das fracções $\frac{2}{p}$, no caso em que p é um número composto que, em detalhe, apresentámos, mostra, como foi dito, que na Tábua de Ahmes se compreendem, em regra, os desenvolvimentos mais favoráveis para os cálculos. E, sendo certo, evidentemente, que os Egípcios

(1) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 146.

desconheciam a regra geral, expressa na fórmula de Tannery, devendo ter chegado às decomposições $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$ que se compreendem nessa fórmula, pelo critério simples e geral que expus para tôdas as fracções $\frac{2}{p}$, de multiplicar os dois termos desta fracção por determinados factores M, que, no caso de ser $p = ab$, podem ter o valor $\frac{a+b}{2}$, devendo porém eliminar-se dêstes factores os que não forem divisores de 12, múltiplos dêste número, ou divisores de 60, resulta verificar-se, como vimos, que a decomposição a que corresponde a fórmula de Tannery não é aplicável às fracções

$$\frac{2}{9}, \frac{2}{21}, \frac{2}{25}, \frac{2}{33}, \frac{2}{45}, \frac{2}{49}, \frac{2}{57}, \frac{2}{65}, \frac{2}{69}, \frac{2}{77}, \frac{2}{81}, \frac{2}{85}, \frac{2}{87}, \frac{2}{93},$$

isto é, ao maior número das fracções $\frac{2}{ab}$; podendo aplicar-se às fracções $\frac{2}{75}$ e $\frac{2}{99}$ apenas quando consideremos os seus denominadores, não sob a forma geral de múltiplos simples de 3, mas sob a forma especial $75 = 5 \times 15$, $99 = 9 \times 11$. No caso das outras fracções $\frac{2}{ab}$, as reduções mostram, em geral, o justo critério do emprêgo dos desenvolvimentos da Tábua de Ahmes.

VII

Se examinarmos agora as outras decomposições em fracções elementares que se encontram nas *Questões heronianas* nos capítulos II e seguintes, vemos que, quando o numerador é igual a uma soma de divisores do denominador, se fazem simplesmente as reduções, mantendo, tanto quanto possível, o princípio egípcio de ter os menores denominadores possível. Se o denominador é um número primo, ou se no numerador não se contém uma soma exacta de divisores do denomidador, faz-se a decomposição, multiplicando ambos os termos da fracção por um número M conveniente escolhido, de acôrdo com os critérios e regras que julgo terem sido adoptadas no papiro de Rhind, e que foram já expostas.

Em especial, $\frac{3}{p}$ decompõe-se também, usando os desenvolvimentos $\frac{2}{p}$ da Tábua egípcia e juntando aos resultados a fracção $\frac{1}{p}$; para $\frac{4}{p}$ quando os denominadores de $\frac{2}{p}$ são pares, usa-sa, por vezes, a redução correspondente a $2 \times \frac{2}{p}$, etc.; idênticamente se procede para outras decomposições.

Do capítulo II das *Questões heronianas* destacamos as fracções que seguem, indicando o processo simples da sua decomposição:

a) $\frac{3}{5}=\frac{3\times 2}{5\times 2}=\frac{5+1}{5\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$; $\frac{4}{5}=\frac{4\times 2}{5\times 2}=\frac{5+2+1}{5\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$,

$\frac{4}{5}=\frac{4\times 4}{5\times 4}=\frac{10+5+1}{5\times 4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$;

b) $\frac{5}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$;

c) $\frac{4}{7}=\frac{4\times 2}{7\times 2}=\frac{7+1}{7\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$; $\frac{5}{7}=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$;

$\frac{6}{7}=\frac{6\times 6}{7\times 6}=\frac{21+14+1}{7\times 6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}$;

d) $\frac{4}{9}=\frac{3+1}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$; $\frac{8}{9}=\frac{8\times 2}{9\times 2}=\frac{12+3+1}{9\times 2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$;

e) $\frac{7}{10}=\frac{5+2}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$;

f) $\frac{6}{11}=\frac{6\times 2}{11\times 2}=\frac{11+1}{11\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{22}$;

g) $\frac{11}{12}=\frac{8+3}{12}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$;

h) $\frac{4}{13}=2\times\frac{2}{13}=2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52}$;

i) $\frac{3}{14}=\frac{2+1}{14}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$; $\frac{11}{14}=\frac{11\times 2}{14\times 2}=\frac{14+7+1}{14\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$;

j) $\frac{11}{18}=\frac{9+2}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$;

k) $\frac{3}{20}=\frac{3\times 2}{20\times 2}=\frac{5+1}{20\times 2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{40}$;

m) $\frac{5}{21}=\frac{5\times 2}{21\times 2}=\frac{7+3}{21\times 2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}$; $\frac{11}{21}=\frac{7+3+1}{21}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}$;

$n)$ $\frac{8}{25}=\frac{8\times4}{25\times4}=\frac{25+5+2}{25\times4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}$, $\frac{16}{25}=2\times\frac{8}{25}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{25}$;

$o)$ $\frac{4}{27}=\frac{3+1}{27}=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$;

$p)$ $\frac{17}{30}=\frac{15+2}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{15}$;

$q)$ $\frac{23}{33}=\frac{22+1}{33}=\frac{2}{3}+\frac{1}{33}$;

$r)$ $\frac{19}{35}=\frac{19\times3}{35\times3}=\frac{35+15+7}{35+3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}$;

$s)$ $\frac{31}{50}=\frac{25+5+1}{50}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}$;

$t)$ $\frac{19}{51}=\frac{17+2}{51}=\frac{1}{3}+\frac{2}{51}=\frac{1}{3}+\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$;

$u)$ $\frac{71}{84}=\frac{42+28+1}{84}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{84}$;

$v)$ $\frac{73}{112}=\frac{56+16+1}{112}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{112}$;

$x)$ $\frac{104}{125}=\frac{102\times2}{125\times2}=\frac{125+50+25+5+2+1}{122\times5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{125}+\frac{1}{250}$;

$y)$ $\frac{163}{224}=\frac{112+32+16+2+1}{224}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{112}+\frac{1}{224}$,

$=\frac{112+28+14+7+2}{224}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{112}$,

$=\frac{160}{224}+\frac{3}{224}=\frac{5}{7}+\frac{2+1}{224}=\frac{5\times3}{7\times3}+\frac{1}{112}+\frac{1}{224}=\frac{2}{3}+\frac{1}{21}+\frac{1}{112}+\frac{1}{224}$.

Também nos capítulos III e IV das *Questões heronianas* se encontram reduções que convém considerar, pois que os polinómios do desenvolvimento apresentam termos negativos. Não obstante, como se observa, os processos de decomposição não só não apresentam a menor complicação mas, ao contrário, são bastante simples, como se verifica nos seguintes exemplos:

$\alpha)$ $\frac{16}{51}=\frac{17-1}{51}=\frac{1}{3}-\frac{1}{51}$; $\frac{17}{18}=1-\frac{1}{18}$;

$\frac{285}{781}=\frac{285\times3}{781\times3}=\frac{781+71+3}{781\times3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}+\frac{1}{2343}$;

$$\frac{659}{2820}=\frac{705-47+1}{2820}=\frac{1}{4}-\frac{1}{60}+\frac{1}{2820};$$

$$\frac{6886}{9585}=\frac{6886\times 2}{9585\times 2}=\frac{13772}{19170}=1-\frac{5398}{19170}=1-\frac{6390-1065+71+2}{19170}$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{18}-\frac{1}{270}-\frac{1}{9585}.$$

Estes e outros exemplos que poderiam ser apresentados, mostram, como na logística grega se procedia à decomposição em fracções elementares, por processos simples, inteiramente de acôrdo com o método egípcio, embora com as modificações atinentes a cada caso especial tratado, não sendo necessária especial habilidade de cálculo [1] para proceder às transformações necessárias que, como temos visto, decorrem lògicamente e com tôda a facilidade; havendo, em meu entender, como atrás ficou dito, vantagem em adoptar, em certas questões, o sistema mixto do emprêgo de fracções da forma moderna e sua decomposição em fracções elementares, como se faz nos cálculos da colecção heroniana e de acôrdo com a tradição grega, mantida pelos bizantinos, através dos séculos.

---

(1) A propósito da decomposição da fracção $\frac{239}{6460}$, que se encontra no papiro de Akhmin e que o distinto professor Gino Loria apresenta sob a forma

$$\frac{239}{6460}=\frac{76+163}{6460}=\frac{76}{6460}+\frac{163}{6460}=\frac{1}{85}+\frac{68+95}{6460}=$$

$$=\frac{1}{85}+\frac{68}{6460}+\frac{95}{6460}=\frac{1}{85}+\frac{1}{95}+\frac{1}{68},$$

diz o mesmo sábio erudito (*Le sc. es. nell'Antica Grecia*, Milano, 2.ª ed., pág. 777): « A simples inspecção desta série de transformações faz ver que, para aplicar êste processo, é necessária uma não vulgar habilidade calculadora ».

Neste exemplo, no entanto, a decomposição de 6460 em factores primos e a formação dos seus divisores 4, 5, 17, 19, 20, 68, 76, 85, 95 menores que 239, mostra fàcilmente o caminho a seguir, inteiramente de acôrdo com os princípios simples de decomposição expostos

$$\frac{239}{6460}=\frac{95+76+68}{6460}=\frac{1}{68}+\frac{1}{85}+\frac{1}{95}.$$

LIGAÇÃO DA DIVISIBILIDADE COM AS DÍZIMAS

POR

CARLOS EUGÉNIO ÁLVARES PEREIRA

A propósito da resolução dum problema de Aritmética racional de Azevedo Albuquerque, encontrei uma propriedade dos números, muito interessante, que estabelece a ligação íntima entre a divisibilidade e as dízimas.

O problema a que me refiro, é o seguinte: achar um múltiplo de 7 formado sòmente pelo algarismo 9. (Converte-se em dízima uma fracção de denominador 7).

Com efeito reduzindo a fracção $\frac{1}{7}$ a dízima, a fracção geratriz desta dízima é $\frac{142857}{999999}$.

Invertendo a fracção vem

$$\frac{999999}{142857}=7$$

e portanto

$$999999=7\times 142857=\text{m. }7.$$

Resolvido o problema, procurei relacionar o processo seguido para achar a divisibilidade dum número por qualquer divisor, com êste caso particular dum número forçosamente divisível por 7; e assim, reparando que os restos das sucessivas potências de 10 por 7 se reproduzem periòdicamente e são 1, 3, 2, 6, 4, 5, e decompondo o número 999999 em unidades de diferentes ordens, teremos:

$$\begin{aligned}999999&=9\times 10^5+9\times 10^4+9\times 10^3+9\times 10^2+9\times 10+9\\&=9\times(7+5)+9\times(7+4)+9\times(7+6)+9\times(7+2)+\\&+9\times(7+3)+9=7+9\times(5+4+6+2+3+1)\\&=\text{m. }7.\end{aligned}$$

Fica assim demonstrada a divisibilidade por 7 não só dos números constituídos por seis algarismos iguais a 9, como de todos os números constituídos por um número de algarismos iguais a 9, múltiplo de 6, visto os restos das sucessivas potências de 10 se reproduzirem periòdicamente, e portanto a sua soma ser periòdicamente múltipla de 7.

Com efeito,

$$999999999999 = \text{m. } 7 + 9 \times 42 = \text{m. } 7.$$

E agora é notório que todos os números constituídos por seis algarismos iguais ou múltiplo de seis algarismos iguais são divisíveis por 7; assim, se o número fôsse 111111, o mesmo raciocínio levar-me-ia à mesma conclusão:

$$\begin{aligned} 111111 &= 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1 \\ &= (\text{m. } 7+5)+(\text{m. } 7+4)+(\text{m. } 7+6)+(\text{m. } 7+2)+(\text{m. } 7+3)+1 \\ &= \text{m. } 7 + (5+4+6+2+3+1) \\ &= \text{m. } 7 + 21 \\ &= \text{m. } 7. \end{aligned}$$

Procurando investigar se a periodicidade dos restos arrastava a divisibilidade dos números constituídos por algarismos iguais, reduzi a fracção $\frac{1}{13}$ à dízima e obtive um período de seis algarismos, cuja fracção genetriz é $\frac{076923}{999999}$ e portanto $999999 = \text{m. } 13$ (múltiplo de 13) ou $9 \times (111111) = \text{m. } 13$.

E como se um número divide um produto, e é primo com um dos factores, divide o outro, segue-se que 13, divide 111111 e portanto todos os números constituídos por seis ou múltiplo de seis algarismos iguais.

Deixando, porém, êste caso particular dum número formado por seis ou múltiplo de seis algarismos iguais e representando por n o número cujo recíproco gera a dízima o, $(abcdefg)$ o que corresponde à fracção genetriz $\frac{abcdefg}{9999999}$ teremos $\frac{1}{n} = \frac{abcdefg}{9999999}$ d'onde $9999999 = n$; e como $9999999 = 9 \times \times 1111111$ será $9 \times 1111111 = n$ e para todo o número n primo com 9 será $1111111 = \text{m. } n$. Ora como todo o número primo com 9 é primo com 3, visto que $9 = 3^2$ e, como todo o número primo com uma potência é primo com a sua base, podemos concluir, generalizando a investigação, que *todos os números primos com 3 cujos recíprocos gerem dízimas periódicas simples, são divisores dos números constituídos por um número de algarismos iguais ao número de algarismos do período.*

Observação. — Os números que não forem primos com 3, cujos recíprocos gerem dízimas periódicas simples, são divisores dos números constituídos por tantos algarismos, iguais a 9, qnantos forem os algarismos do período.

*

* *

Reduzindo $\frac{1}{35}$ à dízima, obtém-se uma dízima periódica mixta, com efeito $\frac{1}{35}=0{,}0(285714)$, cuja fracção genetriz é $\frac{285714}{9999990}$ e portanto $9999990=m.35$ e como $9999990=9\times 1111110$ e 35 é primo com 9 segue-se que divide 111110.

Deixando êste caso particular e representando por n_1 um número cujo recíproco gera a dízima $0{,}0l(m)$ e cuja fracção generatriz é

$$\frac{9l+m}{900}$$

teremos

$$\frac{1}{n_1}=\frac{9l+m}{900}$$

donde

$$900=n_1(9l+m)$$

$$900=m.\ n_1$$

e como

$$900=9\times 100$$

será

$$9\times 100=m.\ n_1$$

e para todo o número n_1 primo com 9 e portanto com 3, será

$$100=m.\ n_1.$$

Em geral *todos os números primos com 3 cujos recíprocos geram dízimas periódicas mixtas, são divisores dos números constituídos por número de algarismos iguais ao número dos* *algarismos do período, seguido de tantos zeros, quantos forem os algarismos do ante-período.*

Notando que os critérios de divisibilidade pelos divisores de 10^n-1 e de 10^n+1, já investigados, convergem nos números constituídos por algarismos iguais, quando o número dos seus algarismos for múltiplo de dois e de três, pois que são divisíveis por 11, 33, 99, quando a soma dos seus grupos de dois algarismos for divisível por 11, 33, 99, e por 111, 333, 999, quando a soma dos seus grupos de três algarismos o for, e ainda são divisíveis por 101, quando o excesso da soma dos seus grupos de dois algarismos de ordem impar sôbre o dos seus grupos de ordem par o for; recordando que são periòdicamente divisíveis, por 3, 7, 9, 11, 13, 27, 37, 77, 91, 143, 1001, quando são constituídos por seis ou múltiplo de seis algarismos iguais, visto que o excesso da soma dos seus grupos de três algarismos de ordem ímpar sôbre o dos grupos de três algarismos de ordem par é divisível por aqueles números; fica justificada pela investigação dos caracteres de divisibilidade dos números constituídos por algarismos iguais a conexão da divisibilidade daqueles números com as dízimas periódicas.

Para os números que não são constituídos por um grupo de algarismos iguais múltiplo de dois e de três, não convergem aquelas condições de divisibilidade, mas nem por isso é menos verdadeira a sua divisibilidade pelos números cujos recíprocos gerarem dízimas periódicas com o mesmo número de algarismos no período, ficando assim êste princípio mais genérico, que todos os princípios de divisibilidade conhecidos, visto que o divisor gera todos seus múltiplos naturais e periódicos.

COROLÁRIO. — *Todo o número* N *primo com 2, 3 e 5 divide um número infinito de números da série 11, 111, 1111, 11111, ...*

Se o primeiro número que divide tem i *algarismos, os outros têm um número de algarismos múltiplo de* i. *O número* i *é igual ao período na redução de* $\frac{1}{n}$ *a dízima.*

*
* *

Estabelecendo como princípio que os números constituídos por algarismos iguais são bases de divisibilidade, podemos simplificar, em certos casos, a decomposição dum número em factores primos, pela aplicação da seguinte regra:

Para decompôr um número em factores primos, reduz-se o seu recíproco a dízima (supondo que o número não admite os divisores 2 e 5) *e suprimem-se os factores primos cujo produto forma o valor absoluto do período, no número constituído por tantos noves quantos forem os algarismos do período.*

Exemplifiquemos: se quisermos a decomposição em factores primos do número 15873, reduz-se a fracção $\frac{1}{15873}$ a fracção genetriz é $\frac{63}{999999}$ e portanto $\frac{999999}{63} = 15873$ ou $999999 = 15873 \times 63$ mas $999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ e como $63 = 3^2 \times 7$

$$15873 = 3 \times 11 \times 13 \times 37.$$

Torna-se, pois, conveniente para poder aplicar esta regra, conhecer a decomposição em factores primos dos números constituídos por algarismos iguais a 9 e fazer uma pequena tabela:

$$999 = 3^3 \times 37$$

$$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$$

$$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$$

$$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$

$$9999999 = 3^2 \times 239 \times 4649$$

$$99999999 = 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137$$

$$999999999 = 3^4 \times 37 \times 333667$$

$$9999999999 = 3^2 \times 11 \times 41 \times 271 \times 9091$$

$$999999999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$$

. . . .

. . . .

*

* *

Desde o início desta investigação que os números constituídos por algarismos iguais nos aparecem como números balizas da divisibilidade, mas só agora se utilizou pràticamente a conexão das dízimas com a divisibilidade na decomposição dum número em factores primos.

A exclusão dos divisores 2 e 5, para aplicação da regra enunciada, simplifica-a, por o número, sem aqueles divisores, gerar uma dízima periódica simples; e não lhe tira a sua generalidade, pois se os números admitirem os divisores 2 e 5, conta-se com êles na decomposição em factores primos.

É evidente que conhecendo a decomposição em factores primos dos números constituídos por algarismos iguais a nove, fico conhecendo, pela aplicação da regra estabelecida, a decomposição em factores primos dos seus divisores, o que representa uma simplificação na decomposição dos números em factores primos, operação por vezes bastante morosa.

O que pretendo, porém, acentuar não é tanto o alcance prático da regra estabelecida, mas a generalização do princípio que estabelece a conexão das dízimas com a divisibilidade e com a decomposição em factores primos.

SÔBRE O MÉTODO DAS TANGENTES DE DESCARTES

POR

J. PEDRO TEIXEIRA
Professor na Universidade do Pôrto

Ficou célebre na história das matemáticas o método para achar as tangentes às curvas, dado por Descartes, em 1637, na sua *Geometria*. Já o glorioso geómetra e filósofo, quando o apresentou, dêle dizia, no seu estilo inconfundível, e que bem exprime o seu orgulho e alegria de o ter encontrado: «Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais desiré de savoir en géometrie» (1).

Foi o primeiro método da tangente, de carácter geral, que veiu a lume, e foi êle quem inaugurou a famosa e ruidosa polémica sôbre tangentes, que teve logar naquele tempo, em que tomaram parte muitos matemáticos, entre os quais, além de Descartes: Fermat, Roberval, Pascal, Torricelli, Sluse, Hudde, Huygens, e o frade Mercenne, que também serviu de intermediário na troca das ideas, que então era epistolar.

Da correspondência havida entre estes matemáticos, inserta nas obras de Descartes e de Fermat, e largamente citada pelos historiadores, se depreende que o debate nem sempre correu com serenidade e compostura, por que alguns dos contendores se apaixonavam demasiadamente pelas suas conclusões e eram desabridos com os que ousavam impugná-las ou mesmo sòmente criticá-las.

Parece que o mais autoritário de todos era Descartes e os mais alvejados pelos seus desprimores eram Fermat — o con-

(1) *La géometrie de René Descartes*, nouvelle édition (MDCCCLXXXVI), pág. 33. O método de Descartes era antes um método de normais, que êle designava dêste modo: «Façon générale pour trouver des lignes droites qui coupent les lignes courbes données ou leurs contingents à angles droits».

selheiro de Tolosa — como Descartes às vezes lhe chamava, decerto, com propósitos desdenhosos, e Roberval, o Rob, por que também eram estes os que mais vivamente o contrariavam.

A irritação de Descartes, com as críticas aos seus escritos, transparece em muitas passagens da polémica, sendo bastante curiosa esta, que figura em cartas a Beaune e Mercenne (1): «Ma géometrie est comme elle doit être pour empêcher que le Rob et ses semblables n'en puissent médir, sen que cela tourne à leur confusion; car ils ne sont pas capables de l'entendre, et j'ai composée ainsi tout à dessein, en y omettant ce que était le plus facil et n'y mettant que les choses qui en velaient le plus la peine. Mais je vous avoue que, sen la consideration de ces esprits malins, je l'aurai rendue beaucoup plus claire, ce que je farai peut-être encore quelque jour, si je vois que ces monstres soient assez vaincus ou abaissés»!

Mas *êles* não se renderam e Descartes morria dois anos depois desta singular declaração, ficando a sua *Geometria* com a forma desordenada, concisa e por vezes enigmática, que êle propositadamente lhe imprimiu.

Alguns matemáticos, como Beaune, Shooten e Hudde, procuraram depois esclarecer esta obra; mas a respeito do método das tangentes, que ela encerra, apenas o professor de Leyde o experimentou na conchoide de Nicomedes e o burgomestre de Amsterdam propôs um método para facilitar a sua execução, sem nada adiantarem sôbre a sua essência.

Durante a contenda, os adversários de Descartes tinham notado que o método era impotente para as curvas transcendentes; mas não consta da correspondência da polémica ou doutra parte, que duvidassem da sua eficácia nas curvas algébricas (2), embora reconhecessem que era bastante laborioso. Também posteriormente nada se tem dito a êste respeito, que seja do meu conhecimento, e o método figura nos escritos dos historiadores antigos, e ainda nos dos modernos, e em outras publicações que a êle se referem, com a categoria de geral, que Descartes lhe atribuiu.

Num interessante e erudito trabalho intitulado *Teoria das tangentes, antes da invenção do Cálculo diferencial*, historia e critica o sr. dr. Aníbal Scipião Gomes de Carvalho com grande cópia de informações e argumentos, os métodos das tangentes que têm sido dados, desde a antiguidade, e foi a sua leitura que chamou a minha atenção para êste assunto.

Achando esquisitas a natureza e contextura do método de Descartes, tive a curiosidade de o experimentar em alguns

(1) Vid. Leon Brunschvicg, *La philosophie mathematique.*
(2) Jean Bernoulli, *Opera Omnia*, tom. 1, pág. 73.

problemas, que logo deram razão às minhas suspeitas de que o método, tomado à letra, nem sequer às cónicas devia dar as tangentes em geral; e que, se Descartes obteve por meio dêle as tangentes a estas curvas, à sua parábola e às suas ovais, e Shooten, à conchoide dos antigos, deveram estes êxitos às posições especiais em que colocaram essas curvas em relação ao eixos coordenados (1).

São alguns dêsses problemas que vou referir, sem pretender com isso que o método se modifique ou esclareça, por que não poderia rivalizar com os seus últimos descendentes, e também porque foi como está escrito e talvez por ter sido assim pôsto, que êle exerceu a sua acção no progresso da matemática, abrindo mesmo na história desta sciência uma época das mais fecundas e brilhantes; mas para rememorar e notar a impropriedade com que foi apelidado êste facto da história, que Descartes tanto desejou saber, e que tinha na conta das melhores manifestações do seu engenho. É uma relíquia do célebre inventor da Geometria analítica, em que se não deve tocar, e que eu aqui reproduzo, como êle entendeu escrevê-la, mas traduzida e em linguagem moderna:

Seja $f(x, y) = 0$ a equação duma curva e $C(a, b)$ um de seus pontos, onde queremos achar a tangente. Tomemos um ponto $P(v, 0)$ sôbre o eixo das abscissas para centro dum círculo, que passe pelo ponto C e seja $\overline{PC} = s$ o seu raio. A equação dêste círculo é:

$$(x-v)^2 + y^2 = s^2$$

e a equação

$$\phi\left(x, \sqrt{s^2-(x-v)^2}\right) = 0 \tag{1}$$

tem a raiz a e também a raiz a' correspondente a outro ponto C', onde o círculo corte também a curva. Fazendo variar v e s de modo que o ponto C' caminhe para C e venha a confundir-se com êste ponto, a equação (1) deve ter então a como raiz dupla e $\overline{PC}$ deve ser então normal à curva. Os valores de v e s que obrigam (1) a ter a raiz dupla a determinam-se do seguinte modo.

(1) Descartes disse depois de fazer estas aplicações, onde não levava o cálculo até ao fim: «Et je ne voir rien qui empêche qu'on n'étende ce problème en même façon à toutes les lignes courbes qui tombent sous quelque calcul géometrique». Devo notar que Descartes tinha dum método geral das tangentes a mesma idea que hoje temos, isto é, que é um método independente das propriedades específicas das curvas e dos eixos a que se refiram.

Dê-se a (1) a forma inteira

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$

e considere-se depois a igualdade

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots +$$
$$+ a_m = (x-a)^2 (x^{m-2} + b_1 x^{m-3} + b_2 x^{m-4} + \ldots)$$

e aplique-se-lhe o método dos coeficientes indeterminados.

Obtemos assim um sistema de m equações com as m incógnitas v, s, b_1, b_2, ..., que determina s e v [1].

Apliquemos o método a estes problemas:

1.° Seja achar a tangente à elipse

$$2x^2 + y^2 - 3 = 0$$

no ponto M (1,1).

Segundo o método, temos de eliminar y entre esta equação e a do círculo $(x-v)^2 + y^2 = s^2$ e dar-lhe a forma inteira. Pondo, para simplificar a escrita, $t^2 = s^2 - v^2$, obtemos a equação final

$$x^2 + 2vx + t - 3 = 0$$

e devemos determinar v e t pela condição desta equação ter a unidade como raiz dupla e para isso devemos pôr:

$$x^2 + 2vx + t - 3 = (x-1)^2$$

e aplicar o método dos coeficientes indeterminados, o que dá o sistema

$$t = 4, \qquad 2v + 2 = 0$$

que tem a solução

$$t = 4, \qquad v = -1.$$

O método resolve neste caso o problema, o que pode verificar-se pelo cálculo diferencial, procurando a equação da normal e achando depois o ponto onde ela corta o eixo das abscissas.

---

[1] A escolha do círculo leva-nos a crêr que nesta altura ainda não era conhecida a equação da recta, que parece ter sido dada por Fermat ou se o era, Descartes não quís usá-la, talvez por ser da invenção daquele geómetra...

2.º Seja ainda achar a tangente à elipse

$$2x^2+y^2+4x+2y=0$$

no ponto (o, o).

Executando o método como precedentemente, chegamos à equação final:

$$x^4+2(4+2v)x^3+[(4+2v)^2+2t+2]x^2+$$
$$+[2t(4+2v)-8v]x+t^2-4t=0$$

e depois ao sistema

$$t^2-4t=0, \quad 2t(4+2v)-8v=0$$

que tem as duas soluções

$$t=0, \quad v=0; \qquad t=4, \quad v=-4.$$

A primeira não resolve problema nenhum; e a segunda dá a tangente, não no ponto considerado, mas no ponto (o, —2).

3.º Seja ainda também achar a tangente à elipse

$$3x^2+3y^2-2xy-6=0$$

no ponto ($\sqrt{2}$, o).

Para simplificar o cálculo, escrevamos agora a equação do círculo de Descartes sob a forma:

$$(y-v)^2+x^2=s^2$$

sendo v a ordenada do ponto onde a normal corta o eixo dos yy. Conservando as outras notações, e fazendo os mesmos raciocínios, chegamos à equação final

$$4y^4-8vy^3+(36v^2-4t)y^2+(36vt-32v)y+9t^2-36t+36=0$$

e obtemos o sistema

$$9t^2-36t+36=0, \quad 36vt-72v=0$$

que é indeterminado.

De modo que o método resolve o problema no primeiro caso; não o resolve no segundo, e dá-o como indeterminado no terceiro.

Devemos notar que nos três casos a elipse é a mesma e o ponto escolhido para ponto de tangência é também o mesmo.

A segunda equação é a transformada da primeira, quando a origem das coordenadas se transporta para o ponto M; e a terceira, quando aos eixos se dá uma rotação de 45°.

É para notar, por ser imprevisto, por o ponto M ser ordinário, que o método, no terceiro caso, determina o problema, se calcularmos v e t pela condição da equação final ter a ordenada do ponto de tangência como raiz tripla; porque então àquêle sistema temos a acrescentar a equação

$$36v^2-4t=0$$

e o sistema assim formado tem as soluções

$$t=2,\quad v=\frac{\sqrt{2}}{3};\qquad t=2,\quad v=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

entre as quais está a solução do problema proposto, mas sem que o método de Descartes nos habilite a assinar qual dêlas seja.

E é certo que podemos imaginar inúmeros problemas a respeito da elipse e também a respeito de outras cónicas e de outras curvas, onde o método assim se pode apresentar.

Sem outros raciocínios, creio poder concluir-se que o método das tangentes de Descartes, que os antigos já tinham excluído das curvas transcendentes, também para as curvas algébricas não se pode considerar como método geral. ¿Mas enganar-se-ia o geómetra na classificação do método, como o escreveu, ou teria na mente uma outra concepção, que assim exprimiu, em obediência ao critério exarado nas citadas cartas a Beaune e Mercenne, *para confusão de Rob e seus semelhantes?* Também se póde conjecturar que esta qualificação fôsse um dos ardis, que às vezes tecia, para experimentar os outros matemáticos.

Seja, porém, como fôr, é certo que esta produção de Descartes provocou o aparecimento de muitos outros métodos de tangentes, e talvez assim não sucedesse, se êle tivesse pôsto o problema em termos precisos e em harmonia com os recursos do seu tempo.

E o matemático sublime, sempre primoroso no teu trato, menos com os seus adversários na sciência, com quem chegava mesmo a ser injusto e cruel (1), voluntária ou involuntá-

(1) «Parece impossível que as autoridades deixem andar à sôlta na rua esta criatura, como se fôsse um animal racional», disse elle um dia a respeito de Fermat.

riamente, escreveu aqui direito por linhas tortas, por que nos métodos provocados, embora também falíveis, existia, menos velado do que no seu, o embrião do cálculo diferencial, que depois aí foi descoberto.

E podemos dizer que êste cálculo, bem forte e decidido, tem antepassados bem fracos e hesitantes que, mesmo assim, têm sido evocados pelos que tem querido que à França caiba a glória da sua descoberta.

Mas êle obedeceu às leis que sempre se observam na evolução das grandes concepções: aparecem primeiramente luzes débeis e vacilantes que pouco a pouco se avolumam e reunem, até darem o clarão que tudo ilumina, e este não é nenhuma delas, mas sim um somatório de tôdas. É certo que o cálculo diferencial foi encontrado na Inglaterra e na Alemanha por Newton e Leibnitz; mas talvez assim não sucedesse, e talvez êle ainda hoje não fôsse conhecido, se não fôsse esta precipitação ou esta travessura do francês René Descartes.

Com uma ou outra destas acendalhas, êle lançou o fogo ao rastilho, que havia de provocar a explosão mais luminosa que a história das matemáticas regista e cujos fulgores não lhe foi dado contemplar.

SOBRE
O ABAIXAMENTO DAS EQUAÇÕES

POR

J. PEDRO TEIXEIRA

Professor na Universidade do Pôrto

O método conhecido para abaixar o grau das equações algébricas, que têm raízes múltiplas, é geralmente bastante laborioso, pelas muitas divisões de polinómios que é necessário efectuar para obter as *reduzidas*, designando assim às equações que tem, como simples, as raízes de todos os graus de multiplicidade duma equação dada. As mais fastidiosas daquelas divisões, são as que se destinam a encontrar os m. d. c. que figuram no método, por causa dos coeficientes elevados que se introduzem para evitar fracções, que ainda mais morosos e aborrecidos tornavam os cálculos.

O problema é por vezes de tal modo complicado, que me parece cabida qualquer idea que lhe traga alguma simplificação; e é esta a razão desta nota, onde provo que êle se resolve com o auxílio dum só m. d. c., e às vezes mesmo sem êle, quando o grau da equação não exceder o 11.º e, para equações de grau superior, quando tenha de recorrer-se a outros, êles são em menor número do que no referido método.

Nesta doutrina eu utilizo estes dois teoremas, cuja demonstração omito, por ser simples:

Se um polinómio do grau $2m$ tem raizes exactas do grau m ou quadrada, elas são dadas pelas fórmulas

$$(1) \qquad (x^{2m}+a_1 x^{2m-1}+x_2 a^{2m-2}+\dots)^{\frac{1}{m}}= \\ =x^2+\frac{a^1}{m}x+\frac{a_2}{m}-\frac{m-1}{m^3}a_1^2,$$

$$(2) \qquad (x^{2m}+a_1 x^{2m-1}+a_2 x^{2m-2}+\dots)^{\frac{1}{2}}= \\ =x^m+b_1 x^{m-1}+b_2 x^{m-2}+\dots+b_m,$$

onde os coeficientes b se obtêm do seguinte modo: O primeiro, b_1, é igual a $\frac{a_1}{2}$; e qualquer outro é igual a metade do coeficiente do termo da mesma ordem no polinómio proposto, diminuído da soma dos produtos que se obtém multiplicando o primeiro dos já achados pelo último, o segundo pelo penúltimo, o terceiro pelo antepenúltimo etc., e, quando forem em número impar, o médio, por sua metade. Assim

$$b_1 = \frac{a_1}{2}, \quad b_2 = \frac{a_2}{2} - \frac{b_1^2}{2}, \quad b_3 = \frac{a_3}{2} - b_1 b_2, \quad b_4 = \frac{a_4}{2} - b_1 b_3 - \frac{b_2^2}{2}, \quad \text{etc.}$$

Por meio destas fórmulas podemos determinar aquelas raízes, se antecipadamente soubermos que elas existem, ou verificar a sua existência ou não existência, formando à custa do polinómio dado aqueles segundos membros, elevando os polinómios assim obtidos às respectivas potências e comparando-as com aquele polinómio. Se os coeficientes a_1, a_2 .. forem inteiros, é sinal da não existência daquelas raízes o aparecimento do coeficiente fraccionário nos segundos membros daquelas fórmulas.

Pôsto isto, eu considero sòmente equações de coeficientes inteiros, já desembaraçados de raízes racionais. Estas equações não podem ter raízes únicas de qualquer gráu de multiplicidade e é esta proposição conhecida que serve de fundamento ao que vou dizer.

Para simplificar a linguagem, eu exprimo pela notação $(a_\alpha, b_\beta, \ldots)\,D_k$, a que chamo *combinação,* que uma equação $f(x) = 0$ tem a raízes do grau α, b raízes do grau β etc., e que D_k, do grau k, é o m. d. c. entre $f(x)$ e $f'(x)$.

Se uma equação só tem raízes dum só grau de multiplicidade, m, pelo método clássico para abaixar o grau, teríamos pe procurar m m. d. c.; mas se tivéssemos um sinal que indicasse aquela circunstância, o primeiro nos bastava, e a reduzida seria $f(x) : D = 0$, evitando-se assim todo o trabalho ulterior que o método exige.

Se a equação tem raízes de dois graus de multiplicidade sòmente, m e n $m > n$, por aquele método teríamos de procurar m m. d. c.; mas se disso estivéssemos certos e dos valores de m e n, um sòmente nos bastava; porque, sendo X e Y os produtos dos binómios simples correspondentes às raízes das duas ordens de multiplicidade, teríamos

$$f(x) = X^m\, Y^n, \qquad D = X^{m-1}\, Y^{n-1}$$

e daqui se deduz

$$[f(x)]^{m-1} : D^m = Y^{m-n}$$

e os resolventes seriam

$$\left[[f(x)]^{m-1} : D^m\right]^{\frac{1}{m-n}} = Y - o$$

e

$$f(x) : D : Y = o.$$

Se uma equação só tem raízes de três graus de multiplicidade, m n, p que fôssem conhecidos, e $m > n > p$ teríamos

$$f(x) = X^m Y^n Z^p \qquad D = X^{m-1} Y^{n-1} Z^{p-1}$$

e por isso

$$f_1(x) = [f(x)]^{m-1} : D^m = Y^{m-n} Z^{m-p}$$

e a equação $f_1(x) = o$ está no caso precedente, e precisava só dum outro m. d. c.

Em geral, se uma equação tiver sòmente raízes de k graus de multiplicidade conhecidos, o problema do abaixamento resolve-se com o auxílio de $k-1$ m. d. c.

Uma equação de grau inferior ao 6.°, admitida a restrição acima posta, não pode ter raízes de mais de um grau de multiplicidade. Com efeito, a *menor* combinação de raízes de dois graus é $(2_2, 2_1)$ D_2 e ela pertence a uma equação do 6.° grau.

Uma equação de grau inferior ao 12.°, não pode ter raizes de mais de dois graus de multiplicidade. Com efeito, a menor combinação destas raízes é $(2_3, 2_2, 2_1)$ D_6 e ela pertence a uma equação do 12.°

Do mesmo modo se prova que uma equação de grau inferior a 20° ou 30° etc., não pode ter raízes de mais de tres graus ou de quatro etc.

Dada, pois, uma equação, se alguma coisa nos indicasse a combinação das raízes que ela oferece, o problema do abaixamento podia simplificar-se, e é isto que se contém no seguinte teorema, que se deduz da análise das combinações que as equações podem apresentar:

O grau de m. d. c. entre f(x) *e* f′(x) *ou êsse grau e outras qualidades suas, que fàcilmente se lhe descobrem, determinam sempre a combinação que a equação oferece, de entre tôdas as possíveis, quando o grau dessa equação não excede o 13.°*

Com efeito:

3.° e 5.° graus. As equações dêstes graus são irredutíveis, 4.° grau. Esta equação, se não é irredutível, só pode oferecer $(2_2)\ D_2$ e a reduzida será $D_2 = 0$.

Mas aqui é dispensável obter D e basta ver por uma das fórmulas (1) ou (2) se o primeiro membro é ou não quadrado exacto. No caso afirmativo, será $[f(x)]^{\frac{1}{2}} = 0$ a reduzida.

6.° A equação dêste grau só pode oferecer alguma destas combinações

$$(3_2)\ D_3, \quad (2_2\, 2_1)\ D_2, \quad (2_3)\ D_4.$$

Se a equação tiver tres raízes duplas, D é do terceiro grau e a recíproca é também verdadeira. O mesmo se diz das outras. Aqui, pois, o grau de D é suficiente para caracterizar a combinação que a equação oferece.

Se é a primeira, é $D_3 = 0$ a reduzida; se é a segunda, as resolventes são:

$D_2 = 0$, que dá as raizes duplas, e $f(x) : D_2 = 0$, que dá as raízes simples; se é a terceira, a reduzida é $D_4^{\frac{1}{2}} = f(x)^{\frac{1}{3}} = 0$ o que se obtém por uma das fórmulas (1) e (2).

Se o termo independente de $f(x)$ for um quadrado ou um cubo exacto será útil examinar se $f(x)$ é um quadrado ou um cubo exacto pelas citadas fórmulas, pois em caso afirmativo escusado era procurar D.

7.° grau. A equação dêste grau só pode oferecer a combinação $(2_2,\ 3_1)\ D_2$ e as reduzidas seriam

$$D_2 = 0, \quad f(x) : D_2^2 = 0.$$

8.° grau. A equação dêste grau sòmente pode oferecer as combinações seguintes:

$$(4_2)\ D_4, \quad (3_2\, 2_1)\ D_3, \quad (2_2\, 4_1)\ D_2, \quad (2_3\, 2_1)\ D_4, \quad (2_4)\ D_6.$$

Se o grau de D é diferente de 4, êle caracteriza a combinação que a equação oferece e as reduzidas acham-se como na equação do 6.° grau; mas, se êsse grau for 4, êle é insuficiente para isso, pois pode dar-se alguma das combinações $(4_2)\ D_4\ (2_3,\ 2_1)\ D_4$.

Mas se D_4 for um quadrado perfeito, dá-se a segunda; no caso contrário dá-se a primeira.

Devemos notar que, se uma equação também frô desembaraçada dos factores comensuráveis do 2.° grau, ela não pode ter duas raízes únicas de qualquer grau de multiplicidade. Sendo assim, das equações até aqui consideradas, sòmente a do 6.° e a do 8.° graus podiam ter raízes múltiplas; mas então os seus primeiros membros serão quadrados perfeitos e a fórmula (1) resolve o problema, dispensando o trabalho de achar o m. d. c.

É também para notar que as equações até êste grau que não tenham raízes racionais, se resolvem algèbricamente, quando tenham raízes múltiplas.

9.º grau. A equação dêste grau só pode oferecer estas combinações:

$$(3_2 3_1)\ D_3, \quad (2_2 5_1)\ D_2, \quad (3_3)\ D_6, \quad (2_3 3_1)\ D_4$$

e quanto ao modo de caracterizar a combinação que tem lugar e ao modo de achar as reduzidas, tudo é análogo ao que tem sido já dito.

10.º grau. A equação dêste grau pode ter:

$$(5_2)\ D_5, \quad (4_2, 2_1)\ D_4, \quad (3_2 4_1)\ D_3, \quad (2_2 6_1)\ D_2$$

$$(2_3 4_1)\ D_4, \quad (2_3 2_2)\ D_6, \quad (2_4 2_1)\ D_6, \quad (2_5)\ D_8$$

Se o grau de D é diferente de 4 e de 6, nada há a acrescentar.

Se for 4, poderá bastar o termo independente de D para distinguir qual das duas combinações com D_4 terá lugar; quando não, a fórmula (2) resolve a questão. Se fôr 6, se o termo independente não for cubo exacto, fica logo feita a distinção entre as duas combinações com D_6; se o fôr, verifica-se se D_6 é ou não cubo exacto pela fórmula (1). Se tiver lugar $(2_3 2_2)\ D_6$, as reduzidas são:

$$[f(x)]^2 : D_6^3 = 0, \qquad D_6^2 : f(x) = 0.$$

11.º grau. A equação dêste grau pode ter:

$$(4_2 3_1)\ D_4, \ (3_2 5_1)\ D_3, \ (2_2 7_1)\ D_2, \ (3_3 2_1)\ D_6, \ (2_3 5_1)\ D_4, \ (2_4 3_1)\ D_6$$

e nada aqui aparece que não tenha já sido dito quanto ao modo de caracterizar as combinações e de achar as reduzidas.

Até ao 11.º grau, pois, um m. d. c. basta para resolver c problema do abaixamento.

Por uma discussão semelhante, se veria que m. d. c. c entre $f(x)$ e $f'(x)$ caracteriza a combinação que oferece uma equação de 12.º ou 13.º graus; mas quando às reduzidas, êsse m. d. c. não basta na combinação $(2_3 2_2 2_1)\ D_6$ da equação do 12.º grau, e na $(2_3 2_2 3_1)\ D_6$ da equação do 13.º grau.

Para estes casos será necessário recorrer a outro m. d. c., como já foi dito.

Prosseguindo esta discussão para equações de graus superiores encontram-se casos em que o m. d. c. não pode caracterizar a combinação que a equação oferece. Assim a equação do 14.º grau pode oferecer

$$(6_2, 2_1)\, D_6, \quad (2_3, 2_2, 4_1)\, D_6, \quad (3_3, 5)\, D_6$$

correspondente a D_6, e por simples considerações sôbre êste polinómio, não as podemos distinguir, quando não tenha logar a última.

Mas fora dêstes casos, esta ordem de ideas ainda dá resultado.

Apliquemos esta doutrina a alguns exemplos de abaixamento:

Seja a equação do 11.º grau

$$f(x) = x^{11} - 13x^9 + 3x^8 + 64x^3 - 24x^6 - 152x^5 + 72x^4 +$$
$$+ 176x^8 - 36x^2 - 80x + 48 = 0$$

que não tem raízes racionais.

Encontramos

$$D = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8.$$

No quadro das combinações desta equação, a D_6 correspondem $(3_3\, 2_1)\, D_6\ (2_4\, 3_1)\, D_6$; mas como o termo independente de D_6 é um cubo exacto, sem ser um quadrado exacto, é a 2.ª que tem lugar, e as resolventes são:

$$\sqrt[3]{D_6} = x^2 - 2 = 0, \quad f(x) : D_6 : \sqrt[3]{D_6} = x^3 - 3x + 3 = 0.$$

Seja ainda a equação do 12.º grau:

$$f(x) = x^{12} - 3x^4 - 3x^8 + 11x^6 + 6x^4 - 12x^2 - 8.$$

Encontraremos:

$$D = x^8 - 2x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4.$$

No quadro das combinações desta equação, a D_8, correspondem

$$(4_3)\, D_8, \quad (2_4, 2_2)\, D_8, \quad (2_5, 2_1)\, D_8.$$

Como o termo independente de D não é quarta potência exacta, a terceira é logo excluída; para ver qual das restantes tem lugar, examina-se pela fórmula (2) se D é ou não quadrado exacto. Verifica-se que sim e a sua raiz é $x^4 - x^2 - 2$.

É, pois, a primeira que tem lugar, e a equação tem as 4 raizes triplas $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, i, $-i$.

Seja ainda também a equação do 14.º grau.

$$f(x) = x^{14} - 2x^{12} + 3x^{10} - 6x^8 + 3x^6 - 6x^4 - x^2 + 2 = 0.$$

Encontra-se

$$D_8 = x^8 + 2x^4 + 1.$$

A êste grau de D, correspondem na equação proposta as combinações

$$(4_3, 2_1)\,D_8, \quad (2_3, 4_2)\,D_8, \quad (2_4, 2_2, 2_1)\,D_8.$$

Como D é o quadrado exacto dum polinómio do 4.º grau é a primeira que tem lugar, e as reduzidas são

$$\sqrt{D_8} = x^4 + 1 = 0, \quad f(x) : D_8 = x^2 - 2.$$

SÔBRE
O DESENVOLVIMENTO DO COS nv

POR

J. PEDRO TEIXEIRA

Professor na Universidade do Pôrto

Na *Introductio in analysis infinitorum*, deu Euler os desenvolvimentos de $\operatorname{sen} nv : \operatorname{sen} v$ e $\cos nv$, segundo potências sòmente de $\cos v$, parecendo induzi-los dos valores de $\operatorname{sen} v$, $\operatorname{sen} 2v$, etc. e $\cos v$, $\cos 2v$, etc., obtidos pela conhecida lei de recorrência, mas sem os termos gerais e sem o complemento necessário neste género de raciocínio, nas questões de matemática ([1]).

Labey, naturalmente por não achar satisfatória a demonstração de Euler, procurou, nas suas apostilhas à tradução, que fez daquela obra, dar por outro modo a demonstração das fórmulas de Euler, mas apenas chegou aos termos que êste geómetra tinha posto, e não aos termos gerais ([2]). Cauchy também se ocupou dêste assunto, mas também não estabeleceu estes termos ([3]). A fórmula completa, relativa a $\operatorname{sen} nv$, foi depois estabelecida pela comparação de duas derivadas de ordem n da função $\operatorname{artg} x$; mas, quanto a $\cos . nv$, presumo que a fórmula ainda se achava como Euler a deixou, isto é, sem demonstração satisfatória.

Encontrei acidentalmente a fórmula completa em um trabalho meu sôbre o desenvolvimento do potencial logarítmico em série de polinómios esféricos ([4]), quando comparava o desenvolvimento de $\lg (u^2 - 2 \cos vu + 1)^{-\frac{1}{2}}$, obtido pela fórmula de

---

([1]) Euler, *Introductio in analysis infinitorum*, trad. francesa, págs. 188 e 195.

([2]) *Loc. cit.*, pág. 347,

([3]) Cauchy, *Curso de analyse da Escola Polytechina*, pág. 234.

([4]) *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, t. x.

Maclaurin, com o desenvolvimento da mesma função, posta sob a forma $-\frac{1}{2}\lg(1-uc^{iv})-\frac{1}{2}\lg(1-uc^{-iv})$.

É essa fórmula que vou dar aqui, mas mostrando agora que ela é um caso particular da fórmula de Waring, que dá a soma das potências do mesmo gráu das raizes duma equação algébrica.

Sendo $u_g (g=1, 2, \ldots, m)$ as raizes da equação

$$a_m u^m + a_{m-1} u^{m-1} + \ldots + a_1 u + a_0 = 0,$$

a fórmula de Waring é

$$\sum u_g^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\, a_0^{-i} a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \ldots a_m^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma! \ldots \lambda!},$$

onde o somatório se refere às soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n \quad \text{e} \quad i = \alpha + \rho + \ldots + \lambda.$$

Aplicando a fórmula ao caso particular

$$u^2 - 2xu + 1 = 0,$$

ela dá

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,(-2n)^{\alpha}}{\alpha!\,\beta!},$$

onde o somatório se refere às soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta = n \quad \text{e} \quad i = \alpha + \beta.$$

Eliminando α e i entre estas três equações, vem

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n = n \sum_{\rho=0}^{k} (-1)^{\beta} \frac{(n-\beta-1)!}{(n-2\beta)!\,\beta!} 2^{n-2\beta} x^{n-2\beta},$$

onde k é o maior inteiro contido em $n:2$.

Supondo $|x| \lesseqgtr 1$, podem pôr $x = \cos v$ e vem:

$$(1) \qquad \cos uv = \sum_{\rho=0}^{k} (-1)^{\beta} \frac{(n-\beta-1)!\,n}{(n-2\beta)!\,\beta!} 2^{n-2\beta-1} \cos v^{n-2\beta},$$

que é a fórmula procurada.

Desta fórmula pode deduzir-se a fórmula conhecida relativa a sen. nv do modo seguinte: Se n é impar, k é igual a $(n-1):2$; se n é par, k é igual a $n:2$; mas para $\beta = n:2$, vem o termo $(-1)^{n:2}$. De modo que a fórmula pode escrever-se dêstes dois modos, conforme n é impar ou par, e onde k' é o maior inteiro contido em $(n-1):2$

$$(a) \quad \cos nv = \sum_{\beta=0}^{k'} (-1)^{\beta} \frac{(n-\beta-1)!\,n}{(n-2\beta)!\,\beta!} 2^{n-2\beta-1} \cos v^{n-2\beta},$$

$$(b) \quad \cos nv = \sum_{\beta=0}^{k'} (-1)^{\beta} \frac{(n-\beta-1)!\,n}{(n-2\beta)!\,\beta!} 2^{n-2\beta-1} \cos v^{n-2\beta} + (-1)^{n:2}.$$

Em ambos os casos, vem, por derivação em relação a v,

$$\operatorname{sen} nv = \sum_{\beta=0}^{k'} (-1)^{\beta} \frac{(n-\beta-1)!}{(n-2\beta-1)!\,\beta!} \operatorname{sen} v\,(2\cos v)^{n-2\beta-1}$$

ou

$$\operatorname{sen} nv = \sum_{\beta=0}^{k'} (-1)^{\beta} \binom{n-\beta-1}{\beta} \operatorname{sen} v\,(2\cos v)^{n-2\beta-1}.$$

SÔBRE AS SÉRIES DE FOURIER

POR

J. PEDRO TEIXEIRA
Professor na Universidade do Pôrto

Eu julgo que não tem sido demonstrada, dum modo geral e directo, a representação duma função, $f(x)$, por uma série trigonométrica da forma:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 \cos.x + a_3 \cos.3x + \ldots + a_{2n+1} \cos.(2n+1)x + \ldots \\ + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_4 \operatorname{sen}.4x + \ldots + b_{2n} \operatorname{sen}.2nx + \ldots \end{cases}$$

no intervalo $(-\pi:2, \pi:2)$.

Para resolver o seu imaginoso problema do equilíbrio das temperaturas na lâmina indefinida, no caso particular da base ser aquecida uniformemente, Fourier representou a unidade dor uma série semelhante e determinou os coeficientes pelas equações, em número infinito, que daí resultam por derivações sucessivas, e nada diz sôbre a questão em geral [1].

Recentemente, Poincaré [2], ocupando-se do mesmo assunto, tomou uma outra função, $\varphi(x)$, e representou-a pela série

$$(2)\quad \begin{cases} a_0 + a_1 \cos.x + a_2 \cos.2x + \ldots \\ + b_1 \operatorname{sen}.x + b_2 \operatorname{sen}.2x + \ldots \end{cases}$$

no intervalo $(-\pi, \pi)$, representação esta de que dá uma demonstração rigorosa, e tomou esta função $\varphi(x)$ de modo que no intervalo $(-\pi:2, \pi:2)$ tivesse os mesmos valores que $f(x)$ [2]. Este procedimento do erudito matemático, que lhe complicou o problema que tinha em vista, que êle afinal só resolveu no caso particular, já tratado por Fourier, levou-me a crêr que a

---

[1] *Œuvres de Fourier*, t. I. *Théorie analytique de la chaleur*, pág. 143.

[2] Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, pág. 43.

questão não tinha sido ainda tratada do modo acima dito e por isso vai fazer o objecto desta nota.

Se $f(x)$ for finita, não tiver infinitos máximos, mínimos e descontinuïdades no intervalo $(-\pi:2,\ \pi:2)$ e se fôr contínua no ponto x dêste intervalo, ella é representada pela série (1), com estes valores dos coeficientes:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{2n+1} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int f(\zeta)\cos.(2n+1)\zeta\, d\zeta \\[2ex] b_{2n} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int f(\zeta)\,\mathrm{sen}.2n\zeta\, d\zeta, \end{cases}$$

sendo os limites dos integrais $-\pi:2,\ \pi:2$ [1].

Se a representação existe, estes coeficientes são disso uma conseqüência, porque os integrais

$$\int \cos(2p+1)\zeta\cos(2n+1)\zeta\, d\zeta,$$

$$\int \mathrm{sen}\, 2p\, 2\ \mathrm{sen}\, 2n\zeta\, d\zeta$$

são nulos ou iguais a $\pi:2$, conforme $n \neq p$ ou $n=p$ e o integral

$$\int \cos(2p+1)\, 2\ \mathrm{sen}\, 2n\zeta\, d\zeta$$

é sempre nulo, como fàcilmente se pode vêr, naqueles limites.

Tomemos agora a soma dos m primeiros termos da série (1)

$$S_m = \frac{2}{\pi}\int f(\zeta)\,[\cos\zeta\cos x + \cos 3\zeta\cos 3x + \ldots +$$
$$+ \cos.(2m-1)\zeta\cos.(2m-1)x + \mathrm{sen}.2\zeta\,\mathrm{sen}\,2x +$$
$$+ \mathrm{sen}\,4\zeta\, m\, 4x + \ldots + \mathrm{sen}.2m\zeta\,\mathrm{sen}\,2mx]\, d\zeta.$$

e demos-lhe a forma:

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int f(\zeta)\,[\cos(\zeta - x) + \cos 2(\zeta - x + \ldots + \cos 2m(\zeta - x) +$$
$$+ \cos(\zeta + x) - \cos 2(\zeta + x) + \ldots - \cos 2m(\zeta + x)]\, d\zeta.$$

[1] Estes integrais existem por $f(\zeta)$ satisfazer então à condição de Dirichlet.

É conhecida a fórmula:

$$\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos pa = \frac{\operatorname{sen}(2p+1)\frac{a}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}} - \frac{1}{2};$$

e, se aqui mudarmos a em $\pi + a$, obtemos:

$$-\cos a + \cos 2a - \ldots + (-1)^p \cos pa = (-1)^p \frac{\cos(2p+1)\frac{a}{2}}{2\cos\frac{a}{2}} - \frac{1}{2};$$

e a aplicação destas fórmulas à soma anterior dá:

$$S_m = \frac{1}{2\pi}\int f(z)\frac{\operatorname{sen}(4m+1)\frac{z-x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{z-x}{2}}dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int f(z)\frac{\cos(4m+1)\frac{z+x}{2}}{\cos\frac{z+x}{2}}dz.$$

Pondo no primeiro integral $2y = z - x$ e no segundo $2t = z + x$ e em ambos $4m + 1 = p$, vem

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int f(x+2y)\frac{\operatorname{sen} py}{\operatorname{sen} y}dy - \frac{1}{\pi}\int f(2t+\pi-x)\frac{\operatorname{sen} pt}{\operatorname{sen} t}dt$$

onde os limites do primeiro integral são: $-(\pi:2+x):2$, $(\pi:2x)-2$ e os do segundo, $(x-3\pi:2):2$, $(x-\pi:2):2$.

Os modelos dêstes limites, por ser $|x| < \pi:2$, são menores do que π; os do primeiro são de sinais contrários e os do segundo, do mesmo sinal; as funções de y e t $f(x+2y)$, $f(2t+\pi-x)$ tomam no intervalo limitado pelos limites dêstes integrais os mesmos valores que $f(z)$ no intervalo $(-\pi:2, \pi:2)$ e por isso são finitas, não têm infinitos máximos, mínimos e descontinuïdades naquele intervalo e a primeira é contínua no ponto o, e por isso, por um teorema conhecido de Dirichlet, o primeiro integral tem por limite $\pi f(x)$ e o segundo, *zero*, quando m ou p tende para o infinito, o que demonstra o que se queria demonstrar.

Seja o caso particular, $f(x) = x$.
Temos

$$a_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int z \cos.(2n+1) z . dz = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi} \int z \operatorname{sen} nz\, dz = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

e

$$x = \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}.4x + \frac{1}{3} \operatorname{sen}.6x - \ldots$$

Verifiquemos êste resultado.
Consideremos a série

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}.4x + \operatorname{sen}.6x - \ldots + (-1)^{n+1} \operatorname{sen}.2nx + \ldots$$

A soma dos seus m primeiros termos é:

$$S_m = \frac{1}{2} \operatorname{tg}.x + (-1)^{m+1} \frac{\operatorname{sen}.(2m+1)x}{2 \cos x};$$

e, se x fôr do intervalo $(-\pi:2,\ \pi:2)$, ela, sem tender para um limite, quando m tende para o infinito, satisfaz à relação:

$$|S_m| < \sec x;$$

e por isso a série é oscilante. Mas se multiplicarmos os termos duma série oscilante por números positivos e decrescentes, que tendam para zero, como são os números 1, $1:2$, $1:3$, ..., resulta uma série convergente (teorema de Abel); logo a série

$$\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}.4x + \frac{1}{3} \operatorname{sen}.6x \ldots$$

é convergente, para todos os valores de x daquele intervalo.
Procuremos a sua soma.
Tomemos a soma dos seus m primeiros termos e formemos a sua derivada

$$\frac{1}{2} \frac{d s_m}{dx} = \cos.2x - \cos 4x + \ldots + (-1)^{m+1} \cos 2mx;$$

ou, por uma fórmula acima deduzida:

$$\frac{d s_x}{dx} = 1 + (-1)^{m+1} \frac{\cos(2m+1)x}{\cos x}.$$

Integrando entre o e x, não perdendo de vista que é $|x| < \pi : 2$ e atendendo a que $S_m(\text{o}) = \text{o}$, vem

$$S_m(x) = x + (-1)^{m+1} \int_0^x \frac{\cos(2m+1)x}{\cos x} dx.$$

É fácil vêr, pela integração por partes, que êste integral tende para zero quando m tende para o infinito; logo

$$\lim_{m=\infty} S_m(x) = x$$

que é também uma outra demonstração da convergência da série.

Empregando os mesmos raciocínios e fórmulas trigonométricas usadas para estabelecer a representação (1), demonstravam-se estas outras representações de Fourier:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int f(z)\, dz, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int f(z) \cos nz\, dz;$$

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int f(z) \operatorname{sen} nz\, dz,$$

no intervalo (o, π), se $f(x)$ satisfizer neste intervalo às condições acima postas, e onde os limites dos integrais são o e π.

Estas representações aparecem na *Teoria Matemática do Calor* de Fourier, com demonstrações insuficientes e não vejo que tenham sido depois demonstradas pelos métodos rigorosos.

A segunda serviu de base à solução geral do problema das temperaturas finais estacionárias, para a lâmina indefinida, dada por êste geómetra e depois por Emilie Mathieu, no seu curso de física matemática. Na mesma questão, Poincaré evitou o emprêgo desta série e seguiu um caminho mais complicado. ¿Teria alguma dúvida sôbre a sua veracidade?

CONTRIBUÏÇÃO PORTUGUESA
PARA UM CÉLEBRE PROBLEMA DE ÁLGEBRA

POR

L. WOODHOUSE

Dentro do período que decorre desde as investigações de Lagrange, sôbre a teoria das equações, até à época em que aparecem as obras de Abel e de Galois, foi elaborado um trabalho, hoje pôsto em esquecimento, publicado nas *Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa* no ano de 1821, e subscrito pelo matemático português Francisco Simões Margiochi (1).

Pensa-se geralmente que, depois do desaparecimento de José Anastácio da Cunha e de Monteiro da Rocha, até que em Portugal alvoreceu o período de actividade iniciado por Daniel da Silva, o gôsto por êsses estudos tivesse adormecido entre nós. Não é bem assim, e é acto de justiça levantar do olvido alguns nomes portugueses que não merecem o abandôno em que jazem. Um dêstes é o de Francisco Simões Margiochi, figura interessante, homem de seguro merecimento, cuja vida agitada não obstou a que se votasse, com gôsto e proveito, à cultura das sciências matemáticas.

Nasceu em Lisboa em Outubro de 1774 e, tendo entrado para a Congregação do Oratório com o fim de se ordenar, abandonou cedo êste projecto, seguindo para a Universidade de Coimbra onde freqüentou as aulas da faculdade de Matemática. Espírito irrequieto e ardente, aberto às aspirações liberais que no tempo principiavam a infiltrar-se na sociedade portuguesa, sofreu por êsse motivo perseguições e até prisão, conseguindo, não obstante, concluir com brilho a sua formatura no ano de 1798.

Alistando-se em seguida na Armada Real, em atenção ao

---

(1) Memória — com o fim de provar que não podem ter forma de raízes as equações literais e completas dos graus superiores ao quarto.

seu mérito, foi em 1801 despachado lente substituto da Academia de Marinha, passando mais tarde a servir no Real Corpo de Engenheiros.

Dedicado durante bastantes anos exclusivamente às suas funções e ao estudo, a revolução de 1820 arrasta-o para a política e é eleito deputado às Constituintes. A sua alta mentalidade e ilustração conquistam-lhe de pronto um lugar relevante dentro daquele célebre congresso onde tantas notabilidades se distinguiram. Reeleito deputado às côrtes ordinárias em 1823, desempenha durante algum tempo as funções de presidente. Começa então a quadra movida da sua existência.

A atitude que toma por ocasião do encerramento das côrtes em 1823, depois da jornada de Vila Franca, obriga-o a emigrar. Parte para Inglaterra onde, lutando com inúmeras dificuldades, continua a ocupar-se dos seus estudos predilectos.

Outorgada a Carta Constitucional, Margiochi regressa à pátria e é reintegrado no pôsto de major de engenheiros do qual havia sido demitido, mas voltando D. Miguel a Portugal em 1828, novamente tem de emigrar para Inglaterra. Trava então no exílio relações de intimidade com Saldanha, seu antigo discípulo, a quem acompanhava quando êste em 1830 desembarcou no Pôrto e onde se conserva durante o memorável cêrco desta cidade.

Despontam então melhores dias para Margiochi: é promovido no exército, reintegrado no seu antigo lugar de lente da Academia de Marinha e, captando a confiança de D. Pedro, recebe diferentes distinções honoríficas, sendo nomeado ministro da marinha em 1833, par do reino em 1834 e a seguir vice-presidente do Conselho Superior de Instrução Pública, recentemente criado.

O movimento de Setembro de 1836 determina-o a abandonar a política. Recolhe-se definitivamente à vida privada, à revisão e ultimação dos seus trabalhos matemáticos que, mesmo durante os dias atribulados do exílio, ou, o período agitado da sua carreira política, jámais abandonara.

Homem de nobre e levantado carácter morreu pobre, em 1838. Espírito culto, versado na literatura latina e grega, dotado de aptidões poéticas apreciáveis, foram sobretudo as sciências matemáticas que mais o ocuparam e para as quais tinha, sem dúvida, felizes disposições.

Entre os seus trabalhos avulta um, que é o objecto desta nota: a Memória à qual há pouco me referi.

O fim que o autor procura atingir é principalmente dar, empregando processos seus, a demonstração da impossibilidade da resolução algébrica das equações de grau superior ao quarto. E para o conseguir [1] expõe prèviamente um método de resolução uniforme, aplicável às equações do 2.°, 3.° e 4.° graus, e pois que o método, por virtude da impossibilidade de realizar determinadas condições, falha para equações de grau superior ao quarto, pretende o autor concluir a impossibilidade da solução geral. Eis a súmula do trabalho.

Há portanto na Memória duas questões diversas que é mister considerar em separado: o método de resolução e a demonstração que dêle resulta.

Pôsto isto começarei por fazer da primeira e o mais sucintamente possível exposição e análise, observando desde já que as bases em que se firma são evidentemente inspiradas pelas doutrinas de Lagrange relativas à redução da resolução da equação dada à resolução da reduzida, cujas raízes são funções lineares das raízes da proposta e das raízes da unidade.

Da segunda e do seu valor provante me ocuparei de seguida.

*
* *

Represente-se a equação que se pretende resolver, privada do seu segundo termo, por

$$x^n + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

sendo [2] $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ as n raízes. Sejam $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-1}$ elementos em número $n-1$, constituintes dessas raízes, e que serão, ou melhor, cujas potências $a_1^r, a_2^r, a_3^r \ldots a_{n-1}^r$ deverão ser as raízes da reduzida. Em seguida estabeleçam-se as seguintes n relações fundamentais

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} \\ x_2 = ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + ka_{n-2} + qa_{n-1} \\ x_3 = ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + qa_{n-2} + ka_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = qa_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + ka_{n-2} + ka_{n-1} \end{cases}$$

onde k e q aparecem como factores indeterminados.

---

[1] A Memória trata como assunto preliminar e preparatório da doutrina das funções simétricas das raízes das equações, assunto que deixarei de parte.

[2] Margiochi na sua Memória refere-se sempre às raízes com sinal contrário (antiraizes).

Estas relações mostram logo a possibilidade da permutação entre si dos elementos $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, todos os quais entram na composição de cada raiz.

Somando estas equações, não perdendo de vista a primeira, nem o facto de ser nula a soma das raízes da proposta, obtém-se

$$x_1[1+(n-2)k+q]=0$$

e por conseguinte, pois que x_1 é qualquer raiz (*Nota i*)

$$(a) \qquad 1+(n-2)k+q=0$$

Formulada esta condição, exprimam-se os elementos constituintes, cada um, em função de tôdas as raízes pela forma seguinte

$$(2) \quad \begin{cases} nka_1 = kx_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{k}{q} x_n \\ nka_2 = kx_1 + x_2 + x_3 + \ldots + \dfrac{k}{q} x_{n-1} + x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nka_{r-1} = kx_1 + \dfrac{k}{q} x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n \end{cases}$$

para o que se estabelecerá a nova condição

$$(b) \qquad q+(n-2)k+\frac{k^2}{q}=0$$

o que é permitido, pois que k e q são duas arbitrárias. Da comparação de (a) com (b) resulta ser $k^2=q$ e, por conseguinte, estas duas equações serão substituídas pelo sistema condicional

$$(c) \quad \begin{cases} 1+(n-2)k+k^2=0 \\ q=k^2 \end{cases}$$

Em virtude da segunda o sistema (2) converte-se em

$$(3) \quad \begin{cases} nk^2 a_1 = k^2 x_1 + kx_2 + \ldots + kx_{n-1} + x_n \\ nk^2 a_2 = k^2 x_1 + kx_2 + \ldots + x_{n-1} + kx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nka_{n-1} = k^2 x_1 + x_2 + \ldots + kx_{n-1} + kx_n \end{cases}$$

e o grupo (1) é transformado em

$$(4)\quad\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} \\ x_2 = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_{n-2} + k^2 a_{n-1} \\ x_2 = ka_1 + ka_2 + \ldots + k^2 a_{n-2} + ka_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = k^2 a_1 + ka_2 + \ldots + ka_{n-2} + ka_{n-1} \end{cases}$$

Reduzidas, nos grupos (3) e (4), as duas arbitrárias k e q a uma única, a teoria das funções simétricas intervem naturalmente nesta altura para se ultimar a solução do problema.

É preciso compôr por meio dos coeficientes da equação dada os coeficientes da reduzida.

Mas, se $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ fôssem as raízes desta última equação, a primeira função que importaria calcular seria

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1}.$$

Ora, somando as equações (3) obtém-se um resultado que coincide com a primeira equação (1)

$$a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1} = x_1$$

e, sendo x_1 desconhecida, não será possível calcular os coeficientes desta equação.

Para mostrar a possibilidade de formar outra reduzida, cujas raízes sejam as potências $a_1^r a_2^r \ldots a_{n-1}^r$ dos elementos constituintes, basta examinar se há um número inteiro r tal que se possa exprimir a soma destas potências por meio de funções simétricas de $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$, porquanto, neste caso, da mesma forma é possível exprimir por funções simétricas as somas da potência $a_1^{2r} + a_2^{2r} + \ldots$, $a_1^{3r} + a_2^{3r} + \ldots$ etc. e, portanto, calcular todos os coeficientes desta reduzida em função dos coeficientes da equação dada.

Mas, para que isto possa conseguir-se, quere dizer, para que $a_1^r + a_2^r \ldots + a_{n-1}^r$ seja uma funçõo de $x_1 x_2 \ldots x_n$ tal que estas quantidades se possam permutar entre si, deverão verificar se as condições $k^{2r} = 1$ $k^r = 1$ e, portanto, a quantidade k será raiz r da unidade, sem que, como é evidente, deixe de subsistir a relação

$$(d)\qquad 1 + (n-2)k + k^2 = 0.$$

Eis como se chega à dupla condição imposta a k, chave do método de resolução das equações e também da demonstração da sua impossibilidade além do 4.° grau, de ser ao mesmo tempo raiz da equação (d) e raiz da unidade.

* * *

Fazendo aplicação da doutrina, considere-se primeiro a equação do 3.° grau

$$x^3 + A_2 x + A_3 = 0.$$

Fazendo $n = 3$ em (d) resulta

$$k^2 + k + 1 = \frac{k^3 - 1}{k - 1} = 0$$

e vê-se que k será uma raiz cúbica da unidade diferente de 1.

Representando essas duas raízes por ω_1 e ω_2 segue-se que as raízes da cúbica, em função dos elementos constituintes a_1 e a_2, serão da forma

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 \\ x_2 = \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 \\ x_3 = \omega_2 a_1 + \omega_1 a_2 \end{cases}$$

e as equações que exprimem estes elementos em função das raízes

$$(6) \qquad \begin{cases} 3 a_1 \omega_2 = \omega_2 x_1 + \omega_1 x_2 + x_3 \\ 3 a_2 \omega_2 = \omega_2 x_1 + x_2 + \omega_1 x_3. \end{cases}$$

Atendendo agora a que $r = 3$, fazendo $\mathfrak{z}_1 = a_1^3$ $\mathfrak{z}_2 = a_2^3$, atendendo também a que é necessário calcular as funções simétricas simples de $\mathfrak{z}_1$ e $\mathfrak{z}_2$ e ainda às propriedades conhecidas das raízes da unidade, levantam-se ao cubo e somam-se as equações (6), levantam-se à sexta potência e somam-se as mesmas equações, o que permite calcular essas funções, exprimindo-as em dependência de funções simétricas das raízes da equação dada e, portanto, dos coeficientes desta mesma equação. *(Nota 2).*

Feitos estes cálculos, a reduzida tomará a forma

$$z^2 - A_3 z - \frac{A_2^3}{27} = 0$$

e a_1 e a_2 serão raízes cúbicas das raízes desta equação.

Considere-se em seguida a equação do 4.º grau.

$$x^4 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0.$$

A equação (*d*) converte-se neste caso em

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 0.$$

O coeficiente k tomará o valor -1. Será o valor da raiz quadrada negativa de 1, e teremos também $r = 2$.

As raízes, expressas em elementos constituintes, assumem a forma

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 \\ x_2 = -a_1 - a_2 + a_3 \\ x_3 = -a_1 + a_2 - a_3 \\ x_4 = a_1 - a_2 - a_3. \end{cases}$$

E estes, em função das raizes, darão

$$(8) \qquad \begin{cases} 4a_1 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ 4a_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 4a_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4. \end{cases}$$

Como $r = 2$, e há necessidade de calcular, a fim de compôr os coeficientes da reduzida, funções simétricas das raízes, levantam-se sucessivamente as equações (8) às potências segunda, quarta e sexta e somam-se. Desta maneira se obtém, anàlogamente ao que se fez anteriormente, a reduzida

$$z^3 + \frac{1}{2} A_2 z^2 + \left(\frac{1}{16} A_2^2 - \frac{1}{4} A_4\right) z - \frac{1}{64} A_3^2 = 0.$$

E, $a_1 a_2 a_3$ serão raízes quadradas das três raízes desta equação. *(Nota 3).*

Quer se trate da resolução da equação do 3.º grau, quer da resolução da equação do 4.º, os elementos constituintes das raízes terão de ser obtidos extraindo raízes cúbicas, ou raízes quadradas, às raízes das equações reduzidas, o que naturalmente determina o aparecimento de soluções estranhas, as quais é necessário afastar.

As equações (3) poderão servir para êste fim; mas Margiochi prefere, em geral, fazer a selecção dos elementos constituintes das raízes escolhendo-os de forma a que satisfaçam no caso particular em que a equação que se pretende resolver tome a forma binómia. *(Nota 4).*

Se o grau da equação for superior ao 4.º a resolução algébrica pelo método em questão torna-se impossível. Com efeito, neste caso, a equação condicional

$$k^2+(n-2)k+1=0$$

tem raízes reais e irracionais

$$k=\frac{1}{2}[2-n\pm\sqrt{n(n-4)}]$$

e estes números não poderão ser raízes da unidade, carácter essencial do número k, como anteriormente foi já demonstrado. *(Nota 5).*

*
* *

Nota 1. — A condição

$$1+(n-2)k+q=0$$

tal como é obtida no texto em que segui, condensando-a, a exposição feita na Memória, tem apenas o carácter de suficiente. É porém legítimo perguntar se esta condição, fundamental no método em questão, supondo dadas as raízes $x_1 x_0 \ldots x_n$ e incógnitos os elementos $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$, também terá o carácter de condição necessária, como me parece mister que tenha.

Ora, se calcularmos a eliminante do sistema (1), deixando os pormenores de um cálculo assás longo, obteremos

$$x_1(q-k)^{n-2}[1+(n-2)k+q]=0$$

e, poisque x_1 é qualquer e q é diferente de k, recaímos efectivamente na condição

$$1+(n-2)k+q=0$$

que é, portanto, condição necessária.

Nota 2. — O método proposto por Margiochi, sem dúvida interessante, tem a qualidade apreciável de acomodar, dentro de um processo uniforme, a resolução das equações, tanto do 3.º como do 4.º grau.

A sua filiação nas doutrinas de Lagrange é naturalmente justificada e fácil de reconhecer.

Como é bem sabido, e segundo estas doutrinas, o que essencialmente se procura é obter uma função linear das raízes da equação que se vai resolver, de tal maneira constituída, que tenha um número de valores distintos inferior a n, quando essas raízes se permutam entre si. Esta função determina-se depois resolvendo uma equação de grau inferior a n. Ora, separando no método de Margiochi, aplicado à cúbica, as equações que exprimem os elementos constituintes das raízes, essas equações serão (6)

$$3\,a_1\,\omega_2 = \omega_2\,x_1 + \omega_1\,x_2 + x_3$$
$$3\,a_2\,\omega_2 = \omega_2\,x_1 + x_2 \quad + \omega_1\,x_3.$$

as quais serão utilizadas na sequência do método depois de levantadas ao cubo. Executando esta operação, multiplicando os segundos membros por ω_1^3 obtem-se

$$(3\,a_1)^3 = (x_1 + \omega_2\,x_2 + \omega_1\,x_3)^3$$
$$(3\,a_2)^3 = (x_1 + \omega_1\,x_2 + \omega_2\,x_3)^3.$$

E os valores que representam os seus segundos membros coincidem precisamente com os dois valores distintos da função das raízes que, segundo o método de Lagrange, servirão, fazendo intervir as funções simétricas, para calcular os coeficientes da reduzida.

Quere isto dizer que, neste caso, os dois métodos coincidem nesta altura do seu desenvolvimento.

Nota 3. — Semelhantemente ao que acontece com a cúbica o método de Margiochi, em dada altura, entra em contacto com o método de Lagrange.

A função das raizes

$$(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$$

que, pela sua permutação, toma seis valores diferentes converte se, depois de quadrada, na função usada no método de Lagrange e que tem apenas três valores distintos.

As equações (8) do método de Margiochi, quadradas, como se exige a fim de calcular os coeficientes da reduzida, dão

$$16a_1^2 = [x_1 - x_2 - x_3 + x_4]^2$$
$$16a_2^2 = [x_1 - x_2 + x_3 - x_4]^2$$
$$16a_3^2 = [x_1 + x_2 - x_3 - x_4]^2$$

o que representa os três valores distintos da função de Lagrange e que se utilizam da mesma maneira. Desde êste momento os dois métodos seguem paralelamente.

Nota 4. — Omiti, neste breve ensaio, detalhes diversos e nomeadamente cálculos que dizem respeito à formação das equações reduzidas, porque, dependendo apenas da teoria bem conhecida das funções simétricas das raizes das equações, sôbre nenhuma dificuldade encerrarem, resultam, por outro lado, mais extensos do que interessantes. São inteiramente análogos àqueles a que conduz a prática do método de Lagrange.

O autor da Memória evidentemente reconhece quanto é prejudicada uma aplicação elegante da sua doutrina com os pesados detalhes de desenvolvimentos algébricos necessários e, para até certo ponto os evitar, indica o emprêgo das equações do tipo (1) de preferência às equações do tipo (2) afim de determinar os coeficientes das reduzidas. E, com efeito, desta preferência provém uma sensivel simplificação.

No entanto as equações (2) não perdem por isso a sua utilidade prática, e poderão servir de critério para a conveniente selecção dos elementos constituintes das raízes da equação que se pretende resolver, afastando soluções estranhas.

Observe-se ainda que as soluções obtidas tomam, para a cúbica, a forma Tartaglia-Cardan e, para a equação do 4.º grau, a forma devida a Euler.

Nota 5. — ¿Qual é o valor demonstrativo da prova que Margiochi nos fornece da impossibilidade da resolução algébrica para além do 4.º grau?

Que o fim principal de Margiochi era produzir essa convicção não oferece dúvida, basta recordar o título do seu trabalho. ¿Atingiu-o porém tanto quanto desejava?

A êste propósito Rodolfo Guimarães no seu livro *Les mathématiques en Portugal* cita um parecer que, sôbre as conclusões contidas na Memória, se encontra no n.º 9, tom. XVII, dos *Annales de Gergonne* e onde se diz: *nous craignons que la demonstration ne produise pas une égale conviction dans l'esprit de tous les lecteurs.*

Também o penso. O parecer é justo.

Sem, por forma alguma, querer apoucar o mérito de um trabalho que, mais uma vez o afirmo, me parece bem pensado e merecedor de ser recordado, devo também confessar que não sinto bem o pêso e o valor da demonstração, como ela se impõe ao espírito todavia claro, do autor da Memória.

Em resumo, e para que bem se possa apreciar a sua fôrça, vou reproduzir o raciocínio completo, tal como êle se desenvolve através do trabalho de Margiochi.

Aceita a possibilidade de estabelecer expressões algébricas de diversos tipos que representem as raízes das equações resolúveis algèbricamente e é claro que, dada uma qualquer forma esquemática, ela poderá transformar-se em uma outra de diverso aspecto. Mas duas quaisquer dessas expressões, ou são na sua essência e fundamentalmente o mesmo, embora na aparência diversas, ou, pelo menos, entre elas não existe contradição fundamental.

E assim, se, com a forma estabelecida, não se podem resolver certas equações, escusado será investigar outra, porque com essa também nada se conseguirá. Ora, com a forma proposta pelo autor, a solução torna-se impossível para além do 4.º grau, igual impossibilidade se deverá concluir para outra forma qualquer que, na sua essência, não será diferente da que foi adoptada.

A Margiochi satisfaz êste raciocínio, no fundo certamente um tanto ingénuo; mas, se o valor da demonstração é contestável, nem porisso a tentativa deixa de ser apreciável e interessante, e, no seu conjunto, o trabalho do matemático português do princípio do século XIX, elaborado em época de grande agitação política, embora antes do seu exílio, não se torna menos merecedor de que o levantemos do olvido em que há muito tinha indevidamente resvalado.

O ENSINO MATEMÁTICO NAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

CONFERÊNCIA

POR

L. WOODHOUSE

Senhor Presidente
Minhas Senhoras e Meus Senhores

Não se dissipou ainda a impressão que após de si deixaram as primorosas conferências que ouvimos há poucos dias nesta sala a dois distintos professores, nem essa recordação pode desvanecer-se de pronto. É pois bem natural a espectativa que se adivinha neste culto auditório e que torna difícil a situação de quem nesta altura (1) lhe cabe fazer-se ouvir, sem que possa impor-se, nem pelo prestígio que deriva dum alto saber, nem pelo encanto de uma exposição fluente e colorida, como com tanto agrado nosso a soube fazer qualquer dêsses abalisados conferentes.

Devo confessar que sinto todo o pêso dessa espectativa, que me oprime, e preferiria que esta conferência não tivesse logar marcado dentro do programa do nosso Congresso, porque o assunto poderia bem acomodar-se às breves proporções de uma simples e despretenciosa comunicação.

Em verdade, meus senhores, tanto bastaria para que, como vereis já, fôsse possível realizar o modesto plano que neste pouco se resume:

Dar aos nossos hóspedes, em singela e concisa notícia, a impressão do que representa como organização e do que vale como progresso, sôbre o que existia anteriormente a 1911, o

(1) Esta conferência realizou-se no dia do encerramento do Congresso e com ela se ultimaram os trabalhos da secção de matemática.

estado presente do ensino matemático universitário em Portugal;

Aproveitar a oportunidade de encontrar aqui reünidos representantes das Universidades portuguesas para, embora ao de leve, sublinhar algumas deficiências da organização presente, permitindo-me sugerir em seguida diversas modificações que, eu penso, poderão ser talvez ponto de partida para uma remodelação parcial, mas a meu ver proveitosa, prática e imediata do nosso ensino matemático superior.

Em curtas palavras desenvolverei êste tema.

O que terei a honra de submeter à apreciação dos meus ilustres colegas julgo-o de realização fácil, e tende a obter, sem encargos nem delongas, uma estrutura mais completa, e por êsse motivo mais produtiva, daquele ensino.

Aos distintos representantes do professorado da nobre Espanha, os quais com inteira satisfação me permito saüdar efusivamente, eu desejaria poder proporcionar não só a visão nítida e exacta de quanto temos caminhado na conquista de sensíveis progressos; mas ainda de quanto nos esforçamos sempre por completar e corrigir o existente, firmemente resolvidos a realizar o elevado ideal a que aspiramos e que nos permitirá consolidar sòlidamente o prestígio das Universidades desta nossa bem amada terra de Portugal.

O ensino matemático nas escolas superiores antes de 1911

Anteriormente a 1911, ano em que a instrução universitária passou entre nós por uma remodelação radical, o ensino matemático superior estave concentrado na Universidade de Coimbra, na Escola Politécnica de Lisboa e na Academia Politécnica do Pôrto.

É certo que nos Institutos Industriais destas duas últimas cidades se encontrava, como parte integrante dos respectivos planos de estudos, o ensino da álgebra superior, da geometria analítica, da geometria descritiva e da análise infinitesimal; mas com uma modalidade muito especial e francamente restrita. A índole acentuadamente utilitária dessas escolas, destinadas a formar sòmente técnicos, técnicos de engenharia, mas de cultura relativamente modesta, ou técnicos comercialistas, de conhecimentos matemáticos abertamente elementares, fixava êsse ensino, na melhor das hipóteses, dentro dos limites breves e amoldava-o à forma simples e utilitária que, pela sua índole, pelos seus métodos e pela sua extensão, se pode bem aproximar daquela categoria de conhecimentos hoje apresentados sob a rubrica corrente de *Matemáticas gerais*.

Em outras escolas iríamos encontrar também nessa época, e ainda sob a designação de cálculo diferencial e integral — citarei o Instituto Agrícola e a Escola Naval — análogo género de ensino, obedecendo também à mesma orientação elementar e às mesmas necessidades utilitárias e reduzidas.

Assim, a instrução matemática superior, nìtidamente caracterizada como tal, pelos seus fins, pelos seus métodos e pela sua extensão, podia considerar-se localizada nas três escolas há pouco mencionadas, isto é, na Universidade de Coimbra e nas Politécnicas de Lisboa e do Pôrto.

A Universidade e as Politécnicas

Nestes estabelecimentos êsse ensino abrangia, no ramo das matemáticas puras, uma cadeira de álgebra superior e geometria analítica, outra de cálculo diferencial e integral e mais outra de geometria descritiva. Havia ainda no ramo das matemáticas aplicadas as cadeiras de mecânica, astronomia e geodésia, e, sòmente na Universidade, se ensinava a física matemática e a mecânica celeste.

Ao cálculo das probabilidades não havia cadeira especialmente votada, êle era a bem dizer elemento parasitário, mais ou menos sumàriamente exposto, como anexo às cadeiras de astronomia ou geodésia, limitado quási à teoria dos erros.

A geometria projectiva ocupava também um lugar subalterno, pouco menos do que esquecida. Algumas poucas lições lhe eram porventura reservadas, por devoção dos respectivos professores, insertas no programa da cadeira de geometria descritiva. Eis o quadro, de linhas pouco largas, como vemos, melhor direi, de proporções manifestamente acanhadas, dos valores com que se constituía o ensino superior das matemáticas anteriormente à reforma de 1911.

Não podiam evidentemente dentro dêle caber grandes desenvolvimentos de doutrina, mas, cumpre dizê-lo, as boas vontades conjugadas de professores e de alunos, a devoção daqueles, tantas vezes comprovada, e os esforços dêstes permitiram que, não obstante manifestas deficiências, o ensino superior português se mantivesse sempre a um nível que jàmais nos envergonhou.

Anomalias e imperfeições da organização anterior a 1911

Não obstante, a pobreza orgânica, à qual acabo de me referir, era um facto notório e ainda agravado por outras circunstâncias às quais eu passo a mencionar de seguida.

O curso professado na Universidade de Coimbra, composto fundamentalmente pelas cadeiras de matemáticas puras há pouco citadas e completado pelas cadeiras de matemáticas aplicadas, mecânica, astronomia prática, astronomia teórica e física matemática, era rematado pela imposição das honras e dos gráus académicos na Faculdade de Matemática dessa Universidade a única então existente.

A êsses gráus aspirava porém um número muito limitado de alunos, pois o caso corrente era que a sua grande maioria, procurando as carreiras mais remuneradoras ou de mais rápido e fácil acesso, se limitava a freqüentar um número restrito destas cadeiras, muitas vezes uma ou duas apenas, do grupo das matemáticas puras, como elemento propedêutico de doutrinas que faziam parte de diversas outras faculdades universitárias onde êsses alunos se iam graduar; ou então para, mais tarde, abandonando a Universidade, transitarem para os cursos militares ou de engenharia, os quais não encontravam logar dentro da organização universitária dêsse tempo.

As Politécnicas de Lisboa e Pôrto preparavam também alunos no ramo matemático — a êste me refiro exclusivamente — para os cursos das carreiras militares e de engenharia. Esta última tinha o carácter de escola completa técnica, abrangendo o curso preparatório e o curso de aplicação, e, diga-se de passagem, pelo acendrado esfôrço do seu corpo docente, do qual fui o mais obscuro membro, soube conquistar uma posição culminante entre as escolas portuguesas.

Não conferiam graus académicos estes estabelecimentos de ensino, como já disse, pois êsse privilégio era atributo exclusivo da única Universidade, então existente; não obstante, os programas das cadeiras comuns a estas escolas e à de Coimbra eram organizados da mesma forma, obedecendo aos mesmos métodos de ensino e elaborados com a mesma extensão e, com efeito, era facto absolutamente incontroverso que o ensino em tôdas três, escola universitária, escola teórica sem prerrogativas universitárias e escola simultâneamente teórica e técnica, mantinha-se à mesma altura e era dado com a mesma extensão e a mesma intensidade.

Em resumo, o que deixo exposto revela não sòmente um organismo fundamentalmente acanhado, mas salienta ainda um defeito sensível, proveniente da incompleta adaptação da cultura matemática aos diversos fins que ela deveria servir — vício orgânico fundamental que caraterizou o regimen do ensino matemático superior daquele tempo e que sensìvelmente se modificou por efeito da organização actual.

Consintam-me que eu denuncie ainda uma singular disposição legal, bem caraterística, hoje revogada, mas que se manteve na Universidade de Coimbra até que se realizou a última reforma e que, sem desprimor, creio se pode justamente classificar de verdadeira anomalia pedagógica.

Existia então uma classe de alunos sob a designação de *obrigados* os quais, freqüentando determinadas cadeiras de matemática e ouvindo as lições dos seus mestres, a êles e aos outros alunos comuns, subordinadas ao mesmo programa, eram todavia dispensados de uma prova de exame final tão minuciosa e tão completa como aquela que era exigida aos seus outros condiscípulos não *obrigados*.

Eram alunos de meia sciência, destinados a cursos não essencialmente matemáticos, mas, não obstante, ensinados segundo os mesmos métodos e dentro do mesmo programa, que se organizara para aqueles que tinham de prestar provas de sciência completa.

Era flagrante o desconcêrto. Esta incongruência pedagógica deixou de existir, como há pouco disse.

A reforma de 1911

Em 1911 rasgou-se para o ensino superior novo horizonte, decrètando se uma larga reforma da qual me ocuparei agora um tanto.

Foram nesse ano criadas as Universidades de Lisboa e do Pôrto, integrando-se nelas diversas escolas de ensino superior que se encontravam organizadas nestas duas cidades, mas que tinham vida independente.

Não é meu propósito apreciar na sua generalidade êste movimento renovador. ¿Foi oportuna a medida? ¿A sua contextura seria a mais própria, com o carácter de uniformidade que se lhe imprimiu? ¿Correspondem ao pensamento progressivo que a inspirou os resultados práticos que se colhem?

Não tratarei agora de apreciar estas interessantes questões; quero apenas encarar a reforma sob um aspecto muito particular e muito restrito: o ensino das matemáticas superiores.

As modificações que ela trouxe incidiram principalmente sôbre os seguintes pontos:

Expansão do ensino pela criação de novas cadeiras, sua diferenciação e melhor adaptação às finalidades dos diferentes cursos;

Modificação do regimen de freqüência dos alunos;

Organização mais regular e ampla do ensino prático, confiado aos assistentes, auxiliares do ensino magistral, aos quais pertence importantíssima função dentro da trama do ensino actualmente em vigor.

Do primeiro ponto me ocuparei daqui a pouco, e então procurarei investigar se, na urdidura do novo quadro ampliado, existe o necessário equilíbrio.

Mas, antes disso, farei algumas ligeiras referências ao maior ou menor número de obrigações impostas aos alunos em matéria de assistência aos exercícios escolares, isto é, ao regimen que hoje chamamos de freqüência livre e que, na antiga organização, era de freqüência obrigatória.

Freqüência livre e freqüência obrigatória

Anteriormente a 1911 vivia-se em regimen de freqüência obrigatória. Era obrigatória a presença nas aulas, como obrigatórias eram as lições, *as chamadas*, e os trabalhos escritos que aos alunos eram exigidos pelos respectivos professores.

Quási sempre estes adoptavam um livro, um compêndio, que, escolhido de maneira que se conformasse com o programa do curso, quando êste programa não era recortado sôbre o molde do livro, servia de norma às lições.

O texto dêsse livro devia naturalmente ser explicado pelo professor.

Essa explicação variava muito em extensão e detalhes segundo o critério e zêlo de quem a fazia, acontecendo, e não poucas vezes, ser reduzida a proporções insignificantes e até suprimida por completo.

¡Era em verdade, devemos confessá-lo, uma singular maneira de compreender a missão orientadora do mestre!

Mas era assim muitas vezes, e parecia até haver casos em que êle manifestava maior simpatia pela modesta função fiscal de verificar uma aplicação que se denunciava pela assiduïdade na presença do que interêsse por outra função bem mais nobre, a de conseguir despertar nos seus discípulos amor e não tédio pela sciência, salientando os seus aspectos atraentes, mostrando o seu valor, ensinando a utilizá-la.

Uma conseqüência, sem dúvida interessante, da organização que cessou era o conhecimento muito aproximado que durante o ano lectivo o professor conseguia obter do mérito dos seus discípulos, o que facilitava evidentemente o julgamento quando êle era chamado a desempenhar essa missão delicada e importante.

Com a organização actual, libertado o aluno daquelas obrigações, veio a perder-se essa vantagem inegável e a favorecer-se por outro lado o seu natural pendor para o desleixo e para o abandôno; mas como contrapartida, vê-se também despertar no professor um novo estímulo, que pode até certo ponto neutralizar aqueles inconvenientes, estímulo que o incita a criar, pela maneira como organiza e conduz o seu ensino, o interêsse bastante que atrai e fixa, sem coacções irritantes e às vezes contraproducentes, a atenção dos seus ouvintes.

São freqüentes os reparos que se ouvem às liberdades que a moderna legislação académica concede aos alunos em matéria de freqüência, e de cujo abuso têm resultado por vezes, forçoso é confessá-lo, conseqüências lamentáveis; não obstante eu devo afirmar que não me alinho ainda entre os seus adversários intransigentes.

Não posso fazê-lo, embora reconheça que os resultados obtidos não têm sido francamente animadores, mas convenço-me que não se tem lançado mão de tôdas as disposições, de todos os recursos que o estatuto faculta e que dizem respeito à acção do professor e à acção do assistente, que pode ser preciosa, e com as quais será possível atenuar inconvenientes e corrigir abusos, sem prejuízo da missão elevada e serêna que ao professor compete.

A êste cumpre hoje desempenhar mais alto dever do que aquele que se cifra em marcar lições e fiscalizar faltas; tem obrigação insofismável de ensinar, atraindo e não coagindo, missão bem mais elevada, agradável, tranqüila e prestigiosa.

Alheio a incidentes freqüentes e, quantas vezes desagradáveis com alunos menos dóceis e maus cumpridores dos seus deveres, poderá serênamente imprimir uma elevação, um cuidado e uma continuïdade à sua exposição que sujeito às velhas fórmulas mais dificilmente conseguiria.

Perdeu-se o contacto constante com os discípulos, o que é sem dúvida verdade, mas, se êsse contacto não é agora tão estreito, tão intenso como era outrora, também é certo que, repito-o, dentro do regulamentto universitário existem disposições que convenientemente aproveitadas e, se necessário fôr, um tanto ampliadas, podem, sem pressões e sem necessidade de reverter aos extremos molestos dos regulamentos extintos, corrigir aquelas faltas.

Mas não me alongarei mais nestas divagações e passarei a ocupar-me da ampliação do quadro das cadeiras da Faculdade, como êle foi traçado pela reforma de 1911.

A descongestionação do ensino e a ampliação das disciplinas

A acumulação, em uma mesma cadeira, de alunos, cuja educação matemática exigia orientações divergentes e acomodadas às diferentes finalidades das suas futuras carreiras, o ensino feito para todos uniformemente e subordinado sempre às mesmas normas inflexíveis — defeito que já denunciei e que era resultado da escassez da organização anterior — corrigiu-o em parte a reforma de 1911, criando, entre novas cadeiras de índole diversa, uma muito especial, destinada ao ensino das matemáticas gerais.

Merece, julgo eu, muita simpatia e é hoje necessidade iniludível de um proveitoso plano de educação matemática tôda a diferenciação criteriosa que se filie lógica e naturalmente na orientação divergente dos alunos, daqueles que procuram a cultura superior do curso teórico e aspiram à licenciatura em sciências matemáticas, daqueles que se destinam aos cursos técnicos elevados, onde deverão porventura utilizar algumas das mais elevadas concepções matemáticas, ou daqueles que apenas necessitem, sem exigências dum ensino, nem extenso nem profundo, embora sempre rigoroso e scientìficamente disciplinado, aproveitar quanto na matemática possam encontrar pràticamente utilizável.

Sou apologista sincero e convicto, repito, desta diferenciação que reputo fundamental e que corresponde a uma necessidade instante, mas o meu aplauso é com a reserva de uma condição, e essa imprescindível, de que as matemáticas, quando expostas para aqueles que sobretudo procuram a parte útil, de preferência à parte especulativa, se não afastem do indispensável espírito matemático, da necessária e característica exactidão.

Matemática útil e matemática especulativa

Eu bem sei que há quem pense e faça propaganda da orientação contrária, quem, tendo em pouca conta a forma severa e precisa da estrutura matemática, preconize para os técnicos e para os que não seguem cursos essencialmente matemáticos, uma sciência especial, simplificada, exclusiva e caracterizadamente utilitária. Recordo-me a êste propósito que, Darboux o geómetra eminente, prefaciando um apreciável tratado de matemáticas gerais, cita a propósito uma frase curiosa que atribui a Schiller.

Afigura-se ao grande poeta, diz êle, haver quem considere a sciência como uma deusa, por cujo amor tudo se sacrifica, emquanto que outros há que a apreciam, como se aprecia uma boa vaca leiteira, que tanto vale quanto rende.

A matemática orientada de conformidade com a segunda proposição do dilema reputo-a desastrosa.

Os conhecimentos matemáticos adquiridos sistemàticamente por métodos experimentais ou mesmo obtidos sem a nitidez companheira do rigor, sem orientação inspirada pelo verdadeiro espírito matemático emfim, ¡que frágil instrumento de investigação virão a constituir nas mãos de quem tentar utilizá-los! ¿Que efeito disciplinador, que acção educativa colherá quem assim os obtiver?

Eu reputo o encargo de expor sob o aspecto utilitário os necessários conhecimentos, missão que aos inexperientes se afigurará talvez fácil tarefa, um daqueles que mais responsabilidades fará pesar sôbre o professor, probo e consciente da sua alta missão, que queira e saiba transmitir, sem demolir a sciência, um conjunto apreciável de noções úteis enlaçando precisão e sobriedade com um solícito discernimento.

O novo quadro das cadeiras.
Desequilíbrio da sua organização

Mas eu devo encerrar mais estoutra pequena divagação que me ia levando para longe do meu assunto e reverter à minha exposição, na altura em que me encontrava. Ocupava-me da reforma de 1911.

Criou, e muito bem, essa reforma o ensino das matemáticas gerais. Fez-se derivar por êsse novo canal uma corrente de alunos que, não aspirando à cultura matemática mais elevada, se fundia com a massa dos alunos que só esta demandavam.

Por outro lado organizava-se um elenco de novas cadeiras mais completo, do que resultava para o ensino uma maior e necessária amplitude.

As que foram então criadas juntamente com as existentes, constituem, nas três Universidades, o quadro seguinte.

Uma cadeira de matemáticas gerais, cujo ensino se faz em dois semestres. É destinada aos alunos da secção de sciências biológicas e geológicas da Faculdade de Sciências.

Uma de álgebra superior e de geometria analítica, em dois semestres.

Uma de cálculo diferencial e integral, em dois semestres. Estas duas cadeiras são destinadas aos alunos das secções de sciências matemáticas e de sciências físico-químicas da Faculdade de Sciências e aos alunos da Faculdade Técnica (engenharia).

Uma de geometria descritiva, em dois semestres, para os alunos da secção de matemática da Faculdade de Sciências e para os alunos da Faculdade Técnica.

Uma de análise superior, em dois semestres, uma outra de geometria projectiva, também em dois semestres e mais uma de cálculo das probabilidades, em um semestre, para os alunos da primeira secção da Faculdade de Sciências.

Tal é o conjunto das cadeiras pelas quais se encontram distribuídas as disciplinas que constituem o ensino das matemáticas puras, fundamento do ensino das matemáticas aplicadas da secção de matemática das Faculdades de Sciências e também base do mesmo ensino para as outras duas secções das mesmas Faculdades e para a Faculdade Técnica na Universidade do Pôrto.

Melhorias e imperfeições

Êste quadro representa um notável e claro progresso sôbre o que anteriormente existia, se bem que encerra alguns defeitos fáceis de remediar.

Por muito de leve que se analise êste agrupamento há um reparo que imediatamente se oferece fazer: um sensível desequilíbrio revelado na distribuïção das matérias pelas diversas cadeiras, atento o seu valor relativo e à extensão que importa dar-lhes.

A geometria projectiva reservam-se dois semetres, isto é, um ano inteiro, e paralelamente a geometria analítica e a álgebra superior são comprimidas dentro da mesma cadeira e ensinadas no mesmo espaço de tempo, levando assim ao inevitável resultado de uma disciplina ser sacrificada à outra, o que sempre e inevitàvelmente acontece.

E, na verdade, como será possível, querendo o professor elevar-se um pouco, sair para fora do emprêgo elementar das coordenadas cartesianas ordinárias e imprimir à geometria uma feição moderna, partindo da noção da razão dupla e da lei da dualidade, empregando as coordenadas de pontos e de linhas — como será possível, pergunto eu, utilizando estes princípios e os métodos modernos que dão à doutrina tão admirável unidade, beleza, simetria e fecundidade nos resultados — ¿como será possível concentrar tôda esta doutrina dentro de um semestre, cortado de férias, de interrupções, umas inevitáveis, outras infelizmente bem escusadas mas que a fatalidade tantas vezes tem feito surgir?

¿E a álgebra? A experiência mostra ser quási impossível ultrapassar a teoria da resolução numérica das equações.

A teoria das formas algébricas, os invariantes, as transformações lineares, os belos trabalhos de Lagrange, de Abel e Galois, tudo isto tem de ficar em grande parte no esquecimento, e, sòmente por um esfôrço ingente da parte do professor, quando auxiliado por uma rara boa vontade de alunos essencialmente dedicados, em anos de excepcionais condições de continuïdade, sem interrupções nem perturbações, se consegue expor algumas destas matérias.

Fala pela minha voz a experiência de largos anos de exercício de magistério, e eu poderia apontar em letras vermelhas, nos registos do meu ensino, aqueles, em que um conjunto de raras circunstâncias felizes permitiram a realização de um programa relativamente completo, como eu o desejaria ver realizado sempre.

E emquanto que esta impossível, esta incongruente concentração se impõe a duas disciplinas fundamentalmente importantes, a exposição da geometria pura, com a forma projectiva, se dilui por um ano inteiro, não obstante a sua importância, por forma alguma se possa admitir que seja superior à da geometria analítica.

Creio pois ter razão bastante para afirmar que se encontra no quadro actual das disciplinas, aliás bastante completo, um sensível desequilíbrio que importará corrigir. ¿Será isso fácil?

Para tentar estabelecer qualquer fórmula, que represente solução, harmónica no seu conjunto e pràticamente útil nos seus fins, aproveitando quanto possivel os elementos existentes, dois pontos convém considerar prèviamente. Nesta conformidade preguntarei:

¿Qual é a preparação provável do aluno, e com a qual se pode contar, quando êle ingressa nas Faculdades de Sciências?

¿Qual é em cada um dos ramos da Faculdade a extensão necessária e suficiente da cultura matemática que êle deve receber?

A cultura matemática preparatória dos alunos que ingressam nas Faculdades de Sciências

A resposta ao primeiro quesito havia de levar-me para muito longe e obrigar-me a percorrer um campo que não me proponho neste momento explorar.

Direi apenas que, se os programas do nosso ensino secundário são largamente desenvolvidos, os resultados colhidos têm sido notàvelmente inferiores às promessas lisongeiras que êles encerram.

Tem sido confiada aos nossos liceus uma dupla missão: dar aos alunos uma cultura geral, e, obtida esta, de, nos últimos anos dos respectivos cursos, os especializarem, ou no ramo de letras, ou no ramo de sciências, preparando para estudos superiores os que aspiram a mais elevada cultura scientífica.

Pelo que diz respeito a sciências e, em especial, à preparação matemática, ¿poderá afirmar-se que o aluno, depois de completar o curso secundário, se encontrará em geral apto para receber um ensino superior, elevado e intenso?

É forçoso confessar que quem quiser, neste momento, firmar o ensino superior matemático sôbre o ensino liceal actual será imprudente se confiar demasiado em uma sólida preparação secundária. É muito propositadamente me refiro a uma preparação sólida, e não a uma preparação extensa. É aquela, e não esta, que importa fomentar.

Oxalá que uma próxima reforma do ensino matemático dos liceus, que tanto urge preparar, se elabore sôbre a dupla base, a meu ver indiscutìvelmente necessária, da compressão dos programas e da intensificação do ensino, e não se deixe arrastar pela ilusão do programa aparatoso, mas cuja execução a prática mostre ser impossível.

Quer a função do liceu seja dar uma cultura geral média e a êste papel se limite, quer conserve ainda a missão de preparar para o ensino universitário, deverá afastar-se dos programas tôda a doutrina que represente ostentação vã e pretenciosa.

Pelo que diz respeito aos conhecimentos matemáticos faço votos por que se tenha bem presente a sua índole especial. É necessário que êles se liguem graduando-se, e não esqueça que vale a pena sacrificar doutrinas pseudo superiores de interêsse quimérico à necessidade absoluta de fazer um ensino perfeito e demorado da aritmética e da geometria euclidiana, ensino fundamental indispensável e que não se repete fora dos liceus.

¿Como se poderá, com efeito, seguir com proveito um ensino rasgado de geometria analítica ou descritiva sem possuir bastante completos os elementos da geometria euclidiana?

¿E quantas vezes se tem reconhecido a sua lamentável insubsistência?

A transição do ensino liceal para o ensino universitário

Ora se, como eu há pouco dizia, não se pode aguardar, em regra, uma sólida preparação elementar, claro é que, como conseqüência inevitável, se deverá pôr de parte por ilusória qualquer organização de ensino superior matemático que logo de entrada tome formas relativamente elevadas, e, sendo assim, o bom senso aconselhará uma transição que estabeleça continuïdade entre o ensino liceal e o ensino superior.

A minha aspiração seria que essa transição se fizesse em um período de estágio antes do ingresso definitivo nas Faculdades, mas junto destas e sob a sua imediata direcção e fiscalização, e depois de completado o curso do liceu, cuja função se limitaria a dar uma sólida e sincera instrução geral média, sem preocupação de preparar para cursos universitários.

Mas, não sendo possível por agora esperar uma tão profunda remodelação do ensino secundário, vejamos como, dentro do existente, se poderá estabelecer proveitosamente essa transição.

Para êste fim está naturalmente indicada a cadeira de matemáticas gerais, que ficaria sendo estudo obrigatório fundamental e inicial para qualquer das secções da Faculdade de Sciências. Aceite esta base, vejamos como dela deverão ramificar os conhecimentos matemáticos ulteriores, dentro das diversas secções.

A extensão do ensino matemático dentro da 1.ª secção da Faculdade de Sciências e a preparação matemática do engenheiro

A primeira secção da Faculdade de Sciências é aquela em que predominam as sciências matemáticas e nela atingem o seu máximo desenvolvimento.

A esta secção vêm também procurar a sua cultura matemática os alunos que se destinam à Faculdade Técnica (alunos engenheiros) e ainda aos cursos militares estranhos à Universidade.

¿Até que ponto é conveniente que seja levada a sua preparação matemática?

Não vou tratar aqui agora esta debatida questão e da qual tão proficientemente se ocupou o Congresso espanhol de engenharia realizado há dois anos. Citarei todavia as palavras de um matemático distintíssimo, o Sr. Rey Pastor, alta mentalidade espanhola à qual presto admirativa homenagem, proferidas nesse Congresso entre os aplausos dos assistentes.

Dísse êle ser mister distinguir entre o técnico subalterno, sem pretensões, que aplica os resultados práticos nos trabalhos vulgares, e o técnico superior que, cultivando a sciência, a pode fazer progredir. Para êste a cultura matemática elevada é indispensável, e conclui, que um país desprovido de escolas onde esta alta cultura se possa obter, seria um país de civilização incompleta e de cultura satélite.

Já em outra ocasião e em outro lugar tive ensejo de citar estas palavras, que traduzem uma opinião com a qual me conformo por completo.

Deve-se apartar sem hesitação um largo quinhão dos conhecimentos matemáticos, que encontramos na primeira secção da Faculdade de Sciências, para organizar a preparação indispensável aos alunos que se destinam à Faculdade Técnica.

A extensão do ensino matemático dos alunos da 2.ª e 3.ª secções da Faculdade de Sciências

A segunda secção é destinada a dar conhecimentos nos quais a nota dominante é a cultura das sciências físico-químicas.

Não se justifica que nesta secção os alunos recebam educação matemática inferior à do engenheiro.

Até agora têm êles sido obrigados às duas cadeiras seguintes: álgebra superior e geometria analítica e cálculo diferencial e integral.

Afigura-se mal equilibrada por um lado, deficiente por outro esta base matemática do estudo das sciências físicas.

É natural a exigência da geometria analítica, mesmo com a extensão que toma na primeira secção e ainda o cálculo, mas, pelo que diz respeito à álgebra superior, bastará quanta fôr necessária para o estudo da geometria analítica.

Por outro lado não compreendo como estes alunos tenham até agora sido dispensados de se instruírem nas matérias professadas no curso de cálculo das probabilidades.

Não sòmente a teoria dos erros lhes é indiscutìvelmente necessária para bem compararem, bem apreciarem e bem concluírem dos resultados experimentais os valores mais prováveis, mas ainda os princípios fundamentais das probabilidades constituem hoje a base de notáveis teorias físicas. Não há muito que com interêsse compulsei umas conferências notáveis do professor Guye, de Genebra, e que tinham por assunto a evolução dos fenómenos físico-químicos, ligada ao cálculo das probabilidades. Parece-me de tôda a oportunidade romper com uma velha tradição injustificável, substituindo parte do estudo da álgebra, inútil nas suas teorias superiores, pelo cálculo das probabilidades, sempre aproveitável, e talvez hoje indispensável.

A terceira secção da Faculdade de Sciências é a das sciências biológicas e geológicas. Para esta parece natural reservar-se a preparação matemática mínima.

Definida por esta forma a índole de cada uma das secções da Faculdade de Sciências e respectiva finalidade, e reconhecida a conveniência de um período de transição entre as matemáticas elementares dos estudos secundários, e as matemáticas superiores, com o carácter de elevação próprio do ensino superior dos cursos universitários, eu peço que me permitam dizer como na minha opinião, sem aumento do número de cadeiras da Faculdade, sem exigir aos alunos um maior esfôrço, mas obedecendo a uma diversa mas metódica distribuïção de doutrinas, eu penso que as deficiências apontadas seriam suprimidas, os defeitos emendados e se atingiria uma organização, dentro do existente, porventura não perfeita, mas certamente lógica e harmónica.

Um novo plano de estudos matemáticos nas Faculdades de Sciências

Das matemáticas gerais se faria o estudo obrigatório, inicial e fundamental dos conhecimentos professados nas três secções da Faculdade. A matéria seria exposta em três semestres.

Os dois primeiros abrangeriam a trigonometria esférica, a geometria analítica do plano e do espaço, tratada pelos métodos clássicos elementares, empregando as coordenadas cartesianas, não homogéneas, e as polares, alguma álgebra complementar, sem pretenções a álgebra superior, e os princípios de cálculo diferencial.

O terceiro semestre abrangeria os complementos dêsse cálculo e os elementos do cálculo integral, exposto em vista das futuras aplicações.

Nos dois primeiros semestres de matemáticas gerais se faria um ensino de transição do liceu para a Faculdade, ensino obrigatório a todos os seus alunos.

No terceiro se faria ensino expressamente consagrado aos alunos da terceira secção ùnicamente, que receberiam nestes três semestres a sua instrução matemática total.

A cadeira de geometria projectiva teria de ser desdobrada em duas outras semestrais, a primeira de geometria pura, a segunda de geometria analítica superior, complemento da geometria analítica elementar ensinada na cadeira de matemáticas gerais.

A actual cadeira de geometria analítica e álgebra seria convertida em duas cadeiras semestrais de álgebra superior, ensino complementar da álgebra da cadeira de matemáticas gerais. Na primeira se esplanariam as doutrinas precisas para o ensino da geometria analítica superior.

Os alunos da segunda secção seriam obrigados a freqüentar os dois primeiros semestres de matemáticas gerais, o semestre de álgebra superior, preparatória para a cadeira semestral de geometria analítica superior, esta cadeira e ainda cálculo diferencial e integral e cálculo das probabilidades.

Os alunos da primeira secção deveriam freqüentar, além dos dois primeiros semestres de matemáticas gerais, os dois semestres de álgebra, os dois semestres de geometria pura e analítica e ainda as cadeiras de geometria descritiva, de cálculo diferencial e integral, de análise superior e de cálculo das probabilidades, as quais continuariam com a forma actual e seriam obrigatórias para todos os alunos da primeira secção, juntamente com as cadeiras de mecânica, astronomia e geodesia, física matemática e mecânica celeste.

Para os alunos que se destinam à Faculdade Técnica e que não podem dispensar uma cultura matemática bastante elevada, eu proporia o mínimo seguinte: os dois semestres de matemáticas gerais, as cadeiras de geometria analítica e projectiva, de cálculo diferencial e integral, de geometria descritiva e de mecânica. De álgebra superior teriam de freqüentar a parte preparatória para a geometria analítica superior.

Para os cursos militares, que não fôssem de engenharia ou artilharia, bastariam os três semestres de matemáticas gerais.

Para os alunos de engenharia militar ou artilharia a preparação não deveria ser inferior à dos alunos que se destinam à Faculdade Técnica.

Resumindo e sintetizando o que fica dito eu creio poder formular a seguinte conclusão:

O ensino matemático universitário em Portugal, notàvelmente melhorado, tem ainda manifestas deficiências, mas os valiosos elementos criados pela reforma de 1911, convenientemente remodelados, podem fàcilmente constituir um quadro de conhecimentos base dum plano de estudos capaz de fornecer suficiente cultura matemática superior para tôdas as carreiras que dela precisem, sem alterar sensìvelmente a organização actual.

MEUS SENHORES

É tempo de pôr remate a estas reflexões, aliás bem ligeiras, em que me tenho demorado, encarando um dos aspectos do nosso ensino matemático.

Sòmente mais duas palavras e termino. O prometido é devido e eu prometi ser breve.

Falei da remodelação operada em Portugal em 1911, a qual, representando um progresso sem dúvida apreciável, tem ainda, sob o ponto de vista da cultura matemática, evidentes defeitos e sensíveis deficiências.

Falei com sinceridade pondo em destaque essas faltas. Com igual sinceridade repetirei que as julgo fáceis de remediar com pequeno esfôrço e alguma boa vontade.

Eu tenho, e sinto grande prazer em afirmá-lo hoje aqui, perante os nossos hóspedes, fé inabalável e confiança ilimitada no ressurgimento, pelo trabalho e por uma bem orientada educação moral e scientífica, desta nossa terra portuguesa bem-amada. Creio até poder afirmar que alguns sintomas prometedores se esboçam já. ¿Não serão indícios de um movimento reparador que desperta dois acontecimentos palpitantes que no momento presente e bem à nossa vista se desenrolam nesta cidade em campos diversos: no campo do trabalho o certamen do Palácio de Cristal, pleno de interessantes revelações sôbre o nosso progresso industrial; no campo intelectual o interêsse manifestado em meios tão diversos por êste Congresso, cujo êxito vai muito para além da nossa espectativa?

Mas não basta confiar e cruzar os braços; senão trabalhar para que êsse ressurgimento se vá operando progressiva e firmemente, sem perda de tempo, sem dispêndio inútil de energias.

Ora, uma orientação fecunda e um impulso enérgico e decidido para a realização dessa grande obra, deverá encontrar um dos seus mais fortes esteios no aperfeiçoamento e na expansão do nosso ensino, em todos os graus, em todos os campos.

São os conhecimentos matemáticos fundamento de grande número das mais belas e das mais prestantes ramificações do saber, indispensável e poderoso instrumento de investigação de outros, elemento educativo a todos favorável. Exige o seu ensino a mais desvelada atenção, quer se trate das investigações mais elevadas e transcendentes, quer se procure apenas, em domínios mais modestos, encontrar a melhor forma de fazer uma simples exposição utilitária ou elementar.

E, sendo isto certo, ¿não resultará dever indeclinável para quantos possam concorrer para que se estabeleça essa corrente de progresso e de aperfeiçoamento imprescindíveis, envidar, dentro da esfera da sua acção, dos seus conhecimentos, da sua experiência, todos os esforços para que a cultura desta maravilhosa sciência seja, quanto possível, cuidada e perfeita?

Assim o penso, e por êste motivo e porque a ocasião era propícia pareceu-me conveniente aproveitá-la trazendo para aqui um mais do que modesto tributo para a solução do problema do renovamento da nossa educação matemática superior, cuja estrutura, a meu ver ainda imperfeita, pode, sem notável esfôrço, evolucionar fàcilmente para formas mais equilibradas e por conseguinte mais produtivas.

É possível que eu me iluda e que melhores soluções imediatas seja possível formular capazes de sanar as imperfeições e corrigir as deficiências perturbadoras da regular expansão do nosso ensino, para as quais me permiti chamar a atenção dos meus sábios colegas.

VV. Ex.as o dirão e, se melhor se encontrar, eu o acolherei com reconhecimento, porque, Meus Senhores, o meu objectivo principal, o meu desejo mais veemente seria que êste toque de rebate fôsse ouvido e eu obtivesse a coadjuvação efectiva dos colegas das Universidades portuguesas para que, solidarizando-nos todos em um pensamento comum, unidos por uma mesma aspiração, apreciássemos com carinhoso cuidado êste e tantos outros problemas, que tão de perto nos interessam, congregando todos os esforços para que de nós partisse a iniciativa de uma reconstrução sólida e útil do ensino matemático superior em Portugal.

Sim, porque é dentro da nossa corporação que eu desejaria ver iniciado êsse movimento reparador, reflectido e prático, sem nos deixarmos transviar por pessimismos nem por preconceitos, sem nos deixarmos iludir por fantasias nem por fórmulas de problemática adaptação cujo valor prático só em época remota a experiência poderá confirmar ou condenar.

Eu quereria que, valorizando e completando tudo quanto pela experiência temos reconhecido poder dar resultados vantajosos, e que não é pouco, e eliminando ou modificando, quanto se tem denunciado nocivo ou inútil, e que também é bastante, pudéssemos de uma maneira suave, embora lenta, mas segura e reflectida, atingir formas definitivas e harmónicas com o condicionalismo do nosso ambiente e a psicologia da nossa raça.

Assim orientados eu creio que conseguiríamos realizar dentro de pouco tempo uma obra sólida, produtiva e duradoura, porque seria nossa, porque seria portuguesa e porque seria prática, correspondendo em fecunda utilidade aos ardentes votos que eu faço, que todos nós sem dúvida fazemos, pela consolidação e rendimento útil do nosso ensino, pelo enaltecimento e prestígio da Pátria portuguesa.

MODIFICAÇÃO DO MÉTODO DO PICNÓMETRO PARA DETERMINAR A DENSIDADE DOS SÓLIDOS

(CASO DOS SÓLIDOS ATACÁVEIS PELO AR E PELA AGUA)

POR

ÁLVARO R. MACHADO

O método picnométrico, imaginado por Klaprott, para a determinação da densidade dos sólidos e definitivamente introduzido por Regnault, é hoje o mais usado nos laboratórios como o mais exacto, contanto que se adopte técnica conveniente e o frasco se possa encher de líquido sempre uniformemente. Êste método merece, pois, a atenção dos cultores das sciências físico-químicas, no sentido de o generalizarem, aperfeiçoarem os instrumentos e tornarem cómoda a técnica.

O frasco que nós mandamos construir (fig. 1) é de vidro fino, com a capacidade de cêrca de 60 cm^3, de gargalo um pouco largo (1 cm., ou mais, de diâmetro) de modo a poder deixar passar pequenos fragmentos de sólidos, adaptando-se a êste gargalo uma rôlha perfeitamente esmerilada, que faz corpo com um termómetro, graduado de 0° a 30°. Na parte superior do frasco está implantado um pequeno tubo capilar com um traço de referência, encimado por um pequeno reservatório cilíndrico, de capacidade cêrca de 2 cm^3, fechado por uma rôlha.

O que êste frasco, ou *picnómetro*, tem de especial é êste reservatório suplementar, com o qual podemos determinar a densidade de um sólido que não pode ser pesado no ar, segundo a técnica ordinária ([1]).

([1]) *Elementos de Física Geral*, por F. J. Sousa Gomes e Álvaro R. Machado, 3.ª ed., pág. 153. — *Instruções para trabalhos no Laboratório de Física da Universidade do Pôrto* por Álvaro R. Machado. Art. *Determinação da densidade dos sólidos pelo método do frasco.*

Se se conhece a densidade dum líquido (petróleo, essência de terebentina, álcool, etc.) que não tenha acção de qualquer espécie sôbre o sólido, a técnica apropriada é a seguinte:

1.º Enche-se o frasco até ao traço de referência, enxuga-se o reservatório suprajacente ao tubo capilar, bem como a parte superior dêste, com auxílio de aparas e pequenos rolos de papel de filtro; limpa-se exteriormente.

Depois de ter tomado a temperatura do ambiente, coloca-se num prato da balança de precisão, juntamente com massas marcadas m', fazendo tara t no outro prato. Temos assim uma primeira igualdade

$$t = f + m' + l.$$

2.º Introduz-se no frasco o fragmento do sólido, sem perder porção alguma de líquido. Êste, quando se introduzir a rôlha com termómetro, sobe pelo tubo lateral e fica contido no reservatório suprajacente.

Se pequenas bôlhas de ar ficarem aderentes ao corpo, tiram-se tocando-as com um arame fino.

Deixando ficar a mesma tara t, modificam-se as massas colocadas ao lado do frasco para m'', de modo a restabelecer o equilíbrio da balança. Temos a segunda igualdade:

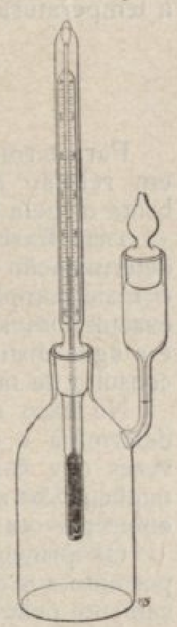


Fig. 1

$$t = f + l + m'' + c.$$

3.º Com auxílio duma pequena pipeta e de papel de filtro, tira-se todo o líquido l_1, que está acima do traço de referência no tubo capilar e reservatório, que representa um volume de líquido igual ao volume do corpo.

Conservando ainda a tara primitiva, modificam-se as massas colocadas ao lado do frasco de modo a de novo restabelecer o equilíbrio da balança. Temos agora a igualdade:

$$t = f + l' + m''' + c.$$

Da primeira e da segunda igualdade tira-se a massa do corpo

$$c = m' - m''.$$

Da segunda e da terceira igualdade tira-se a massa l_1 do líquido saído da segunda para a terceira pesagem, de volume igual ao do corpo sólido introduzindo

$$l_1 = l - l' = m''' - m''.$$

A densidade do sólido em relação ao líquido empregado, à temperatura da experiência, será

$$d' = \frac{c}{l_1} = \frac{m' - m''}{m''' - m''}.$$

Para termos a densidade do sólido à mesma temperatura em relação à água a 4° C. basta multiplicar a densidade bruta d' pela densidade d'' do líquido conhecido (1).

Este frasco e o *modus faciendi* exposto pode aplicar-se à determinação corrente da densidade dum corpo sólido. Não é mais complicado na sua execução e conduz a resultados exactos. Neste caso, o líquido em que o corpo se mergulha é a água distilada, cuja densidade d'' se conhece por simples consulta de tabelas.

No caso especial dos sólidos se alterarem pelo ar, que determina o uso da modificação aqui proposta, sucede por vezes que êsses corpos, por exemplo os metais alcalinos, também são atacáveis pela água e portanto há necessidade de empregar outros líquidos para os banhar, como o petróleo.

Os princípios de técnica, que vamos expor, aplicam-se portanto aos casos especiais em que o corpo é atacável quìmicamente pela água ou se dissolve nela.

Suponhamos que a densidade do líquido auxiliar empregada não se conhece com rigor nas condições das experiências e há necessidade de a determinar na ocasião. Pode fazer-se isto simultâneamente pelo método do frasco com economia de pesagens; bastam duas mais:

Toma-se uma tara t suficientemente grande para fazer equilíbrio ao frasco vazio, limpo e sêco e a uma massa m' gr., sendo em geral êste número m' cêrca do dôbro da capacidade do frasco em cm^3.

Faz-se outra pesagem com o frasco cheio de água a $t°$, até ao traço de referência, e sêco no resto, como no caso geral; sejam m'' as massas marcadas necessárias para estabelecer o equilíbrio.

Em seguida despeja-se a água do frasco e passa-se inter-

(1) *Elementos de Física Geral*, por F. J. Sousa Gomes e Álvaro R. Machado, 3.ª ed., pág. 152.

namente com o líquido em que o corpo sólido vai ser mergulhado; enche-se com êste, como no caso anteriormente exposto, e fazem-se seguidamente as três operações.

As cinco pesagens, que ao todo se fazem correspondem às cinco igualdades

$$t = f + m_0$$
$$t = f + m_1 + a$$
$$t = f + m' + l$$
$$t = f + m'' + l + c$$
$$t = f + m''' + l' + c.$$

Da primeira e da segunda e da primeira e da terceira tiram-se respectivamente a massa da água $a = m_0 - m_1$ e a massa do líquido $l = m_0 - m_1$, que enchem o frasco até ao traço de referência. Portanto, a densidade bruta do líquido à temperatura da experiência será

$$d' = \frac{l}{a} = \frac{m_0 - m'}{m_0 - m_1}.$$

A densidade bruta de d' do sólido em relação ao líquido, à temperatura da experiência, será calculada com os resultados da experiência como atrás, tendo as grandezas a mesma representação literal.

Faz se a correcção pelo processo geral indicado.

Assim ficamos com um método geral, cuja precisão só resta limitada na maneira de colocar a rôlha no frasco nas operações sucessivas.

NOTA SÔBRE A CRIOSCOPIA
DAS ÁGUAS MINERO-MEDICINAIS PORTUGUESAS

POR

RAUL LUPI NOGUEIRA

Professor na Faculdade de Farmácia da Universidade de Lisboa

As águas minerais portuguesas não estão, que me conste, salvo uma ou outra, estudadas sob o ponto de vista do seu índice crioscópico.

Essa constante físico-química tem indubitàvelmente, sua importância quer sob o ponto de vista físico-químico, quer sob o ponto de vista crenoterápico. Qualquer contribuïção para o seu estudo, embora modesta, é pois bemvinda, ainda quando se trate apenas dum trabalho inicial que sirva de ponto de partida para outros de maior tômo.

O estudo da crioscopia de uma água mineral não deve ser feito apenas na água engarrafada, mais ou menos recente, mas na origem, na nascente, e, ainda, será certamente interessante determinar as variações do índice crioscópico nas diversas épocas do ano e no decorrer dos anos.

Por agora, e como trabalho inicial, ocupei-me apenas de determinações dos pontos de congelação das águas minerais portuguesas e também de algumas espanholas.

Fiz primeiro, para cada água, uma série de determinações usando um *crioscópio de Beckmann*. O resfriamento era obtido com uma mistura de gêlo, sal e água gelada. No espaço anular entre o tubo largo que mergulha na mistura frigorífica e o tubo-laboratório, deitei álcool a 90°, em quantidade tal que o seu nível fôsse sensìvelmente igual ao da água a ensaiar, contida no tubo-laboratório. Regulava também a quantidade da mistura refrigerante de forma que o seu nível não divergisse muito do do álcool e da água. O volume de água introduzido no tubo-laboratório era sempre de 25 c. c. Empreguei um termómetro graduado em centésimos de grau entre $-3°$ e $+2°$, termómetro bem calibrado que verifiquei cuidadosamente. Com um óculo de Galileu podia apreciar fàcilmente $^1/_5$ de centésimo de grau.

A água era agitada com um agitador, de fio de prata platinado. Todos os dias determinava o ponto de congelação da água redestilada. Os tubos-laboratório, agitador e termómetro eram lavados meticulosamente com água destilada ordinária, depois com água redestilada e, várias vezes, com a água a ensaiar.

A água redestilada que empreguei era obtida, redestilando em aparelho de vidro de Iena, a água destilada (satisfazendo aos ensaios da *Ph. P.*, do *Codex 1908* e da *Ph. G.*, ed. v) em presença do permanganato de potássio alcalinizado e do alumen.

Fazia seguidamente, para cada água, uma série de dez determinações com o *crioscópio Lupi e Athayde* (ver *Revista de química pura e applicada*, II série, II ano, 1917) porque com êste aparelho se obtém um arrefecimento muito lento, reduzindo-se ao mínimo a sôbre-fusão.

Empregava o mesmo volume de água 25 c. c. e o mesmo agitador em hélice.

As divergências entre os números obtidos pelos dois processos eram pequenas; menores eram ainda as diferenças entre os dez números obtidos com o crioscópio de evaporação de éter sucedendo-me freqüentemente obter oito e nove números perfeitamente concordantes.

Repetia depois estes ensaios, com as águas diluídas a 1 : 2 com água redestilada.

Fiz tôdas as correcções e calculei as médias dos números corrigidos. No mapa n.º 1 estão reünidas: as médias das dez determinações com as águas não diluídas, Δ; as médias também de dez determinações com as águas diluídas a 1 : 2, Δ'; e, na última coluna, os valores de $^1/_2\ \Delta$.

Confrontando os valores de Δ' com os de $^1/_2\ \Delta$ vê-se que aqueles pouco diferem dêstes (excepção feita das águas de Rubinat, Carabaña e La Margarita) o que me leva a crer que os electrólitos em solução estão fortemente dissociados.

Quanto às águas de Rubinat, Carabaña e La Margarita, tôdas de muito elevada mineralização, como os valores de Δ' divergiam muito dos de $^1/_2\ \Delta$, fiz com elas uma nova série de determinações diluindo-as a 1 : 2, a 1 : 4 e a 1 : 8. Os valores obtidos estão reünidos no mapa n.º 2. Por êle se verifica que o grau de dissociação destas águas é bastante baixo, sendo necessário diluí-las a 1 : 4 para que, com uma nova diluïção, a 1 : 8, o novo abaixamento do ponto de congelação seja sensìvelmente igual a metade do anterior.

*

No mapa n.º 3 encontram-se os pontos de congelação, a mineralização total e a mineralização fixa das diversas águas.

Da comparação do conjunto dêstes números resulta não haver paralelismo entre o grau crioscópico e a mineralização, quer se considere a mineralização fixa quer a mineralização total.

Não é isso para admirar, antes é de prever, tendo em consideração as leis que regem as propriedades coligativas das soluções.

Porém, nas águas que tenham uma constituïção análoga é de crer que êsse paralelismo exista.

Consideremos as águas de Vidago, Vidago n.º 2, Salus, Sabroso, Areal, tôdas da mesma região e de composição qualitativa semelhante:

Vidago. . . .	$-0°,328$	MT = 8,77512	MF = 7,19506
Salus.	$-0°,272$	MT = 7,846245	MF = 5,719-45
Vidago n.º 2 .	$-0°,202$	MT = 6,06949	MF = 4,51660
Sabroso . . .	$-0°,176$	MT = 5,664552	MF = 3,313931
Areal.	$-0°,148$	MT = 5,6081	MF = 4,0801.

Uma simples vista de olhos sôbre estes números mostra que ao acréscimo da mineralização, corresponde o acréscimo do abaixamènto do ponto de congelação. Não há, porém, proporcionalidade, como é fácil de verificar.

*

Outro ponto sôbre que incidiu a minha atenção foi a influência do anidrido carbónico livre e outros gases em solução sôbre o índice crioscópico das águas.

Para estudar essa influência fiz as seguintes experiências:

a) Agitei a água de Vidago, enèrgicamente, durante uma hora e determinei o seu ponto de congelação. Repeti esta experiência com as águas de Vidago n.º 2, de Sabroso, do Areal, das Pedras Salgadas (nascente Penedo), de Melgaço e águas Romanas.

b) Fiz passar durante três horas uma corrente de ar na água de Vidago; repeti a operação com as outras águas acima mencionadas; determinei os pontos de congelacão.

c) Aqueci a água de Vidago até ao início da ebulição; sujeitei as outras águas ao mesmo tratamento; determinei os pontos de congelação.

As três experiências conduziram-me a resultados sensìvelvelmente iguais para cada uma das águas.

Se no ponto de congelação destas águas depois de agitadas, adicionarmos a quota parte atribuìvel ao anidrido carbónico livre, a soma resultante pouco difere do índice crioscópico da água não agitada.

Tem, pois, o anidrido carbónico, e os outros gases em solução, uma influência notável, dependente da sua proporção, no valor da constante físico-química que estamos estudando.

O mapa n.º 4 compreende os resultados obtidos; o seu exame confirma o que acabo de dizer.

*

É necessário fazer o estudo comparativo do índice crioscópico e das outras constantes físicas das águas, nomeadamente, da resistividade.

Também será interessante comparar o grau crioscópico das águas e o de solutos artificiais de composição análoga.

Dêstes assuntos tenciono ocupar-me no decurso do próximo ano lectivo, e, logo que me seja possível, e na medida do que me fôr possível, procurarei estudar o índice crioscópico das águas na origem, bem como as suas variações com o tempo, estação, etc.

Lisboa, 16 de Junho de 1921.

MAPA N.º 1

Designação das águas	Ponto de congelação da água não diluída Δ	Ponto de congelação da água diluída a $^1/_2$ Δ'	Valor de $^1/_2$ Δ
Foz da Certã	$-0°,007$	$-0°,004$	$-0°,0035$
Luso	$-0°,010$	$-0°,005$	$-0°,005$
Caldas Santas	$-0°,010$	$-0°,005$	$-0°,005$
Casais	$-0°,016$	$-0°,008$	$-0°,008$
Caldas da Felgueira	$-0°,017$	$-0°,008$	$-0°,0085$
S. Vicente (Entre-os-Rios)	$-0°,022$	$-0°,010$	$-0°,011$
Vizela (Nascente do Médico)	$-0°,022$	$-0°,012$	$-0°,011$
Vizela (Nascente do Rio)	$-0°,028$	$-0°,016$	$-0°,014$

Designação das águas	Ponto de congelação da água não diluída Δ	Ponto de congelação da água diluída a 1/2 Δ'	Valor de 1/2 Δ
Vizela	— 0°,030	— 0°,018	— 0°,015
Curia	— 0°,043	— 0°,022	— 0°,0215
Bem-Saúde	— 0°,112	— 0°,058	— 0°,056
Pedras Salgadas	— 0°,112	— 0°,056	— 0°,056
Lombadas	— 0°,121	— 0°,063	— 0°,060
Caldas da Raínha	— 0°,138	— 0°,071	— 0°,069
Melgaço	— 0°,140	— 0°,072	— 0°,070
Mondariz	— 0°,146	— 0°,072	— 0°,073
Charnixe	— 0°,148	— 0°,082	— 0°,074
Areal (região de Vidago)	— 0°,148	— 0°,076	— 0°.074
Romanas (região de Pedras Salgadas)	— 0°,150	— 0°,078	— 0°,075
Pedras Salgadas (G.de Alcalina)	— 0°,172	— 0°,092	— 0°,086
Sabroso (Vidago)	— 0°,176	— 0°,090	— 0°,088
Cucos	— 0°,182	— 0°,097	— 0°,091
Verin (Fuente Nueva)	— 0°,184	— 0°,097	— 0°,092
Santa Marta	— 0°,198	— 0°,100	— 0°,099
Vidago N.° 2	— 0°,202	— 0°,106	— 0°,101
Salus	— 0°,272	— 0°,140	— 0°,136
Vidago N.° 1	— 0°,328	— 0°,170	— 0°,164
Mouchão da Póvoa	— 0°,708	— 0°,366	— 0°,354
Rubinat	— 1°,296	— 0°,868	— 0°,648
Carabaña	— 1°,436	— 0°,998	— 0°,718
La Margarita em Loeche	— 1°,820	— 1°,140	— 0°,910

MAPA N.° 2

Designação	Ponto de congelação
Água de Rubinat pura	— 1°,296
» » » diluída a 1:2	— 0°,868
» » » » 1:4	— 0°,452
» » » » 1:8	— 0°,225
Agua de Carabaña pura	— 1°,436
» » » diluída a 1:2	— 0°,998
» » » » 1:4	— 0°,527
» » » » 1:8	— 0°,264
Agua de La Margarita em Loeches pura	— 1°,820
» » » » » » diluída a 1:2	— 1°,140
» » » » » » » 1:4	— 0°,608
» » » » » » » 1:8	— 0°,312

MAPA N.º 3

Designação das águas	Δ	Mineralização Total gr.	Mineralização Fixa gr.
Foz da Certã	—0°,007	0,2097	0,2097
Luso	—0°,010	—	0,04732
Caldas Santas	—0°,010	0,2845	0,2845
Caldelas	—0°,010	0,100836	0,100286
Casais	—0°,016	1,0718	1,0718
Caldas da Felgueira	—0°,017	0,32048	0,28959
S. Vicente (Entre-os-Rios)	—0°,022	—	0,4566
Vizela (Nascente do Médico)	—0°,022	0,32234	—
Vizela	—0°,030	0,34390	—
Barreiro (Beira Alta)	—0°,024	0,1492	0,1471
Curia	—0°,043	2,4478	2,4478
Bem-saúde	—0°,112	3,50543	2,11724
Pedras Salgadas (Penedo)	—0°,112	4,743612	2,736242
Lombadas	—0°,121	3,0372	0,2022
Melgaço	—0°,140	1,78045	0,70135
Mondariz	—0°,146	3,956	2,973
Charnixe	—0°,148	2,8544	2,7126
Areal	—0°,148	5,6081	4,0801
Romanas	—0°,150	5,969241	3,692790
Pedras Salgadas (G.de Alcalina)	—0°,172	5,647245	3,506665
Sabroso	—0°,176	5,664552	3,313931
Cucos	—0°,182	—	3,2582
Verin (Fuente Nueva)	—0°,184	4,66707	3,30107
Santa Marta	—0°,198	3,900784	3,799984
Vidago N.º 2	—0°,202	6,06949	4,51660
Salus	—0°,272	7,846245	5,719745
Vidago	—0°,328	8,77512	7,19506
Mouchão da Póvoa	—0°,708	14,92	14,26
Rubinat	—1°,296	103,814	103,814
Carabaña	—1°,436	106,082	106,082

MAPA N.º 4

Designação das águas	Ponto de congelação da água depois de agitada Δa	Quantidade de CO^2 livre por litro Gr.	Abaixamento do ponto de congelação atribuível ao CO^2 livre δ	$\Delta a + \delta$	Ponto de congelação da água não agitada Δ	Diferença entre Δ e $\Delta a + \delta$
Vidago N.º 1	—0º,262	1,58006	—0º,067	—0º,329	—0º,328	—0º,001
Vidago N.º 2	—0º,152	1,55289	—0º,065	—0º,217	—0º,202	—0º,015
Sabroso	—0º,090	2,31393	—0º,097	—0º,187	—0º,176	—0º,011
Areal	—0º,096	1,528	—0º,064	—0º,160	—0º,148	—0º,012
Pedras Salgadas (Penedo)	—0º,050	2,00737	—0º,084	—0º,134	—0º,112	—0º,022
Romanas	—0º,068	2,27645	—0º,096	—0º,164	—0º,150	—0º,014
Melgaço	—0º,099	1,07915	—0º,042	—0º,141	—0º,140	—0º,002

DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS
DESTINADAS A CALCULAR A ENERGIA CALORÍFICA DE UM CARVÃO, BASEADAS NOS RESULTADOS DA SUA ANÁLISE

POR

A. J. DE BRITO E CUNHA

São muitas as energias de que o homem pode dispor tais como: hulha branca, verde e preta, correntes de rios e marés, energia solar sob diversas formas: emanações, eléctricas e caloríficas; além destas ainda temos aplicáveis a casos especiais, ar líquido, gáses naturais comprimidos e combustíveis, energias radio-activas e as plantas.

Algumas destas energias já entram em competência com a energia química e calorífica do carvão, tais como a hulha branca e verde, gases naturais sub-pressão, etc., de que se faz emprêgo corrente; outras tentam entrar em competência tendo já demonstrado pràticamente qual o seu valor tais como: marés, correntes dos rios, calor solar, calor perdido em diversos fabricos, calor cedido na liquefacção do vapor; outras ainda não se têm podido aproveitar pràticamente, mas já têm provado o seu valor em qualidade e quantidade tais como, emanações solares, diferenças de potencial a diversas alturas da atmosfera, raios ultra-violeta e infra-rubros, produzindo reacções químicas inversas e que podemos aproveitar como energias em elementos de pilhas secundárias, acumuladores carregados pelo sol, emanações radio-activas cuja enorme energia é bem conhecida e virá sem dúvida um dia a ser bem aproveitada.

A maior parte das minas de carvão já descem a uma profundidade de 1.000 a 1.300 metros, donde é necessário elevar grandes massas e transportar para os locais do seu consumo de forma tal que possam competir com as outras energias correntemente empregadas.

Daqui resultam varios problemas já em via de solução prática, tais como:

a) Transformação do carvão em electricidade de alta tensão no fundo das minas;

b) Gazeificação do carvão no fundo das minas aproveitando o coque resultante, e transformação em energia na parte superior.

Outras minas fornecem carvão de qualidades inferiores, tais como hulhas betuminosas, lenhites e turfas que se pretendem aproveitar, quer modificando as grelhas e câmaras de combustão dos geradores, quer fabricando briquetes com antracite pulverizada para lhes aumentar o poder calorífico.

Por outro lado é indispensável evitar por tôdas as formas possíveis os desperdícios de carvão, devido às combustões imperfeitas que encarecem o combustível, causando alterações no ar nas grandes cidades e centros industriais, tornando-o impróprio para a respiração dos animais e plantas deteriorando todos os objectos e produzindo nevoeiros que chegam às vezes a ser opacos e que privam localidades enormes dos benéficos efeitos da luz solar.

Pelo que fica exposto se verifica que em breve deveremos ter todo o carvão reduzido a briquetes com tipos especiais convenientes que se venderão segundo a sua energia calorífica e que serão aplicados cada qual ao seu tipo de fornos, fornalhas, fogões e fogareiros, etc., de forma a não produzirem fumo.

Sabemos que em conseqüência das providências tomadas em Liverpool, Manchester, Widnes e S.t Helens se nota uma grande diferença na limpidez da atmosfera e diminuïção de nevoeiros.

É também indispensável nas fábricas verificar constantemente se, pelas chaminés, juntamente com os produtos de combustão, escapam combustíveis; determinar qual a energia calorífica empregada, qual a quantidade de água produzida; sem estas determinações constantes é impossível manter um coeficiente fabril proveitoso e portanto produzir econòmicamente.

Daqui resulta a necessidade das determinações constantes da energia calorífica no comércio e na indústria e portanto a conveniência da sua obtenção por processos simples e rápidos.

Os métodos geralmente adoptados nos laboratórios para os ensaios de combustíveis são:

a) Análise elementar dos seus componentes;

b) Análise imediata para a determinacão da humidade, mistura de substâncias orgânicas voláteis, carbono fixo, e resíduos minerais.

Mr. Dulong adoptou uma fórmula empírica para a determinação indirecta do poder calorífico dos combustíveis baseada na análise elementar; designando por P o poder calorífico dum combustível composto de carbono, hidrogénio, oxigénio e azoto será

$$P = 81{,}40\,\mathrm{C} + 345{,}00\left(\mathrm{H} - \frac{\mathrm{O} + \mathrm{Az} - 1}{8}\right)$$

ou mais simplesmente

$$P = 124{,}525\,\mathrm{C} + 388{,}125\,\mathrm{H} - 4269.$$

Os srs. Scheurer-Kestner, Bunte, Stohmann, Alexéeff e Mahler provaram que as fórmulas acima apresentadas se afastam muitas vezes dos resultados obtidos directamente e que é impossível obter uma fórmula geral exacta em todos os casos.

Mr. Dulong baseou a sua fórmula empírica na análise elementar a qual além de ser demorada e delicada, tem o inconveniente de decompor os compostos orgânicos, existentes no combustível, nos seus elementos e portanto o de lhes alterar o poder calorífico, em proporção do calor de formação dos diversos compostos, necessitando por isso um termo de correcção relativo a cada uma das substâncias decompostas, o que complicava muito o problema.

É provàvelmente essa a causa em virtude da qual os químicos acima mencionados julgaram impossível obter uma fórmula exacta em todos os casos.

Vejamos agora se baseando-nos em análises imediatas do carvão, poderemos obter uma fórmula suficientemente aproximada de modo a satisfazer as exigências industriais.

Designemos por V as substâncias voláteis contidas numa amostra dum combustível,

Por C o seu carbono fixo,

Por h a sua humidade,

Por r os resíduos minerais restantes,

Por E a energia calorífica total de combustão,

Por E', E'', E''', ..., as energias caloríficas dos seus componentes, teremos, segundo a análise:

$$V + C + h + r = 100$$

e conforme Berthelot (1),

$$\begin{aligned} E &= E' + E'' + E''' + \ldots \\ &= f(V) + f(C) + f(h) + f(r) + \ldots \end{aligned}$$

(1) *Traité practique de calorimétrie chimique*, 2.ème et 5.ème sections.

mas como

$$f(h) \quad \text{e} \quad f(r)$$

não produzem calor e antes pelo contrário o absorvem, estas funções tornam-se negativas.

Suponhamos agora o combustível cuja energia pretendemos determinar reduzido a compostos puros de substâncias voláteis, ou de carbono fixo, ficando portanto as suas análises reduzidas a

$$V = 100 \quad \text{ou} \quad C = 100$$

mas como podemos admitir que estas funções sejam o mais simples possível sem êrro apreciável, isto é:

$$E' = f(V) = a\,V$$
$$E'' = f(C) = b\,C$$
$$E''' = -f(h, r) = -c\,(h + r).$$

Sendo a e b coeficientes adequáveis e c a quantidade de calor absorvido proporcional ao calor específico e à temperatura, atendendo a que a energia calorífica de combustão do carbono puro é igual a 8.140 cal., teremos, no presente caso:

$$a = \frac{E'}{100} \quad \text{e} \quad b = \frac{E''}{100} = 81{,}40.$$

Ora o combustível primitivo não sendo mais do que um aglomerado de substâncias puras definidas na análise, teremos, substituindo os valores de a e b:

$$E = \frac{E'\,V + 8140\,C}{V + C + h + r} - c\,(h + r).$$

Mas como o calor total absorvido pela humidade, para se elevar de 15 a 100° e para passar de 100° líquido a 100° vapor, é de 0,623 cal.-grama, poderemos separar os dois últimos termos ficando esta fórmula reduzida a

$$(1) \qquad E = \frac{E'\,V + 8140\,C}{V + C + h + r} - 623\,h - c\,r.$$

Idênticamente, servindo-nos da análise elementar, chegaremos à equação seguinte:

$$(2) \qquad E=\frac{34500\,H+8140\,C}{H+C+O+Az+h+r}-623\,h-c\,r.$$

Pelo que fica expôsto se vê que, com a equação (1) ràpidamente poderemos determinar a energia calorífica de qualquer combustível, que, distilado a baixas temperaturas, produza substâncias volateis V com a energia calorífica E', e o calor absorvido c pelas cinzas r.

Se determinarmos directamente a energia calorífica P de um combustível isento de água e cinzas e se depois juntarmos a êsse mesmo combustível, em variadas proporções, água e cinzas, determinando directamente a energia calorífica P' do novo composto, teremos:

$$P=P'+623\,h+c\,r$$

donde

$$c=\frac{P-P'-623\,h}{r}.$$

Ora podem dar-se três casos:

$$P \gtreqless P'+623\,h$$

isto é

$$c=\pm\frac{n}{r} \qquad \text{ou} \qquad c=\frac{0}{r}.$$

No primeiro caso

$$P>P'+623\,h$$

será

$$c=\frac{n}{r}$$

êste é o caso geral em que fica determinado um valor positivo maior ou menor.

No segundo caso

$$P<P'+623\,h$$

será

$$c=-\frac{n}{r},$$

essencialmente negativo, o que significa que o calor c em vez de ser absorvido, é emitido, isto é, que junto com as cinzas se encontra um combustível capaz de emitir calor, o que só se pode admitir por lapso analítico ou por troca de energias caloríficas.

No terceiro caso

$$P = P' + 623\,h$$

será

$$c\,r = 0$$

duas hipóteses se podem dar:

$$h > 0 \quad \text{ou} \quad h = 0,$$

na primeira destas hipóteses será

$$c = \frac{0}{r},$$

quantidade infinitamente pequena, ou

$$c = \frac{0}{0}$$

no caso especial de ser

$$r = 0;$$

na segunda destas hipóteses será

$$P = P'$$

e portanto, também

$$r = 0$$

por não haver absorpção de energias caloríficas, logo

$$c = \frac{0}{0},$$

quantidade indeterminada que indica não haver humidade nem cinzas que possam absorver calor.

Presentemente o comércio do carvão é muito irregular ficando a maior parte das vezes prejudicado o comprador por ignorar a energia calorífica do combustível que adquire, dando-lhe resultados muito diversos daqueles com que êle conta ou calcula.

Por outro lado não convém a país algum esgotar as suas minas de antracite ficando com hulhas betuminosas ou lenhites, as quais não têm aplicação em todos os casos.

Também não convém aos donos das minas perder o carvão pulverizado ou reduzido a pequenos fragmentos.

Não convém a consumidor algum empregar carvões com energia calorífica superior à que necessita, por isso que à tendência dos fogueiros é sempre para consumir demasiado, supondo-o indispensável, o que dá em resultado prejudicar a atmosfera da localidade e a dos vizinhos, desperdiçar inùtilmente energias, deteriorar chaminés e prejudicar a algibeira do industrial ou a do consumidor.

Examinando 29 análises de diversos combustíveis, chegamos a obter uma média de 12000 calorias para E' e de 200 para c; é claro que estas médias devem ser modificadas por um exame mais extenso e classificando os combustíveis.

Se, como acima dissémos, reduzirmos todo o carvão, fornecido pelas minas, a briquetes, com tipos especiais, distinguíveis pelo aspecto, dimensões, forma, etc., e determinarmos a energia calorífica E' das substâncias voláteis distilando de 500 a 900° em cada tipo, teremos, fazendo-lhe a análise imediata, e aplicando-lhe a fórmula (1), a energia calorífica E, de cada tipo, o que permitirá que o comércio se faça estabelecendo preços por cal.-tonelada ou qualquer outra idêntica unidade.

É indispensável economizar o mais possível o carvão, não só porque o seu consumo tende a aumentar extraordinàriamente com o aumento da população e as modernas exigências scientíficas e industriais, mas também porque já estão muito explorados os jazigos conhecidos, dos quais se calcula limitada a existência a uns 100 anos, apenas, ignorando-se por emquanto até que ponto poderemos contar com os novos jazigos, descobertos ou a descobrir, de carvão ou petróleo.

Por isso todo o carvão deve ser reduzido a briquetes nas minas, aproveitando do melhor modo as substâncias voláteis, valorizando os carvões baixos, evitando desperdícios dos carvões elevados e dos refugos, reduzindo-os a tipos especiais, com especial aplicação e vendendo-os por preços proporcionais às suas energias caloríficas.

Compete aos laboratórios de investigação scientífica adiantar os trabalhos para o aproveitamento das energias ainda não econòmicamente utilizadas e descobrir a forma prática de empregar aquelas cuja existência se conhece, ignorando-se contudo a maneira do seu aproveitamento.

Propomos que o Congresso Luso-Espanhol se manifeste a favor duma organização mineira em Portugal, desenvolvendo a exploração dos quatro jazigos de carvão que possuímos, regulamentando a sua estracção de forma patriótica com vista nos interêsses gerais e independente de interêsses particulares.

Esta organização poderia basear-se nos princípios seguintes:

1.º — Federação geral de todos os jazigos;
2.º — Produção do gás no fundo das minas aproveitando o coque e transformando aquele em movimento ou luz nas proximidades das mesmas;
3.º — Transformação do carvão em energia eléctrica de alta tensão no fundo das minas;
4.º — Fabricação de aglomerados com tipos especiais de diversas energias calorificas, vendendo-os por preços proporcionais à unidade de aquecimento.

Seria êste o início duma nova era de interêsses industriais que para nós representariam uma verdadeira riqueza, servindo de base a muitas outras.

Lisboa, 26 de Junho de 1921.

ANOMALIAS OBSERVADAS
NA PRODUÇÃO DA EMANAÇÃO DOS MINÉRIOS RADÍFEROS DE PORTUGAL

POR

GIOVANNI COSTANZO

Professor ordinário de Radioactividade do Instituto Superior Técnico

M.me Curie no seu *Tratado de Radioctividade* (1) escreve: «J'ai observé pour certaines solutions radifères une décroissance progressive du débit d'émanation; dans d'autres cas le débit semble avoir éprouvé une faible augmentation». Observações da mesma natureza foram feitas por Hahn e Meitner com relação a um recrudescimento da actividade do rádio depois da sua dissolução (2).

Na minha prática de análises de minérios portugueses, doseando o rádio pelo método da emanação (3), tive a oportunidade de observar algumas singularidades análogas, que não podia atribuir a erros de observação pois as medidas eram cuidadosas, não podendo admitir-se afastamentos da ordem daqueles que eu obtive. Comuniquei estas minhas observações ao sr. Clair Scal, preparador no Laboratório de Química na Sorbonne e então director da fábrica de rádio da Société Urane & Radium, no Barracão (Guarda), e com minha agradável surpresa ouvi dêle que o mesmo observara êle, assim como o sr. Lançon, seu ajudante. Foi então que iniciámos um estudo conjuntamente, do qual nos foi possível estabelecer que «os resultados das variações observadas variam consideràvelmente com o método empregado para obter a solução radífera utilizada para a dosagem e com as quantidades dos reagentes empregados, bastando mesmo pequenas diferenças nestes para obter afastamentos notáveis».

Exponho nesta nota alguns dos resultados mais claramente

(1) M.me Curie, *Traité de Radioactivité*, Paris, 1912, t. II, pág. 386.
(2) O. Hahnu. L. Meitner, *Phys. Zeitschr.*, x, 1909, pág. 697.
(3) M.me Curie, *Le Radium*, 1910.

apurados que nós obtivemos empregando uma mesma amostra de minério da região da Guarda. Um estudo mais detalhado, sôbre o minério da mina de Urgeriça (Nelas), estou levando a têrmo com a colaboração do meu assistente no Laboratório oficial de Radioactividade, engenheiro Pio Leite. Os resultado. s obtidos até esta data não contradizem os que eu tinha obtido no minério da Guarda.

No trabalho feito de colaboração com o sr. Scal, tomámos 5 quilogramas de minério que foi pulverizado e misturado de forma a dar uma amostra homogénea. Analisámos o seu teor em urânio, obtendo 0,87 % de U.

Nas tabelas seguintes os resultados das dosagens do rádio são expressas em miligramas de rádio-metal por tonelada de minério. As durações da acumulação da emanacão eram compreendidas entre as 24 e as 48 horas. Observa-se que *a quantidade de emanação desenvolvida varia em função da idade da solução sôbre a qual se experimenta.*

Empregámos como aparelhos de medida, os do tipo Laborde e Chaneveau, graduados e aferidos por meio duma solução-padrão de rádio.

Primeiro ensaio

Uma toma de ensaio foi atacada a quente pelo ácido clorídrico diluído. O líquido claro foi submetido a análise.

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 1	9,17
12	3,78
26	2,16
30	2,78
60	3,21
90	3,24

Segundo ensaio

Uma toma de ensaio igual à precedente foi atacada por uma solução de carbonato de sódio a ferver durante algumas horas. Depois de lavagens até não ter a reacção dos sulfatos, foi o resíduo atacado pelo ácido clorídrico diluído. O líquido filtrado foi analizado.

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 3	29,18
8	21,60
15	25,86
60	27,26

Terceiro ensaio

Foi neste ensaio feito o mesmo ataque que no precedente, com a diferença que as quantidades de reagentes empregados foram bastante menos em pêso sôbre a mesma toma de ensaio.

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 1	16,16
5	10,60
10	9,70
21	13,48
30	19,36
40	19,53

Neste ensaio observa-se o mesmo andamento do precedente, mas a descida é relativamente mais forte, ao passo que o valor máximo obtido depois da descida atinge um valor superior ao valor inicial. Como se vê o ataque não foi completo.

Quarto ensaio

O ataque foi o mesmo dos dois ensaios precedentes, mas desta vez os reagentes foram empregados em grande excesso. Neste caso o fenómeno tem um andamento muito diferente, como se pode vêr pelos resultados seguintes:

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 1	23,20
10	25,35
25	16,72
37	11,33
65	9,87

Neste ensaio a descida que observámos imediata nos outros, é precedida duma subida muito sensível apresentando-se o mínimo muito mais tarde. O ataque apresenta-se completo como no ensaio n.º 2.

Quinto ensaio

100 gramas de minério mixto; proveniente em máxima parte da mina de Urgeriça, foram atacados durante duas horas a quente, pelo ácido sulfúrico concentrado e a solução foi deixada em contacto com o reagente durante 24 horas. Decantado depois o líquido claro e lavado abundantemente o inso-

lúvel, a solução obtida foi dividida em duas partes: uma parte *A)* na qual foi, por repetidas vezes, adicionado cloreto de bário para arrastar com a precipitação o rádio que por ventura existisse na solução; uma parte *B)* que foi submetida directamente à dosagem. Os resultados foram os seguintes:

Solução *A)*

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 4	0,71
6	0,10
10	0,12

Solução *B)*

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 4	0,18
6	1,18
9	1,18

Nas seis determinações a curva da radioactivadade induzida indicou tratar-se de emanação de rádio.

Como se vê, neste ensaio o ácido sulfúrico dissolveu algum rádio, e o bário não arrastou todo o rádio que estava em solução. Observam-se na solução *A)* as variações que desaparecem na solução *B)*.

Variações, e tão irregulares, não podem ser explicadas pela coexistência nas soluções experimentadas de elementos pertencentes às duas famílias do Tório e do Actínio.

Ocorre-nos estarmos em presença duma emanação diferente das três emanações até hoje conhecidas. ¿Existe uma nova família de substâncias radioactivas aos elementos da qual são devidos os fenómenos observados?

A existência dum novo elemento, pai duma quarta emanação a qual tenha uma vida relativamente longa, seria talvez a maneira de explicar alguns dos fenómenos observados.

O facto de obter variações tão consideráveis conforme os métodos de ataque demonstra que nenhum dos métodos empregados nas nossas experiências dava o ataque e a solução completa do suposto novo elemento, o qual evidentemente não segue as reacções do Rádio. Éste elemento seria um produto sólido, activo ou não, o qual directamente ou indirectamente daria origem a uma emanação activa.

Neste ano, como disse, recomecei o trabalho do estudo e da separação dêste hipotético elemento. Os métodos empregados são os mais cuidadosos e as causas de erros acidentais são evitadas o mais possível. Os resultados obtidos confirmam as variações já observadas com o sr. Scal. Para maior exactidão, em cada medida foi feita a comparação com uma solução padrão que eu mesmo tenho preparado, prévia dosagem pelos raios gama. Esta solução, que foi preparada tomando como ponto de partida rádio extraído de minério português, deu logar ela mesmo a oscilações ligeiras mas sensìvelmente análogas às observadas nas soluções do minério.

Lisboa, Laboratório de Radioactividade
do Instituto Superior Técnico, Junho de 1921.

NOTA

Ao receber as provas de imprensa destas notas experimentais, estou de posse de alguns elementos, tirados dos estudos, que, como disse, tinha em andamento, e que me orientam talvez mais exactamente com relação às causas das anomalias observadas.

De facto, abandonando as soluções experimentais em repouso durante bastante tempo nos recipientes empregados para a acumulação da emanação, estas apresentaram notáveis alterações na sua composição física: quási tôdas tornavam-se mais ou menos turvas e algumas até depositaram nas paredes dos recipientes tenuíssimas camadas sólidas.

Evidentemente se estas precipitações são, como de resto é provável, radíferas, podem muito bem explicar as diminuïções observadas nas quantidades de emanação, pois pela passagem duma parte de rádio ao estado sólido, tem que diminuir o *emanating power* da solução.

A causa destas precipitações lentas deve procurar-se seja na continuação de precedentes reacções ainda não acabadas, seja uma vagarosa e nova reacção determinada pelas paredes dos recipientes não completamente inatacáveis. Talvez não deixe de ter alguma influência o ácido carbónico que juntamente com o ar atravessa a solução durante as operações de medida, que pode precipitar algum rádio no estado de carbonato; talvez esta é a causa das variações observadas na actividade da solução padrão.

Mais difícil é dar uma explicação do fenómeno do aumento da emanação que resulta dos tres primeiros ensaios. ¿Podem-se admitir para isto, reacções inversas?

Não excluindo então nos fenómenos enunciados a possibilidade da intervenção dum novo elemento radioactivo pai duma nova emanação, uma conclusão certa parece-me poder tirar dêste trabalho e é a seguinte: «Para efectuar a dosagem do rádio contido nos minérios pelo método da emanação, não é conveniente empregar soluções radíferas que contenham, além do rádio, outros elementos. O melhor é, depois de obtida a solução radífera do minério, separar nela, por precipitações múltiplas, o sulfato de bário radífero. Este, depois será transformado, pelas vias ordinárias, em sal solúvel e submetido às medidas. Desta forma tôdas as comparações serão feitas sôbre soluções completamente semelhantes, eliminando, senão tôdas, algumas das causas em êrro.»

As experiências enumeradas, que aliás representam apenas as mais características das muitas efectuadas, demonstram a dificuldade que se encontra em dissolver e separar completamente o rádio, para a dosagem, nos minérios. O ataque que eu aconselho, como o mais seguro, é o alcalino: atacar o minério pelo carbonato de sódio, filtrar, lavar ate completa eliminação dos sulfatos solúveis, atacar o resíduo do filtro pelo ácido clroridrico e lavar. Repetir o ataque sôbre o insolúvel e juntar as duas soluções. Do líquido obtido separar-se há o rádio juntando ácido sulfúrico e por repetidas vezes cloreto de bário.

Lisboa, Laboratório de Radioactividade,
do Instituto Superior Técnico, Agôsto de 1924.

A PETROGRAFIA DO CÉU

CONTRIBUIÇÃO ESPECTROGRÁFICA PARA O ESTUDO DOS METEORITES PORTUGUESES

PELO

Dr. A. PEREIRA-FORJAZ
Professor da Universidade de Lisboa

A espectroscopia dos meteorites foi brilhantemente iniciada por Norman Lockyer, um dos fundadores da Astronomia física. Os processos técnicos utilizados pelo conhecido sábio inglês, falecido em 1920, encontram-se descritos, quer em notas apresentadas à Royal Society (1) quer na sua esplêndida Memória *The Meteorite Hypothesis*. Como é natural, êsses processos, remontando ao fim do último século, acham-se hoje antiquados.

Em 1895 o mestre da espectroscopia francesa contemporânea, Conde de Gramont, a pedido do distinto cristalógrafo Friedel, aplicou pela primeira vez a um meteorite do *Cañon Diablo* o seu novo e fecundo processo de análise espectral, por meio de sais fundidos (2); caracterizou assim, com nitidez, o níquel e o fósforo, numa observação pouco minuciosa. Como possuímos um fragmento de ferro meteorítico, que fazia parte da colecção particular do falecido naturalista Jacinto Pedro Gomes, fragmento colhido em Ponte do Lima (Minho), achámos de interêsse scientífico aplicar a êsse exemplar a espectrografia, pelo processo de Gramont, fazendo uso da instalação descrita promenorizadamente numa nossa Memória anterior (3), introduzindo-lhe ligeiras modificações técnicas, que a experiência nos foi aconselhando.

---

(1) *Roy. Soc. Proc.*, vol. xxx, 1879, pág. 27.

(2) Thèse presentée à la Faculté des Sciences de Paris, Série A, n.º de ordem 850, pág. 198.

(3) *Arquivos da Universidade de Lisboa*, vol. III, 1916. Citada por De Gramont em *Comptes-Rendus*, t. CLXVI, 1918, depois do seu extracto ter sido apresentado à Academia Francesa por Armand Gautier, *C.-R.*, t. CLIV, 1917.

*
* *

O estudo dos minerais precipitados dos espaços cósmicos sôbre a crusta terrestre, atraiu, desde a mais remota antiguidade, a atenção dos povos orientais.

Papiros chineses fazem passageira menção às *pedras caídas do céu* alguns séculos antes da nossa era. Como era lógico, a superstição imiscuiu-se no assunto e não era raro encontrar o nome duma divindade ligada ao aparecimento dos meteorites: *Egalabalo*, entre os fenícios; *Jupiter Ammon*, na Líbia. Para os frígios, à *Mãe dos deuses* se deveria atribuir a visita dêsses corpos celestes.

As primeiras análises destas estranhas ocorrências mineralógicas devem-se a Howard, a Bournon e ao famoso Vauquelin.

Vauquelin utilizou nos seus estudos os meteorites recolhidos em 1798, na Índia.

Hoje encontra-se patente, no Museu de Paris, uma colecção de meteorites, de variadas origens, iniciada pelos esforços do conhecido geólogo Daubrée.

Admite-se correntemente a hipótese de Chladni para explicar a queda dos meteorites na litosfera: minúsculos corpos planetários, fragmentos de planetas, constituídos pelo choque ou pela explosão determinada por altas pressões internas, sofrem atracção newtoniana suficientemente intensa, dentro duma determinada zona de acção e são projectados na terra.

A hipótese Laplace-Smith-Poisson, em que se atribúi os meteorites a dejecções de vulcões lunares, tem menor número de partidários.

Recordemos também que alguns fenómenos meteorológicos, de incontestável interêsse, têm sido relacionados com estes minerais exógenos; segundo a hipótese Mayer-Waterston-Thomson a luz zodiacal seria proveniente duma corrente de meteorites (1).

*
* *

Por um estudo analítico sumário reconhecemos que o meteorite português de Ponte de Lima (Minho) era constituído

(1) Veja-se, entre outras publicações: Daubrée, *C.-R.*, t. LXII, págs. 300, 309, 680, 1866.
Daubrée, *Bulletin de la Soc. Geol. de France*, 2.ª sér., t. XXIII, pág. 391.
Stanislas Meunier, *Revue des Cours Scientifiques de la France et de l'étranger*, n.º 19, de 6 de Abril de 1867, 4.º ano, etc.

principalmente por ferro. Como é sabido o espectro do ferro contém numerosíssimas riscas; era de presumir, pelos resultados atingidos pelos anteriores experimentadores, que ao lado do ferro se encontrassem vestígios doutros elementos. Resolvemos, por conseqüência:

1) Não fazer uso dos prismas de quartzo e de quartzo e fluorite, limitando-nos a empregar o *crown uviol*.

2) Fotografar na mesma chapa, sucessivamente:

a) CO^3Li^2 + *sal de ferro;*

b) CO^3Li^2 + *meteorite;*

c) *Liga de Edder.*

Desta maneira poderíamos fàcilmente eliminar, ao comparador ou ao microscópio munido de ocular micrométrica, as riscas provenientes das impurezas do carbonato de lítio, utilizado como fundente e as que diziam respeito ao ferro; convém indicar que pela técnica utilizada só raramente aparecem riscas de metalóides, que são eliminadas pela self-indução [1]. Só fizemos, portanto, medições, relativas às riscas do espectro intermediário não comuns com o espectro obtido pela dissociação do sal de ferro no carbonato de lítio. Nos cálculos utilizámos a fórmula de interpolação de Hartmann $\lambda = \lambda_0 - \frac{C}{S - S}$; simplificámos êsse fastidioso trabalho empregando sempre logaritmos e substituindo o cálculo de C pelo cálculo de log.C. Dividimos os nossos *clichés* em quatro regiões, para cada uma das quais se fez o cálculo das três constantes.

Utilizamos na identificação das riscas o último comunicado de Gramont [2] na Academia Francesa, sôbre riscas últimas.

Resumimos no seguinte quadro os resultados obtidos:

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	s_3	λ_0	log.C	s_0
5894	6103	6657	0,0	21,5	51,0	5074,4	4,93701	105,73
5545	5676	6022	0,0	29,1	73,0	4905,4	5,03360	170,25
5045	5372	5545	0,0	30,8	102,0	5693,3	4,29271	— 30,27
3740	3995,3	4246,0	6,0	41,2	101	5304,5	5,51922	—211,26

(1) Vid. *Spectres d'étincelles*, par G.-A. Hemsalech, Paris, 1901.

(2) *C.-R.*. t. CLXXI, n.º 23, Dezembro de 1920, pág. 1166.

Conhecendo estas constantes passámos a fazer o cálculo dos comprimentos de onda das riscas desconhecidas; eliminámos, sistemàticamente, as riscas do ferro. Os resultados estão expressos nas quatro tabelas seguintes:

TABELA I

Análise espectroscópica dum meteorite de Ponte de Lima (Minho)

Aparêlho de medição: *Microscópio de Zeiss, modelo grande, com objectiva de Leitz.*

I a (div. 10) tubo de tiragem em 150cc e ocular micrométrica de Leitz 2.

Ótica: vidro.

Leituras *S* feitas com o microscópio	Comprimentos de onda calculados com a fórmula de Hartmann e Angströms	Elementos a que são atribuídas as riscas observadas	Comprimentos de onda teóricos
0,0	—	Zinco (Edder)	5894
11,5	—	Zinco (Edder)	6022
21,5	—	Zinco (Edder)	6103
39,0	6371,2	Estrôncio	6380
49,8	66221,9	—	—
51,0	—	Chumbo	6657

TABELA II

Leituras *S*	Comprimentos de onda, λ, calculados	Elementos a que são atribuídas as riscas	Comprimentos de onda teórica
0,0	—	Chumbo (Edder)	5545
23,5	—	Chumbo (Edder)	5608
29,1	—	Ar	5676
36,0	5709,9	Magnésio	5711,6
38,0	5722,1	Alumínio	5723,5
49,8	5802,0	Potássio	5802,0
73,0	—	Zinco (Edder)	6022

TABELA III

Leituras S	Comprimentos de onda, λ, calculados	Elementos a que são atribuídas as riscas	Comprimentos de onda teórica
0,0	—	Ar	5045
7,0	5083,8	Níquel	5081,1
7,2	—	Cádmio (Edder)	5085,8
14,7	5257,1	Estrôncio	5257,1
23,5	5328,4	Cobalto	5342,7
30,8	—	Chumbo (Edder)	5372
40,5	5416,0	Manganésio	5413,9
42,0	5421,8	Manganésio	5420,6
74,0	5505,2	Estrôncio	5504,5
87,8	5527,2	Magnésio	5528,7
92,2	5532,7	Estrôncio	5535,0
102,0	—	Chumbo (Edder)	5545,0

TABELA IV

Leituras S	Comprimentos de onda, λ, calculados	Elementos a que são atribuídas as riscas	Comprimentos de onda teórica
Á esquerda do zero da escala, risca última do Níquel:		Níquel	3619,4 U.
0,0	—	Chumbo (Edder)	3740
32,5	3948,7	Alumínio	3944,2 U.
35,5	3965,2	Cálcio	3968,5 U.
41,2	3995,3	Cobalto	3995,5
49,8	4038,6	Manganésio	4035,9
72,5 (a mais intensa do *cliché*)	4139,1	Cério	4137,8
82,2 (bastante intensa)	4178,3	Fósforo	4178,5
Á direita a risca última do Cálcio		Cálcio	4226 U.
101	—	Chumbo (Edder)	4246

Na identificação das riscas servimo-nos do *Index* de James Pollok (*The Scient. Proceed. of the Royal Dublin Society*, vol. XI (N. S.), n.º 16, July, 1907), do *Handbuch der Spectroscopie*, de Kayser, t. VI, do *Index* de Marshall Watts, *appendix* U (1911). Para a investigação das *riscas últimas* fizemos uso da nota mais recente e completa aparecida sôbre o assunto, devida ao Conde de Gramont (*C.-R.*, 1920, t. 171, n.º 23, Dezembro).

Conclusões

O meteorite de Ponte de Lima (Minho) é um holosiderite, com uma crusta de magnetite, dando as figuras características de Widmannstätten. Sob o ponto de vista químico a sua composição qualitativa provável, áparte os *metalóides* O, S, etc., é:

Fe, P, Ni, Co, Mg, Al, Mn, Ca, Sr, K e Ce.

Justifica-se que o fósforo se tenha caracterizado por uma risca muito brilhante, a segunda, em intensidade, do *cliché*, pelo facto dêste metalóide se encontrar em quantidade relativamente considerável.

A TOXICIDADE DOS METILARSINATOS

POR

JOSÉ AROSO

Quando iniciámos o estudo terapêutico do cacodilato de sódio e de arrenal em doses elevadas, a princípio em tuberculoses cirúrgicas e depois em afecções de tipo variado, o nosso espírito inquietava-se com alterações orgânicas ou sanguíneas possíveis, obsecava-nos emfim a idea de intoxicação e isso levou-nos a acompanhar a administração do medicamento com o estudo de laboratório julgado necessário. O estado funcional hepático e renal era sumàriamente verificado, antes, durante e depois do tratamento; a duração da eliminação do arsénico, a fórmula hemo-leucocitária, a toxicidade determinada em animais faziam ainda parte do consenso médico. Eu me explico: quando se estuda a zona terapêutica manejável do medicamento considerado não tóxico é preciso subordinar aos sinais de intolerância do indivíduo, a integridade orgânica ou diminuïção de resistência dêste ou daquele orgão. É preciso contar com a susceptibilidade do indivíduo aquilo que Landouzy chamou coeficiente de toxicidade pessoal, emfim, a idiosincrâsia.

*
* *

A via de administração do cacodilato e do arrenal que empregámos foi a venosa.

O cacodilato sendo um sal estável apenas decomponível pelo calor a uma temperatura superior a 100 graus, não tem tendência *in vivo* e *in vitro* a dar no meio sanguíneo sal básico insolúvel (causa provável dos acidentes das injecções intravenosas) e por isso a via endo-venosa é tolerada pelo doente sem o menor inconveniente. Pelo contrário, o cacodilato será mais fàcilmente alterado em meio ácido como o dos tecidos, podendo ser transformado pelos fermentos oxidantes *in loco* em óxido de cacodilo e até em composto mineral tóxico. A verdade é que o cacodilato administrado pela via sub-cutânea dá às vezes com doses de 5 e 10 centigramas pequenas manifestações de intolerância, ao passo que pela via venosa esses acidentes se não dão. Poderá dizer-se que o cacodilato não é tóxico pela via venosa podendo sê-lo pela via hipodérmica.

As vantagens da via venosa são além disso numerosas mas a sua apreciação não vem a propósito.

O modo de acção do cacodilato não está definitivamente estabclecido e não nos interessa demasiado expôr as hipóteses actuais sôbre a questão.

Nos meus doentes empreguei o cacodilato em séries de doses progressivas tendo atingido embora excepcionalmente 4, 5, 6 e 7 gramas e de arrenal 1 e 2 gramas por injecção com uma tolerância absoluta e resultados às vezes surpreendentes. As séries eram de seis injecções, dadas diàriamente, ou em dias alternados, isto em geral, está claro.

As soluções que empregámos eram tituladas, as de cacodilato a 30 e 50 % e as de arrenal a 10 e 25 %, esterilizadas por tindalização, em empolas de 1 e 2 cm^3. Não está, cremos, bem estabelecida a temperatura a que deve ser esterilizado o cacodilato; nós temos empregado empolas de cacodilato esterilizadas a autoclave a 115 graus sem inconveniente, no entanto, na prática corrente pedimos empolas esterilizadas por tindalização.

¿Como é possível utilizar tão grandes doses de medicamento?

Os estudos a êsse propósito são concordantes. Gauthier escreveu: «pour l'usage du cacodilate de soude, continué même des années, on ne remarque ni altération des reins, ni congestion du foie, ni arsenicisme sous aucune de ses formes. Seuls, les cheveux deviennent plus longs, plus opulents, plus fournis, aussi que le système pileux, la voix prend de la clarté et les fonctions semblent rajeunir comme le sang.». As ideas de Gauthier obtiveram plena sancção e de há muito todos os autores mesmo os mais circunspectos consideram a zona manejável não perigosa dos metilarsinatos muito extensa e as doses já activas de 5 a 20 centigramas são completamente inofensivas. É muito elucidativo o quadro seguinte apresentado por Mouneyart sôbre a tensão em As de diversas preparações arsenicais e a toxicidade das mesmas substâncias.

	M.	Ars. %	Toxicidade por quil. de cobaia em 3 dias
Arsenito de potássio	160	46	1,3 centgr.
Arseniato de sódio	185	40	1,3 »
Atoxil	239	31	7 »
Arsenobenzol	366	40	8 »
Hectina	380	19	14 »
Arrenal	160	40	20 »
Cacodilato de sódio	160	46	25 »

Os nossos ensaios de toxicidade em relação ao coelho em injecção intravenosa empregando produtos rigorosamente puros deram para o cacodilato por quilograma $0^{gr.},29$ sendo possível por doses progressivas fazer o animal suportar uma dose superior. O arrenal parece bem mais tóxico para o coelho pois que a dose de $0^{gr.},20$ por quilograma nos meus ensaios foi sempre mortal; no entanto notemos que dá para o adulto a dose tóxica de cêrca de 20 gramas de cacodilato e 14 gramas de arrenal.

Se as doses habitualmente prescritas são já activas, é possível atingir doses muito maiores, como se depreende, com uma actividade surpreendente num grande número de entidades mórbidas. Ressalta destas considerações que entre os arsenicais, o cacodilato e o arrenal têem propriedades muito próprias, muito especiais que os outros arsenicais não possuem. Já em 1843 Bunsen antes da aplicação terapêutica do cacodilato considerava o radical cacodilo como um metal muito comparável ao cianogénio, num como noutro dêstes radicais os elementos que os constituem perderam a maior parte das suas propriedades primitivas para se tornarem inteiramente novos. Rabuteau verificou também por experiências variadas a inocuidade do cacodilo e engenhosamente encadeava a constituïção de alguns compostos pretendendo ligá-la com a toxicidade. Estabeleceu a série:

$$O = As. \begin{cases} OH \\ OH \\ OH \end{cases} \quad O = As. \begin{cases} CH^3 \\ OH \\ OH \end{cases} \quad O = As. \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \end{cases} \quad O = As. \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ CH^3 \end{cases}$$

e fazia notar que o ácido arsénico é muito tóxico, o ácido monometilarsénico — donde deriva o arrenal — é muito menos tóxico (entre êles estaria o atoxil, a hectina e arsenobenzoes), o ácido dimetilarsénico menos tóxico e o ácido trimetilarsénico menos tóxico ainda.

O ácido dimetilarsénico ou cacodílico apresenta-se sob a forma de cristais brancos, inodoros, dum sabor levemente ácido. É muito solúvel na água e no álcool e é insolúvel no éter. É deliquescente o que o obriga a guardar em frascos esmerilados e parafinados. O cacodilato utilizado em terapêutica deve ser prática e quìmicamente puro. Não deve conter:

1) As sob forma mineral (não dando pois a reacção de Marsh directamente nem precipitação pela mistura magnesiana;

2) Não deve conter cloro, revelado pelo soluto de nitrato de prata;

3) Ausência de oxalatos (revelados pela água de cal);

4) Não descorar o permanganato (ausência de compostos orgânicos não oxidados do cacodilo).

Compreende-se que a existência de arsenitos ou arseniatos quando se empregam doses tão grandes de medicamentos conduziriam a intoxicação.

Nos meus doentes procedeu-se sempre à análise sumária da urina no comêço do tratamento como no fim do mesmo e com prazer registámos nunca ter encontrado a presença de elementos anormais ou aumento sensível de urobilina. Em dois doentes hospitalizados considerados sensìvelmente no mesmo regímen alimentar, o tratamento pelo cacodilato provocou um leve aumento dos fosfatos urinários e um dêles aumento de ureia.

Convém notar que os metilarsinatos parece que se eliminam sem se fixar no organismo e assim o prof. Barthe analisando os órgãos dum indivíduo submetido seis meses antes à medicação arsénica na dose de 7 gramas dadas em alguns dias, não encontrou As no coracão, rins, cérebro, cerebelo e fígado. Contudo supõe-se que o As substitui o P nas nucleínas fosforadas provocando êsse facto um aumento de excreção de fósforo.

Chegámos finalmente à parte referente à eliminação do As cacodílico. Esta faz-se por todos os emonctórios, urina, féses, pele, pêlos, unhas, leite, líquidos menstruais e pulmões.

Por esta última via nota-se às vezes um hálito aliáceo que dura algumas horas e que nunca me pareceu nocivo ao doente nem provocou falta de apetite. A eliminação urinária do As suscitou o emprêgo de métodos variados duma aplicação mais ou menos difícil. Qualquer que seja o processo empregado nunca se pode realizar directamente na urina. O método de Marsh modificado por Gauthier e Bertrand, aplicado após a destruïção das matérias orgânicas deve ser considerado como o mais exacto mas é moroso e oferece dificuldades várias ao seu emprêgo.

O ilustre professor da Universidade de Madrid, D. José Carracido, num trabalho sôbre o reagente bioquímico refere que o *Penicillium brevicaule* revela o As na urina com uma sensibilidade que o método de Marsh-Gautier não alcança.

Damos preferência ao método de Bougault ([1]) (método de redução pelos hipofosfitos) por ser mais simples e bastar para as investigações clínicas. Este método consiste em tratar a solução arsenical em meio sulfúrico por um excesso de hipofosfito de sódio. Geralmente empregar o reagente sôbre a urina desprovida de matéria orgânica do seguinte modo:

100 cm^3 de urina à qual se juntam 20 cm^3 de No^3H e 20 gotas de MnO 4k a $^1/_{100}$ leva-se à ebulição, cobre-se com um funil, afim de evitar perdas.

Quando o volume da urina estiver reduzido a 20–25 cm^3 junte-se de novo 20 cm^3 de No^3H e aquece-se até à redução a cêrca de 12–15 cm^3 adiciona-se a seguir 5 cm^3 de $SO4H^2$ puro. Aquece-se até ao enegrecimento e emissão de fumos brancos. A descoloração completa da massa termina pela oxidação azótica e o líquido assim obtido é concentrado até um certo volume quási constante para os ensaios e junte-se água destilada até perfazer um volume determinado.

Dêste líquido assim obtido o As é transformado em ácido arsénico, dêle tomam-se 5 cm^3 e igual volume do reagente de Bougault e aquece-se a banho-maria. No fim de algum tempo, 15 minutos, manifesta-se uma côr variando do amarelo a castanho-escuro e até uma turvação conforme a quantidade do arsénio. Os ensaios que realizámos consistiram no seguinte: o doente A. M. faz uma injecção de 1 grama à 1 hora da tarde, às 3 horas vem ao laboratório recolhem-se 100 cm^3 de urina que é tratada como indicámos, a reacção foi muito nítida (coloração castanho-escuro). No dia seguinte à mesma hora a reacção foi menos nítida e no segundo dia apenas vestígios, reacção pouco nítida.

Presentemente pensamos utilizar a reacção Bougault para dosear a quantidade de As urinário eliminado para o que apenas se torna necessário preparar solutos tipos de arseniato de sódio com a tensão de As correspondente.

A quantidade de As metalóidico eliminada será expressa em miligramas por 100 cm^3 de urina.

A conclusão que desde já pretendemos tirar é que a eliminação do cacodilato é muito rápida quando administrada pela

---

([1]) Reagente de Bougault: A uma solução de 20 gramas de hipofosfito de sódio em 20 cm^3 ds água distilada, junta-se 200 cm^3 de ácido clorídrico (d 1,18), deixar esfriar e filtrar sob algodão.

via venosa o que permite fazer injecções diárias afim de manter uma certa quantidade de cacodilato no organismo, fazendo repousos a seguir às séries.

Sem termos observado sinais de fadiga renal, não podemos ainda afirmar que seja o melhor modo de proceder. Lembro-me, porém, que Sicard na Novarsenoterápia intensiva afim de fazer a impregnação do organismo pelo medicamento chega a fazer injecções de Novarseno em dias alternados e assim procede o professor Politzer, da New-York, obtendo dêste modo resultados superiores aos habituais. Procedem assim aqueles autores porque no fim de 48 horas já a eliminação do medicamento é quási total.

Conclusões práticas

1.º A zona terapêutica manejável dos metilarsinatos quando administrados pela via endo-venosa, é muito extensa.

2.º É indispensável procurar a tolerância do organismo pelas doses progressivas de medicamento.

3.º Os resultados brilhantes que se podem obter não dispensam uma observação clínica cuidadosa dos doentes.

Pôrto, Junho de 1921.

IMPORTÂNCIA BIOQUÍMICA
NA SEMIÓTICA DOS DERRAMES PATOLÓGICOS

PELO

PROF. ALBERTO DE AGUIAR

Os derrames patológicos merecem bem o esfôrço dos analistas, afim de ler na sua delicada crase as origens da sua produção ou os processos patogénicos que os provocam.

Considerados sob o ponto de vista da semiótica analítica, ramo de aplicação laboratorial que mais interessa à clínica, são múltiplas as pesquisas recomendadas para o estudo dos derrames, devendo frisar como dominantes:

O exame citológico compreendendo o número de células por milímetro cúbico, a sua fórmula citológica (endotelial e leucocitária) e especialmente a pesquisa de células atípicas de carácter neoplásico e as células degeneradas dos processos lentos.

O exame microscópico geral, revelando glóbulos rubros intactos, deformados ou hemolisados, gotículos ou granulações gordurosas ou lipoides, cristais de ácidos gordos, lâminas de colesterina, cristais de hematoidina, retículos fibrinais e nucleares, elementos parasitários de valor etiológico.

O exame bacteriológico quer directo, quer cultural, quer por inoculação, compreendendo a pesquisa dos agentes microbianos mais comumente produtores dos derrames e a pesquiza tantas vezes negativa do bacilo da tuberculose.

O exame físico — nomeadamente o espectroscópico, revelando a hemoglobina e seus derivados, os pigmentos biliares puros ou modificados, os produtos de transformação da hemoglobina nas suas diversas fases de regressão autolítica.

O exame serológico — compreendendo especialmente a pesquisa da reacção de Wassermann e as reacções aglutinantes.

O exame químico. — É êste que um tanto despresado merece ser apreciado cuidadosamente pois que pelas modalidades da sua crase nos pode dar a chave do problema que se pretende solucionar com a análise dos derrames.

Com os progressos da bioquímica quer analítica e técnica, quer interpretativa, conseguiremos devendar o mistério da sua génese e da sua natureza o que nem sempre os recursos citados, aliás preciossísimos, conseguem.

Tratando-se de ordinário de quantidades muito pequenas de líquidos obtidos por simples punção exploradora limitada, achamos util indicar as doságens e os processos de microquimica que utilizámos na nossa prática corrente.

Sob o ponto de vista de determinações analíticas, realisámos tanto quanto possível as seguintes:

Resíduo total e se possível fôr, o resíduo mineral e orgânico, a doságem das albuminas totais, a doságem das suas variedades mais correntes: fibrina, hemoglobina, nucleina, mucina, globulina e serina; a dosagem dos cloretos, da ureia, da colesterina e do extracto alcoólico.

Reduzidos aos seus traços essenciais os processos microquímicos que utilizámos empregam cêrca de 1 cc. para cada dosagem, segundo o seguinte esquema técnico.

Resíduo total — em vidro de relógio ou cápsula de vidro tarada, seca-se lentamente a calor brando (40–50°) terminando, se necessário fôr, por passagem pela estufa a 100° durante uma 1/2 hora — 1 cc. de derrame: pesa-se e a diferença entre êste pêso e a tara do vidro de relógio ou cápsula, dá-nos o pêso do resíduo total.

Cloretos — opera-se sobre 1 cc. de líquido com 10 cc. de água distilada utilizando o método de Mohr-Charpentier, tendo o cuidado de usar um soluto bem titulado de nitrato de prata, medido por pipeta de precisão ao centéssimo. Para correcção de coloração bastam de ordinário $0^{cc},05$.

ALBUMINAS.

Total de albuminoides. — Em tubo de centrífuga afunilado e tarado precipita-se 1 cc. de líquido com 5 cc. de álcool absoluto e 1 gota de ácido acético ao meio, depois de cuidadosa mistura e agitação deixa-se em repouso e extracção umas horas, terminando por centrifugação e lavagem do *culot* de centrifugação com álcool. O precipitado ou culot final, aglomerado no tubo, é sêco a calor brando nas condições do resíduo total e pesado.

Fibrina. — Separada da totalidade do derrame por batedura e agitação com fio de platina estéril em tôrno do qual se aglomera a fibrina. Esgotado e absorvido com papel de filtro o excesso de líquido, separa-se a fibrina do fio e pesa-se depois de sêca.

Nucleina. — Em tubo de centrífuga adiciona-se, sem agitação, 1 cc. de serosidade e $0^{cc.},1$ de soluto de ácido acético a $^{1}/_{2}$ normal. Ao fim de 16 a 24 horas de difusão do ácido, a nucleina precipita em ténues flocos que se aglomeram pelo repouso e centrifugação. O culot da centrifugação é lavado ràpidamente com um 1 cc. de soro fisiológico acidulado por $0^{cc},1$ de ácido acético $^{n}/_{2}$. O culot sêco nas condições descritas e pesado, dando apròximadamente a dose de nucleina e a pesquiza do fósforo neutro neste culot, identificará a nucleina.

Globulina. — 1 cc. da serosidade é adicionado e misturado com 4 cc. de soluto concentrado de sulfato de magnésio a 20–25°, depois de precipitação lenta ou aprecia-se a quantidade de globulina por diafanoscopia ou filtra-se por pequenos filtros, lava-se com 2 cc. de soluto concentrado do sulfato de sódio e redissolve-se a globulina em água destilada, passando e repassando o soluto pelo filtro e recolhendo o filtrado final e água de lavagem em tubo de centrífuga. Acidulado êste soluto final, por ácido tricloroacético (2 gotas de soluto a $^{1}/_{4}$) precipita-se a banho-maria. O precipitado separado e lavado por centrifugação é sêco e pesado nas condições dos anteriores.

Serina. — É a diferença entre a cifra dos albuminoides totais (não compreendendo a fibrina) e a sôma da nucleina e globulina.

Hemoglobina. — Avaliada pela intensidade do exame espectral.

Mucina ou *mucinoides.* — 1 cc. de derrame é adicionado de 0,5 de ácido acético a $^{1}/_{4}$ que dissolve a nucleina e mantém precipitada a mucina; esta avalia-se pela abundância do aglomerado mucínico ou por pesagem nas condições descritas.

Extracto alcoólico. — É o resíduo deixado pelos líquidos alcoólicos da albumina total, que foi recolhido e sêco num vaso tarado subtraído dos cloretos dissolvidos pelo álcool e que se doseiam pelo mesmo processo Mohr-Charpentier.

Ureia. — 2 cc. do derrame são precipitados e digeridos em minutos a banho-maria por 8 cc. de álcool levemente acidulado por ácido acético. O soluto alcóolico com uns 5 cc. de álcool de lavagem é adicionado de uns 2 cc. de água. Evaporando o álcool a banho-maria procede-se à dosagem da ureia sôbre o resíduo aquoso final, pelo hipobrometo em ureómetro adequado.

Procedendo com método, isto é:

1.° Retirando tôda a fibrina.
2.° Centrifugando assèticamente para clarificar e obter um culot destinado a exame citológico e bacteriológico.

3.° Realizando o exame físico espectroscópico sôbre o derrame límpido separado do centrifugado.
4.° Distribuindo para exame químico, aproveitando naturalmente o derrame que serviu ao exame físico.

êste complexo de ensaios pode ser realisado com um volume mínimo de 100 cc. de derrame, obtendo-se documentos altamente preciosos para a determinação da natureza e patogenia dos derrames.

Abstraindo dos resultados dos exames citológicos e bacteriológicos e serológicos unânimemente considerados como elucidativos, os nossos resultados, ainda em estudo e confirmação, permitem-nos estabelecer as seguintes orientações:

O excesso de substâncias albuminoides variando entre 3 a 6 %, nomeadamente globulina (1-2), com excesso franco de fibrina (0,5-1 %), de resíduo total e de extracto alcoólico e vestígios francos de nucleina e a baixa de cloretos (0,5-0,6) definem os derrames inflamatórios; a bacteriologia, a citologia e a serologia tentarão destrinçar a sua natureza etiológica.

A fraqueza de resíduo total e de albuminoides, a quási ausência de nucleina e de fibrina, a pequena dose de globulina e o excesso de cloretos, definem os derrames mecânicos que por vezes se apresentam ricos em lipoides, nos casos de participação linfática ou de compressões quilíferas.

O excesso de cloretos e de ureia define especialmente os derrames mecânicos por insuficiência renal.

A presença de hemoglobina e sôbretudo o excesso de nucleina (0,3-0,6) associado a regular eliminação dos demais albuminoides — doses intermédias entre a dos transudatos e dos derrames inflamatórios — define os derrames neoplásicos.

O exame citológico vem esclarecer brilhantemente esta conclusão química para a qual já chamei a atenção.

Esta notável propriedade dos derrames neoplásicos está em relação com a intensidade do processo reprodutivo que os provoca; a autólise nuclear das células em plena actividade imprime aos derrames esta característica notável e ainda mal conhecida.

Deve notar-se que a autólise leucocitária nos casos de derrames purulentos aumenta igualmente a quantidade de nucleina.

Em tal caso porém a diferença é manifesta; os derrames neoplásicos são transparentes ou opalinos, os purulentos são opacos e absolutamente característicos.

30 de Junho de 1921.

OBSERVAÇÃO E ESTUDO

DE UM FENÓMENO DE REDUÇÃO LENTA PRODUZIDO PELO LEITE SOBRE NITRATOS, NITRITOS E DICROMATO DE POTASSIO E SUA IMPORTANCIA NA FISCALIZAÇÃO QUÍMICO-SANITÁRIA

POR

JOSÉ ANTÓNIO DOS SANTOS

Químico-chefe do Laboratório de Higiene do Pôrto
e Director e Prof. de Química do Instituto Superior de Comércio da mesma cidade

A determinada amostra de leite por mim analisada no Laboratório de Higiene do Pôrto, a requisição do Delegado de Saúde da mesma cidade, e que havia sido considerada como leite falsificado com água, e esta água classificada de impura, por se ter verificado a presença de nitratos, requereu o interessado, como era do seu direito, uma análise de contraprova ao duplicado da referida amostra.

Procedendo-se a esta análise em que me competia intervir com mais dois peritos, concluíu-se:

1.º Que o duplicado da amostra sôbre que recaíu a análise de contraprova, havia sido conservada pelo dicromato de potássio, conforme as Instruções oficiais e se mantinha sem alteração visível não obstante ter êste leite mais de um mês de idade;

2.º Que os resultados analíticos obtidos por esta análise de contraprova, concordaram sensìvelmente com os da primeira análise, *excepto quanto à presença de nitratos ou de nitritos que foi negativa.* A pesquiza dos nitratos foi feita, conforme as Instrucções oficiais, pela difenilamina dissolvida em ácido sulfúrico, não se produzindo a menor coloração azul. Concluía-se, pois, que a primeira análise estava errada quanto à indicação da presença de nitratos.

Não obstante, a convicção em que estava de ter verificado nìtidamente a presença de nitratos que agora não apareciam no duplicado da mesma amostra de leite, acrescida da circunstância de ter o leite desta última amostra mais de um mês de idade, no momento em que foi analisada, despertaram a minha atenção, levando-me a admitir a possibilidade de ter havido redução ou assimilação dos nitratos que poderia, talvez, ser produzida pela acção de diástases redutoras existentes no leite. Considerando necessário esclarecer êste caso que, por agora, me interessava principalmente sob o ponto de vista analítico, fiz uma série de ensaios que foram orientados e conduzidos da seguinte forma.

1.º Preparação de amostras de leite a ensaiar:

a) Leite com a densidade de 1,029 a 15°, isento de nitratos adicionado de água dum poço fortemente nitratada até se obter a densidade de 1,024;

b) Leite isento de nitratos adicionado de nitrato de potássio na porporção de 80 miligr. por litro;

c) Leite isento de nitratos adicionado de nitrato de potássio na proporção de 40 miligr. por litro;

d) Leite isento de nitratos adicionado de nitrato de potássio na proporção de 40 miligr. por litro e fervido;

e) Leite isento de nitratos, adicionado de nitrato de potássio na proporção de 40 miligr. por litro.

A cada uma das amostras *a*), *b*), *c*), *d*) foi adicionado como conservador 1 cm^3 duma solução de dicromato de potássio com a densidade de 1,032 por cada decilitro de leite, conforme o disposto nas Instruções oficiais respectivas.

A amostra *e*) não foi adicionado conservador algum.

Cada uma destas amostras foi distribuída por quatro frascos pequenos que foram rolhados, lacrados e guardados num armário à luz difusa.

2.º Pesquiza periódica dos nitratos nas amostras [1]. Resultados obtidos:

---

[1] A pesquiza dos nitratos foi feita, conforme as Instruções oficiais, pela difenilamina dissolvida em ácido sulfúrico, depois de eliminado o dicromato de potássio, empregado como conservador, pelo processo do cloreto de bário que tive a honra de apresentar à Sociedade Química Portuguesa. *Bol. da Soc. Quim.*, 8.º ano, n.º 6, pág. 181.

Natureza da amostra	Côr produzida pela difenilamina com 0,5 cm. do líquido filtrado da amostra coagulada				Côr das amostras			
	No momento da sua introdução nos frascos	Ao fim de 8 dias	Ao fim de 15 dias	Ao fim de 30 dias	No momento da sua introdução nos frascos	Passados 8 dias	Passados 15 dias	Passados 30 dias
a)	Azul intensa	Azul menos intensa	Azul desmaiado	Azul leve	Amarela	Amarela menos intensa	Amarelo esverdeado	Verde
b)	»	»	»	»	»	»	»	»
c)	»	»	Azul leve	Azul muito leve	»	»	»	»
d)	»	»	»	»	»	»	»	»
e)	»	Vestígios de côr azul	Nula	Nula	Côr natural do leite	Côr natural do leite	Côr natural do leite	Côr natural do leite

As amostras *a*), *b*), *c*), *d*) que foram adicionadas de conservador, estavam ao fim de 30 dias completamente coaguladas.

A amostra *e*) que não foi adicionada de conservador e apenas de nitratos mantinha-se, ao fim de 26 dias, em bom estado de conservação.

3.º Conclusões que se podem tirar dos resultados obtidos nestes ensaios:

1.ª — Que o leite exerce uma acção redutora, embora lenta, sôbre nitratos, nitritos e até sôbre o dicromato de potássio, adicionado como conservador que passa da côr amarela à verde.

2.ª — Que a redução sôbre estes compostos oxigenados é exercida pelo leite mesmo depois de fervido (1).

3.ª — Que nos casos especiais das análises químico-sanitárias de leite, se deve ter êste facto em vista, sempre que haja necessidade de investigar os nitratos em leites com mais de 8 dias de idade.

4.ª — Que o leite nitratado se conserva mais tempo e melhor do que adicionado de dicromato de potássio.

*

* *

Não me foi possível completar agora estes ensaios que continuarei com o fim de investigar:

a) Qual a percentagem, e sua constância, de nitratos que pode ser reduzida pelo leite, conservado pelo dicromato de potássio, antes de se produzir a sua coagulação.

b) Quais os produtos resultantes da transformação dos nitratos.

c) Se o nitrato de potássio pode efectivamente ser utilizado como conservador do leite.

Os resultados que obtiver nestes ensaios comunicá-los-hei oportunamente à Sociedade Químico-Portuguesa.

Pôrto, 26 de Junho de 1921.

(1) Êste facto parece-me ter uma certa importância sob o ponto de vista químico-biológico.

A ACÇÃO DA LUZ
SOBRE OS HALETOS DE PRATA, COBRE E MERCURIO

POR

MATEUS DE ALBUQUERQUE

É muito conhecida a propriedade dos sais de prata de serem sensíveis à luz. Raras vezes porém se menciona a do cobre (monovalência) ou a do mercúrio (monovalência). Afim de esclarecer o quimismo desta propriedade encetei o estudo que passo a expor.

A sensibilidade à luz dos haletos das monovalências de prata, cobre e mercúrio só parece existir em presença da água ou outra substância líquida ou sólida ionizante. Assim o álcool etílico, o glicerol e o manitol favorecem-na tanto ou mais do que a água. Pelo contrário os hidrocarbonetos do petróleo insaturados, a benzina, naftalina e a fenil-metil ketona, não a facilitam. Vê-se que não basta a simples insaturação ou a presença do oxigénio para a acção luminosa se exercer. Creio haver um certo interêsse neste resultado para a teoria da insaturação tipo oleifina e do poder ionizante.

A parte do espectro visível que actua, é a que vai do azul ao roxo (violeta). É notável que a sua acção seja redutora no caso dos haletos de prata e cobre, mas de elevação valencial (ao menos aparentemente) no do mercúrio. Veremos se será possível explicar esta excepção.

Nos haletos de prata e cobre (monovalências) a sensibilidade à luz faz-se mais fraca quando se passa do cloreto ao iodeto. A dos fluoretos respectivos igual ou maior que a dos cloretos; ao contrário a sensibilidade dos mono-haletos de mercúrio cresce do cloreto ao iodeto, que se aproxima agora do fluoreto.

Os produtos são para a prata, Ag_2X' e talvez também Ag_4X. Para os haletos cuprosos tem-se um corpo insolúvel cinzento ou preto, depois um verde amarelado, verde claro, depois amarelo e ainda castanho. Pelo menos três. Todos insolúveis ou solúveis com precipitação do metal, como sucede com os sub-haletos de $\overset{+}{Ag}$. Esta solubilidade (em amoníaco, KCN, etc.) com precipitação do metal em parte e supervalenciação do restante que lembra o que sucede no caso dos sáis mercurosos dificulta muito a análise dos haletos (sub) de prata e de cobre.

Alguns autores crêem que os chamados sub-haletos são simples soluções sólidas dos metais nos respectivos compostos da monovalência. Não creio fácil explicar porque razão parte do haleto permanece intacto para servir de solvente, nem como se assiste, no caso dos cloretos de $\overset{+}{Ag}$ e $\overset{+}{Cu}$, a uma sensibilidade à luz, em série de produtos distintos, conforme o tempo de exposição (sáis cuprosos) e conforme à qualidade das radiações incidentes (sais de prata). Este último caso é uma perfeita sintenização. (Não pude obter todas as côres mas apenas os azuis, violáceos, vermelhos, amarelos-sujos e apenas uma vez o verde). Mas outros autores dizem tê-las obtido. Devo notar que é sempre o espectro azul e violeta que inicia a redução (prata e cobre).

As soluções em NH_3, KCN, KI, piridina, dos haletos de prata e cobre não parecem ser sensíveis.

Em relação a estes solventes os haletos mercurosos comportam-se como misturas de haletos mercúricos, que se dissolvem geralmente (e são insensíveis), e mercúrio metálico.

Discussão dos resultados

A propriedade do iodo de dificultar ou impedir a sensibilidade à luz dos mono-haletos de prata e cobre parece-me explicável pela presença no I de capacidade secundária de combinação. Como são necessárias, pelo menos, *mols* do sal para se produzir M_2X' compreende-se que se tivermos $M-I$ (represento por traço cheio a união valencial vulgar e por pontuado a secundária) não é possivel a ligação de sequer um mínimo de 2 moléculas e portanto não é M_2X' produzido.

Confirma-me nesta hipótese o vêr que a formação de complexos com NH_3, CN'... impede por forma igual a subvalenciação das monovalências da prata e cobre ($\rightarrow M_2X$).

Nos fluoretos parece a causa ser outra. O F' aproxima-se muito do I' na facilidade com que entram como coordenados em radicais que tornam robustos. Distancia-se o F' do I' pela faculdade que êste último possui, de também poder ser átomo central dum radical, o que nunca se vê com o F. Basta citar $(IO_3)'$ $(IO_4)'$ $(IR)''$ $(IR)''$, ... incontestàvelmente robustos. Assim vê-se que tem precedentes a semelhança do F' com o I' por um lado, por outro a sua oposição. Portanto parece-me poder-se admitir como hipótese a verificar com o tempo, que na redução dos haletos pela luz é a possibilidade do I' funcionar como elemento central, num radical, que a impossibilita. Na supervalenciação dos haletos mercurosos para mercúricos pelo contrário parece actuar aquilo e em F' e I' é comum, o originarem radicais, figurando como coordenados. Evidentemente poder-se há tentar o estudo da hipótese que emprego, ulteriormente em outras reacções pela luz (e pelo calor, visto que em geral umas marcham *pari passu* com as outras).

Num trabalho meu, em 1919, menciono que as reacções dos compostos halogénicos do mercúrio (monovalência) se não conformam com a fórmula molecular simples, indicada em certos casos única e excepcionalmente pela evidência de ordem mais física que química, nem com uma valência inferior à dos derivados mercúricos. Entre outras apontei as reacções $Hg_nX_n + KCN \rightarrow \overset{++}{Hg}CN_4{-}K_2 + Hg$, ou $+ KI \rightarrow \overset{++}{Hg}I_4K_2 + Hg$. Ainda a não existência de Ag_nR_n ($R =$ alkilo ou arilo), a acção do calor produzindo $\overset{++}{Hg}X'_2 + Hg$ (metal), a acção das radiações redutoras $\rightarrow \overset{++}{Hg}X'_2 + Hg$ (metal). Lembro que talvez se possam explicar estas propriedades, considerando os sais mercurosos como um radical derivado de tetravalência assim: $(\overset{++}{Hg}\ldots\ldots\overset{IV}{Hg})^{++}X'_2$ tinha assim a causa da redução pela luz, KCN, KI... mas além de ter que admitir uma valência não conhecida (embora provável) seria difícil vêr o motivo pelo que o flúor e iodo a facilitavam; a não ser que o seu papel fôsse alheio à acção exercida pela luz e que apenas a aproveitassem, devido à sua faculdade de formarem uniões secundárias, expulsando Hg metálico e produzindo $\overset{++}{Hg} = I_2$. Existem hoje métodos óticos que talvez pudessem ser usados para nos dizerem se mesmo e independente da qualidade de X' há qualquer diferença nos sais mercurosos expostos às radiações luminosas, na aparência insensibilizados.

Uma outra hipótese é supor que ou por acaso ou por uma disposição semelhante à das isomerias trans e anti; um dos X ocupa uma posição que favorece a sua captação por certos HgX.....XHg. Dêste modo:

$$\begin{array}{ccc} HgX \cdots + \cdots XHg & & HgX \cdots XHg \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & \rightarrow & \nearrow \qquad\qquad \searrow \quad = 2\,HgX_2 + 2\,Hg. \\ XHg \qquad\qquad HgX & & XHg \cdots\cdots HgX \end{array}$$

Idêntica explicação para o fluoreto como para o iodeto mercuroso. Possìvelmente um ou outro pela faculdade de que falei originaram em primeiro lugar o radical $(HgX_4)'' \overset{++}{Hg}$ e sòmente depois $2\,HgX_2 + \cdots$ A união dos X······X modificaria as ligações entre os Hg, de maneira a estes tenderem a substituir os seguintes Hg (que ficariam livres) pelos X juntos a estes Hg.

Quando um radical ou um átomo se salifica, a estabilidade do sal resultante depende dos elementos em presença que recìprocamente se modificam. Apenas nós não vemos a dentro dêles nem a transformação acabada (estática) nem a efectivar-se (dinâmica e cinética). Ora são precisamente estes fenómenos que nos radicais se tornam patentes. Um átomo ou radical é influenciado (muda de posição, de ligação ou os seus componentes) por um modo visível pelos outros componentes do radical. E estes por sua vez se lhe adaptam e por igual modo visível. O estudo dos radicais orgânicos e inorgânicos adquire assim um valor especial e único para o estabelecer das correspondências supra.

CORRESPONDENCIAS QUÍMICAS

POR

MATEUS DE ALBUQUERQUE

A lei das fases de Gibbs, o teorema de Vant'Hoff e le Chatelier regem como é sabido quantitativamente os equilíbrios químicos inter-moleculares. O presente estudo visa a estender aos equilíbrios intra-moleculares, intra-atomoïdicos (radicais) e pelo menos entre certos limites, intra ou endo-atómicos, leis análogas. Mas, é aqui o ponto que nìtidamente as diferenciará das primeiras, o seu carácter e espirito tenderá a abranger outras relações que são as exclusivamente numéricas. Das matemáticas extrair-se-há o que elas possuem de fecundo, não só pela precisão de números, mas principalmente pelo seu simbolismo.

São conhecidas em vários campos da sciência moderna, as aplicações de relações simbólicas e creio que com belos resultados; penso que útil emprêgo delas se poderá fazer em Química e portanto não me demorarei aqui a defendê las.

A relação molecular quantitativa, talvez mais importante até hoje conhecida, é a lei de A. Werner, sôbre o número de valência externa dum radical (atomoide) em funções do número e sinal dos átomos ou radicais coordenados, da sua valência e do número valencial do elemento central. Aproximação preciosa do fim que tenho aqui em vista, mas ainda imperfeita. Com efeito, e não falando na sua inaplicabilidade quando os radicais são pouco robustos, ela fornece-nos apenas o número e sinal da valência exterior, nada sôbre a sua intensidade.

*

* *

Definirei correspondência química a relação lógica em quantidade e qualidade entre os elementos, actividades, structuras, ligações, posição, etc., duma molécula ou dum atomoide, sendo fixo um dêstes elementos (base ou fundamento, β) ou como tal considerado e fazendo-se substituir (variar) um dos restantes. Poderia chamar-se também a tal relação congruência química, mas não vejo especial vantagem nisso e teria o contra de fazer presupôr certos moldes que creio prematuro estabelecer. Algumas vezes as relações de que falo obrigam elementos materiais a deslocarem-se para fora da molécula ou radical como se verá. À parte que varia, por substituição chamarei módulo (Mod.).

É meu desejo que o presente ensaio seja apreciado como tal. No seu presente estado inicial é difícil apresentar todos os exemplos dignos de interêsse das relações mencionadas, nem tão pouco analisá-los por completo. Vou expôr alguns casos e de passagem farei uma ou outra observação que me pareça notável.

São do conhecimento químico os sáis purpureo-cobálticos (melhor sáis de X′ cobalto-pentamina) (alguns autores adoptam amina). Será a primeira correspondência que mencionarei. Assim temos em símbolos

$$X,\ 5\,NH_3 \equiv 2\ (\text{Mod. } Co^{+++}) \quad \beta \text{ aqui } = +2.$$

Nos compostos amoniados da platina há a dicloro platinitetramina bivalente que traduzida da mesma maneira conduz à expressão:

$$2\,Cl,\ 4\,NH_3 \equiv 2\ (\text{Mod } Pt^{IV}) \quad \beta = +2$$

Não trato aqui das intensidades das bivalências em questão que serão sem dúvida um pouco diferentes. Temos portanto assim a possibilidade de estatuirmos em quantidade e qualidade uma relação intra-molecular entre os metais Co^{+++} e Pt^{IV} que servirá de sinal para ìntimamente definir as valências três e quatro dos metais cobalto e platina.

Seja agora a expressão

$$4\,NH_3,\ 2\,Cl \equiv 2\ (\text{Mod. } Pt^{IV}) \quad \beta = +2$$

tira-se da fórmula

$$\left[Pt\,{}^{Cl_2}_{(NH_3)_4}\right]^{++}$$

e a expressão

$$4\,NH_3,\ Br \equiv 3\ (\text{Mod. } Pt^{IV}) \quad \beta = +3$$

proveniente da estructura

$$\left[Pt\,{}^{(NH_3)_4}_{Br}\right]^{+++}$$

vem como consequência uma relação entre as monovalências do Cl e do Br. Passemos agora a outro dominio. Seja

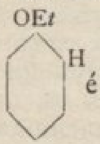
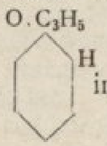
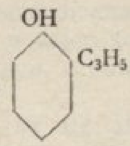
$$\begin{pmatrix} Ag.OCN \\ +NH_4X \end{pmatrix} \quad e \quad [AgCO(NH_2)_2]X'$$

teremos: $2\,NH_2,\ CO \equiv Ag$ (Mod. Ag, temperatura: *t*) $\beta = Ag$ com módulo complexo: $\beta\,Ag$ e *t*. Este equilibrio é fragil e passa a *t'*, para $Ag.ONC + NH_4.X'$, exemplo de certos elementos materiais sairem para o exterior da molécula. E assim temos uma relação entre *t*, Ag e *t'*Ag. Sendo desnecessário detalhes nos exemplos a seguir vou mencioná-los mais brevemente e apenas como correspondências.

1.º $N:,\ \cdot C\cdot \equiv 1$ (Mod. Ag) $N':,\ C'' \equiv 1$ (Mod. K) exemplo de ligações estructurais.

2.º $HN:,\ CO_2H \equiv CH_2$ (Mod. Ag) $NH^2,\ CO_2 \equiv CH_2$ (Mod. K) outra relação estructural e ainda funcional entre Ag e K.

3.º Cobre, val. $2 \equiv O$ (Mod. Br) Cobre, val. $1 \equiv O$ (Mod. I). Relação exo $\rightleftarrows$ endo-molecular entre Br e I.

4.º  é estável,  instável passando a 

portanto

$$EtO',\ H \equiv C_6H'_4 \text{ (Mod. Et)}$$

$$HO',\ C_3H_5 \equiv C_6H'_4 \text{ (Mod. } C_3H'_5)$$

que nos relaciona $C_2H_5 = Et$ com $C_3H'_5$ em posição ou melhor orientação e ligação química.

Evidentemente quando indico como constante uma valência um grupo (CH_2), etc., subentendo certas outras constantes como em certos casos sejam a temperatura ou a pressão, a luz, etc.

As leis quantitativas de que falei no princípio dêste assunto não se aplicam senão a casos, como bem claramente afirma Urbain (de Paris) em que não haja coacção química. As leis que tento aqui iniciar serão, quando atingirem a sua perfeição, utilisáveis no campo total da Química. É quási certo que elas permitirão classificar os corpos químicos, distinguindo-os quando, por exemplo, isovalentes por uma mais rica, mais profunda diferença, sobretudo positiva propriedade química. Com efeito nem sempre se nota que o que quìmicamente sabemos e exprimimos com a comum notação é apenas, e duma forma tôda estática, o que obtemos pela sua negação, destruindo a molécula, e com ela as propriedades que a individualisam.

Julgo que se poderá abranger nestes estudos de correspondência os fenómenos de equilíbrio keto-enolico, inversão de Walden (stereoisomerismo), orientação nos corpos cíclicos mutação do ácido maleico → fumárico, etc.

FENÓMENOS DE BIORREDUÇÃO

ENSAIO REALIZADO COM COMPOSTOS DE BISMUTO E MOLIBDENO

POR

MANUEL RODRIGUES FERRO
Doutor em Farmácia pela Universidade Central de Madrid

1.ª PARTE

Fenómenos de biorredução

Redução é uma operação que consiste em subtrair oxigénio aos corpos compostos, quer para abaixar-lhes o grau de oxidação, quer para desoxidá-los inteiramente.

Para darmos um exemplo prático dêste fenómeno, diremos que se opera uma redução quando se transforma o ácido sulfúrico em sulfuroso, o litargírio em chumbo metálico, o óxido de ferro em ferro puro, etc.

Geralmente, para reduzir um óxido, aquece-se até alta temperatura em presença de um corpo capaz de tirar-lhe o oxigénio. Os agentes de redução mais empregados nesta operação são o carbono e o hidrogénio que formam com o oxigénio dos óxidos, CO-CO^2 e H^2O.

Com os micro-organismos, como com os agentes químicos, a redução também se produz em determinadas condições e então neste caso toma a designação de *biorredução.*

Os fenómenos de biorredução foram observados pela primeira vez pelo professor italiano Bartolomeu Gosio.

Tendo notado que algumas criptogâmicas formavam compostos arsenicais voláteis em presença do arsénio no estado livre ou combinado levou as suas investigações até aos compostos de fósforo e de antimónio e viu que possuíam as mesmas propriedades. Mais tarde Klett, guiado pela analogia química estudou a redução operada pelos micro-organismos sôbre os compostos de selénio e de telúrio, especialmente sôbre os selenitos e teluritos alcalinos.

A verdade é que estas investigações foram o feliz início de outras que depois se fizeram e relativamente à sua aplicação prática estamos convencidos de que muito há a esperar.

Por reconhecermos as estreitos relações que existem entre o bismuto e arsénio e como com êste elemento Gosio tinha obtido já biorreducção, preparámos um sal alcalino de bismuto com o qual realizámos as nossas primeiras investigações.

Os resultados obtidos foram animadores e a redução produziu-se pela formação de um pó negro pulverulento de bismuto metálico.

Com o molibdeno também obtivemos biorredução. Para chegarmos a estes resultados, necessário se tornava seguir sempre a analogia química, sem o que, a tarefa seria demasiado árdua e por certo pouco proveitosa.

Se consultarmos a classificação periódica dos elementos químicos de Mendelejeff veremos que os biorredutores arsénio e selénio estão dispostos no seu 5.º e 6.º grupos, não tendo aparecido até agora em quaisquer outros, elementos que revelassem propriedades de biorredução.

Em presença de vida bacteriana obtivemos com o bismuto uma redução completa sob a forma de pó negro pulverulento, e com o molibdeno uma coloração que ia desde azul claro a escuro, que atribuímos ao óxido azul de molibdeno.

Parece-nos que deveríamos obter biorreacção, igualmente com os compostos de cromo e de urânio, dada a sua posição no V e VI grupos da classificação de Mendelejeff. Os sais de urânio porém, tendo a propriedade de precipitar as substâncias albuminóides, seriam um obstáculo para a experiência, a não ser que se tentasse fazê-la num meio de cultura composto exclusivamente de substâncias minerais.

Biorredução dos compostos de bismuto

Durante muito tempo foi o bismuto confundido com o chumbo. No começo do século XVI, Agricola descreveu-o no seu trabalho *De Natura Fossilium* com o nome de wismuth, chumbo cinzento, marcassite branca, etc.

No sistema periódico de Mendelejeff, êste elemento encontra-se no mesmo grupo que o arsénio e o antimónio, mas por causa do seu pêso atómico elevado, perdeu os caracteres dos metalóides e pela ausência de um derivado hidrogenado gazoso e pelo caracter básico do seu óxido é considerado como metal.

Aparece geralmente nos terrenos de transição no estado nativo acompanhando sob esta forma os minérios de cobalto, níquel e prata. Também se encontra debaixo da forma de sulfureto (Bi^2S^3) conhecido pelo nome de bismutina.

Apresenta estreitas relações com os metalóides da família do azoto e particularmente com o antimónio.

É sólido, branco, quebradiço, com reflexos avermelhados, o que o distingue do antimónio, que é branco azulado.

Para realizarmos o ensaio de biorredução empregámos uma solução aquosa de um sal alcalino de bismuto contendo por cento $0^{gr},137$ de Bi.

Para a preparação dêste soluto partíamos de $0^{gr},20$ de subnitrato de $AzO^3 - Bi(OH)^2$ que tratávamos a quente pela NaOH.

Do tratamento do azotato básico de bismuto por soda, resulta finalmente: $AzO^3 - Bi(OH)^2 + NaOH = AzO^3Na + BiO(OH) + H^2O$.

Feita a solução era medido o volume certo de 100 c. c. e seguidamente esterilizada na autoclave. Em vários tubos contendo cada um 10 c. c. de caldo de cultura também convenientemente esterilizado juntávamos solução alcalina de bismuto na proporção de $^1/_{10}$.

A mistura de cada tubo era respectivamente inquinada por *Colibacilo*, *Bacilo diftérico*, *Bacilo tífico*, *Micrococus melitensis*, *Stafilococo* e *Bacilo anthracis*.

Para cada série de ensaios empregávamos um tubo testemunho contendo sòmente o meio nutritivo adicionado da solução de bismuto para verificar se só o meio de cultura seria suficiente para operar a redução.

QUADRO N.º 1

Ensaios com o bismuto

Culturas feitas em caldo comum adicionado de um sal alcalino de bismuto contendo por cento 0,137 de bismuto

	Depois de 24 horas	Depois de 48 horas	Depois de 72 horas	Depois de vários dias
Tubo testemunho	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Límpido côr normal
Colibacilo	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Precipitado negro	Precipitado negro
Bacilo diftérico	Límpido côr normal	Precipitado negro	Precipitado negro	Precipitado negro
Bacilo tífico	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Precipitado negro	Precipitado negro
Micrococus melitensis	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Precipitado negro	Precipitado negro
Stafilococo	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Precipitado negro	Precipitado negro
Bacilo anthracis	Límpido côr normal	Precipitado negro	Precipitado negro	Precipitado negro

A glucose, sendo um hidrato de carbono, tem a propriedade de aumentar o poder redutor dos micro-organismos.

Empregámo-la portanto nos ensaios que realizámos com o molibdeno, adicionando-a ao meio nutritivo. Com o bismuto, os ensaios foram realizados só em caldo simples atendendo a que a glucose tem a propriedade de reduzir o bismuto em meio alcalino.

Só 48 horas depois de colocada a cultura na estufa se obteve redução sob a forma de pó negro pulverulento com os bacilos do carbúnculo e diftérico. Ao fim de 72 horas a redução era completa em todos os tubos.

Biorredução dos compostos de molibdeno

O molibdeno que com o tungsteno e o urânio forma uma família, apresenta analogias com o cromo. É um metal pouco abundante, de côr branca, muito duro e quebradiço.

Para realizar os ensaios de biorredução empregámos o molibdato de amónio $Mo^7O^{24}(AzH^4)^6, 4H^2O$ que geralmente se encontra nos laboratórios.

Fizemos uso de uma solução a 1 % em água distilada, convenientemente filtrada e esterilizada que adicionávamos ao meio de cultura também esterilizado e contido em tubos, na proporção de 1 para 10 e seguidamentee inquinávamos a mistura com os micro-organismos.

Numa série de experiências empregámos o caldo comum como meio de cultura adicionando o molibdato na proporção de 1 %.

Os micro-organismos empregados foram o *Colibacilo*, *Bacilo diftérico*, *Bacilo tífico*, *carbúnculo*, *micrococus melitensis*, *Stafilococo* e *Prodigioso*.

Empregámos um tubo testemunho para cada série de ensaios, contendo só o meio de cultura sem o redutor e com o reagente.

Desta forma desaparecia a dúvida de que só o meio de cultura seria suficiente para operar a redução.

QUADRO N.º 2

Ensaios com o molibdeno

Culturas feitas em caldo comum adicionado de molibdato de amónio a 1 %

	Depois de 24 horas	Depois de 48 horas	Depois de 72 horas	Depois de vários dias
Tubo testemunha. . . .	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Límpido côr normal
Colibacilo.	Límpido côr normal	Precipitado azul	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro
Bacilo diftérico	Límpido côr normal	Precipitado azul claro	Precipitado azul	Precipitado azul escuro
Bacilo tífico	Límpido côr normal	Precipitado azul claro	Precipitado azul	Precipitado azul escuro
Micrococus melitensis .	Límpido côr normal	Precipitado azul	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro
Stafilococo.	Límpido côr normal	Precipitado azul claro	Precipitado azul	Precipitado azul escuro
Bacilo anthracis	Límpido côr normal	Precipitado azul claro	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro
Bacilo prodigioso. . . .	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Precipitado violeta	Precipitado violeta (1)

Numa outra série de ensaios empregamos como meio de cultura o caldo glucosado a 1 %, visto estar demonstrado que os hidratos de carbono e particularmente a glucose ou a sacarose favorecem a acção redutora dos micro-organismos.

Nas culturas em caldo simples, sem adição de glucose, só depois de 48 horas havia redução, excepto com o Bacilo Prodigioso que reduzia depois de 72 horas de formação de precipitado de côr violeta.

Esta coloração deve atribuir-se à união do vermelho, côr da cultura normal do prodigioso e do azul do composto do molibdeno.

No meio da cultura em que se adicionou glucose, o Bacilo *coli* revelou um maior poder redutor, vindo logo a seguir o *tífico* e o *micrococus melitensis*, observando-se precipitado azul depois de 24 horas. A biorredução era completa só depois de 48 horas.

(1) Coloração atribuída à união do vermelho, côr da cultura normal do prodigioso e do azul do composto de molibdeno.

A côr azul que apresenta o precipitado obtido pela acção dos micro-organismos sôbre os compostos do molibdeno tem o aspecto do *óxido azul de molibdeno* ao qual Muthmann atribui a fórmula Mo^3O^8, $2H^2O$.

QUADRO N.º 3

Ensaios com o molibdeno

Culturas feitas em caldo glucosado a 1 %
adicionado de molibdato de amónio a 1 %

	Depois de 24 horas	Depois de 48 horas	Depois de 72 horas	Depois de muitos dias
Tubo testemunha. . . .	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Límpido côr normal	Límpido côr normal
Colibacilo.	Precipitado azul	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro
Bacilo diftérico	Límpido côr normal	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro
Bacilo tífico	Precipitado azul	Precipitado azul	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro
Micrococus melitensis .	Precipitado azul	Precipitado azul	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro
Stafilococo.	Límpido côr normal	Precipitado azul claro	Precipitado azul	Precipitado azul escuro
Bacilo anthracis	Límpido côr normal	Precipitado azul	Precipitado azul escuro	Precipitado azul escuro

Sensibilidade de biorredução

Os fenómenos de biorredução não se produzem em todos os casos com a mesma intensidade; estão sob a influência do poder redutor do micro-organismo e do elemento empregado como revelador.

Como qualquer célula viva, o micro-organismo para vegetar necessita de alimentos apropriados, tais como o carbono, o oxigénio e o hidrogénio com os quais elabora os produtos ternários que compõem uma grande parte da massa celular.

Há compostos, dos quais basta uma quantidade pequeníssima para produzir biorredução, ao passo que de outros é necessário empregar mais, para que o fenómeno se produza de uma forma evidente e característica.

O revelador, como mais adiante dizemos, parece ser tanto mais activo quanto menos elevado fôr o pêso atómico do elemento de que provém.

O micróbio privado de clorofila não pode roubar ao ar o carbono de que necessita; vai portanto buscá-lo aos produtos ternários elaborados.

Com a adição de hidratos de carbono ao meio da cultura, especialmente glucose ou sacarose na percentagem de 1 a 2 % facilita-se muito a acção dos micro-organismos chegando por êste processo a operar-se a redução em menos tempo empregando mesmo menos quantidade de revelador.

A reacção do meio tem grande importância neste caso porque a resistência microbiana é diferente, conforme o meio é neutro, alcalino ou ácido. A maior parte dos micróbios exigem um meio neutro ou ligeiramente alcalino.

Pasteur, tinha utilizado a acção redutora dos micro-organismos com substâncias orgânicas. Empregava o *Penicillium glaucum* para desdobrar um ácido racémico nos dois ácidos que o formam. Neste caso o micro-organismo consome o ácido direito e deixa livre o esquerdo, do que se deduz que ataca o isómero dextrogiro de preferência ao levogiro porque êste revela-se duas vezes mais tóxico para os mamíferos que aquele.

No nosso trabalho, dos micro-organismos que empregamos, os que revelaram maior poder redutor foram o *coli* vindo logo a seguir o *tífico*, *prodigioso* e *estafilococo*.

Se apreciarmos a sensibilidade dos elementos que dão uma biorredução entrando em conta com a percentagem empregada e o tempo necessário para que a reacção se produza veremos que deverá figurar em primeiro lugar o Arsénio de pêso atómico = 74,9, vindo logo a seguir o Selénio, pêso atómico = 78; Telúrio, pêso atómico = 125; Molibdeno, pêso atómico = 95,8 e Bismuto, pêso atómico = 210.

Há portanto uma relação entre o pêso atómico de cada elemento e a sensibilidade de biorredução, do que se deduz que

As sensibilidades dos reveladores de vitalidade bactérica estão entre si na razão inversa dos seus pesos atómicos.

Pela ordem natural, o molibdeno de pêso atómico = 95,8 deveria ser mais sensível do que o telúrio de pêso atómico = 125, mas não tivemos tempo de fazer a verificação.

Dentre os elementos reveladores, os compostos de selénio e de telúrio devem ser os preferidos, especialmente o telurito de potássio, o qual pela sua sensibilidade reagindo da dose de $^1/_{25000}$ e até mesmo $^1/_{50000}$, satisfaz a todos os requisitos de um bom revelador.

O seu emprêgo junto a outras substâncias para hipodermia em nada prejudica o organismo, antes pelo contrário activa as suas funções e aumenta o apetite.

Para sabermos se num dado líquido houve biorredução basta ter em vista que o molibdeno produz coloração azul devida à formação de um óxido inferior, ao passo que com o arsénio, selénio, telúrio e bismuto, etc., a formação de um sedimento negro de metal extinto em um líquido orgânico contendo como revelador um sal dos elementos indicados será indício de uma multiplicação bacteriana e tanto mais abundante quanto mais rica e vital fôr a germinação.

QUADRO N.º 4

Classificação periódica dos elementos químicos (Mendelejeff)

(Classificação por grupos e séries)

Grupos	Tipos de combinação	Série I	Série II	Serie III	Série IV	Série V	Série VI	Série VII	Série VIII	Série IX	Série X	Série XI	Série XII
1	RH R^2O	H = 1	Li = 7,01	Na = 23,0	K = 39,1	Cu = 63,3	Rb = 85,2	Ag = 107,66	Cs = 132,15	—	—	Hg = 199,8	—
2	RH^2 RO	—	Gl = 9,3	Mg = 24,0	Ca = 39,9	Zn = 65	Sr = 87,2	Cd = 111,6	Ba = 136,8	—	—	—	—
3	RH^3 R^2O^3	—	Bo = 11,0	Al = 27,3	Sc = 44,0	Ga = 69,9	Y = 89,6	In = 113,4	La = 138,5 Ce = 141,3 Di = 147,0	—	Er = 166,0	Tl = 203,6	—
4	RH^4 RO^2	—	C = 12,0	Si = 28,0	Ti = 48,0	Ge = 72,3	Zr = 90,0	Sn = 117,8	—	—	—	Pb = 206,4	Th = 233,9
5	RH^3 R^2O^5	—	Az = 14,0	P = 31,0	V = 51,2	As = 74,9	Nb = 94,0	Sb = 122,0	—	—	Ta = 182,0	Bi = 210,0	—
6	RH^2 RO^3	—	O = 15,06	S = 31,98	Cr = 52,4	Se = 78,0	Mo = 95,8	Te = 12[illegible],0	—	—	Tu = 184,4	—	U = 240,0
7	RH R^2O^7	—	Fl = 19,1	Cl = 35,37	Mn = 54,8	Br = 79,75	—	I = 126,53	—	—	Os = 191,0	—	—
8	—	—	—	—	Fe = 56,0 Ni = 58,6 Co = 58,6	—	Ru = 103,5 Rh = 104,2 Pd = 106,3	—	—	—	Ir = 192,5 Pt = 194,4 Au = 196,2	—	—

2.ª PARTE

Condições práticas para reconhecer a esterilidade

Ordinàriamente acontece que o médico ou o farmacêutico que se encontram na ocasião de usar ou de vender um produto de cuja esterilidade devem estar seguros, tendo de servir por exemplo para hipodérmia avaliam da preparação observando a limpidez, ou fazendo um ensaio microscópico ou bacteriológico para concluir se o método empregado foi suficiente para tornar e manter o líquido asséptico.

Mas a observação da limpidez, ou da turvação acompanhada por vezes com sedimento, não garante de uma forma absoluta nem a esterilidade, nem o inquinamento.

Pode um líquido estar no máximo de transparência no momento em que o preparador o põe à venda sem contudo se poder garantir a sua esterilidade. Também pode apresentar-se turvo, mesmo com um sedimento, estando todavia asséptico, como acontece tratando-se de soros, ou de líquidos orgânicos, nos quais pode dar-se uma precipitação das substâncias albuminóides ou colóides contidas na empola, apezar de bem esterilizada.

Em outros casos, o médico pode encontrar-se na dúvida de empregar ou não uma empola para injecções, ainda perfeitamente utilizável e quando por qualquer motivo o não faça não fica absolutamente tranquilo.

O critério pois de avaliar pela limpidez ou pela turvação é pouco seguro, podendo mesmo dar-se o caso de a substância a empregar ficar em suspensão num líquido como acontece com a lecitina que se apresenta turva desde a sua origem.

Para estas preparações, quer o farmacêutico quer o médico devem ter a certeza de que o método usado foi perfeito.

O perigo de inquinamento é menor, quando a substância possa ser esterilizada directamente na empôla, mas esta pode ainda ficar mal fechada, como na prática se observa todos os dias, ou sofrer uma quebradura já depois de acondicionada.

Quando se trate de substâncias não esterilizáveis como acontece com alguns produtos opoterápicos, lecitina, etc., o perigo de inquinamento deve temer-se mais.

É portanto para estes casos que o emprêgo de um revelador de inquinamento pode ter um bom emprêgo e a propósito diremos que actualmente já alguns institutos estrangeiros estão empregando com bons resultados, selenitos e teluritos, para êste fim, sendo de esperar que o emprêgo dêstes ou doutros reagentes, se vulgarize por forma a facultar um método prático de *esterilidade visível*.

O seu emprêgo é superior aos tubos testemunhas de temperatura que se empregam para verificar se as temperaturas de esterilização foram realmente atingidas pelos objectos a esterilizar e que consiste em colocar no interior dos autoclaves pequenos tubos de vidro fechados nas duas extremidades contendo uma substância fusível à temperatura a verificar. Neste caso, a fusão torna-se manifesta pela coloração muito viva formada pelo conteúdo dos tubos aos quais se junta prèviamente fucsina ou azul de metileno.

Os indicadores de temperaturas que geralmente se empregam nos autoclaves estão resumidos no quadro seguinte:

QUADRO N.º 5

Exalgina	102°	Naftol B	123°
Pirocatechina	104	Sulfonol	125
Benzonaftol	110	Ureia	133
Acido pirotártárico	111	Aspirina	135
Antipirina	113	Acido cítrico	153
Acetanilide	114	Fenilureia	157
Pirogalol	121	Acido salicílico	157
Acido benzóico	121	Santonina	178
Acido pícrico	122	Salofena	188

A temperatura atingida que é revelada pela exalgina desde 102° c. pode ir até 188°, ponto de fusão da salofena e dar-nos uma indicação de boa ou má esterilização, mas é um método muito falível. O produto que neste caso funde, tem evidentemente de ser quìmicamente puro para não fornecer uma indicação falsa e além disto, ainda tem o inconveniente de fundir, logo que seja atingida a temperatura crítica, sem fornecer a menor indicação da duração do aquecimento que nestes casos é importantíssimo.

Quando se opera a esterilização pelo calor, as formas vegetativas das bactérias morrem entre 60° a 70° c., mas os espóros têm uma resistência mais considerável podendo resistir alguns minutos à temperatura de 120° numa atmosfera saturada de vapor de água e a 150° no ar sêco.

Para utilizar de uma forma segura a acção bactericida do calor devemos ter sempre em vista as regras seguintes:

a) Levar os objectos a esterilizar a uma temperatura suficiente para destruir os espóros e as formas vegetativas;

b) Prolongar suficientemente a duração do aquecimento;

c) Notar a reacção do meio e a natureza das espécies microbianas.

Segundo Christen, em meio húmido, os espóros do bacilo subtilis, morrem ao fim de 30 minutos numa temperatura de 115 a 120°, resistem 5 minutos a 130° e 1 minuto a 135-140°.

A reacção do meio tem grande importância neste caso, porque a resistência é diferente, conforme o meio é neutro, alcalino ou ácido.

¿Em vista disto podemos confiar de alguma forma nas indicações fornecidas pelos tubos testemunhas? Evidentemente que não.

Além doutras aplicações, na esterilização de produtos gelatinados destinados a serem empregados por via hipodérmica podem os elementos biorredutíveis prestar relevantes serviços.

A gelatina, que se emprega no soro gelatinado e outras preparações, é um derivado do tecido conjuntivo ósseo e cartilagíneo; obtém-se por hidratação da osseina dos ossos e da queratina dos cartilagíneos dos mamíferos.

Foi aplicada em terapêutica em 1875, quando Carnot reconheceu as suas propriedades hemostáticas locais e gerais. Sendo um produto essencialmente delicado, requere uma preparação cuidadosa e uma esterilização perfeita, principalmente quando se destina a ser usado pela via hipodérmica. A gelatina que se encontra à venda no comércio, de proveniência de animais de saúde incerta, causou nos primeiros tempos em que começou a ser aplicada *gravíssimos casos de tétano.*

Fazer portanto uso de uma gelatina mal preparada é expor-se às suas consequências desagradáveis.

O emprêgo de um revelador, pode pois indicar visìvelmente a boa ou má esterilização do produto.

Neste caso, a gelatina deve apresentar-se perfeitamente transparente e sem precipitado. Se porém apresentar coloração, ou flocos negros ao longo das paredes do recipiente deve ser inutilizada como imprópria, porque é indício seguro de inquinamento posterior à preparação.

Conclusões

I

Os elementos que sofrem biorredução encontram-se dispostos nos grupos V e VI da classificação periódica dos elementos químicos de Mendelejeff.

II

A sensibilidade dos elementos considerada sob o ponto de vista de biorredução é inversamente proporcional aos seus pesos atómicos.

III

A biorredução dos compostos de bismuto é semelhante à do selénio e do telúrio, mas menos sensível, devido ao seu pêso atómico elevado.

IV

Com os compostos de molibdeno, em presença de microorganismos, contràriamente ao que sucede com os de bismuto, arsénio, telúrio, etc., que são reduzidos à forma de pó negro de metal extinto, só se obtém um óxido inferior de coloração azul.

V

Como ótimo revelador de inquinamento, quer pela sua sensibilidade, quer por ser inofensivo para o organismo, optamos pelo telúrito de potássio que reagindo perfeitamente na dose de $^1/_{25000}$ satisfaz a todos os requisitos de um bom revelador.

VI

A indicação de vitalidade bactérica será dada, pelos compostos de bismuto, selénio, telúrio, etc., pela formação de pó negro pulverulento de metal extinto e pelos de molibdeno, pelo aparecimento de coloração azul claro ou escuro de óxido azul de molibdeno.

VII

Os tubos testemunhas que se empregam nos autoclaves para verificar as temperaturas atingidas, apresentam vários inconvenientes, bastando não fornecer indicação alguma da duração do aquecimento que nestes casos é importante.

VIII

As preparações tendo por base a gelatina que muitas vezes anda inquinada de tétano e também alguns produtos opoterápicos que não possam sofrer uma esterilização conveniente e que tenham de ser aplicados por via hipodérmica, como garantia de esterilização devem ser adicionados de um revelador de inquinamento.

BIBLIOGRAFIA

Agenda Dunod (chimie), 1920.
Jules Courmont — *Précis de bacteriologie pratique.*
Maurice Arthus — *Précis de chimie physiologique.*
P. E. Alessandri — *Manual Prático de Farmácia.*
L. Troost — *Traité de chimie.*
Muthmann — *Ann. chim. Pharm.*, 1888.

WASSERMANN-MERCÚRIO LANDAU-IODO

POR

JOÃO ALBERTO DE SOUSA VIEIRA

Médico

As considerações que seguem são inspiradas pelos resultados clínicos que a reacção do dr. W. Landau, abandonada entre nós, mas acariciada, pelo menos, pelos analistas e clínicos de Viena, nos tem fornecido.

Diz-se que tal reacção tem apresentado de quando em vez resultados bizarros. Assim será. Contudo, pelo que nos diz respeito e, dadas as condições duma técnica rigorosa, condição *sine qua non* de resultados elucidativos, não a desprezamos, antes a aconselhamos como recurso clínico de urgência que uma Wassermann oportunamente feita no laboratório confirma ou regeita.

Colocamos a reacção química de Landau na vanguarda das que são conhecidas pelos nomes de Porgès, de Schumann, de Bauer, etc.

Preparação do reagente

Num pequeno almofariz de vidro pesam-se 25 miligramas de iodo em 0,2 cc. de álcool (uma pequena vareta de vidro para dissolver). Verte-se esta solução num tubo de ensaio munido numa rolha de vidro e junta-se aí vaselina líquida quìmicamente pura até atingir o volume de 50 cc. Pela agitação obtém-se uma côr vermelho-violeta. O amido, que se emprega como indicador, deve ser recentemente feito (cozimento a 1 %).

Técnica da reacção

Deita-se no tubo de Landau 0,2 cc. de soro e junta-se o reagente até ao traço. Agita-se enèrgicamente até obter uma mistura homogénea (o reagente descora-se cada vez mais);

tapa-se o tubo com uma rôlha de borracha e conserva-se na obscuridade. De 2 em 2 horas, juntam-se umas gotas de amido. Os soros normais tornam-se azul, azul carregado, azul escuro. Os sifilíticos, tomam a côr amarelo-escuro ou mesmo branco. Os fracamente sifilíticos apresentam traços azues. Devemos anotar, como observação importante, que a reacção deve ser feita em soros muito frescos.

Em 150 Landaus simultâneos com o Wassermann, obtivemos os seguintes resultados: 111 W. positivos e 91 L. positivos. Há, pois 20 casos em que falhou o Landau. Mas, nestes 20 casos, 15 eram de indivíduos (Clínica do dr. José Figueirinhas) que tomavam substâncias iodadas.

Em face dêstes dados e abstraindo, ainda, de doenças não sifilíticas em que a reacção de Wassermann pode ser positiva, como a lepra, a escarlatina, tripanosomíase, etc., concluímos:

1.º Ocupa o primacial lugar, entre as reacções biológicas, o Wassermann, como diagnóstico laboratorial da avariose, falhando, como é sabido, em indivíduos que tomaram mercúrio e persistindo a negatividade, consoante a intensidade da doença ou as doses terapêuticas.

2.º Ocupa um lugar de destaque entre as reacções químicas, acessíveis a todo o clínico, como diagnóstico da avariose, a reacção do dr. W. Landau, falhando em indivíduos que tomaram iodo e persistindo a negatividade consoante a intensidade da doença ou as doses terapêuticas.

Pôrto, 6 de Junho de 1921.

ÍNDICE

Nota. — Outros trabalhos portugueses foram apresentados nestas secções do Congresso, mas ou não ficaram arquivados na respectiva Secretaria ou foram já publicados.

[illegible]