PRINCIPIOS ELEMENTARES

DO

CALCULO DE QUATERNIÕES

POR

AUGUSTO D'ARZILLA FONSECA

Licenciado em Mathematica, Bacharel formado em Philosophia
e Tenente de Infanteria

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1884

PRINCIPIOS ELEMENTARES

DO

CALCULO DE QUATERNIÕES

POR

AUGUSTO D'ARZILA FONSECA

Licenciado em Mathematica, Bacharel formado em Philosophia
e Tenente de Infanteria

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1884

Ao Ex.mo Snr. Dr. Julio Augusto Henriques
como prova de muita consideração e gratidão
Offerece
Augusto d'Arzila Fonseca

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O

ACTO DE CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

A

MEUS PAES

E A

MINHA ESPOSA

Sir William Rowan Hamilton começou em 1844 a tractar nos *Philosophical Magasine, Irish Academy Transactions* e *Irish Academy Proceedings,* um novo calculo, a que deu o nome de *Methodo* ou *Calculo de quaterniões.*

Em 1853 publicou as *Lectures on quaternions,* e n'ellas explicou e justificou o caminho e as considerações que o levaram a formar o seu calculo e fez a exposição da sua theoria. Continuou ainda depois a publicar em differentes jornaes applicações dos quaterniões a diversas questões mathematicas, e finalmente logo depois da sua morte appareceram os *Elements of quaternions,* que constituem um compendio de toda a theoria do calculo dos quaterniões e conteem um grande numero de applicações.

Em Inglaterra, Allemanha e America foi este novo calculo tão bem recebido, que muitos auctores se teem dedicado a elle, escrevendo livros e artigos em differentes jornaes com o fim de apresentar simplificações e augmentar o campo das suas applicações.

M. G. Bellavitis com o *calculo das equipollencias* póde dizer-se que estabeleceu o *calculo dos factos geometricos em um plano,* e seria natural portanto procurar estabelecer o *calculo dos factos geometricos no espaço.* Attingiu este fim Hamilton apresentando o calculo dos quaterniões.

As maiores difficuldades que este novo calculo apresenta são devidas a que as regras do *calculo algebrico ordinario* não são sempre applicaveis, emquanto que o são no calculo das equipollencias.

Ainda que os quaterniões se não appliquem vantajosamente a todos os ramos das Mathematicas, introduzem porém em alguns d'elles uma grande concisão e dão ás suas soluções um manifesto caracter intuitivo.

Attendendo á novidade (entre nós) do assumpto e á sua importancia, resolvemos escolher para *dissertação inaugural,* a que por lei somos obrigados, a exposição elementar dos principios do calculo dos quaterniões, reservando para mais tarde o fazer a sua applicação á Mecanica.

N'esta exposição, em vez de seguirmos exclusivamente o caminho analytico ou o geometrico, adoptamol-os conjunctamente, por nos parecer que damos assim mais simplicidade e clareza á interpretação dos resultados.

Dizemos tambem alguma cousa relativamente ás *propriedades das operações,* limitando-nos porém ao que julgamos indispensavel para o estudo que temos em vista; e não tractamos do calculo das variações de quaterniões, dos integraes de funcções de quaterniões e das funcções exponenciaes, em que os expoentes são quaterniões, e por meio das quaes Hamilton definiu os logarithmos de quaterniões, por exigirem uma grande extensão que nem sempre póde ser feita elementarmente, e mesmo porque são assumptos que ainda não estão completamente assentes.

Coimbra, junho de 1884.

I

Propriedades das operações

1. *Operação* é o acto que transforma um phenomeno em outro, correspondendo uma combinação de operações a uma successão de phenomenos.

As operações podem ser *simples* ou *complexas:* as operações fundamentaes de Algebra são *simples,* e as construcções geometricas são *complexas.* Em geral estas ultimas podem ser decompostas em operações simples e as theorias que tractam d'esta decomposição designam-se por *theorias analyticas.* As theorias fundadas no emprego de operações complexas são denominadas *theorias syntheticas.*

Abstrahindo dos effeitos reaes das operações e do modo porque se executam, reconhece-se que ellas apresentam certas propriedades geraes e que podem ser chamadas *propriedades combinatorias.*

Empregaremos, para indicar operações, signaes differentes dos que se usam em Algebra, segundo fez Grassmann; assim os signaes $\frown$ e $\uparrow$ indicarão duas operações differentes uma da outra e

$$a \frown b$$

a operação que resulta da combinação do *objecto a* com outro *b.*

2. Quando dois objectos se podem substituir mutuamente em uma operação sem que o seu resultado seja alterado dizem-se *eguaes*, e a operação em que se faz uma tal substituição chama-se *uniforme*.

A *uniformidade* de uma operação exprime-se por

$$a \frown b = a' \frown b' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

sendo

$$a = a', \ b = b'.$$

Uma operação diz-se *commutativa* quando o seu resultado se conserva o mesmo pela mudança de logar dos seus objectos, e esta propriedade exprime-se por

$$a \frown b = b \frown a. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Chama-se *associativa* uma operação que, resultando de uma serie de combinações de qualquer numero de objectos, dá o mesmo resultado, qualquer que seja a ordem porque se effectuem estas combinações; póde exprimir-se esta propriedade por

$$a \frown b \frown c = a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c. \ldots\ldots \quad (3)$$

Uma operação $\frown$ diz-se *distributiva* em relação a outra $\uparrow$ quando se tenha a relação

$$\left.\begin{array}{l} (a \uparrow b) \frown c = (a \frown c) \uparrow (b \frown c) \\ \text{ou} \\ a \frown (b \uparrow c) = (a \frown b) \uparrow (a \frown c). \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Se a primeira operação é *commutativa* teremos

$$a \frown c = c \frown a \ \text{ e } \ b \frown c = c \frown b$$

e

$$(a \uparrow b) \frown c = (c \frown a) \uparrow (c \frown b) = c \frown (a \uparrow b), \ldots\ldots \quad (5)$$

que indica ter logar a propriedade distributiva em relação a ambos os termos da operação. Exprime-se esta circumstancia dizendo que a operação $\frown$ é *completamente distributiva* em relação á operação $\uparrow$; quando porém se não der esta circumstancia, a operação $\frown$ dir-se-ha *parcialmente distributiva* em relação ao primeiro ou ao segundo termo.

3. Se representarmos por r o resultado da operação $a \frown b$, chamaremos *operação inversa* de $\frown$ a operação que serve para determinar um dos dois objectos, considerado desconhecido, por intermedio do resultado e do outro objecto, considerado conhecido. A operação directa sendo commutativa terá uma só operação inversa, de contrario haverá duas operações inversas distinctas relativas ao primeiro e segundo objecto.

No primeiro caso, indicando a operação unica inversa de $\frown$ por $\smile$ (combinado inversamente com), teremos

$$a = r \smile b, \quad b = r \smile a,$$

e no segundo, indicando as operações inversas relativas ao primeiro e ao segundo objecto por $\smile$ e ψ,

$$b = r \smile a, \quad a = r \,\psi\, b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Substituindo na primeira d'estas ultimas expressões o valor de r, teremos

$$b = (a \frown b) \smile a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

e, substituindo em $a \frown b = r$ o valor (6) de b e mudando depois r em b,

$$a \frown (b \smile a) = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Analogamente se acharia em relação á segunda expressão (6)

$$(a \frown b) \,\psi\, b = a, \quad (a \,\psi\, b) \frown b = a, \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

e estas expressões podem servir para definir as relações que ha entre as operações inversas.

Se a operação directa é commutativa, as relações (9) estão comprehendidas em (7) e (8).

As propriedades das operações inversas dependem das propriedades das operações directas.

Quando as inversas de uma operação são uniformes diz-se que a operação é *completamente uniforme.*

4. Da propriedade associativa de uma operação resultam-lhe outras propriedades importantes, que vamos indicar.

Chama-se *modulo* de uma operação um objecto m que combinado por essa operação com outro dá este ultimo; teremos por definição

$$a \frown m = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Sendo $\frown$ uma operação associativa, teremos

$$a \frown (m \frown b) = (a \frown m) \frown b = a \frown b,$$

e sendo completamente uniforme

$$m \frown b = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ora, como por definição é $b \frown m = b$, segue-se que a propriedade do modulo subsiste tanto para quando elle seja o primeiro como o segundo termo da combinação; isto é, a operação entre o seu modulo e um objecto qualquer é commutativa.

As operações inversas de $\frown$ dão

$$a \smile m = (m \frown a) \smile m = a, \quad a \uplus m = (m \frown a) \uplus m = a, \ldots \quad (12)$$

que mostram que o modulo combinado pelas operações inversas com um objecto reproduzem este.

De

$$(a \frown m) \smile a = m = a \smile a \,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

deduz-se que o modulo de uma operação é dado pela combinação respectivamente inversa de um objecto com o mesmo objecto.

5. Chama-se objecto *reciproco* de outro, a, o resultado da operação inversa $m \smile a$ e representa-se por $\bar{a}$. Como é

$$a \frown \bar{a} = a \frown (m \smile a) = m \,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

teremos um outro modo de determinar o modulo de uma operação.

Se $\bar{a}$ é reciproco de a, inversamente a será o objecto reciproco de $\bar{a}$; com effeito, o reciproco de $\bar{a}$ será por definição

$$x = m \smile \bar{a},$$

e como é tambem (14)

$$\bar{a} \frown x = m,$$

teremos

$$a \frown (\bar{a} \frown x) = a \frown m,$$

e, sendo associativa a operação $\frown$,

$$[a \frown (m \smile a)] \frown x = m \frown x = a \frown m;$$

logo

$$x = m \smile \bar{a} = a.$$

Por ser

$$\bar{a} \frown a = \bar{a} \frown (m \smile \bar{a}) = m = a \frown \bar{a} \ldots\ldots \quad (15)$$

vê-se que a operação entre objectos reciprocos é commutativa.

6. A introducção dos objectos reciprocos póde transformar as operações nas suas inversas. Com effeito, tendo-se

$$a \smile b = x,$$

será por definição

$$a = b \frown x;$$

e sendo $\frown$ associativa

$$\bar{b} \frown a = (\bar{b} \frown b) \frown x = x,$$

logo a operação inversa $a \smile b$ transforma-se na directa $\bar{b} \frown a$.

Teremos reciprocamente

$$a \frown b = \bar{b} \smile a. \dots\dots\dots\dots\dots (16)$$

Como é

$$a \frown \bar{x} = (b \frown x) \frown \bar{x} = b$$

e portanto

$$\bar{x} = b \smile a,$$

vê-se que $a \smile b$ e $b \smile a$ são resultados reciprocos.

Das relações anteriores deduz-se facilmente que $\bar{a} \smile b$ e $\bar{b} \frown \bar{a}$ são reciprocos de $a \frown b$.

7. Quando tem logar a propriedade distributiva podemos deduzir as consequencias seguintes.

Seja m' o modulo da operação $\uparrow$ e $\bar{a}$ o objecto reciproco de a em relação a esta operação, teremos

$$(a \uparrow \bar{a}) \frown c = (a \frown c) \uparrow (\bar{a} \frown c) = m' \frown c;$$

e sendo $\frown$ uma operação que dê $m' \frown c = m'$, teremos

$$(a \frown c) \uparrow (\bar{a} \frown c) = m',$$

que dá, designando por $\downarrow$ uma operação inversa de $\uparrow$,

$$\bar{a} \frown c = m' \downarrow (a \frown c) = \overline{a \frown c}; \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

isto é, que em relação á operação $\uparrow$ $\bar{a} \frown c$ é reciproco de $a \frown c$.

Achar-se-hia analogamente, supponndo que a mesma operação $\frown$ dá $a \frown m' = m'$,

$$a \frown \bar{b} = \overline{a \frown b}. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Se a operação $\frown$ é completamente distributiva ter-se-ha, attendendo a (17) e (18),

$$(a \uparrow \bar{a}) \frown (b \uparrow \bar{b}) = m' \frown m' = m' = (\overline{a \frown b}) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}),$$

d'onde se tira

$$\bar{a} \frown \bar{b} = m' \downarrow (\overline{a \frown b}) = a \frown b. \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

II

Vectores e sua composição

8. *Vector.* A linha recta que une dois pontos A e B, representando o *caminho* que ùm *ponto movel* seguiria para ir da posição *inicial* A á posição *final* B, chama-se *vector do ponto B com origem em A* (the vector of the point B, from the point A) ou mais concisamente *vector.*

Como esta linha tem um comprimento e direcção definidos no espaço dependerá de *tres* quantidades numericas, *uma* correspondente ao seu *comprimento* e *duas* á sua *direcção.*

A linha assim definida será representada symbolicamente por $\overline{AB}$, escrevendo-se primeiro a lettra indicativa da origem.

O vector $\overline{AB}$ póde ser considerado como representando a differença geometrica entre a posição no espaço do ponto B e a do ponto A, e n'este sentido deu-lhe Hamilton o symbolo $B - A$, em que o signal — tem a significação ordinaria de Algebra, e pelas lettras B e A se indicam as posições respectivas dos pontos B e A. E, como a posição de qualquer ponto no espaço depende de *tres* quantidades numericas, tambem o symbolo $B - A$ dependerá de tres numeros.

Diremos portanto que o ponto A é *levado* á posição B pelo *vector* $\overline{AB}$, ou que a *differença de posição* no espaço do ponto B em relação a A é o *vector* $B - A$.

9. A significação dada a um *vector* é muito differente da que, em geral, tem um *raio-vector;* este é caracterisado por *uma só* quantidade numerica, que dá o seu comprimento, em quanto o *vector* para ser determinado exige o conhecimento de *tres: uma* que exprima o comprimento (raio-vector) e *duas* a sua direcção.

Alguns geometras teem dado ao que chamamos vector o nome de *linha dirigida* por ser a direcção um dos elementos essenciaes da sua definição.

Por simplicidade representaremos um vector por uma lettra grega pequena, e por isso os tres symbolos de um mesmo vector

$$\overline{AB},\ B-A \text{ e } \alpha$$

podem ser considerados como *equisignificantes.*

10. *Vectores eguaes.* Os vectores que teem o mesmo comprimento e a mesma direcção no espaço (parallelos e com o mesmo sentido), dependendo evidentemente das mesmas tres quantidades numericas, podem ser chamados *eguaes* e representados pela mesma lettra.

Indicando a egualdade entre os dois vectores $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ pelo signal =, teremos

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \alpha,$$

que mostra ter o signal =, que liga dois vectores, uma significação mais ampla que em Algebra, porque comprehenderá tres equações numericas ordinarias ligando as quantidades que os definem.

11. *Addição e subtracção de vectores.* Considerando tres pontos A, B, C no espaço e para maior generalidade não existentes em uma mesma linha recta, como o resultado da *vecção* de um ponto movel da posição A a B e depois d'este ponto a C *equivale* a uma *vecção* unica de A a C; e como, considerando os vectores como *differenças de posições,* a differença das posições de C e A equivale evidentemente a tomarmos a differença da posição de B em relação á de A e depois a de C em relação á de B anteriormente achada; podemos pôr

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

ou

$$(B-A)+(C-B)=C-A,$$

e em geral para um numero qualquer de pontos

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\ldots+\overline{YZ}=\overline{AZ}$$

ou

$$(B-A)+(C-B)+(D-C)+\ldots+(Z-Y)=(Z-A).$$

Indicamos pelo signal + esta combinação successiva de vecções, e á operação pela qual se obtem a vecção resultante equivalente daremos o nome de *addição* de vectores.

Se os differentes vectores que quizermos addicionar tiverem posições diversas no espaço, tomaremos para origem de vectores respectivamente *eguaes* a cada um d'elles a extremidade do antecedente, formando-se d'este modo uma linha polygonal. A addição de vectores indica portanto uma *composição de vecções* analoga á composição das forças e velocidades simultaneas em Mecanica.

12. Se o ponto C coincidisse com A teriamos

$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=0,$$

representando pelo symbolo 0 um vector nullo.

Definiremos o signal − pela relação

$$\overline{BA}=-\overline{AB}\ (*),$$

(*) Ao vector de comprimento egual ao de outro mas de direcção opposta (parallelos e de sentidos contrarios) deu Hamilton o nome de *revector* (de revehere).

que mostra que este signal applicado a um vector lhe inverte o sentido.

A expressão dada pelos tres pontos A, B e C póde então escrever-se

$$\overline{AC}=\overline{AB}-\overline{CB},$$

e á operação pela qual obtemos o vector resultante $\overline{AC}$ pela combinação indicada pelo signal —, e que é inversa da addição, daremos o nome de *subtracção.*

E vê-se que a subtracção de vectores se reduz á addição logo que invertamos o sentido da direcção dos vectores affectados do signal —.

13. Se os vectores que queremos addicionar são parallelos, então o *vector resultante* póde ser representado por um d'elles multiplicado por uma quantidade numerica, que, em geral, póde ser commensuravel ou incommensuravel, positiva ou negativa.

Assim, para tres pontos A, B, C, collocados em linha recta, teremos

$$\overline{BC}=x\text{AC},$$

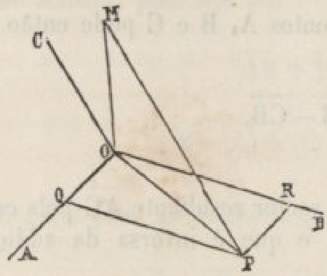
sendo x um numero; e, tomando na mesma direcção de um vector α um vector de comprimento egual á unidade, que representaremos por α_1, e sendo a o comprimento de α, teremos

$$\alpha=a\alpha_1.$$

14. *Decomposição de vectores.* Os vectores existentes em um mesmo plano chamam-se *coplanares,* e os que teem uma mesma origem *coiniciaes.*

Para representarmos que tres vectores α, β, γ são coplanares poremos, segundo Hamilton, $\gamma \,|||\, \alpha, \beta$.

Supponhamos dados (em comprimento e direcção) dois vectores coiniciaes e não parallelos $\overline{OA}=\alpha$, $\overline{OB}=\beta$, fig. 1, e consideremos um terceiro $\overline{OP}$ coplanar e coinicial com α e β; teremos, tirando-se PQ parallelamente a $\overline{OB}$,



$$\overline{OP}=\overline{OQ}+\overline{QP},$$

e, por ser n.º 13,

$$\overline{OQ}=x\overline{OA},\quad \overline{QP}=y\overline{OB}$$

$$\overline{OP}=x\alpha+y\beta.$$

Supponhamos agora que sejam dados os tres vectores coiniciaes e não coplanares $\overline{OA}=\alpha$, $\overline{OB}=\beta$, $\overline{OC}=\gamma$; para um vector $\overline{OM}=\rho$, tirando $\overline{MP}$ parallelamente a $\overline{OC}$, teremos

$$\overline{OM}=\overline{OP}+\overline{PM}$$

logo

$$\rho=x\alpha+y\beta+z\gamma.$$

Como os pontos P e Q são determinados, segue-se que a decomposição de um vector segundo duas direcções ou tres não coplanares só se póde fazer de um unico modo.

Um outro vector ρ', com a mesma origem de ρ, seria decomposto segundo α, β e γ pela expressão

$$\rho'=x'\alpha+y'\beta+z'\gamma;$$

e a relação $\rho'=\rho$ envolveria evidentemente as tres equações ordinarias $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$.

No caso de α, β e γ estarem em um mesmo plano, qualquer d'elles se poderia exprimir em funcção dos outros dois, e portanto teriamos em $\rho' = \rho$ apenas duas equações numericas distinctas, se ρ e ρ' além d'isso estivessem tambem no plano de α, β e γ.

Se estes tres vectores forem *vectores-unidades* (vectores de comprimento egual á unidade) e perpendiculares entre si denotal-os-hemos por i, j, k, conforme fez Hamilton, e teremos para expressão geral de um vector em funcção d'elles

$$\rho = xi + yj + zk$$

e do seu comprimento

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

15. *Propriedades da addição de vectores.* Como os vectores eguaes dependem das mesmas quantidades numericas, a substituição na addição de vectores de alguns ou de todos estes por outros que lhes sejam eguaes não alterará o resultado, e portanto esta operação será *uniforme.*

A figura 1 mostra ter-se

$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP} = \overline{OR} + \overline{RP} = \overline{QP} + \overline{OQ};$$

e, como os pontos P e Q podem ter qualquer posição, teremos sempre a relação

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

que exprime ser a *addição* de dois vectores uma operação *commutativa,* e esta propriedade facilmente seria estendida ao caso de se ter um numero qualquer de vectores.

Considerando quatro pontos no espaço A, B, C, D teremos

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CD},\ \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD},\ \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

logo

$$\overline{AB}+(\overline{BC}+\overline{CD})=(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD};$$

ou para tres vectores quaesquer

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma,$$

que exprime ser a addição de vectores uma operação *associativa*.

A subtracção de vectores terá estas mesmas propriedades como operação inversa da addição.

16. *Equações vectoriaes.* Pelo que se disse no n.º 13, a equação de uma recta tirada parallelamente a um vector dado β e tendo a mesma origem será

$$\rho=x\beta,$$

representando por x um numero indeterminado que será tomado para variavel, porque a cada valor particular que lhe dermos teremos um vector correspondente.

A equação de uma recta tirada pela extremidade de um vector α e parallelamente a outro β será

$$\rho=\alpha+x\beta.$$

Das tres equações numericas comprehendidas n'estas duas ultimas equações vectoriaes, uma deve servir para eliminar a indeterminada x, e portanto a equação de uma linha recta vem a depender de duas equações ordinarias distinctas.

A equação de um plano tirado pela origem de dois vectores coiniciaes dados, α, β e comprehendendo-os é

$$\rho=x\alpha+y\beta,$$

sendo x e y dois numeros indeterminados.

A equação de um plano tirado pela extremidade de um vector γ e parallelamente aos dois α, β, é

$$\rho=\gamma+x\alpha+y\beta.$$

Estas duas ultimas equações veem a depender de uma só equação numerica, porque as duas outras que ellas comprehendem servirão para eliminar as duas indeterminadas.

A equação

$$\rho=x\alpha+y\beta+z\gamma$$

representará para cada valor determinado das quantidades x, y, z a equação de um ponto; e considerando-as variaveis indeterminadas representará todo o espaço e apenas um determinado espaço se tiverem de satisfazer a condições especiaes.

17. Em geral, a equação

$$\rho=p\alpha+p'\alpha'+p''\alpha''+\ldots=\Sigma p\alpha,$$

em que $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ são vectores dados, e $p, p', p'', \ldots$ quantidades numericas, pertencerá a uma *linha* se estas quantidades dependerem de uma só variavel independente, a uma *superficie* se dependerem de duas, e a um *volume* se dependerem de tres.

Poderemos pôr no primeiro caso, sendo t a variavel independente,

$$\rho=\varphi(t),$$

no segundo, sendo t e u as variaveis independentes

$$\rho=\varphi(t, u),$$

e no terceiro, sendo t, u e v as variaveis independentes

$$\rho=\varphi(t, u, v).$$

18. Sendo α e β dois vectores coiniciaes, o vector ρ que une as suas duas extremidades será expresso por $\beta-\alpha$, e a equação da recta que tem a mesma direcção será

$$\rho=\alpha+x(\beta-\alpha)$$

ou

$$\rho+(x-1)\alpha-x\beta=0.$$

Esta equação póde ser escripta sob a fórma

$$p\rho+p'\alpha+p''\beta=0,$$

junctando-lhe a condição

$$p+p'+p''=0.$$

Considerando os tres vectores coiniciaes e não coplanares α, β, γ, os vectores que unem as extremidades de α e β e as de β e γ são representados respectivamente por $\beta-\alpha$ e $\gamma-\beta$; logo a equação do plano que passa pelas extremidades dos tres vectores é

$$\rho=\alpha+x(\beta-\alpha)+y(\gamma-\beta)$$

ou

$$\rho+(x-1)\alpha-(x-y)\beta-y\gamma=0,$$

que se póde escrever

$$p\rho+p'\alpha+p''\beta+p'''\gamma=0,$$

e junctando-lhe a condição

$$p+p'+p''+p'''=0.$$

Podemos portanto enunciar os dois theoremas seguintes:

Quando uma funcção linear de tres vectores é egual a zero e a somma dos coefficientes numericos dos vectores é nulla, as extremidades dos vectores estarão em uma mesma linha recta.

Quando uma funcção linear de quatro vectores é egual a zero e a somma dos coefficientes numericos é nulla, as extremidades dos vectores estarão em um mesmo plano.

19. Applicações. *As rectas que unem as extremidades do mesmo lado de duas rectas eguaes e parallelas são tambem eguaes e parallelas entre si.*

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ as duas rectas dadas; teremos pela addição de vectores

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CD},$$

d'onde se tira

$$\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{BD}.$$

Por hypothese é

$$\overline{AB} = \overline{CD},$$

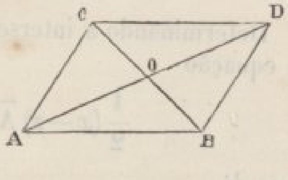
logo será tambem

$$\overline{AC} = \overline{BD},$$

e portanto as rectas AC e BD serão eguaes e parallelas (10).

20. *As diagonaes de um parallelogrammo cortam-se mutuamente em partes eguaes.*

Sejam AD e BC as diagonaes do parallelogrammo ABDC, e O o ponto em que ellas se cortam; teremos



$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}, \quad \overline{CD} = \overline{CO} + \overline{OD},$$

d'onde se tira

$$\overline{AO} - \overline{OD} = \overline{CO} - \overline{OB}$$

que só póde ser satisfeita, representando vectores com direcções differentes, por

$$\overline{AO}=\overline{OD},\quad \overline{CO}=\overline{OB}.$$

21. *As medianas de um triangulo encontram-se em um mesmo ponto que trisecta cada uma d'ellas.*

Seja o triangulo ABC e O o ponto de encontro das medianas Aa, Bb, Cc. Para determinarmos a intersecção das meridianas Aa e Bb temos

$$\overline{AO}=x\overline{Aa},\quad \overline{BO}=y\overline{Bb},$$

$$\overline{Aa}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}),\quad \overline{Bb}=\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AB}),\quad \overline{AO}=\overline{AB}+\overline{BO},$$

que dão

$$\left(\frac{1}{2}x+y-1\right)\overline{AB}=\frac{1}{2}(y-x)\overline{AC},$$

e que só póde ser satisfeita por

$$\frac{1}{2}x+y-1=0,\quad y-x=0;$$

logo será

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{Aa}\ \text{ e }\ \overline{BO}=\frac{2}{3}\overline{Bb}.$$

Determinando a intersecção de Aa e Cc teremos analogamente a equação

$$\frac{1}{2}(x-z)\overline{AB}=\left(1-\frac{1}{2}x-z\right)\overline{AC},$$

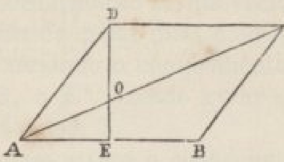
que dá

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{Aa}\ \text{ e }\ \overline{CO}=\frac{2}{3}\overline{Cc}.$$

Logo as tres medianas cortam-se em um mesmo ponto trisectando-se.

22. *Sendo* ABCD *um parallelogrammo e* E *o meio do lado* AB, *as rectas* AC *e* ED *cortam-se mutuamente a um terço do seu comprimento.*

Seja O o ponto em que se cortam as rectas AC e ED; teremos



$$\overline{AO} = x\overline{AC},\ \ \overline{EO} = y\overline{ED}$$

e

$$\overline{AO} = \overline{AE} + \overline{EO};$$

e por ser

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \ \text{ e } \ \overline{ED} = \overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{AB},$$

virá

$$\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)\overline{AB} = (y - x)\,\overline{BC},$$

que dá

$$x = y = \frac{1}{3},$$

e portanto

$$\overline{AO} = \frac{1}{3}\overline{AC} \ \text{ e } \ \overline{EO} = \frac{1}{3}\overline{ED}.$$

III

Producto e quociente de vectores. Quaterniões.

23. *Definição dos signaes* $\times$ *e* $\div$. Pela addição de vectores procuramos o *operador* capaz de fazer com que um ponto movel, partindo de uma dada posição inicial, chegasse a uma dada posição final; procuremos agora o *operador* capaz de fazer com que um *vector* dado possa construir ou coincidir com outro vector tambem dado.

Sendo α e β os dois vectores, representaremos por

$$\beta \div \alpha$$

o *operador* necessario para que α construa β, e a operação da construcção por

$$(\beta \div \alpha) \times \alpha = \beta.$$

Esta relação define os signaes $\times$ e $\div$, e por analogia com as operações algebricas daremos ás operações que elles indicam os nomes de *multiplicação* e *divisão.*

Logo, o *operador* da transformação do vector α no vector β será o resultado da *divisão* de β por α, e a operação da transformação consistirá na *multiplicação* de α por aquelle operador.

Analogamente tambem aos usos algebricos poderemos substituir o signal $\times$ por um ponto e mesmo supprimil-o, quando d'esta suppressão não provenha ambiguidade; e o signal $\div$ substituil-o-hemos por um traço horisontal separando os dois vectores, collocando superiormente o que resulta da transformação.

24. *Definição de quaternião.* A transformação de um vector α em outro β póde considerar-se produzida pelas duas operações parciaes e successivas seguintes: 1.ª variando o comprimento de α até que elle se torne egual ao de β, e 2.ª fazendo gyrar α ao redor da origem commum até coincidir com β.

A primeira d'estas operações parciaes exige o conhecimento de *uma* quantidade numerica (relação dos comprimentos dos dois vectores), e a segunda o conhecimento de *tres, duas* dando o plano da rotação e *uma* o valor d'esta rotação.

Estas duas operações podem succeder-se evidentemente em qualquer ordem, e sempre o *operador* da transformação de um vector em outro dependerá das *quatro* quantidades a que nos referimos; por esta razão deu Hamilton a este operador o nome de *quaternião* (quaternion).

25. *Tensor* e *versor.* Ao factor parcial, que opera a *variação em comprimento* e que é uma quantidade numerica, chama-se *tensor*, e ao factor que opera a *rotação* chama-se *versor*, e designam-se pelas lettras caracteristicas T e U antepostas ao symbolo do quaternião.

E, como em um quaternião podemos considerar o seu tensor ou o seu versor, estas duas caracteristicas servirão tambem para representar as operações de *tomar o tensor* e de *tomar o versor* (of taking the tensor and of taking the versor).

Indicaremos um quaternião pela divisão de dois versores ou, mais simplesmente, por uma lettra italica minuscula, e pelo que fica dicto teremos

$$q = \mathrm{T}q \,.\, \mathrm{U}q = \mathrm{U}q \,.\, \mathrm{T}q,$$

sendo $\mathrm{T}q$ dependente só dos comprimentos e $\mathrm{U}q$ das direcções dos vectores no espaço.

É claro que se estes teem o mesmo comprimento, Tq será egual á unidade e o quaternião reduz-se ao seu versor, e se os comprimentos são differentes mas os vectores teem a mesma direcção o quaternião reduz-se ao seu tensor.

26. Veremos depois que a multiplicação n'este calculo não é, em geral, uma operação commutativa, por isso estabelecemos como *regra geral* collocar o multiplicador á esquerda do multiplicando (*).

Podendo a rotação de um vector em um plano fazer-se em dois sentidos oppostos, convém distinguil-os, e para isso *convencionaremos* considerar *positivas* as rotações feitas de modo que um observador collocado sobre o plano de rotação e com os pés na origem as veja executar da direita para a esquerda, isto é, em sentido contrario ao movimento das agulhas de um relogio (**).

Chama-se *eixo* de um quaternião ou de uma versão á recta tirada pela origem perpendicularmente ao plano do quaternião ou da versão e de modo que indique ser positiva a rotação.

27. *Quaterniões eguaes.* Do que fica dicto conclue-se que um quaternião $\frac{\beta}{\alpha}$ se conserva o mesmo substituindo os vectores por outros que

1.° tenham entre os seus comprimentos a mesma relação que ha entre os de α e β,

2.° estejam no mesmo plano ou em plano parallelo ao de α e β,

3.° façam o mesmo angulo e contado no mesmo sentido.

Dando-se estas condições os dois quaterniões $\frac{\beta}{\alpha}$ e $\frac{\beta'}{\alpha'}$ dizem-se *eguaes*.

(*) Sabe-se que a multiplicação das quantidades numericas é uma operação commutativa, por isso quando entrarem no calculo com vectores ou quaterniões conservarão a mesma propriedade.

(**) É claro que esta convenção é perfeitamente arbitraria; e estabelecendo-a seguimos alguns auctores que teem tractado de quaterniões e ainda que a convenção feita por Hamilton seja a opposta á nossa, as consequencias são as mesmas.

O angulo de um quaternião $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ representa-se por $< AOB$, devendo comprehender-se que deve ser contado positivamente do vector $\overline{OA}$ para $\overline{OB}$.

28. *Quaterniões inversos ou reciprocos.* Se depois da transformação do vector α em β fizermos a transformação de β em α, esta segunda operação será *inversa* da primeira e chamaremos *reciprocos* ou *inversos* os dois quaterniões respectivos $\frac{\beta}{\alpha} = q$ e $\frac{\alpha}{\beta} = q'$.

O modulo da multiplicação de vectores e quaterniões é a unidade e por isso podemos (5) representar o quaternião reciproco de q por $\frac{1}{q}$ ou q^{-1}, e temos entre dois quaterniões reciprocos a relação

$$q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1.$$

Pelo modo porque se consideram executadas as duas operações inversas, vê-se que o *tensor* do quaternião reciproco é o *inverso* do tensor do quaternião directo, e que os dois *versores* differem apenas no sentido da contagem dos angulos.

29. *Quaterniões conjugados.* Chamam-se *conjugados* dois quaterniões que teem tensores eguaes, estão no mesmo plano e os seus angulos são eguaes em valor mas contados em sentidos oppostos. Representa-se um quaternião conjugado de outro antepondo ao symbolo d'este a lettra caracteristica K, que tambem servirá para indicar a operação de tomarmos o conjugado de qualquer quaternião.

Será então por definição

$$\mathrm{TK}q = \mathrm{T}q, \quad \mathrm{UK}q = \mathrm{U}(q^{-1});$$

e pelo n.º 28

$$\mathrm{T}(q^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{T}q}, \quad q^{-1} = \frac{1}{\mathrm{T}q} \cdot \mathrm{U}(q^{-1}).$$

Substituindo em

$$Kq = TKq \,.\, UKq$$

os valores anteriores, tem-se

$$Kq = (Tq)^2 \, q^{-1},$$

d'onde (*)

$$q \,.\, Kq = Kq \,.\, q = (Tq)^2;$$

logo, *o producto de dois quaterniões conjugados é um numero egual ao quadrado do seu tensor commum.*

30. Vimos que, quando os dois vectores de um quaternião teem comprimentos eguaes, este se reduz ao seu versor. Podemos n'este caso representar o versor pelo arco comprehendido entre os seus vectores e pertencente á circumferencia de raio egual ao comprimento commum dos vectores, e é claro que qualquer arco da mesma circumferencia egual áquelle e contado no mesmo sentido representará o versor. Segundo esta convenção, sendo $\overline{OB}$ do mesmo comprimento que $\overline{OA}$, teremos

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \widehat{AB},$$

não se devendo confundir este symbolo com o que ordinariamente representa o arco AB.

A definição dada de quaterniões conjugados permitte estabelecer que o symbolo do versor conjugado de $\widehat{AB}$ seja $\widehat{BA}$.

(*) Quando se opera sobre uma expressão por um factor qualquer é preciso que a collocação d'este factor seja identica em ambos os membros da expressão, por isso que a multiplicação não é, em geral, operação commutativa; ora, operando sobre a expressão precedente por $q \times$, teremos

$$q \,.\, Kq = (Tq)^2 \, q \,.\, q^{-1},$$

e operando por $\times q$, teremos

$$Kq \,.\, q = (Tq)^2 \, q^{-1} \,.\, q,$$

que pelo n.º 28 dão o resultado do texto. É pois commutativa a multiplicação de dois quaterniões conjugados.

31. *Addição e subtracção de versores.* Dados os dois versores $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \overset{\frown}{AB}$ e $\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \overset{\frown}{AD}$ com a origem e um vector communs, definiremos as operações da *addição* e *subtracção* de versores pelas relações

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB} + \overline{OD}}{\overline{OA}}$$

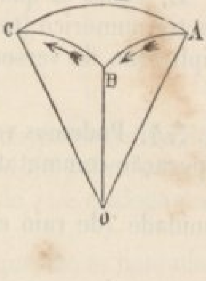
$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} - \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OD}}{\overline{OA}}$$

Se os versores dados não tivessem a mesma origem e um vector commum, seria possivel (27) substituir um d'elles por outro que satisfizesse a estas condições.

O que se diz em relação a dois versores estende-se a um numero qualquer e vê-se que a addição e subtracção de versores são operações uniformes, associativas e commutativas, por isso que as suas propriedades dependem das da addição de vectores.

A addição e subtracção de quaterniões far-se-ha do mesmo modo, porque podemos substituil-os por outros que tenham um vector commum, coincidindo com a intersecção dos seus planos e satisfaçam ás condições do n.º 27.

32. *Multiplicação de vectores.* Consideremos os dois versores $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \overset{\frown}{AB}$ e $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \overset{\frown}{BC}$,



que teem a mesma origem O e o vector $\overline{OB}$ commum; definiremos a operação da multiplicação do primeiro versor pelo segundo pela relação

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \times \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

ou

$$\overset{\frown}{BC} \times \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}.$$

Segundo esta definição, a multiplicação de versores equivale á *composição de versões*, porque uma versão trazendo $\overline{OA}$ para $\overline{OB}$, sendo seguida de outra versão que leve $\overline{OB}$ para $\overline{OC}$, equivale a uma só versão que faça com que $\overline{OA}$ coincida com $\overline{OC}$.

A regra para a multiplicação de dois versores é: — fazer com que o segundo termo do versor multiplicador coincida em posição e grandeza com o primeiro termo do multiplicando, e o producto será um versor cujo primeiro e segundo termos são respectivamente o primeiro do multiplicador e o segundo do multiplicando.

Como a *divisão* de versores póde ser definida pela operação inversa da multiplicação, a consideração dos versores reciprocos referil-a-ha a esta operação.

33. Os versores conjugados de $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{AC}$ sendo $\widehat{BA}$, $\widehat{CB}$ e $\widehat{CA}$, teremos pela regra anterior

$$\widehat{CA} = \widehat{BA} \times \widehat{CB}$$

ou

$$K(\widehat{BC} \times \widehat{AB}) = K\widehat{AB} \times K\widehat{BC};$$

logo *o conjugado do producto de dois versores é egual ao producto dos conjugados dos factores multiplicados em ordem invertida.*

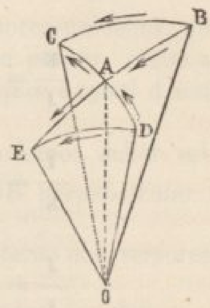
E, como os quaterniões differem dos versores em terem um factor numerico (tensor), o que deixamos dicto em relação á multiplicação de versores estende-se aos quaterniões.

34. Podemos ver já que a multiplicação de versores não é uma operação commutativa; para isso consideremos em uma esphera-unidade (de raio egual á unidade) os dois versores $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ e $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$

e tomemos nos seus planos os versores $\dfrac{\overline{OE}}{\overline{OA}}$ e $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OD}}$ que lhes sejam respectivamente eguaes.

Teremos entre estes quatro versores

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$$



$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \times \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

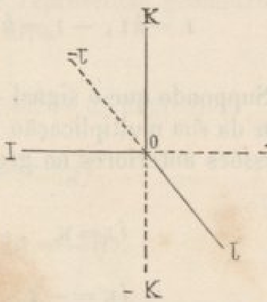
ou

$$\widehat{AC} \times \widehat{BA} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{AE} \times \widehat{DA} = \widehat{DE} = \widehat{BA} \times \widehat{AC};$$

mas não coincidindo nem sendo parallelos os versores $\widehat{BC}$ e $\widehat{DE}$ não podemos chamal-os eguaes (27), e portanto a multiplicação de dois versores não é, em geral, uma operação commutativa, e o mesmo acontece na multiplicação de dois quaterniões.

33. *Versores-quadrantes.* Quando um quaternião tem o seu tensor egual á unidade e o seu angulo é de 90°, reduz-se a um versor que chamaremos *versor-quadrante* (quadrantal versor). Supponhamos um systema de tres vectores-unidades, coiniciaes, perpendiculares entre si, na posição da figura juncta, e representemol-os por I, J e K.



Cada um d'estes vectores-unidades representa o *eixo* do *versor-quadrante* formado pelos outros dois; assim, uma rotação positiva de 90° em torno de I fará coincidir J com K e este vector com o prolongamento de J; e analogamente em relação aos outros dois.

Representaremos os versores-quadrantes, que são os operadores d'estas rotações de 90° em volta de I, J e K, pelas lettras i, j e k; e, sendo considerados positivos os vectores I, J e K, os vectores do mesmo comprimento e de direcções contrarias devem ser negativos bem como as versões-quadrantes effectuadas em volta d'elles (*).

Teremos então as expressões seguintes:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{J}}=\dfrac{-\mathrm{J}}{\mathrm{K}}=i, & \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}=\dfrac{-\mathrm{K}}{\mathrm{J}}=-i \\[2ex] \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}=\dfrac{-\mathrm{K}}{\mathrm{I}}=j, & \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{I}}=\dfrac{-\mathrm{I}}{\mathrm{K}}=-j \\[2ex] \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}}=\dfrac{-\mathrm{I}}{\mathrm{J}}=k, & \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{J}}=\dfrac{-\mathrm{J}}{\mathrm{I}}=-k\end{array}\right\}, \ldots\ldots\ldots (1)$$

d'onde se tira

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{K}=i\,\mathrm{J},\ -\mathrm{J}=i\,\mathrm{K},\quad \mathrm{J}=-i\,\mathrm{K},\ -\mathrm{K}=-i\,\mathrm{J} \\[1ex] \mathrm{I}=j\,\mathrm{K},\ -\mathrm{K}=j\,\mathrm{I},\quad \mathrm{K}=-j\,\mathrm{I},\ -\mathrm{I}=-j\,\mathrm{K} \\[1ex] \mathrm{J}=k\,\mathrm{I},\ -\mathrm{I}=k\,\mathrm{J},\quad \mathrm{I}=-k\,\mathrm{J},\ -\mathrm{J}=-k\,\mathrm{I}\end{array}\right\}.$$

Suppondo que o signal —, affectando um vector ou versor, provém da sua multiplicação por —1, podemos comprehender as expressões anteriores no grupo seguinte

$$\left.\begin{array}{lll} i\mathrm{J}=\mathrm{K}\ , & j\mathrm{K}=\mathrm{I}\ , & k\mathrm{I}=\mathrm{J} \\[1ex] i\mathrm{K}=-\mathrm{J}, & j\mathrm{I}=-\mathrm{K}, & k\mathrm{J}=-\mathrm{I}\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Estas expressões dão

$$-\mathrm{J}=i^2\mathrm{J},\quad -\mathrm{K}=j^2\mathrm{K},\quad -\mathrm{I}=k^2\mathrm{I};$$

(*) Consideraremos a multiplicação como uma operação uniforme, associativa e distributiva, e mais tarde demonstraremos estas propriedades.

logo será

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ora, como a orientação do systema de vectores-unidades, que consideramos, é completamente arbitraria no espaço, segue-se que *o quadrado de um versor-quadrante qualquer é egual á unidade tomada negativamente.*

Pela consideração geometrica seguinte podemos achar este mesmo resultado muito facilmente: sendo $\overline{\mathrm{OB}}$ perpendicular a AA′ e sendo OA = OA′, $\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$ e $\frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OB}}}$ representarão dois versores-quadrantes eguaes, e designando-os por i teremos (n.º 32)

$$i \times i = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OB}}} \times \frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{-\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = -1.$$

Vê-se tambem claramente que um versor-quadrante póde ser considerado como um *semi-inversor*, e representar geometricamente a raiz quadrada da unidade negativa.

36. Operando pelos versores j, k, i sobre as expressões

$$\mathrm{I} = -k\mathrm{J}, \quad \mathrm{J} = -i\mathrm{K}, \quad \mathrm{K} = -j\mathrm{I}$$

teremos

$$j\mathrm{I} = -jk\mathrm{J}, \quad k\mathrm{J} = -ki\mathrm{K}, \quad i\mathrm{K} = -ij\mathrm{I},$$

que por ser

$$j\mathrm{I} = -\mathrm{K} = -i\mathrm{J}, \quad k\mathrm{J} = -\mathrm{I} = -j\mathrm{K}, \quad i\mathrm{K} = -\mathrm{J} = -k\mathrm{I},$$

dão

$$jk = i, \quad ki = j, \quad ij = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Operando analogamente por k, i e j sobre

$$\mathrm{I} = j\mathrm{K}, \quad \mathrm{J} = k\mathrm{I} \quad \text{e} \quad \mathrm{K} = i\mathrm{J}$$

obteremos

$$kj = -i, \; ik = -j, \; ji = -k \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (5)$$

Finalmente da primeira expressão (4) tira-se

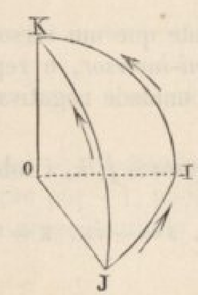
$$ijk = i^2 = -1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (6)$$

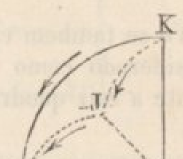
37. Os productos dos versores-quadrantes dois a dois podiam ser obtidos facilmente pela applicação do n.º 32; para o mostrarmos consideremos a esphera-unidade com o centro no ponto O da figura do n.º 35; as partes d'essa esphera, representadas nas figuras seguintes, dão, pondo por simplicidade I, J, K pelos vectores $\overline{OI}$, $\overline{OJ}$, $\overline{OK}$ e attendendo ao n.º 32,

$$\frac{K}{-I} \times \frac{-I}{J} = \frac{K}{J}$$

$$\frac{I}{-J} \times \frac{-J}{K} = \frac{I}{K}$$

$$\frac{-J}{K} \times \frac{K}{-I} = \frac{-J}{-I}$$

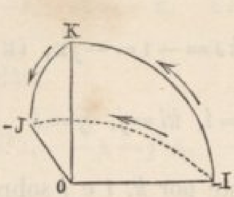


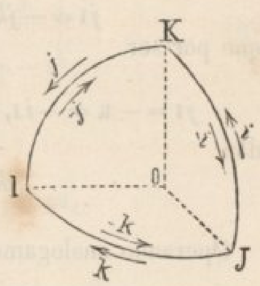


$$\frac{J}{I} \times \frac{I}{K} = \frac{J}{K}$$

$$\frac{K}{J} \times \frac{J}{I} = \frac{K}{I}$$

$$\frac{I}{K} \times \frac{K}{J} = \frac{I}{J}$$





que pelas expressões (1) dão

$$jk = i, \; ki = j, \; ij = k$$

$$kj = -i, \; ik = -j, \; ji = -k.$$

38. *Convenção para a suppressão dos symbolos* I, J e K. O grupo formado pelas expressões (4) e (5) dão as leis analyticas correspondentes á composição dos versores-quadrantes no espaço; assim, $jk = i$ indica que uma versão de 90° ao redor do eixo K, sendo seguida de outra do mesmo valor ao redor do eixo J, produz o mesmo resultado que uma só versão de 90° ao redor do eixo I, suppostas as versões executadas positivamente.

O grupo (2) comprehende seis resultados differentes, correspondentes cada um a *uma só* versão e não a combinações de versões. São portanto expressão de concepções differentes; como porém ha entre elles uma grande analogia de fórma, podemos *convencionar* que um d'elles, o formado pelas expressões (4) e (5), seja a expressão commum da representação dos dois. Esta convenção, muito importante n'este calculo, resulta de suppormos — que um vector-unidade, quando representa o papel de *factor*, se póde considerar como um versor-quadrante, cujo plano lhe é perpendicular.

Assim, encontrando-se o producto JK dos dois vectores-unidades J e K, faremos a substituição de J pelo versor-quadrante j, que lhe é perpendicular, e teremos então JK = I, que podemos ainda pôr $jk = i$.

Por esta convenção as relações (3) e (6) applicam-se tambem aos vectores-unidades, e d'aqui se segue — que o quadrado de um vector-unidade qualquer é egual á unidade tomada negativamente.

39. *Representação de versores por potencias de vectores-unidades.* Consideremos um vector qualquer, α, e multipliquemol-o por um vector-unidade, i, que lhe seja perpendicular, teremos

$$i\alpha = \beta,$$

sendo β um vector de comprimento egual ao de α e que lhe será perpendicular.

Operando agora por i sobre esta expressão e as que successivamente se obteem, teremos

$$i^2\alpha = \quad i\beta = -\alpha$$

$$i^3\alpha = -i\alpha = -\beta$$

$$i^4\alpha = -i\beta = \quad \alpha$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Logo, sendo m um numero inteiro e positivo, — i^m representará um versor que faz com que um vector que seja perpendicular a i execute uma rotação positiva de m angulos rectos ao redor de i.

Assim como i^2 é um *inversor,* isto é, um operador produzindo duas *versões-quadrantes* successivas no mesmo plano e sentido, por uma facil generalisação consideraremos o symbolo $i^{\frac{1}{2}}$ como um operador executando *meia* versão-quadrante e em geral i^t, sendo t um numero positivo, inteiro ou fraccionario, como um operador produzindo uma rotação egual a $t \times 90^\circ$.

Se as rotações fossem negativas, teriamos para symbolo de uma *inversão* feita negativamente i^{-2} e para uma versão negativa correspondente a $t \times 90^\circ$ o symbolo i^{-t}.

Logo — a potencia de um vector-unidade, cujo expoente é um numero qualquer, representa um *versor* (em geral não-quadrante); a *base* será o vector-unidade na direcção do *eixo* do versor, e o expoente numerico a relação entre a *amplitude* (ou angulo) da rotação e um quadrante, tendo este expoente o signal $+$ ou $-$, conforme a rotação for positiva ou negativa.

Se operarmos então sobre o vector α por $i^{\frac{2}{3}}$, por exemplo, teremos

$$i^{\frac{2}{3}}\alpha = \quad \gamma, \quad i^{\frac{8}{3}}\alpha = -\gamma$$

$$i^{\frac{4}{3}}\alpha = \quad \gamma', \quad i^{\frac{10}{3}}\alpha = -\gamma'$$

$$i^2\,\alpha = -\alpha, \quad i^4\,\alpha = \quad \alpha.$$

Vê-se pois que é sempre possivel representar uma *versão* por uma potencia do vector-unidade, que lhe é perpendicular.

40. Para se fazer coincidir o vector α com o vector γ do n.º anterior podemos executar ao redor de i uma rotação positiva egual a $\frac{2}{3} \times 90°$, ou uma rotação que exceda esta de um numero inteiro qualquer de circumferencias, e portanto o symbolo mais geral d'esta versão seria $i^{\left(\frac{2}{3}+4n\right)}$, representando-se por n um numero inteiro positivo. Esta indeterminação desapparece porém convencionando-se tomar para valor do angulo de um versor o angulo comprehendido entre os dois vectores, sendo este contado a partir do vector, que lhe serve de origem, até se encontrar o segundo vector. Fica assim determinado para symbolo da versão a que nos referimos $i^{\frac{2}{3}}$.

Em geral, tomaremos em vez do expoente $(4n+t)$ o expoente t, e chamaremos a i^t *valor principal* do versor.

41. Como um quaternião qualquer q se póde exprimir por

$$q = \mathrm{T}q \,.\, \mathrm{U}q,$$

e pelo numero anterior, o versor $\mathrm{U}q$ póde ser representado pela potencia de um vector-unidade perpendicular ao plano do versor (que é tambem o do quaternião), segue-se que podemos escolher um tensor e um vector-unidade taes que, elevando-os a uma mesma potencia, representem o quaternião dado.

Ora o producto do vector-unidade pela base do tensor é um vector, logo — um quaternião póde representar-se pela potencia de um vector.

42. *Multiplicação de vectores rectangulares de qualquer comprimento.* Vimos no n.º 13 que um vector se podia representar pelo producto do vector-unidade com a mesma direcção por um numero; logo, querendo-se multiplicar o vector β pelo vector α, que lhe é perpendicular, e suppondo-os eguaes a ai e bj, sendo i e j vectores-unidades com a mesma direcção de α e β, faremos primeiro com que o vector bj execute uma rotação de 90° em torno do vector-unidade i e operaremos depois sobre o resultado pelo factor numerico a. Teremos, portanto,

$$i \times bj = bk \quad \text{e} \quad ai \times bj = abk,$$

sendo k o vector-unidade perpendicular a i e j.

Analogamente se acharia

$$bj \times ai = -abk.$$

Podemos pois dizer que — o producto de quaesquer dois vectores rectangulares é um terceiro vector perpendicular aos dois e de comprimento egual ao producto dos comprimentos dos factores, considerando-se positiva a rotação do vector-multiplicando no sentido do vector-producto ao redor do vector-multiplicador.

Segundo a ordem porque se faz a multiplicação de dois vectores rectangulares, assim o vector resultante terá uma das duas direcções oppostas; podemos pois escrever como equação de perpendicularidade de dois vectores α, β,

$$\alpha\beta = -\beta\alpha,$$

que exprimirá analyticamente ser $\alpha \perp \beta$ (α perpendicular a β).

13. *Multiplicação de vectores parallelos.* Sejam dados os dois vectores $\alpha = ai$, $\beta = bi$, sendo a e b os numeros que exprimem os comprimentos dos dois vectores, e i o vector-unidade que tem a mesma direcção. Para effectuarmos a multiplicação d'estes dois vectores procederemos do modo seguinte: consideremos um vector arbitrario perpendicular a i, representado por xj, e multipliquemol-o successivamente por β e α, teremos pelo numero antecedente

$$bi \times xj = bxk,$$

$$ai \times bi \times xj = -ab \times xj,$$

que mostra ser o effeito das duas operações successivas egual ao que produziria a operação unica $\times(-ab)$; logo será

$$\alpha\beta = -ab.$$

Se os dois vectores parallelos tivessem direcções oppostas, um d'elles deveria ser affectado do signal $-$, e portanto ter-se-hia

$$\alpha\beta = ab.$$

Logo — o producto de dois vectores parallelos quaesquer é egual ao producto dos numeros que exprimem os seus comprimentos, sendo tomado negativa ou positivamente, conforme tiverem a mesma direcção ou direcções oppostas.

Por ser $\beta\alpha = -ba = -ab$, podemos pôr como equação de parallelismo dos dois vectores α, β,

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

indicando assim ser $\alpha \parallel \beta$ (α parallelo a β),

Como consequencia da regra de multiplicação de vectores parallelos tem-se

$$\alpha^2 = -a^2 = -(T\alpha)^2.$$

44. *Multiplicação de dois vectores com direcções quaesquer.* Supporemos primeiro que os dois vectores α e β são vectores-unidades, e seja o angulo, que elles fazem, expresso por $t \times 90°$; tomaremos α para multiplicador, e representaremos por γ e δ dois vectores-unidades existentes no plano de α e β e perpendiculares a cada um d'estes, e por ε um terceiro vector-unidade perpendicular ao plano de α e β. As direcções d'estes vectores serão determinadas pelas expressões

$$\varepsilon = \beta\delta, \quad \gamma = \alpha\varepsilon, \quad \gamma = \varepsilon^{2-t}\delta,$$

que facilmente podem ser representadas em uma figura.

Teremos então

$$\gamma = \alpha\beta\,\delta = \varepsilon^{2-t}\delta,$$

d'onde

$$\alpha\beta = \varepsilon^{2-t}.$$

O producto de dois vectores-unidades quaesquer é pois um *versor,* cujo *eixo-unidade* é o vector-unidade perpendicular ao plano dos dois vectores e cuja *amplitude* é o supplemento do angulo que elles formam, sendo positiva a rotação do vector-multiplicador no sentido do multiplicando.

Se os vectores tivessem porém comprimentos differentes, poderiamos applicar ainda o mesmo raciocinio combinando-o com a *composição dos tensores,* isto é, multiplicando o versor resultante da construcção anterior por um tensor egual ao producto dos comprimentos dos factores.

Resulta d'aqui que — o producto de quaesquer dois vectores é, em geral, egual ao producto de um *tensor* e de um *versor,* sendo o tensor o producto dos numeros que exprimem os comprimentos dos factores, e o versor a potencia do *vector-unidade,* que tem a direcção do *eixo* da rotação do multiplicador no sentido do multiplicando e cujo expoente é o supplemento da relação do angulo de rotação e um quadrante.

O producto de dois vectores será, em geral, um quaternião (41).

Este caso comprehende os de vectores perpendiculares e parallelos.

43. *Vectores reciprocos e conjugados.* Chamam-se *reciprocos* ou *inversos* os vectores que teem comprimentos inversos e direcções oppostas, e *conjugados* os vectores que teem o mesmo comprimento e direcções oppostas. O vector inverso de α é representado por $\frac{1}{\alpha}$ ou α^{-1}, e o conjugado por $K\alpha = -\alpha$.

Se α é um vector-unidade, o seu inverso e o seu conjugado serão eguaes e expressos por $-\alpha$.

Teremos, qualquer que seja α,

$$\alpha \times K\alpha = -\alpha^2 = (T\alpha)^2.$$

46. Como um vector α qualquer se póde escrever ai, sendo a o seu comprimento e i o vector-unidade com a mesma direcção, teremos

$$\alpha^t = a^t\, i^t,$$

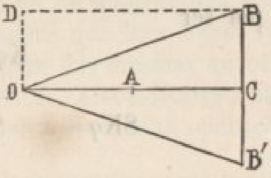
$$\alpha^t \,.\, \alpha^{t'} = \alpha^{t+t'}$$

e

$$(\alpha^t)^{t'} = \alpha^{t' \times t};$$

e resultados analogos para quaterniões.

47. *Decomposição de um quaternião em parte scalar e vectorial.* Sejam dados os dois vectores coiniciaes $\overline{\mathrm{OA}}$ e $\overline{\mathrm{OB}}$ com direcções e comprimentos differentes, e representemos por q o quaternião $\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$. Se por B tirarmos BC perpendicularmente a OA, teremos



$$\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} + \overline{\mathrm{CB}}$$

e

$$q = \frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{x\overline{\mathrm{OA}} + \gamma\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = x + \gamma,$$

representando por x um numero e por γ um vector perpendicular ao plano do quaternião e attendendo aos n.os 13 e 42.

Vê-se que qualquer quaternião se póde decompôr na somma de duas partes distinctas—*uma quantidade numerica* e um *vector*. Estas duas partes chamam-se *scalar* e *vector*, e representam-se antepondo ao symbolo do quaternião as caracteristicas S e V.

Estas lettras são tambem indicativas das operações de *tomar o scalar* e *tomar o vector* de uma expressão.

48. Por um quaternião ser susceptivel da decomposição anterior propoz-se dar-lhe o nome de *grammarithmo,* de duas palavras gregas (γραμμὴ, ἀριθμὸς) que significam *linha* e *numero.*

Quando a parte scalar de um quaternião se annulla, este reduz-se a um vector; logo — os vectores podem ser considerados como casos particulares de quaterniões.

Tem-se, em geral,

$$q = Sq + Vq,$$

sendo a *parte scalar* representada na figura por $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$ e a *parte vectorial* por $\frac{\overline{CB}}{\overline{OA}}$.

49. *Relação entre scalares e vectores de quaterniões conjugados.* Prolongando na figura do n.º 47 BC até ser CD = BC, teremos

$$Kq = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC} - \overline{B'C}}{\overline{OA}} = x - \gamma,$$

e, por ser

$$Kq = SKq + VKq,$$

$$SKq = x = Sq, \quad VKq = -\gamma = -Vq.$$

Logo — *dois quaterniões conjugados terão scalares eguaes e vectores conjugados.*

O conjugado de um scalar sendo o mesmo scalar e os vectores conjugados differindo só nos seus signaes, podemos escrever

$$SKq = KSq \text{ e } VKq = KVq;$$

e por ser

$$\Sigma q = S\Sigma q + V\Sigma q = \Sigma Sq + \Sigma Vq$$

tem-se

$$\Sigma Sq = S\Sigma q, \quad \Sigma Vq = V\Sigma q;$$

logo — *os symbolos* S, V, K *e* Σ *são commutativos.*

50. Como um vector qualquer se exprime em funcção dos tres vectores-unidades i, j, k, formando um systema trirectangular, por

$$xi + yj + zk,$$

se representarmos por w a parte scalar de um quaternião q, podemos pôr este sob a fórma

$$q = w + xi + yj + zk.$$

Se attendermos ás relações (4) e (5) do n.º 36, e a que um quaternião é, em geral, o quociente ou o producto de dois vectores, esta fórma de um quaternião seria dada pelo resultado da divisão ou producto de duas expressões da fórma anterior de um vector.

51. *Propriedades da multiplicação de vectores e quaterniões.* Quando se tem um producto de vectores ou de quaterniões e se substitue um ou mais dos factores por outros que lhes sejam respectivamente eguaes, como estes dependem das mesmas quantidades numericas e teem expressões identicas, a substituição não alterará o resultado, e portanto a multiplicação é uma operação *uniforme*.

Para estabelecermos a propriedade *distributiva* consideraremos primeiro o caso em que os factores são vectores. Pela definição do n.º 31 tem-se

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha},$$

que, representando por δ o vector α^{-1} inverso de α, se póde pôr

$$(\beta + \gamma)\delta = \beta\delta + \gamma\delta,$$

indicando ser distributiva em relação ao multiplicador a multiplicação de vectores.

Tomando os conjugados dos dois membros d'esta ultima expressão, representando por β', γ', δ' os vectores conjugados de β, γ, δ e attendendo ao n.º 33, teremos

$$\delta'(\beta'+\gamma')=\delta'\beta'+\delta'\gamma',$$

que exprime ter logar o principio distributivo em relação ao multiplicando.

Se agora substituirmos por δ' a somma dos dois vectores β e γ, teremos

$$(\beta+\gamma)(\beta'+\gamma')=\beta\beta'+\gamma\beta'+\beta\gamma'+\gamma\gamma'.$$

Logo — *é completamente distributiva* em relação á addição e subtracção a multiplicação de vectores.

Vejamos agora o caso em que os factores são quaterniões e consideremos o producto $(a+\alpha)q$, em que substituimos um dos quaterniões pela somma da sua parte scalar e vectorial. O quaternião q póde ser representado pelo quociente de dois vectores β e δ taes que satisfaçam a

$$q=\frac{\beta}{\delta},\quad \alpha=\frac{\gamma}{\beta},$$

indicando a ultima relação que β seja perpendicular a α e γ; posto isto, teremos

$$(a+\alpha)q=\left(a+\frac{\gamma}{\beta}\right)\frac{\beta}{\delta}=\left(a\frac{\beta}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}\right)\frac{\beta}{\delta}=\frac{a\beta+\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\delta}=\frac{a\beta+\gamma}{\delta}$$

$$=a\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\delta}=aq+\alpha q.$$

Tomando os conjugados do primeiro e ultimo membros e representando por α', q' os conjugados de α e q, teremos

$$q'(a+\alpha')=q'a+q'\alpha';$$

e substituindo q' pela somma do seu scalar b e do seu vector β, virá

$$(b+\beta)(a+\alpha')=ba+\beta a+b\alpha'+\beta\alpha'.$$

Faremos n'esta expressão

$$b=a_1+a_2,\ a=b_1+b_2,\ \beta=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha=\beta_1+\beta_2,$$

desenvolvendo depois e ordenando convenientemente, virá

$$[(a_1+\alpha_1)+(a_2+\alpha_2)][(b_1+\beta_1)+(b_2+\beta_2)]=(a_1+\alpha_1)(b_1+\beta_1)$$
$$+(a_2+\alpha_2)(b_1+\beta_1)+(a_1+\alpha_1)(b_2+\beta_2)+(a_2+\alpha_2)(b_2+\beta_2),$$

que, pondo-se

$$a_1+\alpha_1=p,\ a_2+\alpha_2=q,\ b_1+\beta_1=r,\ b_2+\beta_2=s,$$

dá finalmente

$$(p+q)(r+s)=pr+qr+ps+qs.$$

Logo, — a multiplicação de quaterniões é uma operação *completamente distributiva* em relação á addição e subtracção.

Demonstraremos a propriedade *associativa* tomando os tres vectores

$$\alpha=xi+yj+zk,\ \beta=x'i+y'j+z'k,\ \gamma=x''i+y''j+z''k,$$

ou os tres quaterniões

$$q=w+\alpha,\ r=w'+\beta,\ s=w''+\gamma,$$

e effectuando as multiplicações

$$\alpha\times(\beta\times\gamma),\ (\alpha\times\beta)\times\gamma;\ q\times(r\times s)\ \text{e}\ (q\times r)\times s;$$

que darão os mesmos resultados.

Se effectuarmos os productos

$$\alpha\ \beta,\ \beta . \alpha,\ q . r,\ r . q,$$

confirmaremos não ser commutativa a multiplicação de dois vectores ou quaterniões.

O que acabamos de dizer tem logar para um numero qualquer de factores, e a divisão gozará das mesmas propriedades, como operação inversa da multiplicação.

52. Um quaternião sendo, em geral, o resultado da divisão ou da multiplicação de dois vectores, teremos

$$q = \frac{x'i + y'j + z'k}{xi + yj + zk} = w + \xi i + \eta j + \zeta k$$

ou

$$q = (xi + yj + zk)(x'i + yj + zk) = w + \xi i + \eta j + \zeta k.$$

No primeiro caso os valores de w, ξ, η, ζ em funcção das quantidades numericas dos vectores são

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{xx' + yy' + zz'}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \xi &= \frac{yz' - zy'}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \eta &= \frac{zx' - xz'}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \zeta &= \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}\right\},$$

e no segundo caso

$$\left.\begin{aligned} w &= -(xx' + yy' + zz') \\ \xi &= yz' - zy' \\ \eta &= zx' - xz' \\ \zeta &= xy' - yx' \end{aligned}\right\}.$$

35. *Conjugado do producto de um numero qualquer de quaterniões e vectores.* Viu-se no n.º 33 que se tinha para dois quaterniões q e r

$$Kqr = Kr \,.\, Kq.$$

Podemos estabelecer este mesmo resultado pelas considerações seguintes: supponhamos tres vectores α, β, γ, que satisfaçam a

$$\beta = r\alpha, \quad \gamma = q\beta;$$

teremos

$$\gamma = qr \,.\, \alpha,$$

$$Kq \,.\, \gamma = Kq \,.\, q\beta = Tq^2 \,.\, \beta,$$

$$Kr \,.\, Kq \,.\, \gamma = Tq^2 Kr \,.\, r \,.\, \beta = Tq^2 Tr^2 \beta = (Tqr)^2 \beta = Kqr \,.\, qr\beta = Kqr \,.\, \gamma;$$

logo

$$Kr \,.\, Kq = Kqr.$$

Substituindo o quaternião r pelo producto de dois quaterniões, rs, virá

$$K(q \,.\, rs) = Krs \,.\, Kq = Ks \,.\, Kr \,.\, Kq;$$

e, em geral, para um numero qualquer de quaterniões

$$K(q_1 q_2 \ldots q_{m-1} q_m) = Kq_m \,.\, Kq_{m-1} \ldots Kq_2 \,.\, Kq_1.$$

Logo — *o conjugado do producto de um numero qualquer de quaterniões é egual ao producto dos conjugados dos factores tomados em ordem invertida.*

Se os factores forem vectores, pelo n.º 45 teremos

$$K\alpha\beta = \beta\alpha,$$

$$K\alpha\beta\gamma = -\gamma\beta\alpha,$$

$$K\alpha\beta\gamma\delta = \delta\gamma\beta\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K(\alpha\beta \ldots \psi\omega) = (-1)^n (\omega\psi \ldots \beta\alpha),$$

representando-se por n o numero de factores.

Logo — *o conjugado do producto de um numero qualquer de vectores é egual ao producto d'estes em ordem invertida, tomando este producto com o signal* $+$ *ou* $-$ *conforme o numero dos vectores fôr par ou impar.*

Representando pela caracteristica Π o producto de um numero qualquer de factores e por Π' o producto dos factores tomados em ordem invertida, teremos symbolicamente para o caso de quaterniões

$$K\Pi = \Pi'K$$

e de vectores

$$K\Pi = (-1)^n \Pi'.$$

34. *Fórmulas importantes.* Comparando os resultados de $\alpha.\beta$ e $\beta.\alpha$, sendo

$$\alpha = xi + yj + zk \quad \text{e} \quad \beta = x'i + y'j + z'k,$$

teremos

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$V\alpha\beta = -V\beta\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\alpha\beta - \beta\alpha = 2V\alpha\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

55. Considerando os dois quaterniões q_1, q_2, decompostos nos seus scalares e vectores, se tomarmos o scalar do seu producto, e attendermos a que um vector multiplicado por um scalar é um vector e portanto tem um scalar nullo, virá

$$Sq_1q_2 = Sq_1Sq_2 + S.Vq_1Vq_2,$$

$$Sq_2q_1 = Sq_2Sq_1 + S.Vq_2Vq_1;$$

logo, pela fórmula (1) do numero anterior, é

$$Sq_1q_2 = Sq_2q_1 \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Substituindo o quaternião q_2 por $q_2 . q_3$ teremos

$$Sq_1q_2q_3 = Sq_2q_3q_1,$$

e pela substituição de q_1 por $q_3 . q_1$

$$Sq_3q_1q_2 = Sq_2q_3q_1;$$

logo, será

$$Sq_1q_2q_3 = Sq_2q_3q_1 = Sq_3q_1q_2,$$

e para um numero qualquer de factores achar-se-hia

$$Sq_1q_2 \cdots q_{m-1}q_m = Sq_2q_3 \cdots q_mq_1 = Sq_3q_4 \cdots q_1q_2 = \dots =$$

$$= Sq_{m-1}q_m \cdots q_1q_2 = Sq_mq_1 \cdots q_{m-1} \dots\dots \quad (6)$$

isto é, *o scalar do producto de quaterniões não depende da ordem circular em que elles estejam.*

56. Se os quaterniões se reduzem ás suas partes vectoriaes, o que dissemos no numero anterior, sendo applicado a tres vectores α, β, γ, dá

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta \dots\dots\dots \quad (7)$$

Pelo principio associativo da multiplicação de vectores tem-se

$$S(\alpha.\beta\gamma) = S.\alpha V\beta\gamma,$$

e pela fórmula (2) do n.º 54

$$S\alpha\beta\gamma = -S.\alpha V\gamma\beta = -S\alpha\gamma\beta;$$

logo — *o scalar do producto de tres vectores muda de signal se alterarmos a ordem circular dos factores.*

57. Multiplicando a expressão $2V\beta\gamma = \beta\gamma - \gamma\beta$ por α e tomarmos a parte vectorial do producto, isto é, operando por $V.\alpha\times$, teremos

$$2V.\alpha V\beta\gamma = V\alpha\beta\gamma - V\alpha\gamma\beta;$$

junctando ao segundo membro o vector nullo $V\beta\alpha\gamma - V\beta\alpha\gamma$, virá

$$2V.\alpha V\beta\gamma = V.(\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma - V.\beta(S\alpha\gamma + V\alpha\gamma) - V.(S\alpha\gamma + V\alpha\gamma)\beta$$
$$= 2\gamma S\alpha\beta - 2\beta S\alpha\gamma,$$

supprimindo a caracteristica V no ultimo membro por ser desnecessaria.

Teremos finalmente

$$V(\alpha V\beta\gamma) = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

58. Applicando a fórmula anterior ao producto $\beta V\gamma\delta$, vem

$$V(\beta V\gamma\delta) = \delta S\beta\gamma - \gamma S\beta\delta,$$

e operando sobre esta expressão por $S.\alpha\times$

$$S.\alpha V(\beta V\gamma\delta) = S.\alpha\delta S\beta\gamma - S.\alpha\gamma S\beta\delta.$$

O primeiro membro transforma-se em

$$S.\alpha(\beta V\gamma\delta - S.\beta V\gamma\delta) = S.\alpha\beta V\gamma\delta = S.(S\alpha\beta + V\alpha\beta)V\gamma\delta = S.V\alpha\beta V\gamma\delta,$$

logo, será

$$S.V\alpha\beta V\gamma\delta = S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

59. Pela fórmula (8) tem-se

$$V.\beta V\gamma\alpha = \alpha S\beta\gamma - \gamma S\beta\alpha,$$

$$V.\gamma V\alpha\beta = \beta S\gamma\alpha - \alpha S\gamma\beta,$$

logo, será

$$V(\alpha V\beta\gamma + \beta V\gamma\alpha + \gamma V\alpha\beta) = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Teremos tambem, attendendo ao n.º 56,

$$S(\alpha V\beta\gamma + \beta V\gamma\alpha + \gamma V\alpha\beta) = 3S\alpha\beta\gamma; \ldots\ldots \quad (11)$$

e junctando os dois ultimos resultados

$$\alpha V\beta\gamma + \beta V\gamma\alpha + \gamma V\alpha\beta = 3S\alpha\beta\gamma \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

60. Junctando aos dois membros da fórmula (8)

$$\alpha S\beta\gamma = V.\alpha S\beta\gamma,$$

vem

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta; \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

e mudando n'esta fórmula α em γ e vice-versa, teremos

$$V\gamma\beta\alpha = \gamma S\beta\alpha - \beta S\alpha\gamma + \alpha S\gamma\beta,$$

que, por ser commutativa a addição de vectores, dá

$$V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Considerando primeiro $V\alpha\beta$ e depois $V\gamma\delta$ como vectores simples, temos

$$V(V\alpha\beta V\gamma\delta) = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta,$$

$$V(V\gamma\delta V\alpha\beta) = -\beta S\gamma\alpha\delta - \alpha S\beta\gamma\delta;$$

mas pela fórmula (2) do n.º 54 é

$$V(V\alpha\beta V\gamma\delta) = -V(V\gamma\delta V\alpha\beta),$$

logo, teremos

$$\delta S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\delta + \beta S\gamma\alpha\delta + \gamma S\alpha\beta\delta, \ldots\ldots\ldots (15)$$

fórmula muito importante porque dá o modo de decompôr um vector segundo as direcções de tres outros dados α, β, γ.

No caso porém d'estes tres vectores estarem em um mesmo plano, a fórmula anterior não daria a decomposição desejada, porque qualquer d'elles, podendo exprimir-se em funcção dos outros dois, daria para o primeiro membro um valor nullo, e sendo δ coplanar com α, β, γ, cada um dos termos do segundo membro seria nullo.

61. Suppondo que os tres vectores $V\alpha\beta$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$ não são coplanares vamos procurar decompôr segundo elles o vector δ e empregaremos para isso o processo seguinte.

Teremos

$$\delta = xV\alpha\beta + yV\beta\gamma + zV\gamma\alpha;$$

operando por $S.\alpha$, $S.\beta$, $S.\gamma$, vem

$$S\alpha\delta = yS\alpha\beta\gamma,\ S\beta\delta = zS\alpha\beta\gamma \text{ e } S\gamma\delta = xS\alpha\beta\gamma,$$

porisso que no primeiro caso é

$$xS.\alpha V\alpha\beta = xS\alpha^2\beta = 0,\ zS.\alpha V\gamma\alpha = zS\alpha\gamma\alpha = zS\gamma\alpha^2 = 0$$

e analogamente nos outros dois casos.

Vem então, segundo os valores de x, y, z, dados anteriormente,

$$\delta S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\delta + V\beta\gamma S\alpha\delta + V\gamma\alpha S\beta\delta \ldots\ldots (16)$$

Effectuando permutações circulares successivas nas lettras α, β, γ, δ d'esta fórmula e sommando os resultados, vem

$$\alpha S\beta\gamma\delta + \beta S\gamma\delta\alpha + \gamma S\delta\alpha\beta + \delta S\alpha\beta\gamma = 2\,(V\alpha\beta S\gamma\delta$$

$$+ V\beta\gamma S\delta\alpha + V\gamma\delta S\alpha\beta + V\delta\alpha S\beta\gamma) \ldots\ldots\ldots (17)$$

62. Viu-se no 53 que é

$$K(\alpha\beta\ldots\psi\omega) = (-1)^n(\omega\psi\ldots\beta\alpha);$$

e, por ser

$$\left.\begin{aligned} \alpha\beta\ldots\psi\omega &= S(\alpha\beta\ldots\psi\omega) + V(\alpha\beta\ldots\psi\omega) \\ (-1)^n(\alpha\beta\ldots\psi\omega) &= S(\alpha\beta\ldots\psi\omega) - V(\alpha\beta\ldots\psi\omega) \end{aligned}\right\},$$

teremos

$$\left.\begin{aligned} \alpha\beta\ldots\psi\omega + (-1)^n(\omega\psi\ldots\beta\alpha) &= 2S(\alpha\beta\ldots\psi\omega) \\ \alpha\beta\ldots\psi\omega - (-1)^n(\omega\psi\ldots\beta\alpha) &= 2V(\alpha\beta\ldots\psi\omega) \end{aligned}\right\},$$

e analogamente

$$\left.\begin{aligned} \omega\psi\ldots\beta\alpha + (-1)^n(\alpha\beta\ldots\psi\omega) &= 2S(\omega\psi\ldots\beta\alpha) \\ \omega\psi\ldots\beta\alpha - (-1)^n(\alpha\beta\ldots\psi\omega) &= 2V(\omega\psi\ldots\beta\alpha) \end{aligned}\right\}.$$

Estas expressões dão facilmente

$$\left.\begin{aligned} S(\alpha\beta\ldots\psi\omega) &= (-1)^n S(\omega\psi\ldots\beta\alpha) \\ V(\alpha\beta\ldots\psi\omega) &= -(-1)^n V(\omega\psi\ldots\beta\alpha) \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (18)$$

que comprehendem alguns dos resultados já apresentados por isso que teem toda a generalidade.

Para quaterniões temos

$$\left.\begin{array}{r} q_1q_2\ldots q_n = S(q_1q_2\ldots q_n)+V(q_1q_2\ldots q_n) \\ K(q_1q_2\ldots q_n) = S(q_1q_2\ldots q_n)-V(q_1q_2\ldots q_n) \end{array}\right\},$$

que dão

$$\left.\begin{array}{r} 2S(q_1q_2\ldots q_n) = (q_1q_2\ldots q_n)+(Kq_n\ldots Kq_2Kq_1) \\ 2V(q_1q_2\ldots q_n) = (q_1q_2\ldots q_n)-(Kq_n\ldots Kq_2Kq_1) \end{array}\right\},$$

ou symbolicamente

$$\left.\begin{array}{r} 2S\,\Pi = \Pi + \Pi'K \\ 2V\,\Pi = \Pi - \Pi'K \end{array}\right\}.$$

63. Pela fórmula (13) do n.º 60 tem-se

$$V\beta\gamma\delta = \beta S\gamma\delta - \gamma S\delta\beta + \delta S\beta\gamma,$$

e operando-se por $S.\alpha$ vem

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha\beta S\gamma\delta - S\alpha\gamma S\delta\beta + S\alpha\delta S\beta\gamma.$$

Por ser

$$\alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta,\ \gamma\delta = S\gamma\delta + V\gamma\delta$$

vem

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha\beta S\gamma\delta + S(V\alpha\beta V\gamma\delta),$$

e egualando este valor ao anterior de $S.\alpha\beta\gamma\delta$ resulta a fórmula (9) deduzida no n.º 58.

IV

Interpretação e transformação de expressões

64. Representemos na figura da pag. 37 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $<AOB$ por α, β e θ; teremos

$$OA = T\alpha,\ \ OB = T\beta,\ \ OC = T\beta\cos\theta,\ \ CB = T\beta\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

A parte scalar do quaternião $q = \frac{\beta}{\alpha}$, sendo representada por $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$, dá por terem $\overline{OC}$ e $\overline{OA}$ a mesma direcção

$$Sq = S\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}\cos\theta,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

e a parte vectorial, que é representada por $\frac{\overline{CB}}{\overline{OA}}$, dá

$$Vq = TV\frac{\beta}{\alpha}.UV\frac{\beta}{\alpha} = T\frac{\overline{CB}}{\overline{OA}}.U\frac{\overline{CB}}{\overline{OA}},$$

d'onde se tira

$$TVq = TV\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}\,\mathrm{sen}\,\theta;\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

e, por ser $\overline{\mathrm{CB}} \perp \overline{\mathrm{OA}}$, o versor de $\dfrac{\overline{\mathrm{CB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$ será o vector-unidade perpendicular a $\overline{\mathrm{CB}}$ e $\overline{\mathrm{OA}}$, que representaremos por ε, logo

$$\mathrm{UV}q = \mathrm{UV}\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Teremos pois

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha}(\cos\theta + \varepsilon \operatorname{sen}\theta),$$

que se póde escrever sob a fórma

$$q = \mathrm{T}q\,(\cos\theta + \varepsilon \operatorname{sen}\theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

N'esta expressão chama-se a $\mathrm{T}q$, θ e ε *modulo*, *angulo* (ou amplitude) e *eixo* do quaternião.

65. Consideremos o producto dos dois vectores α e β e representemos por q' o quaternião resultante; teremos

$$q' = \alpha\beta = \overline{\mathrm{OA}}\cdot(\overline{\mathrm{OC}} + \overline{\mathrm{CB}}) = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OC}} + \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OD}},$$

d'onde

$$\mathrm{S}q' = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OC}}, \quad \mathrm{V}q' = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OD}}.$$

Representando por $\mathrm{U}\beta'$ o vector-unidade perpendicular a α e existente no plano do quaternião, temos

$$\overline{\mathrm{OA}} = \mathrm{T}\alpha \,.\, \mathrm{U}\alpha,$$

$$\overline{\mathrm{OC}} = \mathrm{T}\beta \cos\theta \,.\, \mathrm{U}\alpha,$$

$$\overline{\mathrm{OD}} = \mathrm{T}\beta \operatorname{sen}\theta \,.\, \mathrm{U}\beta';$$

logo será

$$S\alpha\beta = T\alpha T\beta \cos\theta\,(U\alpha)^2 = -T\alpha T\beta \cos\theta, \ldots\ldots \quad (5)$$

$$V\alpha\beta = T\alpha T\beta \operatorname{sen}\theta \,.\, U\alpha U\beta'.$$

$U\alpha$ e $U\beta'$ sendo dois vectores-unidades perpendiculares entre si e existentes no plano do quaternião q', o seu producto dará o vector-unidade ε, perpendicular a este plano, e portanto será

$$V\alpha\beta = T\alpha T\beta \operatorname{sen}\theta \,.\, \varepsilon,$$

d'onde se tira

$$TV\alpha\beta = T\alpha T\beta \operatorname{sen}\theta, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$UV\alpha\beta = UV\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Estas ultimas fórmulas dão as seguintes regras:

O scalar do producto de dois vectores é egual ao producto dos seus tensores pelo coseno do supplemento do angulo formado por elles.

O tensor do vector do producto de dois vectores é egual ao producto dos seus tensores pelo seno do angulo comprehendido.

O versor do vector do producto de dois vectores é egual a um vector-unidade perpendicular aos dois vectores e no sentido que indique fazer-se positivamente a rotação do primeiro na direcção do segundo.

A fórmula (6) indica tambem que o tensor do producto de dois vectores representa a area do parallelogrammo de que elles são lados contiguos.

O quaternião $q' = \alpha\beta$ será expresso por

$$q' = T\alpha T\beta\,(\cos\theta + \varepsilon \operatorname{sen}\theta)$$

que é da fórma (4).

66. Se os dois vectores α e β são perpendiculares, teremos $\cos\theta = 0$ e portanto

$$S\alpha\beta = 0,$$

e se são parallelos, teremos $\operatorname{sen}\theta = 0$ e

$$V\alpha\beta = 0;$$

e estas duas relações podem por isso servir para exprimir que se tem

$$\alpha \perp \beta \text{ e } \alpha \parallel \beta.$$

Se introduzissemos nas fórmulas (3) e (4) do n.º 54 as relações dadas nos n.ºs 42 e 43, achariamos tambem as condições anteriores.

O ser α perpendicular ou parallelo a β póde ainda exprimir-se pelas relações

$$\alpha = V\gamma\beta \text{ e } \alpha = x\beta,$$

sendo γ um vector perpendicular a α e β e x um numero.

As relações

$$S\frac{\beta}{\alpha} = 0 \text{ e } V\frac{\beta}{\alpha} = 0$$

teem significações analogas a $S\alpha\beta = 0$ e $V\alpha\beta = 0$.

67. Supponhamos dados os dois vectores $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$ e consideremos um terceiro $\overline{OP} = \rho$ com a mesma origem de α e β, mas de direcção indeterminada.

Se tivermos a relação

$$S\frac{\rho}{\alpha} = 0,$$

que indica ser ρ perpendicular a α, concluiremos que o logar de P no espaço é o plano que passa pela origem dos vectores e é perpendicular a α.

Analogamente, tendo-se

$$S\frac{\rho-\beta}{\alpha}=0,$$

indicando ser $\rho-\beta\perp\alpha$ e por que $\rho-\beta$ representa o vector que une as extremidades de ρ e β, o logar do ponto P será o plano tirado pela extremidade de β perpendicularmente a α.

A relação

$$S\frac{\alpha}{\rho}=1$$

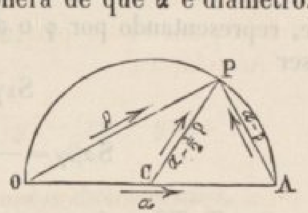
dá, sendo θ o angulo formado pelos dois vectores,

$$T\rho=T\alpha\cos\theta,$$

que indica ser a projecção de α sobre ρ egual ao comprimento de ρ; logo, o logar de P será uma esphera de que α é diametro.

Como é $\overline{PA}\perp\overline{OP}$, esta mesma esphera póde ser representada por

$$S\frac{\alpha-\rho}{\rho}=0.$$



Se unirmos o ponto C, meio de $\overline{OA}$, com a extremidade de ρ, teremos

$$\overline{CP}=\rho-\frac{1}{2}\alpha,$$

e portanto podemos ainda representar a esphera anterior, considerada como o logar da extremidade de ρ, por

$$T(\rho-\frac{1}{2}\alpha)=\frac{1}{2}T\alpha.$$

Para transformarmos esta ultima expressão nas anteriores, que teem a mesma significação, procederemos do modo seguinte: elevando-a ao quadro, virá

$$-\left(\rho-\frac{1}{2}\alpha\right)^2=-\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2=-\frac{1}{4}\alpha^2;$$

e, desenvolvendo o primeiro membro,

$$\rho^2-S\alpha\rho=0,$$

que dá

$$S\frac{\alpha}{\rho}=1 \text{ e } S(\alpha-\rho)\rho=0=S\frac{\alpha-\rho}{\rho}.$$

68. Tomando o scalar do producto de tres vectores α, β, γ, teremos

$$S\alpha\beta\gamma=S(V\alpha\beta.\gamma)=T\alpha T\beta \operatorname{sen}\theta\, S\varepsilon\gamma,$$

e, representando por φ o angulo comprehendido entre ε e γ, por ser

$$S\varepsilon\gamma=-T\gamma\cos\varphi,$$

$$S\alpha\beta\gamma=-T\alpha T\beta T\gamma \operatorname{sen}\theta\cos\varphi. \dots \dots\dots \quad (8)$$

Ora $T\alpha T\beta \operatorname{sen}\theta$ representa a area do parallelogrammo de que são lados contiguos os vectores α e β, e $T\gamma\cos\varphi$ a projecção de γ sobre a direcção de ε, logo — *o scalar do producto de tres vectores representa, em geral* (com differença de signal), *o volume do parallelipipedo de que elles são as arestas contiguas.*

Este scalar será nullo quando fôr $\operatorname{sen}\theta=0$ ou $\cos\varphi=0$, correspondendo o primeiro caso a ser $\alpha \parallel \beta$ e o segundo a $\gamma \parallel\!| \alpha, \beta$.

Pelo n.º 13 teriamos, sendo $\alpha \parallel \beta$,

$$\alpha=x\beta,$$

e pelo n.º 14 teriamos, sendo $\gamma \parallel\!| \alpha, \beta$,

$$\gamma=x\alpha+y\beta;$$

substituindo estes valores em $S\alpha\beta\gamma$ e attendendo a que o quadrado de um vector é um numero e o producto de um vector por um scalar é um vector, obteriamos como anteriormente para os dois casos

$$S\alpha\beta\gamma = 0.$$

A condição para que tres vectores α, β, γ, que não são parallelos, sejam coplanares póde exprimir-se portanto por

$$S\alpha\beta\gamma = 0.$$

69. Effectuando a multiplicação dos tres vectores

$$\alpha = x\, i + y\, j + z\, k,$$

$$\beta = x' i + y' j + z' k,$$

$$\gamma = x'' i + y'' j + z'' k,$$

teremos

$$S\alpha\beta\gamma = -(yz' - zy')\,x'' - (zx' - xz')\,y'' - (xy' - yx')\,z'',$$

que se póde escrever, usando da notação dos *determinantes*,

$$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} x'' - \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} z'' = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Vê-se como ha ligação entre a theoria dos *determinantes* e o novo calculo dos quaterniões.

Ora a theoria dos determinantes dá, empregando por simplicidade uma notação abreviada,

$$|xy'z''| = |x'y''z| = |x''yz'| = -|xy''z'| = -|x'yz''| = -|x''y'z|,$$

que exprimem ser como no n.º 56

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta = -S\alpha\gamma\beta = -S\beta\alpha\gamma = -S\gamma\beta\alpha.$$

E, como em um determinante se podem mudar as columnas verticaes em linhas horizontaes e vice-versa sem que o seu valor seja alterado, teremos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix},$$

logo, tendo-se conjunctamente com os vectores α, β, γ, os tres

$$\alpha' = xi + x'j + x''k,\ \beta' = yi + y'j + y''k,\ \gamma' = zi + z'j + z''k,$$

e sendo $S\alpha\beta\gamma = 0$, será tambem

$$S\alpha'\beta'\gamma' = 0.$$

70. Em um triangulo plano ABC tem-se

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

e operando-se por $S.\overline{AC}\times$ sobre esta expressão, vem

$$S(\overline{AC}\times\overline{AC}) = S(\overline{AC}\times\overline{AB}) + S(\overline{AC}\times\overline{BC}),$$

que, pela primeira regra do n.º 65, empregando a notação usual de Geometria e simplificando, dá

$$b = c\cos A + a\cos C.$$

Operando por $TV\overline{AB}\times$ sobre a primeira expressão d'este numero e attendendo a que o quadrado de um vector é um scalar, vem

$$TV(\overline{AB}\times\overline{AC})=TV(\overline{AB}\times\overline{BC});$$

que, pela segunda regra do n.º 65, dá

$$b\,\text{sen}\,A=a\,\text{sen}\,B;$$

analogamente se teria

$$TV(\overline{BC}\times\overline{AC})=TV(\overline{BC}\times\overline{AB}),$$

d'onde

$$b\,\text{sen}\,C=c\,\text{sen}\,B;$$

logo, pela combinação d'estes dois resultados, vem a fórmula importante de Trigonometria

$$\frac{\text{sen}\,A}{a}=\frac{\text{sen}\,B}{b}=\frac{\text{sen}\,C}{c}.$$

De

$$\overline{AC}\times\overline{AC}=(\overline{AB}+\overline{BC})(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{AB}^2+2S(\overline{AB}\times\overline{BC})+\overline{BC}^2$$

operando por $S\times$, virá

$$b^2=a^2-2ac\cos B+c^2.$$

71. O versor de um quaternião $q=\dfrac{\beta}{\alpha}$ póde ser expresso, segundo se viu no n.º 64, por

$$U\frac{\beta}{\alpha}=\cos\theta+\varepsilon\,\text{sen}\,\theta,$$

sendo θ o angulo comprehendido entre α e β e ε o vector-unidade na direcção do *eixo* do quaternião.

Representando por γ um outro vector coplanar com α e β e fazendo com este ultimo vector o angulo φ, teremos

$$U\frac{\gamma}{\beta}=\cos\varphi+\varepsilon\operatorname{sen}\varphi,$$

$$U\frac{\gamma}{\alpha}=\cos(\theta+\varphi)+\varepsilon\operatorname{sen}(\theta+\varphi);$$

mas é

$$U\frac{\gamma}{\alpha}=U\frac{\gamma}{\beta}\,U\frac{\beta}{\alpha},$$

logo, tem-se

$$\cos(\theta+\varphi)+\varepsilon\operatorname{sen}(\theta+\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)$$
$$+\varepsilon(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\cos\theta\operatorname{sen}\varphi),$$

d'onde se tira

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,$$
$$\operatorname{sen}(\theta+\varphi)=\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\cos\theta\operatorname{sen}\varphi.$$

Na caso particular de ser $\varphi=\theta$, teremos

$$(\cos\theta+\varepsilon\operatorname{sen}\theta)^2=\cos 2\theta+\varepsilon\operatorname{sen}2\theta,$$

e, em geral, para m qualquer teremos a fórmula conhecida de Moivre

$$(\cos\theta+\varepsilon\operatorname{sen}\theta)^m=\cos m\theta+\varepsilon\operatorname{sen}m\theta.$$

72. Consideremos uma esphera-unidade e na sua superficie um triangulo ABC, e representemos os tres vectores-unidades $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ por α, β, γ; teremos (n.º 65)

$$\left.\begin{array}{ll} S\beta\gamma=-\cos a, & TV\beta\gamma=\operatorname{sen}a \\ S\gamma\alpha=-\cos b, & TV\gamma\alpha=\operatorname{sen}b \\ S\alpha\beta=-\cos c, & TV\alpha\beta=\operatorname{sen}c \end{array}\right\}.$$

Os vectores-unidades correspondentes aos vertices do triangulo polar de ABC serão expressos por

$$\mathrm{UV}\alpha\beta,\ \mathrm{UV}\gamma\alpha,\ \mathrm{UV}\beta\gamma,$$

e teremos

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{S.UV}\gamma\alpha\,\mathrm{UV}\alpha\beta=\cos \mathrm{A}, & \mathrm{T.UV}\gamma\alpha\,\mathrm{UV}\alpha\beta=\mathrm{sen}\,\mathrm{A} \\ \mathrm{S.UV}\alpha\beta\,\mathrm{UV}\beta\gamma=\cos \mathrm{B}, & \mathrm{T.UV}\alpha\beta\,\mathrm{UV}\beta\gamma=\mathrm{sen}\,\mathrm{B} \\ \mathrm{S.UV}\beta\gamma\,\mathrm{UV}\gamma\alpha=\cos \mathrm{C}, & \mathrm{T.UV}\beta\gamma\,\mathrm{UV}\gamma\alpha=\mathrm{sen}\,\mathrm{C} \end{array}\right\}.$$

A fórmula (9) do n.º 58 dá

$$\mathrm{S.V}\alpha\beta\,\mathrm{V}\beta\gamma=\beta^2\mathrm{S}\alpha\gamma-\mathrm{S}\alpha\beta\,\mathrm{S}\beta\gamma,$$

e tem-se tambem

$$\mathrm{S.V}\alpha\beta\,\mathrm{V}\beta\gamma=\mathrm{T}(\mathrm{V}\alpha\beta\,\mathrm{V}\beta\gamma)\,\mathrm{S.U}(\mathrm{V}\alpha\beta\,\mathrm{V}\beta\gamma);$$

logo, será

$$-\mathrm{S}\alpha\gamma=\mathrm{S}\alpha\beta\,\mathrm{S}\beta\gamma+\mathrm{TV}\alpha\beta\,\mathrm{TV}\beta\gamma\,\mathrm{S.UV}\alpha\beta\,\mathrm{UV}\beta\gamma,$$

que pelos valores anteriores se transforma em

$$\cos b=\cos c\cos a+\mathrm{sen}\,c\,\mathrm{sen}\,a\cos \mathrm{B}.$$

Analogamente teriamos

$$\mathrm{S.V}\gamma\alpha\,\mathrm{V}\alpha\beta=\alpha^2\mathrm{S}\gamma\beta-\mathrm{S}\gamma\alpha\,\mathrm{S}\alpha\beta=\mathrm{T}(\mathrm{V}\gamma\alpha\,\mathrm{V}\alpha\beta)\,\mathrm{S.U}(\mathrm{V}\gamma\alpha\,\mathrm{V}\alpha\beta),$$

$$\mathrm{S.V}\beta\gamma\,\mathrm{V}\gamma\alpha=\gamma^2\mathrm{S}\alpha\beta-\mathrm{S}\beta\gamma\,\mathrm{S}\gamma\alpha=\mathrm{T}(\mathrm{V}\beta\gamma\,\mathrm{V}\gamma\alpha)\,\mathrm{S.U}(\mathrm{V}\beta\gamma\,\mathrm{V}\gamma\alpha),$$

que dão

$$\cos a=\cos b\cos c+\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,c\cos \mathrm{A},$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b\cos \mathrm{C}.$$

Pela fórmula (8) do n.º 57 é

$$V(V\alpha\beta\, V\beta\gamma) = -\beta S\alpha\beta\gamma,$$

que dá

$$TV.V\alpha\beta\, V\beta\gamma = S.\gamma V\alpha\beta;$$

e, por ser B o angulo formado pelos dois vectores $V\alpha\beta$, $V\beta\gamma$, o n.º 65 dá

$$TV.V\alpha\beta\, V\beta\gamma = TV\alpha\beta.TV\beta\gamma.\text{sen}\, B.$$

Ora, representando por p_a, p_b, p_c os arcos tirados de A, B, C, perpendicularmente aos lados oppostos, as duas expressões anteriores dão

$$\text{sen}\, c\, \text{sen}\, a\, \text{sen}\, B = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, p_a = \text{sen}\, b\, \text{sen}\, p_b = \text{sen}\, c\, \text{sen}\, p_c.$$

Do que fica dicto tira-se

$$V\alpha\beta\, V\beta\gamma = \text{sen}\, c\, \text{sen}\, a\, (\cos B + \beta\, \text{sen}\, B),$$

que dá

$$T.V\alpha\beta\, V\beta\gamma = \text{sen}\, c\, \text{sen}\, a,$$

$$U.V\alpha\beta\, V\beta\gamma = \cos B + \beta\, \text{sen}\, B,$$

e achar-se-hia facilmente

$$U.V\gamma\beta\, V\beta\alpha = \cos B - \beta\, \text{sen}\, B.$$

73. Como exemplo das transformações que se podem obter de uma dada expressão, apresentamos o seguinte. Dada a expressão

$$T\rho = T\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

teremos as transformações seguintes

$$(T\rho)^2 = (T\alpha)^2,$$

$$\rho K\rho = \alpha K\alpha,$$

$$\rho^2 = \alpha^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

$$(\rho^2 + \alpha^2 + 2S\alpha\rho) - 2S\alpha\rho - 2\alpha^2 = (\rho + \alpha)^2 - 2S\alpha(\rho - \alpha) = 0 \ldots \quad (c)$$

$$\rho^2 + \alpha\rho - \alpha\rho - \alpha^2 = (\rho + \alpha)\rho - \alpha(\rho + \alpha) = 0 \ldots\ldots \quad (d)$$

$$\rho = (\rho + \alpha)^{-1}\alpha(\rho + \alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

$$S(\rho^2) - S(\alpha^2) + S\alpha\rho - S\rho\alpha = S(\rho^2 + \alpha\rho - \rho\alpha - \alpha^2)$$

$$= S(\rho + \alpha)(\rho - \alpha) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

$$T(\rho + \alpha)(\rho - \alpha) = T(\rho^2 - \alpha^2 + \alpha\rho - \rho\alpha) = T(\alpha\rho - \rho\alpha)$$

$$= T(V\alpha\rho - V\rho\alpha) = 2TV\alpha\rho \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

$$\frac{T\rho}{T\alpha} = T\frac{\rho}{\alpha} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

$$T\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

$$\frac{\rho}{\alpha} K \frac{\rho}{\alpha} = 1$$

$$\left(S\frac{\rho}{\alpha} + V\frac{\rho}{\alpha}\right)\left(S\frac{\rho}{\alpha} - V\frac{\rho}{\alpha}\right) = \left(S\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 - \left(V\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 = 1 \ldots \quad (j)$$

Estas differentes transformações correspondem a propriedades de uma esphera.

V

Equações do primeiro grau. Biquaterniões.

74. Representando por $f(q)$ uma dada funcção, em que o quaternião indeterminado q entra combinado com outros conhecidos e cujo valor é r, a equação

$$f(q) = r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

póde, em geral, ser decomposta em quatro equações algebricas ordinarias, involvendo as quantidades w, x, y, z, que determinarão o quaternião q.

Suppondo que é n o maior numero de vezes, que o quaternião q entra como factor em um mesmo termo de $f(q)$, diremos que a equação (1) é do grau n.

Assim,

$$aqb + a'qb' + \ldots = \Sigma aqb = c,$$

em que $a, b, a', b' \ldots c$ são quaterniões ou funcções de quaterniões conhecidos e q é o quaternião desconhecido, é uma equação do *primeiro grau* ou uma *equação linear* de quaterniões;

$$\Sigma aqbqc + \Sigma dqe = f$$

representará uma equação do *segundo grau* ou *quadratica;* e assim successivamente.

Substituindo na equação do *grau n* o quaternião q pelo seu valor $q=w+xi+yj+zk$, e os quaterniões conhecidos pelos seus valores analogos, decomporemos a equação dada em quatro, ligando os quatro scalares procurados w, x, y, z com os conhecidos, sendo cada uma d'estas equações, em geral, do grau n. Pelos principios conhecidos de eliminação de Algebra cada um dos quatro scalares será dado por uma equação, em geral, do grau n^4; e portanto uma equação linear terá uma só raiz; uma equação quadratica terá 16 raizes; uma equação cubica terá 81 raizes; e assim successivamente.

Vê-se d'aqui a difficuldade que naturalmente apresentará a resolução de uma equação por estes processos.

Até agora apenas se tem dado a resolução geral e completa das equações do primeiro grau e é d'estas equações que vamos tractar.

75. A fórma mais geral de uma equação linear de quaterniões é, sendo q o quaternião desconhecido e podendo conter ou não as caracteristicas S ou V,

$$a=\mathrm{S}bq+\Sigma\mathrm{V}cqd \ (*) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(*) É facil de ver que a esta fórma se reduz a equação

$$a=\Sigma bqc+\Sigma d.\mathrm{S}b'qc'+\Sigma e.\mathrm{V}b''qc''.f; \ \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

porque, por ser

$$\mathrm{V}b''qc''=b''qc''-\mathrm{S}b''qc''=b''qc''-\mathrm{S}c''b''q,$$

teremos

$$\Sigma e.\mathrm{V}b''qc''.f=\Sigma(eb'')q(c''f)-\Sigma ef\mathrm{S}(c''b'')q$$

e a fórmula (a) reduz-se a

$$a=\Sigma bqc+\Sigma d\mathrm{S}eq; \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

e, por ser

$$\Sigma bqc=\Sigma\mathrm{S}bqc+\Sigma\mathrm{V}bqc=\mathrm{S}b_1q+\Sigma\mathrm{V}bqc, \quad \Sigma d\mathrm{S}eq=\mathrm{S}d_1q+\Sigma\mathrm{V}d_2q,$$

(b) reduz-se finalmente a

$$a=\mathrm{S}bq+\Sigma\mathrm{V}cqd.$$

Operando por S. e V., virá

$$\left.\begin{array}{l} Sa = Sbq = SbSq + S.VbVq \\ Va = \Sigma V.cqd = Sq.\Sigma Vcd + \Sigma V.c(Vq)d \end{array}\right\}, \ldots\ldots (3)$$

e, eliminando entre estas duas expressões Sq, para o que operaremos sobre a primeira por ΣVcd e sobre a segunda por $-Sb$, e sommaremos depois, virá

$$(\Sigma V\alpha.Vq.d)\,Sc - (\Sigma Vcd)\,S.VqVb = Va.Sc - (\Sigma Vcd)\,Sa,$$

que se poderá reduzir sempre á fórma geral

$$\Sigma\alpha.S\beta\rho = \gamma, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

sendo α, β, γ, ... vectores conhecidos e ρ o vector desconhecido.

Determinado o vector ρ e substituindo-o em Sa, teremos Sq e ficará completamente determinado o quaternião q.

76. *Equação vectorial linear.* Representemos por $\varphi\rho$ o primeiro membro de (4), será φ o symbolo de uma funcção *vectorial linear* ou do primeiro grau em ρ. Designaremos por φ^{-1} a funcção *inversa* de φ, isto é, que satisfaz á relação

$$\varphi^{-1}(\varphi\rho) = \rho,$$

e representaremos symbolicamente que estas duas funcções são commutativas por

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1.$$

Quando sobre uma funcção $\varphi\rho$ operarmos por φ, poremos $\varphi(\varphi\rho) = \varphi^2\rho$, e, em geral, operando m vezes $\varphi^m\rho$; e analogamente, poremos $\varphi^{-m}\rho$ quando tomarmos a funcção φ^{-1} m vezes.

A fórma da funcção φ mostra que se tem

$$\varphi(\rho + \rho' + \rho'' + \ldots) = \varphi\rho + \varphi\rho' + \varphi\rho'' + \ldots$$

e

$$\varphi x \rho = x \varphi \rho$$

$$\varphi^m \varphi^{m'} \varphi^{-n} \varphi^{-n'} \ldots = \varphi^{m+m' \ldots -n-n' - \ldots}$$

77. *Funcções conjugadas.* Operando sobre $\varphi\rho = \Sigma\alpha S\beta\rho$ por $S\rho'$, sendo ρ' um vector qualquer differente de ρ, teremos

$$S\rho'\varphi\rho = \Sigma S\rho'\alpha S\beta\rho = S\rho(\Sigma\beta S\alpha\rho'),$$

e, representando por φ' a funcção que resulta de α e β mudarem de logar em φ e que chamaremos *funcção conjugada* de φ, teremos

$$S\rho'\varphi\rho = S\rho\varphi'\rho' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Quando fôr $\varphi' = \varphi$ diz-se que a funcção φ é *conjugada de si mesma.*

Se á expressão (5), que dá a propriedade fundamental das funcções conjugadas, junctarmos $S\rho'\varphi'\rho = S\rho\varphi\rho'$ teremos

$$S\rho'(\varphi + \varphi')\rho = S\rho(\varphi' + \varphi)\rho',$$

que indica ser a funcção $\varphi + \varphi'$ conjugada de si mesma.

Applicando a expressão (5) a $S\rho\varphi(\varphi'\rho')$, teremos

$$S\rho\varphi(\varphi'\rho') = S\varphi'\rho'\varphi'\rho = S\varphi'\rho\varphi'\rho' = S\rho'\varphi(\varphi'\rho),$$

que indica ser tambem $\varphi\varphi'$ uma funcção conjugada de si mesma.

Como se tem

$$S\rho\varphi\rho = S\rho\varphi'\rho \text{ ou } S\rho(\varphi - \varphi')\rho = 0,$$

segue-se (n.° 66) que $(\varphi - \varphi')\rho$ representa um vector perpendicular a ρ e portanto podemos escrever

$$(\varphi - \varphi')\rho = V\delta\rho,$$

que exprime que *uma funcção vectorial linear não conjugada de si mesma differe de uma funcção conjugada de si mesma, deduzida da primeira, em conter um termo da fórma* $V\delta\rho$.

É claro que, sendo a funcção conjugada de si mesma, se tem $\delta = 0$.

78. *Inversão de* φ. Qualquer vector $\varphi\rho = \Sigma\alpha S\beta\rho$, expresso em funcção de $2n$ vectores, suppondo que são n os termos de Σ, póde ser reduzido á somma de tres termos só; com effeito, pelo n.° 66 temos, considerando os tres vectores λ, μ, ν,

$$\varphi\rho = \frac{1}{S\lambda\mu\nu}(\lambda S\mu\nu\varphi\rho + \mu S\nu\lambda\varphi\rho + \nu S\lambda\mu\varphi\rho.$$

Pela fórmula (5) tem-se

$$\left.\begin{aligned} SV\mu\nu\varphi\rho &= S\rho\varphi' V\mu\nu \\ SV\nu\lambda\varphi\rho &= S\rho\varphi' V\nu\lambda \\ SV\lambda\mu\varphi\rho &= S\rho\varphi' V\lambda\mu \end{aligned}\right\},$$

e, fazendo-se

$$\left.\begin{aligned} \varphi' V\mu\nu &= \Sigma\beta S\alpha\mu\nu = \lambda_1 S\lambda\mu\nu \\ \varphi' V\nu\lambda &= \Sigma\beta S\alpha\nu\lambda = \mu_1 S\lambda\mu\nu \\ \varphi' V\lambda\mu &= \Sigma\beta S\alpha\lambda\mu = \nu_1 S\lambda\mu\nu \end{aligned}\right\},$$

virá

$$\varphi\rho = \lambda S\lambda_1\rho + \mu S\mu_1\rho + \nu S\nu_1\rho,$$

em que λ, μ e ν são tres vectores arbitrarios e λ_1, μ_1, ν_1 serão dados em funcção d'elles e de α, β, γ.

79. Decompondo um vector $\varphi^3\rho$ segundo as direcções dos tres ρ, $\varphi\rho$, $\varphi^2\rho$, que em geral não serão coplanares, teremos

$$\varphi^3\rho = x\rho + y\varphi\rho + z\varphi^2\rho, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

e, operando por φ^{-1}, virá

$$-x\varphi^{-1}\rho = y\rho + z\varphi\rho - \varphi^2\rho, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

expressão que dá a funcção inversa φ^{-1} por intermedio de funcções directas.

Substituindo ρ pelos tres vectores-unidades i, j, k, teremos tres equações que servirão para determinar os valores de x, y, z.

No caso de ser x nullo, operando por φ^{-2} sobre (6), viria

$$-y\varphi^{-1}\rho = z\rho - \varphi\rho;$$

e, sendo conjunctamente x e y nullos, teriamos ainda

$$z\varphi^{-1}\rho = \rho.$$

Se os tres vectores ρ, $\varphi\rho$, $\varphi^2\rho$ fossem coplanares, poderiamos pôr

$$\varphi^2\rho = x'\rho + y'\varphi\rho$$

e a expressão (6) tornar-se-hia em

$$\varphi^3\rho = (x + zx')\rho + (y + zy')\varphi\rho,$$

e ainda a expressão (7) tem logar.

80. Vamos applicar este methodo de inversão á expressão seguinte, muito importante no estudo das superficies de 2.ª ordem com centro,

$$\varphi\rho = -ia^2 Si\rho - jb^2 Sj\rho - kc^2 Sk\rho.$$

Fazendo a substituição de ρ por i, j, k, temos

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi\, i=ia^2, & \varphi\, j=jb^2, & \varphi\, k=kc^2 \\ \varphi^2 i=ia^4, & \varphi^2 j=jb^4, & \varphi^2 k=kc^4 \\ \varphi^3 i=ia^6, & \varphi^3 j=jb^6, & \varphi^3 k=kc^6 \end{array}\right\};$$

e, fazendo as mesmas substituições em (6), vem

$$\left.\begin{array}{l} a^6=x+ya^2+za^4 \\ b^6=x+yb^2+zb^4 \\ c^6=x+yc^2+zc^4 \end{array}\right\}.$$

Estas ultimas expressões mostram que a^2, b^2, c^2, são as tres raizes da equação do 3.º grau

$$t^3-zt^2-yt-x=0,$$

e portanto tem-se

$$\left.\begin{array}{l} x=a^2b^2c^2 \\ y=-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \\ z=a^2+b^2+c^2 \end{array}\right\},$$

e (6) transforma-se em

$$\varphi^3\rho=a^2b^2c^2\rho-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\varphi\rho+(a^2+b^2+c^2)\varphi^2\rho, \; .. \; (8)$$

que dá

$$a^2b^2c^2\varphi^{-1}\rho=(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\rho-(a^2+b^2+c^2)\varphi\rho+\varphi^2\rho.$$

A expressão (8) póde-se pôr sob a fórma *symbolica*

$$(\varphi-a^2)(\varphi-b^2)(\varphi-c^2)=0.$$

81. *Methodo de Hamilton.* Consideremos dois vectores λ e μ taes que se tenha

$$\varphi\rho = V\lambda\mu. \qquad (9)$$

Operando por $S\lambda$ e $S\mu$ teremos

$$S\lambda\varphi\rho = 0, \quad S\mu\varphi\rho = 0,$$

e, introduzindo as funcções conjugadas,

$$S\rho\varphi'\lambda = 0, \quad S\rho\varphi'\mu = 0.$$

Por estas expressões tem-se

$$\rho \perp \varphi'\lambda, \quad \rho \perp \varphi'\mu,$$

logo, podemos pôr, representando por m um scalar dependente de λ, μ e ρ,

$$m\rho = V\varphi'\lambda\,\varphi'\mu.$$

E, como de (9) se tira

$$\rho = \varphi^{-1}V\lambda\mu,$$

teremos

$$m\varphi^{-1}V\lambda\mu = V\varphi'\lambda\varphi'\mu \qquad (10)$$

Resta pois determinar m e exprimir o segundo membro em funcção de $V\lambda\mu$, para se ter a inversão de φ.

Seja ν um vector não coplanar com λ e μ, e operemos sobre (10) por $S\varphi'\nu$, teremos

$$mS.\varphi'\nu\varphi^{-1}V\lambda\mu = S.\varphi'\nu V\varphi'\lambda\varphi'\mu,$$

que, por ser

$$S.\varphi'\nu\varphi^{-1}V\lambda\mu = S\varphi^{-1}\lambda\mu\varphi\nu = S\nu\varphi\varphi^{-1}V\lambda\mu = S\lambda\mu\nu,$$

e

$$S\varphi'\nu V\varphi'\lambda\varphi'\mu = S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu,$$

dá

$$m = \frac{S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu}{S\lambda\mu\nu} \qquad (11)$$

Este valor de m é independente dos que dermos a λ, μ, ν, porque substituindo, por exemplo, λ por $\lambda + p\mu$, teremos

$$m = \frac{S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu + pS(\varphi'\mu)^2\varphi'\nu}{S\lambda\mu\nu + pS\mu^2\nu} = \frac{S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu}{S\lambda\mu\nu};$$

ora, fazendo modificações successivas analogas á anterior, podemos fazer com que λ, μ, ν tenham tres valores quaesquer, sem que o valor de m seja alterado (*).

(*) Podemos demonstrar a independencia de m dos valores dados a λ, μ e ν do modo seguinte: sejam λ', μ', ν' tres vectores não coplanares e differentes de λ, μ, ν; pelo n.º 14 temos

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= x\lambda + y\mu + z\nu \\ \mu' &= x'\lambda + y'\mu + z'\nu \\ \nu' &= x''\lambda + y''\mu + z''\nu \end{aligned}\right\},$$

que dá operando-se por φ'

$$\left.\begin{aligned} \varphi'\lambda' &= x\varphi'\lambda + y\varphi'\mu + z\varphi'\nu \\ \varphi'\mu' &= x'\varphi'\lambda + y'\varphi'\mu + z'\varphi'\nu \\ \varphi'\nu' &= x''\varphi'\lambda + y''\varphi'\mu + z''\varphi'\nu \end{aligned}\right\}.$$

Estes dois grupos dão facilmente, fazendo-se por simplicidade

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$S\varphi'\lambda'\varphi'\mu'\varphi'\nu' = \Delta S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu, \quad S\lambda'\mu'\nu' = \Delta S\lambda\mu\nu;$$

logo, será

$$m = \frac{S\varphi'\lambda'\varphi'\mu'\varphi'\nu'}{S\lambda'\mu'\nu'} = \frac{S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu}{S\lambda\mu\nu}.$$

82. Se na expressão (10) mudarmos φ em $\varphi + g$, sendo g um scalar, teremos

$$\begin{aligned} m_g(\varphi + g)^{-1}\mathrm{V}\lambda\mu &= \mathrm{V}(\varphi' + g)\lambda(\varphi' + g)\mu \\ &= \mathrm{V}\varphi'\lambda\varphi'\mu + g\mathrm{V}(\lambda\varphi'\mu + \varphi'\lambda.\mu) + g^2\mathrm{V}\lambda\mu. \end{aligned}$$

Façamos

$$\lambda\varphi'\mu + \varphi'\lambda.\mu = \Phi\mathrm{V}\lambda\mu,$$

teremos

$$m_g(\varphi + g)^{-1}\mathrm{V}\lambda\mu = (m\varphi^{-1} + g\Phi + g^2)\,\mathrm{V}\lambda\mu \dots\dots (12)$$

A expressão (11) torna-se em

$$m_g = m + m'g + m''g^2 + g^3,$$

fazendo-se por simplicidade

$$\left.\begin{aligned} m' &= \frac{1}{\mathrm{S}\lambda\mu\nu}\mathrm{S}(\varphi'\lambda.\mu\varphi'\nu + \lambda\varphi'\mu\varphi'\nu + \varphi'\lambda\varphi'\mu.\nu) \\ m'' &= \frac{1}{\mathrm{S}\lambda\mu\nu}\mathrm{S}(\lambda\mu\varphi'\nu + \varphi'\lambda.\mu\nu + \lambda\varphi'\mu.\nu) \end{aligned}\right\},\dots (13)$$

e sendo os valores de m' e m'' independentes tambem dos que dermos a λ, μ e ν.

Substituindo em (12) este valor de m_g e operando depois por $\varphi + g$, virá

$$\begin{aligned} &(m + m'g + m''g^2 + g^3)\mathrm{V}\lambda\mu \\ &= [m + g(\varphi\Phi + m\varphi^{-1}) + g^2(\varphi + \Phi) + g^3]\mathrm{V}\lambda\mu, \end{aligned}$$

que dá, pela comparação dos coefficientes de g e g^2,

$$\left.\begin{aligned} m' &= \varphi\Phi + m\varphi^{-1} \\ m'' &= \varphi + \Phi \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots (14)$$

A segunda d'estas expressões, dando

$$\Phi = m'' - \varphi,$$

indica que Φ é uma funcção vectorial linear, e a primeira dá pela eliminação de Φ

$$m\varphi^{-1} = m' - m''\varphi + \varphi^2, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

que resolve completamente uma equação vectorial linear pelo methodo de Hamilton.

83. *Exemplos.* Applicando este methodo ao exemplo do n.º 80 e tomando para valores de λ, μ, ν os vectores-unidades i, j, k, achariamos facilmente

$$\left.\begin{aligned} &\varphi' i = ia^2, \ \ \varphi' j = jb^2, \ \ \varphi' k = kc^2, \\ &m = a^2b^2c^2, \\ &m' = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2, \\ &m'' = c^2 + a^2 + b^2, \end{aligned}\right\},$$

que substituidos em (15) dão para o vector ρ

$$a^2b^2c^2\varphi^{-1}\rho = (a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)\rho - (c^2 + a^2 + b^2)\varphi\rho + \varphi^2\rho.$$

84. Muitas vezes uma dada equação vectorial linear póde ser resolvida mais facilmente pelo emprego de processos particulares, de que não podemos apresentar regras, porque dependem só de habilidade e práctica. Para se ver a vantagem d'este emprego apresentaremos os dois exemplos seguintes, que serão resolvidos pelo methodo geral e depois por um processo particular.

Seja proposta a equação

$$V\alpha\rho\beta = \lambda,$$

em que α, β e γ são vectores dados e ρ é o vector desconhecido; teremos, attendendo ao n.º 60,

$$\varphi\rho = V\alpha\rho\beta, \quad \varphi'\rho = V\beta\rho\alpha = \varphi\rho,$$

e, tomando para valores dos dois vectores λ, μ, ν os tres α, β, γ, se não forem coplanares, virá

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi'\alpha = \beta\alpha^2, \quad \varphi'\beta = \alpha\beta^2, \quad \varphi'\gamma = V\alpha\gamma\beta \\
&m = \alpha^2\beta^2 \frac{S\beta\alpha V\alpha\gamma\beta}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha^2\beta^2 \frac{S\beta\alpha(\alpha\gamma\beta - S\alpha\gamma\beta)}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta \\
&m' = \frac{S(2\alpha^2\beta^2 V\alpha\gamma\beta + \alpha^2\beta^2\beta\alpha\gamma)}{S\alpha\beta\gamma} = -\alpha^2\beta^2 \\
&m'' = \frac{S(\alpha\beta V\alpha\gamma\beta + 2\alpha^2\beta^2\gamma)}{S\alpha\beta\gamma} = -\frac{S\beta\alpha V\alpha\gamma\beta}{S\alpha\beta\gamma} = -S\alpha\beta
\end{aligned}\right\}.$$

Substituindo estes valores em (15) e applicando ao vector γ, vem

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = -\gamma\alpha^2\beta^2 + V\alpha\gamma\beta S\alpha\beta + V.\alpha(V\alpha\gamma\beta)\beta;$$

mas, por se ter

$$V.\alpha(V\alpha\gamma\beta)\beta = \beta\alpha^2 S\beta\gamma + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma - V\alpha\gamma\beta S\alpha\beta,$$

esta expressão transforma-se em

$$\rho = \frac{1}{S\alpha\beta}(\alpha^{-1}S\alpha\gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma - \gamma).$$

84. Em vez de se seguir o processo geral, attenderemos a que pela fórmula (13) do n.º 60 se tem

$$V\alpha\rho\beta = \gamma = \alpha S\beta\rho + \beta S\alpha\rho - \rho S\alpha\beta,$$

e, operando sobre a equação proposta por $S.\alpha\times$ e $S.\beta\times$, teremos

$$S.\alpha V\alpha\rho\beta = \alpha^2 S\beta\rho = S\alpha\gamma,$$

$$S.\beta V\alpha\rho\beta = \beta^2 S\alpha\rho = S\beta\gamma,$$

que dão

$$\alpha S\beta\rho = \alpha^{-1} S\alpha\gamma, \quad \beta S\alpha\rho = \beta^{-1} S\beta\rho.$$

Substituindo estes valores na expressão precedente de γ, teremos a solução pedida

$$\rho = \frac{1}{S\alpha\beta}(\alpha^{-1}S\alpha\gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma - \gamma).$$

85. Consideremos agora a equação

$$V\alpha\beta\rho = \gamma;$$

teremos

$$\varphi\rho = V\alpha\beta\rho \;\text{ e }\; \varphi'\rho = V\beta\alpha\rho.$$

Tomando para valores de λ, μ, ν os vectores α, β, γ, teremos

$$\varphi'\alpha = \beta\alpha^2, \quad \varphi'\beta = \beta\alpha\beta, \quad \varphi'\gamma = V\beta\alpha\gamma,$$

que, substituidos em (11) e (13), dão

$$\left.\begin{aligned} m &= \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta \\ m' &= 2(S\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2 \\ m'' &= 3S\alpha\beta \end{aligned}\right\} (*).$$

(*) As fórmulas (11) e (13) dão

$$m = \frac{1}{S\alpha\beta\gamma} S(\beta\alpha^2\beta\alpha\beta V\beta\alpha\gamma) = \alpha^2\beta^2 \frac{S\alpha\beta V\beta\alpha\gamma}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta,$$

Applicando a fórmula (15) a γ teremos

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = \gamma[2(S\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2] - 3V\alpha\beta\gamma S\alpha\beta + V.\alpha\beta V\alpha\beta\gamma;$$

e por se ter

$$V.\alpha\beta V\alpha\beta\gamma = \alpha\beta^2 S\alpha\gamma - \beta\alpha^2 S\beta\gamma + V\alpha\beta\gamma S\alpha\beta,$$

$$V\alpha\beta\gamma S\alpha\beta = \alpha\beta^2 S\alpha\gamma - \beta S\alpha\gamma S\alpha\beta + \gamma(S\alpha\beta)^2,$$

virá finalmente

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = \gamma\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^2 S\alpha\gamma + \beta(2S\alpha\beta S\alpha\gamma - \alpha^2 S\beta\gamma).$$

86. O processo particular seguinte conduz mais facilmente á resolução da equação: substituindo $\alpha\beta$ por $S\alpha\beta + V\alpha\beta$, virá

$$\gamma = \rho S\alpha\beta + V.(V\alpha\beta)\rho,$$

$$m' = \frac{1}{S\alpha\beta\gamma} S[(\alpha\beta)^2 V\beta\alpha\gamma + \alpha^2\beta^2 V\beta\alpha\gamma + \alpha^2\beta^2\alpha\beta\gamma] = 2\alpha^2\beta^2 + S(\alpha\beta)^2$$

$$m'' = \frac{1}{S\alpha\beta\gamma} S[\alpha\beta V\beta\alpha\gamma + \alpha\beta.\alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta^2\gamma]$$

$$= \frac{1}{S\alpha\beta\gamma} S[\alpha\beta(\beta\alpha\gamma + S\alpha\beta\gamma) + \alpha\beta(S\alpha\beta\gamma + V\alpha\beta\gamma) + \alpha^2\beta^2\gamma]$$

$$= \frac{1}{S\alpha\beta\gamma}[2S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma + S\alpha\beta V\gamma\beta\alpha] = 3S\alpha\beta.$$

Attendendo a que é

$$S(\alpha\beta)^2 = S[(S\alpha\beta)^2 + (V\alpha\beta)^2 + 2V\alpha\beta S\alpha\beta] = (S\alpha\beta)^2 + S(V\alpha\beta)^2,$$

virá

$$m' = 2\alpha^2\beta^2 + (S\alpha\beta)^2 + S(V\alpha\beta)^2;$$

mas a fórmula (9) do n.º 58 dá

$$S(V\alpha\beta)^2 = (S\alpha\beta)^2 - \alpha^2\beta^2,$$

logo m' transforma-se em

$$2(S\alpha\beta)^2 - \alpha^2\beta^2.$$

e operando por $S.V\alpha\beta$ sobre a equação proposta

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha\beta\rho S\alpha\beta,$$

d'onde se tira

$$\frac{S\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta} = S\alpha\beta\rho.$$

Sommando esta ultima expressão com a equação proposta vem

$$\gamma + \frac{S\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta} = \alpha\beta\rho,$$

que dá

$$\rho = \beta^{-1}\alpha^{-1}\left(\gamma + \frac{S\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta}\right).$$

Resta mostrar que esta solução, com uma fórma muito mais simples, é identica á achada pelo methodo geral; para isso, multipliquemol-a por $\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta$ e virá

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = \beta\alpha\gamma S\alpha\beta + \beta\alpha S\alpha\beta\gamma = V\beta\alpha\gamma S\alpha\beta - V\alpha\beta S\alpha\beta\gamma.$$

Applicando a fórmula (16) do n.º 62 aos quatro vectores α, β, $V\alpha\beta$, γ, teremos

$$0 = -\gamma S(V\alpha\beta)^2 - \alpha S.V\alpha\beta V\beta\gamma + \beta S.V\alpha\beta V\alpha\gamma + V\alpha\beta S\alpha\beta\gamma,$$

e, por ser

$$S.V\alpha\beta V\beta\gamma = \beta^2 S\alpha\gamma - S\alpha\beta S\beta\gamma,$$

$$S.V\alpha\beta V\alpha\gamma = S\alpha\gamma S\alpha\beta - \alpha^2 S\beta\gamma,$$

$$S.(V\alpha\beta)^2 = (S\alpha\beta)^2 - \alpha^2\beta^2,$$

$$V\beta\alpha\gamma S\alpha\beta = -\alpha S\alpha\beta S\beta\gamma + \beta S\alpha\beta S\alpha\gamma + \gamma(S\alpha\beta)^2,$$

virá, junctando as duas ultimas expressões,

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = \gamma\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^2 S\alpha\gamma + \beta(2S\alpha\beta S\alpha\gamma - \alpha^2 S\beta\gamma).$$

87. *Discussão da cubica fundamental.* Pelo methodo de Hamilton chegamos á expressão symbolica

$$\varphi^3 - m''\varphi^2 + m'\varphi - m = 0,$$

que se chama *cubica fundamental.*

Representando por g_1, g_2, g_3 as raizes da equação

$$g^3 - m''g^2 + m'g - m = 0,$$

podemos pôr a cubica fundamental sob a fórma symbolica

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)(\varphi - g_3) = 0.$$

Para que o vector desconhecido ρ seja parallelo a $\varphi\rho$ deve ter-se

$$V\rho\varphi\rho = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi\rho = x\rho,$$

e a cubica fundamental transformar-se-ha em

$$(x^3 - m''x^2 + m'x - m)\rho = 0,$$

sendo x um dos valores g_1, g_2, g_3, que supporemos reaes e desiguaes.

Terá portanto ρ um dos tres valores ρ_1, ρ_2, ρ_3, que satisfazem a

$$(\varphi - g_1)\rho_1 = 0, \quad (\varphi - g_2)\rho_2 = 0, \quad (\varphi - g_3)\rho_3 = 0,$$

e chamaremos ás direcções d'estes tres vectores *direcções principaes.*

Decompondo ρ segundo estas tres direcções, vem

$$\rho = y\rho_1 + y'\rho_2 + y''\rho_3,$$

e operando sobre esta expressão por $(\varphi-g_1)$, $(\varphi-g_2)$, $(\varphi-g_3)$ separadamente,

$$\left.\begin{aligned}(\varphi-g_1)\rho&=y'(g_2-g_1)\rho_2+y''(g_3-g_1)\rho_3\\(\varphi-g_2)\rho&=y\ (g_1-g_2)\rho_1+y''(g_1-g_2)\rho_3\\(\varphi-g_3)\rho&=y\ (g_1-g_2)\rho_1+y'\ (g_2-g_3)\rho_2\end{aligned}\right\},$$

que indicam que a operação $(\varphi-g_i)$ faz perder a ρ a sua componente segundo ρ_i.

Teremos ainda

$$\left.\begin{aligned}(\varphi-g_2)(\varphi-g_3)\rho&=y\ (g_1-g_2)(g_1-g_3)\rho_1\\(\varphi-g_1)(\varphi-g_3)\rho&=y'\ (g_2-g_1)(g_2-g_3)\rho_2\\(\varphi-g_1)(\varphi-g_2)\rho&=y''(g_3-g_2)(g_3-g_1)\rho_3\end{aligned}\right\};$$

logo, as direcções principaes serão dadas por

$$\left.\begin{aligned}(\varphi-g_2)(\varphi-g_3)&=0\\(\varphi-g_1)(\varphi-g_3)&=0\\(\varphi-g_1)(\varphi-g_2)&=0\end{aligned}\right\},$$

quando as tres raizes g_1, g_2, g_3 forem reaes e deseguaes.

88. Supponhamos porém que duas d'estas raizes são eguaes, por exemplo $g_1=g_2$; operando por $(\varphi-g_1)$ e $(\varphi-g_3)$ sobre a expressão de ρ, teremos

$$(\varphi-g_1)\rho=y''(g_3-g_1)\rho_3,$$

$$(\varphi-g_3)\rho=(g_1-g_3)(y\rho_1+y'\rho_2);$$

n'este caso a direcção principal ρ_3 será dada por $(\varphi - g_1)\rho = 0$, e qualquer vector, ρ', existente no plano de ρ_1 e ρ_2 satisfará á condição $(\varphi - g_3)\rho' = 0$.

Se as tres raizes g_1, g_2, g_3 são eguaes, então qualquer vector no espaço é uma direcção principal, porque se tem sempre

$$(\varphi - g_1)\rho = 0.$$

89. Quando a funcção φ é conjugada de si mesma, as tres raizes são reaes e as direcções principaes formam um systema trirectangular. Supponhamos para o demonstrarmos que uma raiz é imaginaria e da fórma $g_1 + h_1\sqrt{-1}$, sendo $\sqrt{-1}$ o imaginario da Algebra, e representemos por $\rho_1 + \sigma_1\sqrt{-1}$ a direcção principal correspondente a este valor; teremos

$$\varphi(\rho_1 + \sigma_1\sqrt{-1}) = (g_1 + h_1\sqrt{-1})(\rho_1 + \sigma_1\sqrt{-1}),$$

que dá as duas equações

$$\left.\begin{aligned} \varphi\rho_1 &= g_1\rho_1 - h_1\sigma_1 \\ \varphi\sigma_1 &= h_1\rho_1 + g_1\sigma_1 \end{aligned}\right\}.$$

Operando por $S.\sigma_1$, $S.\rho_1$, estas duas equações dão

$$\left.\begin{aligned} S\sigma_1\varphi\rho_1 &= g_1 S\sigma_1\rho_1 - h_1\sigma_1^2 \\ S\rho_1\varphi\sigma_1 &= h_1\rho_1^2 + g_1 S\rho_1\sigma_1 \end{aligned}\right\},$$

d'onde, por ser φ conjugada de si mesma, se tira

$$h_1(\rho_1^2 + \sigma_1^2) = 0;$$

ora, sendo ρ_1 e σ_1 dois vectores reaes, esta equação só póde ser satisfeita por $h_1 = 0$, logo a raiz considerada não póde ser imaginaria.

Por ser

$$\varphi\rho_1 = g_1\rho_1,\ \varphi\rho_2 = g_2\rho_2,\ \varphi\rho_3 = g_3\rho_3,$$

teremos

$$S\varphi\rho_1\varphi\rho_2 = S\rho_2\varphi^2\rho_1 = S\rho_1\varphi^2\rho_2\ (*)$$

$$g_1 g_2 S\rho_1\rho_2 = g_1{}^2 S\rho_1\rho_2 = g_2{}^2 S\rho_1\rho_2,$$

que, sendo g_1 e g_2 differentes, só póde ser satisfeita por

$$S\rho_1\rho_2 = 0,$$

que mostra ser $\rho_1 \perp \rho_2$. Analogamente achariamos

$$S\rho_1\rho_3 = 0,\ S\rho_2\rho_3 = 0;$$

logo — as direcções principaes, sendo as raizes g_1, g_2, g_3 deseguaes, e φ conjugada de si mesma, formam um systema trirectangular.

Se porém duas raizes, $g_1 = g_2$, são eguaes, teremos

$$S\rho_1\rho_3 = 0,\ S\rho_2\rho_3 = 0,$$

mas nem sempre será $S\rho_1\rho_2 = 0$; logo, duas das direcções principaes estarão em um plano perpendicular a ρ_3 e podem fazer entre si um angulo qualquer.

Se as tres raizes forem eguaes, então todas as direcções são principaes.

(*) Pelo n.º 77 é

$$S\varphi\rho_1\varphi\rho_2 = S\rho_2\varphi'(\varphi\rho_1),$$

e por ser $\varphi' = \varphi$ virá

$$S\varphi\rho_1\varphi\rho_2 = S\rho_2\varphi^2\rho_1;$$

e por ser

$$S\varphi\rho_1\varphi\rho_2 = S\varphi\rho_2\varphi\rho_1,$$

teremos tambem

$$S\varphi\rho_1\varphi\rho_2 = S\rho_1\varphi^2\rho_2.$$

90. Sendo φ conjugada de si mesma e ρ_1, ρ_2, ρ_3 as tres direcções principaes de ρ, a fórmula (16) do n.º 62 dá

$$\rho S \rho_1 \rho_2 \rho_3 = \rho_1 S \rho \rho_2 \rho_3 + \rho_2 S \rho \rho_3 \rho_1 + \rho_3 S \rho \rho_1 \rho_2;$$

e suppondo que estas direcções principaes são vectores-unidades, substituil-as-hemos por i, j, k, e teremos

$$-\varphi\rho = ig_1 S i\rho + jg_2 S j\rho + kg_3 S k\rho,$$

fórmula que se presta a transformações que são de grande importancia nas applicações.

91. Resolvida a equação vectorial determinaremos o quaternião desconhecido segundo se disse no n.º 75. Muitas vezes porém a resolução de uma equação vectorial ou de um quaternião apresenta-se indeterminada, o que depende das condições expressas pela equação proposta.

Hamilton deu um methodo geral para a resolução de uma equação linear, cuja incognita é um quaternião, e que é analogo ao da resolução de uma equação vectorial, chegando-se porém a uma equação do 4.º grau em vez da cubica fundamental.

92. *Resolução de uma equação do 2.º grau de quaterniões.* As equações de grau superior ao primeiro não teem ainda sido resolvidas de um modo geral; apenas se sabem resolver alguns casos particulares.

Apresentaremos, como exemplo, a resolução da equação do 2.º grau

$$q^2 = qa + b,$$

em que a e b são quaterniões dados e q é um desconhecido.

Fazendo

$$q = \frac{1}{2}(a + w + \rho),$$

sendo w e ρ o scalar e vector, não de q mas de um quaternião $2q-a$, teremos

$$(w+\rho)^2+a\rho-\rho a=a^2+4b^2,$$

que, pondo-se

$$Va=\alpha,\ a^2+4b^2=S(a^2+4b^2)+V(a^2+4b^2)=c+2\gamma,$$

se transforma em

$$(w+\rho)^2+2V\alpha\rho=c+2\gamma.$$

Operando separadamente por S. e V., vem

$$\left.\begin{array}{l} S(w+\rho)^2=w^2+\rho^2=c \\ V(w+\alpha)\rho=\gamma \end{array}\right\}.$$

A ultima equação dá, segundo o n.º 86,

$$(w+\alpha)\rho=\gamma+\frac{S(w+\alpha)\gamma}{S(w+\alpha)}=\gamma+\frac{S\alpha\gamma}{w},$$

d'onde se tira

$$S(w+\alpha)\rho=\frac{S\alpha\gamma}{w}.$$

A solução anterior da equação vectorial póde pôr-se sob a fórma

$$w\rho=(w+\alpha)^{-1}(w\gamma+S\alpha\gamma)=\gamma+(w+\alpha)^{-1}V\gamma\alpha,$$

que dá

$$w^2\rho^2=\gamma^2-(w^2-\alpha^2)^{-1}(V\alpha\gamma)^2,$$

e substituindo ρ^2 por $c-w^2$

$$(w^2-\alpha^2)(w^4-cw^2+\gamma^2)-(V\alpha\gamma)^2=0.$$

Esta equação do 6.º grau em w e que tem a fórma cubica, sendo resolvida, dará o valor de w, que, substituido na expressão de ρ, determinará o valor d'este vector.

Por ser $\gamma^2 = -(\mathrm{T}\gamma)^2 < 0$, representando por g^2 e $-h^2$ as raizes reaes de $w^4 - cw^2 + \gamma^2 = 0$, e fazendo $\alpha^2 = -(\mathrm{T}\alpha)^2 = -l^2$ e $(\mathrm{V}\alpha\gamma)^3 = -m^2$, teremos

$$f(w^2) = (w^2 - g^2)(w^2 + h^2)(w^2 + l^2) + m^2 = 0,$$

que mostra ter $f(w^2)$, em geral, tres raizes reaes e deseguaes: uma, w_1^2, positiva menor que g^2; outra, w^2, negativa e algebricamente maior que os dois numeros $-h^2$ e $-l^2$; e finalmente a terceira, w_3^2, negativa e menor que $-h^2$ e $-l^2$.

As raizes da equação do 6.° grau serão portanto duas reaes e quatro imaginarias.

Estes valores imaginarios de w dão para ρ quatro valores imaginarios, e podemos dizer que a equação proposta terá para q quatro valores tambem imaginarios.

---

93. *Biquaternião.* Vê-se que a resolução de uma equação de quaterniões póde conduzir a soluções da fórma

$$\mathrm{Q} = q + q'\sqrt{-1},$$

sendo q e q' dois quaterniões reaes e $\sqrt{-1}$ o symbolo imaginario de Algebra. Este symbolo deve ser considerado um scalar, e portanto distincto do symbolo da raiz quadrada da unidade negativa empregado no calculo de quaterniões, pois que este representa uma *linha real* e considerado como factor não é commutativo.

Á expressão anterior dá-se-lhe o nome de *biquaternião*.

A egualdade de dois biquaterniões $q + q'\sqrt{-1}$ e $r + r'\sqrt{-1}$ exige que se tenha separadamente

$$q = r, \quad q' = r',$$

e portanto esta egualdade comprehenderá oito equações numericas ordinarias.

94. Em geral, um biquaternião póde ser decomposto em parte scalar e vectorial, porque, sendo

$$q = w + \rho, \quad q' = w' + \rho',$$

teremos

$$Q = (w + w'\sqrt{-1}) + (\rho + \rho'\sqrt{-1}) = SQ + VQ;$$

e como as partes scalar e vectorial são de fórma imaginaria poderemos por analogia designal-as por *biscalar* e *bivector*.

Estas duas partes componentes de um biquaternião distinguem-se em calculo por ser o biscalar (numero imaginario) commutativo quando factor, em quanto o bivector (ainda que uma linha imaginaria no espaço) não é, em geral, commutativa quando factor.

Poremos tambem por analogia com os quaterniões,

$$KQ = SQ - VQ,$$

exprimindo que o *conjugado* de um biquaternião é egual ao biscalar menos o bivector d'este; e para um numero qualquer de biquaterniões teremos

$$K\Pi = \Pi' K,$$

tendo Π e Π' a mesma significação do n.º 53; e será

$$QKQ = (TQ)^2,$$

$$Q = TQ \, . \, UQ = UQ \, . \, TQ.$$

95. Sendo dado o biquaternião $q + r\sqrt{-1}$, determinaremos a fórma $x + y\sqrt{-1}$ do biquaternião que lhe é reciproco, $(q + r\sqrt{-1})^{-1}$, pelas equações

$$\left.\begin{aligned} qx - ry &= 1 \\ rx + qy &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

A segunda d'estas equações dá os valores

$$x = -r^{-1}qy,$$
$$y = -q^{-1}rx,$$

que, substituidos na primeira, dão

$$x = \quad (q + rq^{-1}r)^{-1},$$
$$y = -(r + qr^{-1}q)^{-1}.$$

Será portanto

$$(q + r\sqrt{-1})^{-1} = (q + rq^{-1}r)^{-1} - (r + qr^{-1}q)^{-1}\sqrt{-1}.$$

96. Sendo $\mathrm{Q} = q + q'\sqrt{-1}$ teremos

$$(\mathrm{TQ})^2 = (q + q'\sqrt{-1})\,(\mathrm{K}q + \mathrm{K}q'\sqrt{-1})$$
$$= (q\mathrm{K}q - q'\mathrm{K}q') + (q\mathrm{K}q' + q'\mathrm{K}q)\sqrt{-1},$$

e, por ser

$$q\mathrm{K}q = (\mathrm{T}q)^2,\ \ \Pi + \Pi'\mathrm{K} = 2\mathrm{S}\Pi \ \text{ e } \ \mathrm{K}(\mathrm{K}q) = q,$$

$$\mathrm{TQ}^2 = \mathrm{T}q^2 - \mathrm{T}q'^2 + 2\mathrm{S}(q\mathrm{K}q')\sqrt{-1}.$$

Ora, sendo

$$\mathrm{T}q = \mathrm{T}q',\ \ \mathrm{S}(q\mathrm{K}q') = 0,$$

teremos

$$\mathrm{T}(q + q'\sqrt{-1}) = 0;$$

logo *o tensor de um biquaternião póde ser nullo sem que os tensores dos quaterniões reaes, que o compõem, o sejam.*

A condição $\mathrm{S}q\mathrm{K}q' = 0$ póde ser substituida por $\mathrm{K}q' = q^{-1}\alpha$, representando α o vector egual ao producto $q\mathrm{K}q'$, d'onde, operando por K, se tira

$$q' = -\alpha\mathrm{K}q'^{-1},$$

que pelo n.º 29 se transforma em

$$q' = -\frac{\alpha q}{\mathrm{T}q^2},$$

que dá

$$\mathrm{T}q' = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}q}, \quad \mathrm{U}q' = -\mathrm{U}\alpha\,\mathrm{U}q.$$

O biquaternião, cujo tensor é nullo, toma então a fórma

$$q + q'\sqrt{-1} = q(1 - \mathrm{U}\alpha\sqrt{-1}) = (1 - \mathrm{U}\alpha\sqrt{-1})q.$$

97. *O producto de dois biquaterniões póde annullar-se sem que qualquer d'elles seja nullo.* Com effeito, temos

$$(q + q'\sqrt{-1})(r + r'\sqrt{-1}) = (qr - q'r') + (qr' + q'r)\sqrt{-1},$$

que, para ser um producto nullo, exige as condições

$$qr = q'r', \quad qr' = -q'r.$$

A primeira d'estas condições dá

$$q'^{-1}qr = r',$$

que transforma a segunda em

$$qq'^{-1}qr = -q'r,$$

d'onde se tira

$$qq'^{-1}q = -q' \text{ ou } (q'^{-1}q)^2 = -1.$$

O producto $q'^{-1}q$ será representado pois por um vector-unidade, β, e teremos

$$q = q'\beta.$$

Este valor de q, substituido nas duas condições antecedentes e attendendo a que é $\beta^{-1}=-\beta$, transforma-as ambas em

$$r=-\beta r',$$

e portanto os dois biquaterniões, que dão um producto nullo, podem ter a fórma

$$q'(\beta+\sqrt{-1}),\ -(\beta-\sqrt{-1})r',$$

e o seu producto será

$$-q'(\beta+\sqrt{-1})(\beta-\sqrt{-1})r'=-q'(\beta^2+1)r'=0.$$

VI

Differenciação de quaterniões

98. *Definição de differencial.* Em geral, as funcções analyticas das quantidades complexas admittem uma *derivada;* assim, sendo dz o accrescimo dado á variavel z, e $f(z)$ uma funcção dada, tem-se para expressão da parte principal do seu accrescimo $f(z)dz$.

Quando porém a variavel é um quaternião, vamos ver que não acontece, em geral, assim.

Seja

$$r = \mathrm{F}q$$

a expressão de uma funcção de fórma dada do quaternião variavel q; definiremos *differencial* de r a relação

$$dr = d\mathrm{F}q = \lim_{h=0} \frac{\mathrm{F}(q+hdq) - \mathrm{F}q}{h}, \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

representando-se por h uma quantidade numerica real que converge para zero, e por dq um quaternião qualquer.

Hamilton, depois de estabelecer esta definição, accrescenta:

«esta fórmula é evidentemente verdadeira (*) no *calculo differencial ordinario*, e porque não involve o principio commutativo da multiplicação é justo que a estendamos, como *definição*, á differencial de uma funcção de quaterniões.»

A fórma de dr será

$$dr = f(q, dq),$$

representando-se por f uma funcção dependente de F, homogenea e do primeiro grau em dq, que, em geral, se não póde pôr sob as fórmas $f(q)dq$ e $dqf(q)$.

99. Se em (1) substituirmos dq por $r+s$, sendo r e s dois quaterniões, teremos

$$f(q, r+s) = \lim_{h=0} \frac{F[q+h(r+s)] - Fq}{h}$$

$$= \lim_{h=0} \frac{F(q+hr+hs) - F(q+hs)}{h} + \lim_{h=0} \frac{F(q+hs) - Fq}{h}$$

$$= f(q, r) + f(q, s).$$

Podemos pois dizer que $f(q, dq)$ é distributiva em relação a dq; e deduz-se tambem da expressão antecedente que, sendo x um scalar, é

$$f(q + xr) = xf(q, r).$$

100. Sendo dado $r = q^2$, teremos

$$d(q^2) = \lim_{h=0} \frac{(q+hdq)^2 - q^2}{h} = q.dq + dq.q \quad (**).$$

(*) Se em vez dos quaterniões q e dq tivermos os scalares x e dx e fizermos $hdx = h'$, a fórmula (1) torna-se em

$$dF(x) = \lim_{h'=0} \frac{F(x+h') - Fx}{h'} dx = F'(x)\, dx.$$

(**) Attendendo a que dq representa um quaternião, podemos suppri-

Esta expressão não se póde pôr sob a fórma $r'dq$ sem que r' dependa ao mesmo tempo de q e dq.

Para $r = \frac{1}{q}$ teremos

$$dr = \lim_{h=0} \frac{\frac{1}{q+hdq} - \frac{1}{q}}{h} = \lim_{h=0} \left(-\frac{dq}{q+hdq} \cdot \frac{1}{q} \right) = -\frac{1}{q} dq \frac{1}{q},$$

que tambem se não póde pôr sob a fórma $r'dq$.

Vê-se, pois, pelo que fica dicto, que uma funcção de quaterniões não tem derivada, o que é devido a não ser n'este calculo a multiplicação uma operação commutativa.

101. Sendo $r = r' + r'' + r''' + \ldots$ e $r', r'' \ldots$ funcções de um mesmo quaternião variavel, e se tomarmos para todas o mesmo augmento d'este, teremos

$$dr = dr' + dr'' + dr''' + \ldots,$$

que indica ser a differencial de uma somma egual á somma das differenciaes das parcellas.

Decompondo r na sua parte scalar e vectorial, teremos

$$dr = dSr + dVr = Sdr + Vdr,$$

que dá

$$dSr = Sdr, \quad dVr = Vdr;$$

e tomando o conjugado de r, teremos, por ser $Kr = Sr - Vr$,

$$dKr = dSr - dVr = KSdr + KVdr = Kdr;$$

logo — os symbolos S, V, K são commutativos com d.

---

mir o signal de multiplicação e além d'isso substituir $(dq)^2$ por dq^2, que se não deve confundir com $d(q^2)$.

102. *Definição de differencial de uma funcção de quaterniões.* Se F depender de muitos quaterniões variaveis em vez de um só, teremos por definição

$$dF(q, q', q'', \ldots) = \lim_{h=0} \frac{F(q + hdq, q' + hdq' + \ldots) - F(q, q', \ldots)}{h}$$

$$= f(q, q', \ldots, dq, dq', \ldots),$$

sendo f uma funcção dependente de F, homogenea e do 1.º grau em relação a dq, dq', ...

Tendo-se

$$r = q\, q'\, q'' \ldots,$$

será

$$dr = dq\, q'\, q'' \ldots + q dq'\, q'' \ldots + qq'\, dq'' \ldots + \ldots\ldots$$

No caso de a, b, c, ... se considerarem quaterniões constantes, e q, q', q'', ... quaterniões variaveis, teremos

$$d(aq) = adq,$$

$$d(qb) = dqb,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d(aqbq'cq'' \ldots) = adqbq'cq'' \ldots + aqbdq'cq'' \ldots + \ldots;$$

differindo estes resultados dos do calculo differencial ordinario em que cada factor deve ser differenciado no *seu proprio logar.*

Sendo

$$r = \frac{q}{q'},$$

teremos

$$q = q'r, \quad dq = dq'r + q'dr,$$

d'onde se tira

$$dr = \frac{1}{q'}\left(dq\frac{1}{q} - dq'\frac{1}{q'}\right)q,$$

que, fazendo-se $q = 1$, dá o resultado já achado para $r = \frac{1}{q'}$.

103. *Differenciaes de tensores e versores.* Por ser $Tq^2 = qKq$, teremos

$$2TqdTq = dqKq + qKdq = 2SKqdq; \ (*)$$

mas, por se ter $Kq = \frac{Tq^2}{q}$, virá

$$\frac{dTq}{Tq} = S\frac{dq}{q}$$

ou (**)

$$dTq = SUq^{-1}dq.$$

Substituindo o quaternião q pelo vector ρ, as ultimas expressões dão, attendendo a ser $UK\rho = -U\rho$,

$$\frac{dT\rho}{T\rho} = S\frac{d\rho}{\rho},$$

$$dT\rho = -SU\rho d\rho = S\frac{d\rho}{U\rho}.$$

De

$$q = Tq.Uq$$

(*) É $qKdq = K(dqKq)$, logo virá

$$dqKq + K(dqKq) = 2S(dqKq) = 2S(Kqdq).$$

(**) $dTq = S.\frac{Kqdq}{Tq} = S.\frac{TKqUKqdq}{Tq} = S.UKqdq = S.Uq^{-1}dq.$

tira-se

$$dq = d\mathrm{T}q \,.\, \mathrm{U}q + \mathrm{T}q d\mathrm{U}q,$$

que dá

$$\frac{dq}{q} = \frac{d\mathrm{T}q}{\mathrm{T}q} + \frac{d\mathrm{U}q}{\mathrm{U}q},$$

d'onde

$$\frac{d\mathrm{U}q}{\mathrm{U}q} = \frac{dq}{q} - \mathrm{S}\frac{dq}{q} = \mathrm{V}\frac{dq}{q}.$$

Para um vector ρ tem-se

$$\frac{d\mathrm{U}\rho}{\mathrm{U}\rho} = \mathrm{V}\frac{d\rho}{\rho},$$

que dá

$$d\mathrm{U}\rho = -\mathrm{U}\rho\,\frac{\mathrm{V}\rho\, d\rho}{\mathrm{T}\rho^2}\ (*).$$

104. De

$$d(q^2) = dqq + qdq$$

tira-se

$$d(q^2) = 2\mathrm{S}qdq + \mathrm{V}(dqq + qdq),$$

e, pela decomposição de q e dq em scalar e vector,

$$d(q^2) = 2\mathrm{S}qdq + 2\mathrm{S}q\,.\,\mathrm{V}dq + 2\mathrm{S}dq\,.\,\mathrm{V}q.$$

Applicando esta fórmula ao quadrado de um vector, teremos

$$d(\rho^2) = 2\mathrm{S}\rho d\rho.$$

(*) $\dfrac{d\mathrm{U}\rho}{\mathrm{U}\rho} = \mathrm{V}\,\dfrac{\rho d\rho}{\rho^2} = -\mathrm{V}\,\dfrac{\rho d\rho}{\mathrm{T}\rho^2},\ \ d\mathrm{U}\rho = -\mathrm{U}\rho\,\dfrac{\mathrm{V}\rho\, d\rho}{\mathrm{T}\rho^2}.$

De

$$d\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{1}{q}\,dq\,\frac{1}{q}$$

tira-se para um vector inverso

$$d(\rho^{-1}) = -\mathrm{V}(\rho^{-1}d\rho\,\rho^{-1}),$$

que pela fórmula (13) do n.º 60 se transforma em

$$d(\rho^{-1}) = -\left(\mathrm{K}\frac{d\rho}{\rho}\right)\frac{1}{\rho}.$$

Achar-se-hia tambem facilmente

$$d\left(\frac{1}{q^2}\right) = -\left(\frac{1}{q}\,dq\,\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2}\,dq\,\frac{1}{q}\right),$$

$$d\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = -\frac{2}{\rho^2}\,\mathrm{S}\frac{d\rho}{\rho}.$$

105. *Differenciações successivas.* Applicando ás differenciaes já obtidas o processo que acabamos de apresentar, obteremos as differenciaes de ordem superior á primeira.

Assim, de

$$d(q^2) = dqq + qdq$$

tira-se

$$d^2(q^2) = d^2qq + 2dq^2 + qd^2q,$$

$$d^3(q^2) = d^3qq + 3d^2qdq + 3dqd^2q + qd^3q,$$

....

E no caso de um vector teremos

$$d\,(\rho^2) = 2S\rho d\rho,$$

$$d^2\,(\rho^2) = 2d\rho^2 + 2S\rho d^2\rho,$$

$$d^3\,(\rho^2) = 6Sd\rho d^2\rho + 2S\rho d^3\rho,$$

. . . .

Se a variavel independente tem o seu augmento constante, os calculos de differenciação tornam-se muito mais simples, porque serão nullas as differenciaes da variavel que forem de ordem superior á primeira.

106. Quando a funcção F de quaterniões tem como variavel só um scalar w, então a definição dada de differencial dá o resultado da fórma ordinaria

$$dF\,(w) = F'\,(w)\,dw,$$

apparecendo aqui dw como um factor com o coefficiente $F'(w)$, que se póde chamar *funcção derivada* de F.

Se um vector ρ é considerado como uma funcção dada, $F(t)$, de um scalar variavel t, a sua extremidade descreverá, em geral, uma curva no espaço e teremos

$$d\rho = dF\,(t) = F'\,(t)\,dt = \rho' dt,$$

sendo ρ' um novo vector *tangente á curva* na extremidade de ρ e tendo o seu comprimento egual á unidade se t denotar o comprimento do arco da curva medido de um certo ponto fixo; e como uma segunda differenciação dá

$$d^2\rho = d^2F(t) = F''(t)dt = \rho'' dt,$$

chamaremos a ρ'' o *vector de curvatura*.

Nas questões de Mecanica podemos chamar a ρ *vector de posição*, a ρ' *vector da velocidade* e a ρ'' *vector da acceleração*.

107. *Serie de Taylor*. No caso de ser constante o augmento dado a um quaternião ou vector variavel, a serie de Taylor póde ser applicada a uma funcção de quaterniões; assim, teremos

$$f(q+xdq) = fq + xdfq + \frac{1}{2}x^2d^2fq + \frac{1}{2.3}x^3d^3fq + \ldots,$$

que podemos escrever symbolicamente

$$\left(1 + xd + \frac{x^2d^2}{1.2} + \frac{x^3d^3}{1.2.3} + \ldots\right)fq = e^{xd}fq.$$

Com effeito, pela definição de differencial o *quociente differencial*

$$\frac{dfq}{dq} = \lim_{x=0} \frac{f(q+xdq)-fq}{xdq},$$

em que x é um scalar variavel e dq um quaternião arbitrario dado e podendo ter um tensor qualquer, dá, suppondo o limite finito e tendo x um valor pequeno, que consideraremos de primeira ordem

$$\lim_{x=0} \frac{f(q+xdq)-fq-xdfq}{x} = 0,$$

e o numerador d'esta expressão deve ser considerado de uma ordem superior á primeira.

Em geral, sendo $d^2q=0$ e considerando finitas as differenciaes successivas de fq até á ordem n, a expressão

$$s_n=f(q+xdq)-fq-xdfq-\frac{x^2}{1.2}d^2fq-\ldots-\frac{x^n}{1.2\ldots n}d^nfq$$

será relativamente ao scalar x de uma ordem superior a n; ou, fazendo-se

$$\frac{d}{dx}=\mathrm{D},$$

teremos não só $s_n=0$, mas tambem

$$\mathrm{D}s_n=0,\ \mathrm{D}^2s_n=0,\ \ldots\ \mathrm{D}^ns_n=0,$$

quando fôr $x=0$.

Logo, annullando-se x depois das differenciações, teremos

$$\mathrm{D}f(q+xdq)=dfq,\ \ \mathrm{D}^2f(q+xdq)=d^2fq,\ \ \ldots,$$

$$\mathrm{D}^nf(q+xdq)=d^nfq,$$

porque se tem

$$\mathrm{D}f(q+xdq)=\lim_{h=0}\frac{f(q+xdq+hdxdq)-f(q+xdq)}{hdx}$$

$$=\lim_{h'=0}\frac{f(q+xdq+h'dq)-f(q+xdq)}{h'}=df(q+xdq),$$

suppondo que d opera só sobre q e não sobre dq nem x, e analogamente para as outras ordens superiores.

Fazendo então $x=0$ depois das differenciações, vê-se que os primeiros n quocientes differenciaes do polynomio s_n tomados em relação a x se annullam, ou que, sendo x de primeira ordem, será s_n de uma ordem superior a n.

Para $fq=q^2$ teremos

$$dfq=dqq+qdq,$$

$$d^2fq=2dq^2,$$

e portanto

$$(q+xdq)^2=q^2+x(dqq+qdq)+x^2dq^2.$$

Para $fq=q^3$ teremos

$$dfq=dqq^2+qdqq+q^2dq,$$

$$d^2fq=2dq^2q+2qdq^2+2dqqdq,$$

$$d^3fq=6dq^3,$$

e

$$(q+xdq)^3=q^3+x(dqq^2+qdqq+q^2dq)$$
$$+x^2(dq^2q+qdq^2+dqqdq)+x^3dq^3.$$

108. *Differenciação de uma funcção de funcção.* Seja

$$r=fp \quad \text{e} \quad p=\varphi q;$$

a definição de differencial dá

$$dr=df(\varphi q)=\lim_{h=0}\frac{f[\varphi(q+hdq)]-f(\varphi q)}{h},$$

$$dp=d\varphi q=\lim_{h=0}\frac{\varphi(q+hdq)-\varphi q}{h}.$$

Fazendo

$$\varphi(q+hdq)=\varphi q+h\psi(h,q,dq)=p+h\psi_h,$$

teremos

$$\psi_0=\psi(0,q,dq)=d\varphi q=dp,$$

e portanto será

$$dr=df(\varphi q)=\lim_{h=0}\frac{f(p+h\psi_h)-fp}{h}=dfp.$$

Obteremos pois o mesmo valor para dr (que deve ser um quaternião) quer differenciemos r como uma funcção (f) do quaternião p, que é uma funcção (φ) de outro quaternião q, quer differenciemos r immediatamente como uma funcção composta ($f\varphi$) do ultimo quaternião q. Podemos exprimir symbolicamente este resultado por

$$df(\varphi q)=d(f\varphi)q.$$

109. *Differenciação de uma funcção implicita.* Se q e r forem dois quaterniões variaveis e f uma funcção de fórma conhecida, a equação

$$f(q,r)=0$$

dará

$$df(q,r)=0;$$

e esta ultima equação conterá as differenciaes dq e dr e será uma funcção homogenea e linear d'ellas.

Resolvendo então esta equação, obteremos o valor de uma das differenciaes expressa em funcção de q, r e da outra.

110. *Exemplo.* Como exemplo do emprego de calculo differencial damos a seguinte applicação geometrica: *procurar o vector que é a mais curta distancia entre duas rectas dadas.*

Sejam as equações das rectas dadas (n.º 16)

$$\rho=\alpha+x\beta,\quad \rho'=\alpha'+x'\beta';$$

teremos para expressão do comprimento do vector, que une dois pontos d'estas rectas,

$$T(\rho-\rho'),$$

e para que elle seja minimo a condição

$$dT(\rho-\rho')=0,$$

que, pelo n.º 102, se transforma em

$$S\frac{d(\rho-\rho')}{\rho-\rho'}=0.$$

Esta expressão póde ser transformada em

$$S(\rho-\rho')\,d(\rho-\rho')=0,$$

que, pela substituição de $d\rho$, $d\rho'$ dados pelas equações das rectas, se torna em

$$S(\rho-\rho')(\beta\,dx-\beta'dx')=0;$$

e porque x e x' são independentes vem

$$\left.\begin{aligned}S\beta\,(\rho-\rho')=0\\ S\beta'(\rho-\rho')=0\end{aligned}\right\};$$

logo, o vector $(\rho-\rho')$, que é a mais curta distancia entre as duas rectas, é-lhes perpendicular e portanto parallelo a $V\beta\beta'$ (n.º 44).

Tem-se então

$$\alpha + x\beta - \alpha' - x'\beta' = y V\beta\beta', \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

e, operando por $S\beta\beta'$ sobre esta expressão,

$$S.\beta\beta'(\alpha - \alpha') = y S.\beta\beta' V\beta\beta' = y(V\beta\beta')^2,$$

que dará o valor de y; teremos portanto

$$(\rho - \rho') = y V\beta\beta' = \frac{S[V\beta\beta'(\alpha - \alpha')]}{V\beta\beta'},$$

e tomando os tensores

$$T(\rho - \rho') = \frac{TS.V\beta\beta'(\alpha - \alpha')}{TV\beta\beta'} = TS.(UV\beta\beta')(\alpha - \alpha').$$

Para determinarmos os vectores das extremidades da menor distancia entre as duas rectas, teremos, operando sobre a equação (a) por $S.\beta$ e $S.\beta'$, duas equações que darão os valores de x e x' correspondentes.

111. *Definição do operador* ∇. Hamilton introduziu o symbolo definido pela fórmula

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + h\frac{d}{dz}$$

como uma ***caracteristica de operação*** effectuada sobre um scalar, vector ou quaternião, considerados como funcção de tres scalares independentes x, y, z.

Assim, operando por ∇ sobre o vector

$$\rho = it + ju + kv,$$

em que t, u, v são funcções de x, y, z, teremos

$$\nabla(it+ju+kv)=-\left(\frac{dt}{dx}+\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)$$

$$+i\left(\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dz}\right)+j\left(\frac{dt}{dz}-\frac{dv}{dx}\right)+k\left(\frac{du}{dx}-\frac{dt}{dy}\right).$$

Considerando x', y', z' como tres novos scalares variaveis e independentes, podemos pôr

$$\nabla'=i\frac{d}{dx'}+j\frac{d}{dy'}+k\frac{d}{dz'};$$

e combinando-o com ∇ virá

$$\nabla\nabla'=-\left(\frac{d^2}{dx\,dx'}+\frac{d^2}{dy\,dy'}+\frac{d^2}{dz\,dz'}\right)$$

$$+i\left(\frac{d^2}{dy\,dz'}-\frac{d^2}{dz\,dy'}\right)+j\left(\frac{d^2}{dz\,dx'}-\frac{d^2}{dx\,dz'}\right)+k\left(\frac{d^2}{dx\,dy'}-\frac{d^2}{dy\,dx'}\right).$$

Esta ultima operação refere-se pois a uma funcção de seis scalares x, y, z, x', y', z'.

Tem-se tambem

$$\nabla^2=-\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right),$$

que, applicada a um quaternião, v, funcção dos scalares x, y, z, dá a fórmula importante

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=-\nabla^2v.$$

A inspecção d'estas fórmulas mostra a ligação que o calculo dos quaterniões tem com a Physica Mathematica. Assim, se v representa a *temperatura* de um corpo solido no ponto, cujas coordenadas rectangulares são x, y, z, o symbolo $-\nabla v$ representará o *fluxo do calor* n'este ponto. Se v é o *potencial* de um systema de corpos, que se attrahem, ou a somma das suas massas divididas respectivamente pelas suas distancias a um ponto variavel (x, y, z), então ∇v será um vector representando em grandeza e direcção a *força acceleratriz* n'esse ponto, produzida pela acção dos corpos do systema. E, se v é uma funcção scalar das tres coordenadas rectangulares x, y, z, o symbolo $\pm\nabla v$ representará um *vector normal á superficie*, que tem por equação $v = \text{const.}$

FIM.

INDICE