$x = 0$, $C = l\frac{a}{a} = l\,1 = 0$.

Para moſtrarmos o uſo deſta ſerie, procuremos v. g. o logarithmo de 2 ou de $\frac{2}{1}$; temos $a = 3$, $x = 1$, $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$; logo tomando a nona parte do termo precedente, virá a ſerie $\frac{x}{a}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^4}{a^4}$, o que dá

$\frac{x}{a} = 0,333333333$. logo $\frac{x}{a} = 0,333333333$

$\frac{x^3}{a^3} = 0,037037037$ . . . $\frac{x^3}{3a^3} = 0,012345679$

$\frac{x^5}{a^5} = 0,004115226$ . . . $\frac{x^5}{5a^5} = 0,000823045$

$\frac{x^7}{a^7} = 0,000457247$ . . . $\frac{x^7}{7a^7} = 0,000065321$

$\frac{x^9}{a^9} = 0,000050805$ . . . $\frac{x^9}{9a^9} = 0,000005645$

$\frac{x^{11}}{a^{11}} = 0,000005645$ . . . $\frac{x^{11}}{11a^{11}} = 0,000000513$

$\frac{x^{13}}{a^{13}} = 0,000000627$ . . . $\frac{x^{13}}{13a^{13}} = 0,000000048$

$\frac{x^{15}}{a^{15}} = 0,000000069$ . . . $\frac{x^{15}}{15a^{15}} = 0,000000004$

lo-

logo a ſoma he . . . 0,346573588, cujo dobro 0,69314718 $= l2$. Se quizeſſemos ter o valor até a nona caſa de dizima, ſeria neceſſario levar a approximaçaõ mais adiante.

Como $4 = 2^2$, e $8 = 2^3$, o dobro do logarithmo achado ſerá neceſſariamente o logarithmo de 4, e o triplo daquelle meſmo ſerá o logarithmo de 8.

Para acharmos o logarithmo de 3, podemos calcular da meſma ſorte o logarithmo da fracçaõ $\frac{4}{3}$, e tira-lo do logarithmo de 4; porque $3 = \frac{4}{\frac{4}{3}}$; logo $l\,3 = l\,4 - l\,\frac{4}{3}$. Podemos porém achar o meſmo $l\,3$ com mais facilidade, calculando o valor de $l\,\frac{8}{9}$, e tirando-o de $l\,8$ que ja he conhecido; a ametade do reſto ſerá o logarithmo procurado. Se ajuntarmos o logarithmo de 2 ao de 3, teremos o logarithmo de 6. Para ter o de 5, acharemos primeiramente $l\,10$, calculando o valor de $l\,\frac{10}{8}$, e ſomando-o com $l\,8$; depois tiraremos $l\,2$ de $l\,10$, e o reſto ſerá o logarithmo de 5. Aſſim virá $l\,\frac{10}{8} = 0{,}22314355$, que dá $l\,10 = 2{,}30258509$; logo $l\,5 = 1{,}60943791$.

Daqui

Daqui ſe vê, o que devemos fazer para calcular outro qualquer logarithmo. Mas he preciſo advertir, que á proporçaõ que he maior o numero, fica ſendo o calculo mais curto; de modo que tendo os logarithmos até 10 ſómente, pódem-ſe calcular os outros até 100, ſem que para iſſo ſeja preciſo uſar de mais que de 3 termos da ſerie, quando ſe tomaõ ſó 8 decimais; e quando o numero paſſa de 100, para ſe calcularem os que ſe ſeguem até mil, baſta empregar os dous primeiros termos; e finalmente baſta o primeiro termo, quando o numero paſſa de mil.

114 Querendo reduzir eſtes logarithmos aos tabulares, devemos advertir que a equaçaõ $dx = \frac{dy}{y}$, ſobre que ſe funda (27) o calculo actual dos logarithmos, dá $x = ly$, e que a equaçaõ geral a todos os ſyſtemas $dx = \frac{mdy}{y}$, em que ſe ſuppõe o primeiro termo a da progreſſaõ geometrica fundamental $= 1$, dá $x = mly$; logo os logarithmos hyperbolicos eſtaõ para os de outro ſyſtema cujo modulo $= m$, como $1 : m$. Para acharmos agora o modulo das taboas ordinarias, temos nellas $l\,10 = 1$, e nos hyperbolicos $l\,10 = 2{,}30258509$;

logo

logo $m \times 2,30258509 = 1$, que dá $m = 0,43429448$.

Logo, *os logarithmos hyperbolicos reduzem-se aos tabulares, multiplicando aquelles por 0,43429448.* E reciprocamente, *os tabulares reduzem-se aos hyperbolicos, multiplicando aquelles por 2,30258509.*

Assim se quizermos ter o logarithmo de 2 das taboas, multiplicaremos por 0,43429448 o logarithmo hyperbolico de 2, que he 0,69314718, e virá 0,3010300, como com effeito se acha nas taboas ordinarias.

115 Para passarmos do logarithmo dado ao seu numero respectivo, temos $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c$, isto he

$$l\frac{a+x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$$

Façamos por abbreviar $l\frac{a+x}{a} = z$, será

$$z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$$

Resta pois achar o valor de $\frac{x}{a}$ em z.

Supponhamos que este valor se póde exprimir pela

pela equaçaõ

$$\frac{x}{a} = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c,$$

ſendo A, B, C, D, &c. coeficientes conſtantes; teremos

$$\begin{aligned} z = Az + {} & Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c. \\ & - \frac{A^2}{2}z^2 - \frac{2AB}{2}z^3 - \frac{B^2}{2}z^4 + \&c. \\ & \qquad + \frac{A^3}{3}z^3 - \frac{2AC}{2}z^4 + \&c. \\ & \qquad\qquad + \frac{3A^2B}{3}z^4 + \&c. \\ & \qquad\qquad - \frac{A^4}{4}z^4 + \&c. \end{aligned}$$

Logo $A = 1 \ldots B - \frac{A^2}{2} = 0 \ldots C - AB + \frac{A^3}{3} = 0 \ldots D - \frac{B^2}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0$, donde ſe tira $B = \frac{1}{1.2} \ldots C = \frac{1}{1.2.3} \ldots D = \frac{1}{1.2.3.4}$; e por conſeguinte $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \&c$; logo $1 + \frac{x}{a}$

ou

ou $\frac{a+x}{a} = 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$

Tiraremos pois do logarithmo dado ou de $l(a+x)$ o logarithmo conhecido mais vizinho, cujo numero reprefentaremos por a; virá $l\frac{a+x}{a}$ ou z, o qual fendo fubftituido na formula precedente, dará o valor de $\frac{a+x}{a}$, e por confeguinte o de $a+x$.

Querendo, por exemplo, achar o numero cujo logarithmo he 1, devemos fuppor $l\frac{a+x}{a}$ ou $z=1$, e teremos $\frac{a+x}{a} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \&c = 2{,}7182818$, tomando fómente 7 decimais.

Se o logarithmo dado for tabular, o calculo deverá começar pela reducçaõ (114) do mefmo logarithmo, e do que fe tomar por $l\,a$, aos logarithmos de que actualmente tratamos.

Reprefentando x hum numero, feja $l\,x = z$, e e o numero 2, 7182818, cujo logarithmo $= 1$; teremos $l\,x = z\,l\,e = l\,e^z$, e por confeguinte $e^z = x = 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$

ADVER-

116 ADVERTENCIA. O methodo de que nos servimos para tirar o valor de x da equação $z = \frac{x}{a} - \&c$, chama-se *Methodo inverso* das series, e consiste, como se vê, em suppor a variavel, de que se busca o valor, expressa em huma serie, na qual a outra variavel tenha expoentes em progressão arithmetica, e cada termo tenha hum coefficiente constante indeterminado.

Se tivessemos muitos termos em x e em z na mesma equação, mas de sorte que estas variaveis não estivessem multiplicadas entre si, determinariamos a serie dos expoentes, fazendo o expoente do primeiro termo da serie supposta, igual ao menor expoente da mesma variavel na equação, e tomariamos por differença commua dos expoentes da mesma serie o maior commum divisor dos expoentes desta mesma variavel na equação. Por exemplo, se tivessemos $z^{\frac{2}{3}} + 3z = 2x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^3 + \&c$, fariamos $x = Az^{\frac{2}{3}} + Bz + Cz^{\frac{4}{3}} + Dz^{\frac{5}{3}} + Ez^2 + \&c$; porque o menor expoente de z he $\frac{2}{3}$, e o maior divisor commum dos expoentes $\frac{2}{3}$ e 1 da mesma variavel z he $\frac{1}{3}$.

Se porém as duas variaveis estivessem multiplicadas entre si, então seria necessario observar outro methodo, com que não nos demoramos por não pertencer ao nosso objecto; mas póde ver-se nas

nas obras de Newton, e na *Analyse das linhas curvas* de Cramer.

117 Além do methodo exposto (109) temos muitos outros, que daõ series mais convergentes em certos casos. O que se segue he hum dos mais notaveis.

Seja y huma funçaõ de x; teremos, integrando $d(xy) = xdy + ydx$ por partes,

$$\int ydx = xy - \int xdy.$$

Supponhamos $dy = y'dx$; teremos do mesmo modo

$$\int xdy \text{ ou } \int xy'dx = \frac{x^2}{2} y' - \int \frac{x^2}{2} dy'.$$

Semelhantemente, fazendo $dy' = y''dx$, será

$$\int \frac{x^2}{2} dy' = \frac{x^3}{2 \cdot 3} y'' - \int \frac{x^3}{2 \cdot 3} dy'',$$

e assim por diante. Logo substituindo estes valores na primeira expressaõ acharemos

$$\int ydx = xy - \frac{x^2}{2} y' + \frac{x^3}{2 \cdot 3} y'' - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} y''' + \&c.$$

E como $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{ddy}{dx^2}$ (suppondo dx constante), e assim por diante, será

$$\int ydx = xy - \frac{x^2}{2} \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^3 y}{dx^3} + \&c.$$

Que-

Querendo por exemplo integrar $\frac{dx}{a+x}$, teremos $y = \frac{1}{a+x} \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^2} \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(a+x)^3}$ &c; logo $\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(x+a)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} + \&c + C$, isto he $l(a+x) = la + \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} + \&c$, como ja se achou.

Uso das approximações antecedentes na integraçaõ de varias quantidades.

118 POr quanto temos taboas ja calculadas, tanto das differentes partes do circulo, como dos logarithmos, naõ he necessario reduzir a serie as differenciais que houvermos de integrar, huma vez que ellas se possaõ reportar ao circulo ou aos logarithmos. Vejamos quais destas differenciais saõ aquellas que se encontraõ mais vezes, e mostremos em alguns exemplos como se determinaõ os arcos de circulo, ou os logarithmos que saõ os seus integrais.

119 Sabemos (100 III), que $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ he o elemento de hum arco de circulo AM (*Fig.*56) cujo raio $= a$, e a abscissa ou o seno verso $= x$; de ma-

maneira que $\int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = AM$. Se quizermos pois o valor deste integral para hum x determinado, tiraremos de CA ou a o valor conhecido de x ou AP, e teremos CP; entaõ no triangulo rectangulo CPM, em que conhecemos CP, e $CM = a$, poderemos calcular o angulo ACM, ou o numero de gráos do arco AM, e conseguintemente, multiplicando esse numero de gráos por $\frac{3,1415926}{180} = 0,0174533$, teremos o comprimento do mesmo arco.

120 Se tivermos $\frac{hdx}{\sqrt{(gkx - pxx)}}$, sendo h, g, p e k quantidades conhecidas, faremos esta differencial semelhante á precedente, dividindo primeiramente tanto o numerador, como o denominador por $\sqrt{p}$, o que dará $\frac{h}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$; depois multiplicaremos e dividiremos ao mesmo tempo por $\frac{1}{2} \cdot \frac{gk}{p}$, para que o multiplicador de dx seja a ametade do multiplicador de x dentro do radical, e teremos $\frac{2h\sqrt{p}}{gk} \cdot \frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$.

Agora se vê que o integral da differencial proposta he he $\frac{2h\sqrt{p}}{gk}$ multiplicado por hum arco de circulo cujo ſeno verſo he x, e o diametro $\frac{gk}{p}$; e por conſeguinte póde aſſignar-ſe com facilidade.

121 Se contaſſemos as abſciſſas do centro C, iſto he, ſe foſſe CP $= x$, teriamos $\frac{-adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ por elemento do arco AM, como já vimos (25), e ſe póde tambem deduzir dos triangulos ſemelhantes CPM, Mrm, notando que AM diminue quando x creſce; logo AM $=\int\frac{-adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$. Pelo que todas as vezes que tivermos huma differencial da fórma $\frac{kdx}{\sqrt{(gh-pxx)}}$, mudalla-hemos, como acima, em $\frac{k}{\sqrt{p}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p}-xx\right)}}$; e como $\frac{gh}{p}$ repreſenta aqui aa, a quantidade $-a$, que deve haver no numerador, he $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$; multiplicando pois e dividindo ao meſmo tempo por $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, teremos $-\frac{k}{\sqrt{gh}}\cdot\frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p}-xx\right)}}$. Logo ſuppon-

do CA $= \sqrt{\frac{gh}{p}}$, e CP $= x$, teremos $\int \frac{kdx}{\sqrt{gh - pxx}} = \frac{-k}{\sqrt{gh}} \times AM + C$. A conſtante C determina-ſe pelas condições do problema particular que conduzir á differencial propoſta, e o arco AM (119) pelo calculo do triangulo CPM.

122 Já achámos (111) que $\frac{aadx}{aa + xx}$ exprimia hum arco de circulo, cujo raio he a, e x a tangente; arco que ſe póde determinar para hum valor dado de x, calculando o angulo ACN do triangulo rectangulo ACN (*Fig.* 62), e depois o comprimento do arco AM.

Logo ſe tivermos $\frac{kdx}{gb^2 + hx^2}$, reduziremos eſta expreſſaõ á forma $\frac{k}{gb^2} \cdot \frac{\frac{gb^2}{h} dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$, e acharemos o ſeu integral, calculando o comprimento do arco do raio $b\sqrt{\frac{g}{h}}$, cuja tangente $= x$, e multiplicando-o por $\frac{k}{gb^2}$.

123 Os integrais das tres differenciais precedentes podem exprimir-ſe mais commodamente reduzindo-ſe ao raio 1. Porque na primeira $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, ſe fizermos $a - x = az$, teremos

dx

$dx = -adz$, $\sqrt{(2ax - xx)} = \sqrt{[2a^2 - 2a^2z - (a^2 - 2a^2z + a^2z^2)]} = a\sqrt{(1 - z^2)}$; e ſubſtituindo eſtes valores na differencial, virá $\frac{-adz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$, cujo integral (25) he $a\ Arc.\ coſ\ z$; logo $\int \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = a\ Arc.\ coſ\ \frac{a-x}{a} + C$, ou $-a\ Arc.\ ſen\ \frac{a-x}{a} + C'$.

Quanto a $\frac{-adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, fazendo $x = az$, teremos $\frac{-adz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, cujo integral he $a\ Arc.\ coſ\ z$, e por conſeguinte $\int \frac{-adx}{\sqrt{(aa-xx)}} = a\ Arc.\ coſ \frac{x}{a} + C$, ou $-a\ Arc.\ ſen \frac{x}{a} + C'$.

Do meſmo modo $\frac{aadx}{aa+xx}$ ſe transforma em $\frac{adz}{1+z^2}$, fazendo $x = az$; e como (25) $\int \frac{dz}{1+z^2}$ he arco cuja tangente $= z$, e o raio $= 1$, teremos $\int \frac{aadx}{aa+xx} = a\ Arc.\ tang\ \frac{x}{a} + C$, ou $-a\ Arc.\ cot \frac{x}{a} + C'$. Paſſemos ás differenciais que ſe integraõ pela ſuperficie do circulo.

124 O elemento do ſemiſegmento APM (*Fig.* 56) he $dx\sqrt{(2ax - xx)}$, ſendo AP $= x$; porque $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, e por conſeguinte ydx ou $PpmM = dx\sqrt{(2ax - xx)}$: logo $\int dx\sqrt{(2ax - xx)} = APM + C$. Aſſim toda a differencial, que ou tiver eſta fórma, ou ſe poder reduzir a ella por meio de preparações ſemelhantes ás que acabamos de indicar, ſe integrará pelo ſemiſegmento de circulo cuja abſciſſa $= x$, e o raio $= a$; ſemiſegmento que ſe acha com facilidade, calculando o arco AM como enſinámos (119).

Se quizermos, por exemplo, achar a ſuperficie do ſemiſegmento elliptico APM (*Fig.* 63), teremos $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; logo ydx ou d(APM) $= \frac{bdx}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; mas $\int dx\sqrt{(2ax - xx)} =$ APM′, ſuppondo que ſobre AB como diametro ſe tem deſcrito hum circulo; logo APM $=$ $\frac{b}{a}$ APM′, que dá APM : APM′ :: $b : a$; iſto he, *a ſuperficie do ſegmento elliptico eſtá para a ſuperficie do ſegmento circular correſpondente, como o eixo menor eſtá para o maior.* Donde ſe ſegue, que *a ſuperficie inteira da ellipſe eſtá para a do circulo deſcrito ſobre o ſeu eixo maior, como o eixo menor eſtá para o maior*, que he o que prometemos demonſtrar (108).

125

125 Se contarmos as abſciſſas do ponto C (*Fig.* 56), iſto he, ſe for CP $= x$, teremos $- dx \sqrt{(aa - xx)}$ por elemento do ſemiſegmento APM; porque entaõ $y = \sqrt{(aa - xx)}$, e á medida que x creſce, APM diminue, o que faz negativa a differencial de APM.

Para darmos hum exemplo de huma differencial que ſe reduz a eſta fórma, proponha-ſe achar a ſuperficie do esferoide elliptico allongado. Como a formula geral deſte genero de ſuperficies he $2cyds$ (100), e a equaçaõ da ellipſe $yy = bb - \frac{bb}{aa} xx$ dá yds ou $y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{bdx}{aa} \sqrt{[a^4 - xx(aa - bb)]}$, teremos $2cyds = \frac{2cbdx}{aa} \sqrt{[a^4 - xx(aa - bb)]}$. Seja k a diſtancia CF (*Fig.* 64) do fóco F $= k$, iſto he (Alg. 294), ſeja $aa - bb = kk$; ſerá o elemento da ſuperficie contada do ponto A $= - \frac{2cbkdx}{aa} \sqrt{\left(\frac{a^4}{kk} - xx\right)}$, porque a ſuperficie diminue á medida que x creſce. Comparando pois com $- dx \sqrt{(aa - xx)}$, concluiremos que $- dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{kk} - xx\right)}$ he hum ſemiſegmento de circulo cujo raio $= \frac{aa}{k}$, e a abſciſſa contada do centro $= x$. Logo ſe com huma terceira proporcional CO a CF e CA deſcreververmos o circulo ONR, teremos APM ou $\int -\frac{2cbkdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{kk}-xx\right)} = \frac{2cbk}{aa} \times$ OPM′ $+ C$.

Para determinar a conſtante, note-ſe que o integral he nullo na origem A, e que neſte ponto OPM′ ſe torna em OAN; logo $o = \frac{2cbk}{aa}$ $\times$ OAN $+ C$, donde ſe tira $C = -\frac{2cbk}{aa} \times$ OAN; logo o integral completo he $\frac{2cbk}{aa}$(OPM′ $-$ OAN) $= \frac{2cbk}{aa} \times$ APM′N. Vê-ſe pois, que a ſuperficie do ſemi-esferoide ſerá $\frac{2cbk}{aa} \times$ ACRN $= 2c \times \frac{CD}{CO} \times$ ACRN, e a do esferoide inteiro ſerá o dobro.

Quanto á determinaçaõ de CO, deſcreva-ſe do ponto C com o raio CA o arco AL, que corte em L a perpendicular FL, levantada ſobre CA do ponto F; produza-ſe CL até encontrar em N a perpendicular levantada do ponto A; ſerá CN o valor procurado de CO. Com effeito os triangulos ſemelhantes CFL, CAN daõ CF (k) : CA (a) :: CL (a) : CN $= \frac{aa}{k} =$ CO.

126 Passando agora ás quantidades que se referem immediatamente aos logarithmos, podemos integrar por meio delles toda a differencial, que he, ou se póde reduzir a huma fracçaõ, cujo numerador seja a differencial do denominador, ou hum multiplo ou submultiplo da mesma differencial.

No primeiro caso, ou quando o numerador he exactamente a differencial do denominador, o integral he o logarithmo do denominador. Assim $\int \frac{dx}{x} = lx + C \ldots \int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C \ldots$

$\int \frac{2xdx}{aa+xx} = l(aa+xx) + C.$

Quando porém o numerador for a differencial do denominador multiplicada ou dividida por hum numero constante, resolveremos a differencial proposta em dous factores, dos quais hum seja huma fracçaõ com o numerador exactamente differencial do denominador, e o outro seja hum numero constante; entaõ o integral será o producto do factor constante pelo logarithmo do denominador variavel. Assim para integrar $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$, como temos $d(a^3+x^3) = 3x^2dx$, prepararemos a nossa differencial, de modo que venha $3x^2dx$ no numerador; para o que escreveremos desta fórma $\frac{a}{3} \cdot \frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$, cujo integral he $\frac{a}{3} l(a^3+x^3)$ $+ C$.

Da

Da meſma ſorte $\int \frac{dx}{a-x} = -\int \frac{-dx}{a-x} = -l(a-x) + C = l\,1 - l(a-x) + C = l\frac{1}{a-x} + C \ldots \int \frac{xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2}l(aa+xx) + C = l\sqrt{(aa+xx)} + C \ldots \int \frac{ax^{n-1}dx}{k \pm bx^n} = \pm \frac{a}{nb}\int \frac{nbx^{n-1}dx}{k \pm bx^n} = \pm \frac{a}{nb}l(k \pm bx^n) + C = \pm l(k \pm bx^n)^{\frac{a}{nb}} + C.$

Para darmos hum exemplo do modo de determinar eſtes integrais em numeros, ſupponhamos que ſe pede o valor de $l(a+x)$ para $x=2$, ſendo $a=5$. Buſque-ſe nas taboas o logarithmo pedido de 7, que he 0,8450980, e multiplicando-o (114) por 2,30258509 ou 2,3025851, teremos 1,9459100 ou 1,94591 por valor de $l(a+x)$ ou de $\int \frac{dx}{a+x}$, quando $a=5$, e $x=2$.

Algumas vezes encontraõ-ſe differenciais que ſe integraõ por logarithmos, ainda que naõ ſe poſſaõ preparar como as precedentes: $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ he deſte genero. Em alguns caſos para ſe lhes dar a fórma de differencial logarithmica, he util o ten-

tentar multiplica-las por huma funçaõ de x tal, que o producto venha a ser a differencial desta funçaõ, ou esta mesma differencial multiplicada ou dividida por hum numero constante; entaõ dividindo pela mesma funçaõ, a differencial será evidentemente huma differencial logarithmica. Por exemplo, multiplicando $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ por $x+\sqrt{(a^2+x^2)}$, vem $\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}+dx$, que he com effeito a differencial de $x+\sqrt{(a^2+x^2)}$; logo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}=\int\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}}=l\left[x+\sqrt{(a^2+x^2)}\right].$$

Do mesmo modo $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=l\left[x+\sqrt{(x^2-a^2)}\right]$; e $\int\frac{-dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}=-l\left[x+\sqrt{(a^2+x^2)}\right]=l\frac{1}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}}$.

O integral pois de $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ou de $\frac{dx.\sqrt{-1}}{\sqrt{(x^2-1)}}$, he $\sqrt{-1}\,l\left[x+\sqrt{(x^2-1)}\right]$, ou $Arc.\,sen\,x$ (25); logo tambem $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}=$

$$-\sqrt{-1}\ Arc.\ sen\ x\sqrt{-1} = \frac{Arc.\ sen\ x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.$$

Em geral as differenciais que se integraõ por arcos de circulo, tambem se podem integrar por logarithmos, mas em fórma imaginaria; e reciprocamente as differenciais que se integraõ por logarithmos, tambem se podem integrar por arcos de circulo, mas nesta expressaõ entraráõ quantidades imaginarias.

127 Para darmos hum exemplo dos integrais por logarithmos, proponha-se quadrar a hyperbola ordinaria, referida ás asymptotas.

A equaçaõ da curva he $xy = 1$, suppondo a potencia $= 1$; logo $\int y dx = \int \frac{dx}{x} = lx + C$. Se contarmos os espaços desde a origem A dos x (*Fig.* 65), teremos $C = -lo$, e conseguintemente a area $= lx - lo = l\frac{x}{o} = \infty$; logo os espaços ZAPMV contados desde a asymptota saõ infinitos, o que naõ admira, sendo Z e V respectivamente as extremidades da asymptota, e do ramo correspondente da hyperbola. Se quizermos porém os espaços contados desde o vertice O, onde x ou AN $= 1$, isto he, a superficie do espaço asymptotico comprehendido entre as ordenadas 1, $\frac{1}{x}$; teremos $o = l1 + C$, que dá $C = -l1 = o$; logo

N

NOMP $= lx$. He pois $\int \frac{dx}{x}$ finito ou infinito, conforme a porçaõ que delle queremos achar.

Daqui ſe vê 1° que os logarithmos, que o calculo dá immediatamente, exprimem os eſpaços hyperbolicos, comprehendidos entre a aſymptota e a curva, e contados deſde o vertice O da meſma curva. 2° Que ſe o integral de $\frac{dx}{x}$, tomado conforme a regra fundamental (84), ſahe infinito, he porque exprime os eſpaços contados deſde a origem das aſymptotas.

Do modo de reduzir a integraçaõ de huma differencial propoſta á de outra differencial conhecida, e de diſtinguir os caſos em que iſſo he poſſivel.

128 EXporemos o methodo ſómente a reſpeito das differenciais binomias; porque facilmente ſe poderá fazer a applicaçaõ ás differenciais mais compoſtas.

Seja primeiramente $hx^s\,dx\,(a + bx^n)^p$ a differencial propoſta, e $x^m\,dx\,(a + bx^n)^p$ a differencial que ſe ſabe integrar, e de que aquella depende; iſto he, ſejaõ os meſmos os dous expoentes do binomio. Iſto poſto, poderemos ſuppôr $\int hx^s dx\,(a + bx^n)^p = X + R\int x^m\,dx\,(a + bx^n)^p$,

ſen-

ſendo X huma funçaõ algebrica de x, e R hum coefficiente conſtante. E como eſta equaçaõ dá $dX = (hx^s - Rx^m)(a + bx^n)^p dx$, vê-ſe que X naõ póde ſer igual ſenaõ a $(a + bx^n)^{p+1}$ multiplicado por huma ſerie da fórma $Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \ldots + Px^{k+tq}$, ſendo A, B, C &c coefficientes conſtantes deſconhecidos; k e q expoentes tambem indeterminados; e t hum numero inteiro poſitivo.

Supponhamos pois $\int hx^s dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1} \left(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \ldots + Px^{k+tq}\right) + R\int x^m dx (a + bx^n)^p$. Differenciando, e dividindo por $dx (a + bx^n)^p$, teremos $hx^s = (p + 1) nbx^{n-1} \left(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \ldots + Px^{k+tq}\right) + (a + bx^n) \left(kAx^{k-1} + (k + q) Bx^{k+q-1} + (k + 2q) Cx^{k+2q-1} + \ldots + (k + tq) Px^{k+tq-1}\right) + Rx^m$.

Agora para determinar os coefficientes A, B, C, &c do modo ordinario, he neceſſario que o numero das potencias de x que entrarem neſta equaçaõ naõ exceda o numero dos meſmos coefficientes, o qual he $t + 2$. E como ſe requer, que os expoentes de x formem huma progreſſaõ arithmetica, cuja differença ſeja q; ſe fizermos

mos

mos $k - 1 = m$ (ſuppondo que m he o menor expoente), ſerá $k + tq + n - 1 = s$. Logo o numero dos termos deſta progreſſaõ (Alg. 231) ſerá

$$\frac{k + tq + n - 1 - k + 1}{q} + 1 \text{ ou } \frac{tq + n}{q} + 1;$$

e por conſeguinte teremos $\frac{tq + n}{q} + 1 = t + 2$, que dá $q = n$. Subſtituindo os valores de k e q na equaçaõ $k + tq + n - 1 = s$, virá $t = \frac{s - m}{n} - 1$.

Logo: *A reducçaõ de huma differencial para outra ſerá poſſivel, todas as vezes que a differença $s - m$ dos expoentes de x fóra dos dous binomios, dividida pelo expoente de x dentro do binomio, der hum quociente inteiro poſitivo*; e entaõ ſuppondo

$$\int bx^s dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1} \Big(Ax^{m+1} + Bx^{m+n+1}$$
$$+ Cx^{m+2n+1} + \ldots + Px^{s-n+1} \Big) + R \int x^m dx (a + bx^n)^p;$$

determinaremos os coefficientes A, B, C &c, differenciando eſta equaçaõ, dividindo-a por $dx\ (a + bx^n)^p$, e igualando a nada a ſoma das quantidades que multiplicarem huma meſma potencia de x, depois de haver tranſpoſto todos os termos para hum membro.

Exemplo. Trate-ſe de reduzir o integral de $\int x^4 dx\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ a $\int dx\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, que depende da da quadratura do circulo. Neste caso temos $\frac{s - m}{n}$ $= \frac{4 - 0}{2} = 2$; logo a reducçaõ he possivel; e como $t + 1$ ou $\frac{s - m}{n}$ he o numero dos termos da serie, constará esta de dous termos. Faremos pois $\int x^4 dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}} \left(Ax + Bx^3 \right) + R \int dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$; equaçaõ que sendo differenciada, e dividida por $dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ dará

$$\begin{array}{llll} 0 = Abb - & Ax^2 - 3 Bx^4 \\ + R & + 3Bbbx^2 - & x^4 \\ & - & 3Ax^2 - 3Bx^4 \end{array}$$

donde se tira $A = -\frac{1}{8} bb \ldots B = -\frac{1}{6} \ldots$; $R = \frac{1}{8} b^4$; logo $\int x^4 dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ $\left(-\frac{1}{8} bbx - \frac{1}{6} x^3 \right) + \frac{1}{8} b^4 \int dx \sqrt{(bb - xx)}$ $+ C$.

He pois facil o achar por este methodo as differenciais, que se referem a huma differencial dada, e conseguintemente as que se reduzem á quadradratura do circulo, da ellipſe e da hyperbola; differenciais, cujas expreſſões ſe achaõ com facilidade por meio das equações deſtas curvas. Aſſim, ſendo e hum numero inteiro poſitivo,

$$\int \frac{x^{2e}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ depende de } \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. ſen } x.$$

129 Eſtá claro, que ſe $\int x^s dx\,(a+bx^n)^p$ depender de $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p$, reciprocamente eſta dependerá da primeira; e como neſte caſo para reduzir $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p$ a $\int x^s dx\,(a+bx^n)^p$, deve ſer $\frac{m-s}{n}$ numero inteiro poſitivo, e a reducçaõ ſe effeitua ſuppondo $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p = (a+bx^n)^{p+1}\left(Ax^{s+1}+Bx^{s+n+1}+\ldots+Px^{m-n+1}\right)+R\int x^s dx\,(a+bx^n)^p$; ſegue-ſe que ou s ſeja maior ou menor que m, com tanto que $\frac{s-m}{n}$ ou $\frac{m-s}{n}$ dê hum numero poſitivo, poderemos reduzir ſempre huma deſtas differenciais á outra, pondo por primeiro expoente de x na ſerie $Ax^k + Bx^{k+q}$ &c, o menor dos dous expoentes m e s, aumentado de huma unidade, e tomando por q o expoente de x dentro do binomio.

Exemplo. Querendo ſaber ſe $x^{-8}dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ depende de $dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$, vemos

mos que $\frac{s-m}{n}$ ou $\frac{-8-0}{4}$ naõ dá numero inteiro poſitivo; mas como $\frac{m-s}{n}$ ou $\frac{8-0}{4}$ o dá, concluiremos que eſtas differenciais dependem huma da outra. Para integrar pois a quantidade propoſta, faremos $\int dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}} = (a^4-x^4)^{\frac{1}{2}} \left(Ax^{-7}+Bx^{-3}\right) + R\int x^{-8}\,dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$, e havendo determinado os coefficientes A, B, R, deduziremos por tranſpoſiçaõ o valor de $\int x^{-8}\,dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$.

Podemos tambem neſte caſo fazer negativo em cada differencial o expoente de x dentro do binomio, e applicar a ambas as differenciais aſſim preparadas a primeira regra (128). Com effeito $x^s dx\,(a+bx^n)^p$, e $x^m dx\,(a+bx^n)^p$ mudaõ-ſe em $x^{s+pn}\,dx\,(ax^{-n}+b)^p$, e $x^{m+pn}\,(ax^{-n}+b)^p$; e a primeira deſtas ultimas quantidades reduz-ſe á ſegunda, quando $\frac{s+pn-m-pn}{-n}$ ou $\frac{m-s}{n}$ he numero inteiro poſitivo.

Aſſim no exemplo acima propoſto reduziremos

mos $x^{-8}dx\ (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$ e $dx\ (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$

a $x^{-10}dx\ (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ e $x^{-2}\ dx\ (a^4x^{-4}$

$-1)^{-\frac{1}{2}}$, onde se vê que $\frac{s-m}{n}$ ou $\frac{-10+2}{-4}$

$=$ ao numero inteiro positivo 2; faremos pois

$$\int x^{-10}dx\ (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}} = (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(Ax^{-1} + Bx^{-5}\right) + R\int x^{-2}\ dx\ (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

130 Notemos de passagem, que este methodo tambem dá as differenciais binomias integraveis; porque procurar quando he integravel huma differencial binomia $hx^s dx\ (a + bx^n)^p$ he o mesmo que reduzi-la a $Rx^{n-1}\ dx\ (a + bx^n)^p$, que se integra immediatamente (90); e do que se tem dito (128) resulta, que para esse fim, $\frac{s-n+1}{n}$ deve ser numero inteiro positivo, isto he, $\frac{s+1}{n}$ deve ser numero inteiro positivo; o que concorda com a regra dada (92).

Póde acontecer em certos casos, que a differencial proposta seja integravel, e sem embargo, se lhe applicarmos as regras precedentes, pareça dependente de huma differencial conhecida. Porém em tais caſos o coefficiente R que ſe der á differencial, a que ſe trata de reduzir a propoſta, acharſe-ha $= 0$. Por exemplo $\frac{dx}{x^4 \sqrt{(aa - xx)}}$ depende de $\frac{dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, porque mudando eſtas differenciais em $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, e $x^{-1} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, temos $\frac{s - m}{n}$ ou $\frac{-5 + 1}{-2} = 2$; e com tudo $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ he integravel (93). Porém a contradicçaõ he ſó apparente; porque ſe em virtude do exame precedente, paſſando com effeito a reduzir $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ a $x^{-1} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, fizermos $\int x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}} = (aax^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}} \left(A + Bx^{-2}\right) + R \int x^{-1} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, e determinarmos os coefficientes, teremos $A = -\frac{2}{3a^4}$, $B = -\frac{1}{3a^2}$, $R = 0$, e por conſequencia $\int x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ virá igual a huma quantidade puramente algebrica, como ſe acha pelo methodo dado (93).

131 Supponhamos agora, que os dous binomios tem expoentes differentes, de maneira que a differencial propoſta ſeja $bx^s dx\,(a+bx^n)^r$, e a de integraçaõ conhecida ſeja $x^m dx\,(a+bx^n)^p$, ſendo $p < r$. Se r for poſitivo, iſto he, ſe $r-p$ for poſitivo, mudaremos a propoſta em $bx^s dx\,(a+bx^n)^{r-p}.\times(a+bx^n)^p$, a qual, ſe $r-p$ for numero inteiro, poderá reduzir-ſe em ſerie da fórma $\left(A'x^s + B'x^{s+n} + C'x^{s+2n} + \&c\right) dx\,(a+bx^n)^p$. Entaõ cada hum deſtes termos póde reduzir-ſe a $x^m dx\,(a+bx^n)^p$ pelo methodo antecedente, ſe $s-m$ for diviſivel por n; e para reduzir a totalidade, applicaremos palavra por palavra o que ſe enſinou no meſmo methodo, tomando pelo que lá ſe chamava s, o maior expoente de x no valor achado de $bx^s dx\,(a+bx^n)^{r-p}$.

Se tiveſſemos, por exemplo, para reduzir $\int x^2 dx\,(bb-xx)^{\frac{3}{2}}$ a $\int dx\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$, mudariamos a primeira em $\int x^2 dx\,(bb-xx)\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$ ou $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$; e aſſim em lugar de s tomaremos 4; logo, conforme o methodo, ſupporemos $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)$

$(bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{-\frac{1}{2}} \left(Ax + Bx^3\right) +$

$R \int dx \, (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$.

Se pelo contrario o valor de r for negativo, ou $r - p$ for negativo, em lugar de reduzir $hx^t dx \, (a + bx^n)^r$ a $x^m dx \, (a + bx^n)^p$, reduziremos a segunda á primeira, isto he, daremos á differencial conhecida a fórma $x^m dx \, (a + bx^n)^{p-r} \times (a + bx^n)^r$, que se poderá reduzir a huma serie finita de termos da fórma $\left(A'x^m + B'x^{m+n} + C'x^{m+2n} + \&c\right)(a + bx^n)^r$, quando $p - r$ for numero inteiro; e depois praticaremos, como acabamos de ensinar para o caso de r positivo.

Se quizessemos, por exemplo, reduzir $\int gx^{-2} dx \, (aa + xx)^{-2}$ a $\int dx \, (aa + xx)^{-1}$ ou $\int \frac{dx}{aa + xx} = \frac{1}{a} \, Arc. \, tang \, \frac{x}{a}$, mudariamos $dx \, (aa + xx)^{-1}$ em $(aa + xx) \, dx \, (aa + xx)^{-2}$; e como o menor expoente fóra do binomio proposto he $- 2$, supporiamos $R \int (aa + xx) \, dx \, (aa + xx)^{-2} = (aa + xx)^{-1} \left(Ax^{-1} + Bx\right) + \int gx^{-2} dx \, (aa + xx)^{-2}$; e havendo determinado do os coefficientes como acima, teriamos por transposiçaõ o valor de $\int gx^{-2}\,dx\,(aa+xx)^{-2}$, no qual mudariamos depois $R\int(aa+xx)\,dx\,(aa+xx)^{-2}$ em $R\int dx\,(aa+xx)^{-1}$.

Podemos pois por este methodo reduzir $\int\frac{x^{2e}dx}{(1+xx)^m}$ a $\int\frac{dx}{1+xx}$, sendo e e m numeros inteiros.

Se $p-r$ naõ for numero inteiro, a reducçaõ naõ será possivel.

Das Fracções racionais.

132 T*Oda a quantidade differencial racional he sempre integravel, ou algebricamente, ou por arcos de circulo, ou por logarithmos, ou por todos estes tres meios juntamente, ou por dous delles sómente.*

Temos visto (84) que ella he integravel algebricamente, 1° todas as vezes que naõ contém denominador variavel; 2° quando o tem, mas monomio da fórma x^m, sendo m todo e qualquer numero á excepçaõ de -1. Falta pois mostrar a verdade da nossa proposiçaõ, no caso de haver na differencial proposta hum denominador racional complexo.

Supporemos que a variavel está menos elevada no numerador da fracçaõ differencial proposta, que

que no denominador. Se assim naõ for, dividiremos o numerador pelo denominador, até que a maior potencia do resto seja menor que a do denominador. Se tivessemos, por exemplo, para integrar $\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$, principiariamos por dividir o numerador pelo denominador, o que daria xdx, e o resto $-(3ax^2+aax)dx$; dividiriamos ainda este resto pelo mesmo denominador, e teriamos $-3adx$ por quociente, e o resto $(8a^2x+3a^3)dx$; entaõ em lugar de $\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$ tomariamos

$$xdx-3adx+\frac{(8a^2x+3a^3)dx}{aa+3ax+xx}.$$

133 Como a differencial do logarithmo de huma quantidade he igual á differencial da quantidade, dividida pela mesma quantidade, he muito natural o tentar resolver huma fracçaõ racional $\frac{Pdx}{Q}$ que se trate de integrar, em tantas fracções simples, quantos saõ os factores do denominador Q, ou quantas saõ as raizes da equaçaõ $Q=0$.

Com effeito $d[2a\,l(a+x)-2a\,l(2a+x)]$ $=\frac{2adx}{a+x}-\frac{2adx}{2a+x}=\frac{2aadx}{2aa+3ax+xx}$; logo para integrar esta fracçaõ, naõ he necessario mais que resolve-la em duas fracções, das quais huma te-

tenha por denominador $a+x$, e a outra $2a+x$, e cujos numeradores ſejaõ numeros conſtantes multiplicados por dx; entaõ as duas fracções ſe integraráõ por logarithmos. Eſte he o methodo que póde e deve obſervar-ſe, quando os factores do denominador ſaõ todos deſiguais.

134 Porém quando entre os factores do denominador ha alguns iguais entre ſi, naõ devemos eſperàr deſte methodo ſoluçaõ conveniente; porque a integraçaõ naõ póde entaõ depender totalmente de logarithmos. Com effeito $\frac{dx}{(a+x)^2}$, em que ha dous factores iguais $a+x$ e $a+x$, tem (90) o integral $C-(a+x)^{-1}$ independente de logarithmos. Mas ſe differenciaſſemos, por exemplo,

$$\frac{aa}{a+x}+2al(a+x)+2al(2a+x)-al(3a+x),$$

teriamos $\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{2a+x}-\frac{adx}{3a+x}$,

ou $\frac{10a^4dx+26a^3xdx+17a^2x^2dx+3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$;

fracçaõ que para ſer integrada, naõ ſeria neceſſario mais que reſolver-ſe em tres fracções, huma das quais tiveſſe por denominador todos os factores iguais, e por numerador todas as potencias de x menores que a mais alta do denominador; quanto ás outras duas, cada huma teria por denominador hum dos factores deſiguais, e naõ teria potencia al-

alguma de x no numerador. Tal he com effeito o methodo de integrar qualquer fracçaõ racional, ao menos quando o denominador naõ tiver factores imaginarios.

Assim se suppuzermos, que a expressaõ $\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots kx^{n-1})\,dx}{M + Nx + Px^2 + \ldots + Tx^n}$, a qual representa em geral toda a fracçaõ racional, tem no denominador hum numero m de factores iguais $x+g$, hum numero p de factores iguais $x + h$, &c, e os factores desiguais $x + i$, $x + q$, $x + r$, &c; isto he, se a fracçaõ proposta tiver a fórma

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{n-1})\,dx}{(x + g)^m (x+h)^p \times \&c\,(x + i)(x + q)(x + r) \times \&c};$$

para a integrar faremos

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{n-1})\,dx}{(x + g)^m (x+h)^p \times \&c\,(x + i)(x + q)(x + r) \times \&c}$$

$$= \frac{Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + R}{(x + g)^m}\,dx +$$

$$\frac{A'x^{p-1} + B'x^{p-2} + \ldots + R'}{(x + h)^p}\,dx + \&c$$

$$+ \frac{Ldx}{x + i} + \frac{Mdx}{x + q} + \frac{Ndx}{x + r} + \&c,$$ sendo A, B, C, &c coefficientes constantes e indeterminados. Entaõ se podermos determinar os coefficientes,

o

o integral das fracções ſimples $\frac{Ldx}{x+i}$, $\frac{Mdx}{x+q}$, $\frac{Ndx}{x+r}$ &c ſerá $Ll\,(x+i)$, $Ml\,(x+q)$, $Nl\,(x+r)$ &c ; e quanto ás fracções

$$\frac{Ax^{m-1}dx + Bx^{m-2} + \ldots + R}{(x+g)^m}\,dx \text{ \&c},$$ integraremos $\frac{Ax^{m-1}dx}{(x+g)^m}$, $\frac{Bx^{m-2}dx}{(x+g)^m}$, &c, ou em geral

$x^n dx\,(x+g)^{-m}$, fazendo $x+g=z$ (92), o que

dará hum ſó termo da fórma $\frac{dz}{z}$, integravel por logarithmos.

135 Para achar os coefficientes A, B, C, &c reduziremos ao meſmo denominador todas as fracções em que elles entraõ ; e ſupprimindo o denominador commum a ambos os membros da equaçaõ formada da fracçaõ propoſta e das novas fracções, tranſporemos, e igualaremos a nada o coefficiente de cada potencia de x ; condiçaõ que dará tantas equações, quantos ſaõ os coefficientes indeterminados.

Exemplos.

I. Propondo-ſe integrar $\frac{dx}{aa-xx}$, reſolveremos $aa-xx$ nos ſeus dous factores $a+x$, $a-x$,

e

e ſupporemos $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{Adx}{a + x} + \frac{Bdx}{a - x}$.
Reduzindo pois ao meſmo denominador, virá $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{Aa - Ax + Ba + Bx}{aa - xx} dx$; e ſupprimindo o denominador commum, dividindo por dx e tranſpondo, teremos $\left\{\begin{array}{c} 1 + Ax \\ - Aa - Bx \\ - Ba \end{array}\right\} = 0$.
Logo $1 - Aa - Ba = 0$, e $A - B = 0$; donde ſe tira $A = \frac{1}{2a}$, $B = \frac{1}{2a}$, e por conſeguinte temos $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} \frac{dx}{a + x} + \frac{1}{2a} \frac{dx}{a - x}$; integrando pois vem $\int \frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} l(a + x) - \frac{1}{2a} l(a - x) + C = \frac{1}{2a} l \frac{a + x}{a - x} + C$.

II. Se a fracçaõ for $\frac{10a^4 + 26a^3x + 17a^2x^2 + 3ax^3}{(a + x)^2 (2a + x)(3a + x)} dx$, que achámos (134) differenciando $\frac{aa}{a + x} + 2a\,l(a + x) + 2a\,l(2a + x) - a\,l(3a + x)$ ſupporemos,

$$\frac{10a^4 + 26a^3x + 17a^2x^2 + 3ax^3}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}dx = \frac{Ax+B}{(a+x)^2}dx$$

$+ \dfrac{Cdx}{2a+x} + \dfrac{Ddx}{3a+x}$; e reduzindo ao mesmo denominador, teremos depois da transposiçaõ

$$\left.\begin{array}{llll} 10a^4 + 26a^3x + & 17a^2x^2 + 3ax^3 \\ -6Ba^2 - 5Bax - & Bx^2 - Ax^3 \\ -3Ca^3 - 6Aa^2x - & 5Aax^2 - Cx^3 \\ -2Da^3 - 7Ca^2x - & 5Cax^2 - Dx^3 \\ \quad -5Da^2x - & 4Dax^2 \end{array}\right\} = 0$$

logo $3a - A - C - D = 0$, $17a^2 - B - 5Aa - 5Ca - 4Da = 0$, $26a^3 - 5Ba - 6Aa^2 - 7Ca^2 - 5Da^2 = 0$, $10a^4 - 6Ba^2 - 3Ca^3 - 2Da^3 = 0$, equações donde se tira $A = 2a$, $B = a^2$, $C = 2a$, $D = -a$.

A differencial proposta se mudará pois em $\dfrac{2ax + aa}{(a+x)^2}dx + \dfrac{2adx}{2a+x} - \dfrac{adx}{3a+x}$. Os dous ultimos termos tem evidentemente por integral $2al(2a+x) - al(3a+x)$. Quanto ao primeiro, faremos $a + x = z$, que o transforma em $\dfrac{2az - aa}{zz}dz = \dfrac{2adz}{z} - \dfrac{aadz}{zz}$, cujo integral hé $2alz + \dfrac{aa}{z}$, ou $2al(a+x) + \dfrac{aa}{a+x}$; logo o in-

integral total he $\frac{aa}{a+x} + 2al\,(a+x) + 2al\,(2a+x) - al\,(3a+x)$, como deve ser.

136 Este methodo de achar os coefficientes das fracções parciais, he geral; mas naõ he o unico: o que vamos a expôr he muito expedito, porque dá hum coefficiente qualquer independente dos outros.

Seja $\frac{Pdx}{Q}$ a fracçaõ differencial proposta, $bx+a$ hum dos factores do denominador, e M o quociente de Q dividido por $bx+a$; isto he, seja $M\,(bx+a) = Q$; será $\frac{Pdx}{Q} = \frac{Adx}{bx+a} + \frac{Ndx}{M}$; logo reduzindo ao mesmo denominador teremos $P = AM + N\,(bx+a)$. Porém a equaçaõ $(bx+a)\,M = Q$, sendo differenciada, dá $bMdx + (bx+a)\,dM = dQ$; logo se puzermos em ambas as equações achadas o valor de x, que dá o mais simples resultado, isto he, se puzermos em lugar de x o valor $\frac{-a}{b}$, que se acha suppondo $bx+a=0$, teremos $bMdx = dQ$, e $P = AM$; logo $A = \frac{bPdx}{dQ}$; quer dizer, que para acharmos o numerador A de qualquer das fracções par-

parciais, dividiremos o numerador Pdx da propoſta pela differencial dQ do ſeu denominador, e havendo ſubſtituido por x o valor que ſe deduz, quando ſe iguala a nada o denominador da fracçaõ parcial, multiplicaremos tudo pelo coefficiente de x no meſmo denominador ſimples.

Por exemplo, para acharmos os numeradores A e B das fracções $\frac{Adx}{a+x}$ e $\frac{Bdx}{a-x}$, em que acima reſolvemos a fracçaõ $\frac{dx}{aa-xx}$, dividiremos o numerador dx da propoſta por $-2xdx$, que he a differencial do denominador, e virá $-\frac{1}{2x}$; no qual pondo por x os valores $-a$ e a, que ſe achaõ para x igualando ſucceſſivamente a nada os denominadores $a+x$ e $a-x$ das fracções parciais, multiplicaremos pelos valores 1 e -1 de h, e teremos $\frac{1}{2a}$ e $\frac{1}{2a}$ por valores de A e B, como já ſe achou.

Do meſmo modo ſe deduziráõ regras gerais para determinar os coefficientes dos numeradores das fracções parciais, que tem por denominador o producto das raizes iguais.

137 As regras dadas para integrar as fracções racionais ſaõ gerais; porém quando alguns factores do denominador forem imaginarios, os integrais

grais feraõ quantidades compoftas de imaginarias, os quais ainda que por iffo naõ deixem de fer reais, com tudo nem fempre fe podem reduzir a fórma real. Pelo que nefte cafo, depois de extrahirmos do denominador todos os feus factores reais, refolveremos o refto, naõ em factores do primeiro gráo, mas em factores do fegundo, os quais fempre faõ reais (Alg. 229), e fe podem reprefentar cada hum por $ax^2 + bx + c$. Affim formando para cada factor do fegundo gráo huma fracçaõ da fórma $\frac{(Ax + B)\,dx}{ax^2 + bx + c}$, determinaremos os coefficientes como precedentemente.

Para integrar, por exemplo, a fracçaõ $\frac{a^4dx}{a^3 - x^3}$, cujo denominador tem hum factor $a - x$, e outro $a^2 + ax + x^2$, que contém dous factores imaginarios; refolveremos a quantidade propofta em duas fracções fómente, das quais huma tenha por denominador o factor $a - x$, e a outra o factor $a^2 + ax + x^2$, ifto he, fupporemos $\frac{a^4dx}{a^3 - x^3} = \frac{Adx}{a - x} + \frac{(Bx + C)\,dx}{aa + ax + xx}$. Reduzindo agora ao mefmo denominador e tranfpondo, teremos . . .

$$\left.\begin{array}{l} a^4 - Aax - Ax^2 \\ -Aa^2 + Cx + Bx^2 \\ -Ca - Bax \end{array}\right\} = 0;$$

don-

donde ſe tira $A = \frac{a^2}{3} \ldots B = \frac{a^2}{3} \ldots C =$ $\frac{2a^3}{3}$; logo $\int \frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{a^2}{3} \int \frac{dx}{a - x} +$ $\frac{a^2}{3} \int \frac{(x + 2a)\, dx}{aa + ax + xx}$.

138 Reſta ſaber de que modo ſe integra a quantidade $\frac{(Ax + B)\, dx}{ax^2 + bx + c}$. Supponhamos para maior ſimplicidade, que a fracçaõ parcial ſe reduz a eſta fórma $\frac{A'x + B'}{x^2 + a'x + b'} dx$, o que he ſempre poſſivel dividindo o numerador e o denominador por a. Entaõ faremos deſapparecer o ſegundo termo do denominador pela hypotheſe $x = z - \frac{1}{2} a'$, que dá $dx = dz$, e teremos huma quantidade deſta fórma $\frac{Cz + D}{zz + qq}\, dz = \frac{Czdz}{zz + qq} +$ $\frac{Ddz}{zz + qq}$, cujo integral he $\frac{C}{2} l\,(zz + qq) +$ $\frac{D}{q} Arc.\,tang \frac{z}{q} + C'$.

139 No caſo de alguns factores do ſegundo gráo ſerem iguaes entre ſi, formaremos para cada collecçaõ de factores iguaes huma fracçaõ da fórma $\frac{(Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \&c + R)\, dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$, ſendo n o nu-

me-

mero dos factores $ax^2 + bx + c$, que se acharem iguais entre si.

Se tivermos, por exemplo, de integrar $\frac{(x^4 + 5ax^3 + 4a^3x)\,dx}{(a^2 + ax + x^2)(x^3 - a^3)}$, cujo denominador se resolve em tres factores $x - a$, $x^2 + ax + a^2$, e $x^2 + ax + a^2$, tomaremos o producto dos dous ultimos $(a^2 + ax + x^2)^2$ por denominador de huma fracçaõ, e faremos entrar no numerador todas as potencias de x inferiores á mais alta das que tiver o denominador. Assim supporemos

$$\frac{x^4 + 5a^3 + 4a^3x}{(a^2 + ax + x^2)(x^3 - a^3)}\,dx = \frac{A\,dx}{x - a} +$$

$$\frac{(Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)\,dx}{(aa + ax + xx)^2},$$ e determinaremos os coefficientes ao modo ordinario.

140 Para integrar agora as quantidades da fórma ... $\frac{Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \&c + Q}{(x^2 + ax + b)^n}\,dx$, faremos desapparecer o segundo termo do denominador, pondo $x = z - \frac{1}{2}a$, e teremos huma quantidade da fórma $\frac{A'z^{2n-1} + B'z^{2n-2} + \&c + Q'}{(zz + qq)^n}\,dz$, que se póde resolver em $\frac{A'z^{2n-1}\,dz}{(zz + qq)^n} +$

B'

$\frac{B'z^{2n-2}dz}{(zz+qq)^n}$ + &c, iſto he em termos, nos quaes o numerador ou tem potencia par ou impar. Os termos em que z tem expoente impar, integraõ-ſe (92) em parte algebricamente, e em parte por logarithmos; aquelles porém em que z tem expoente par, podem reduzir-ſe (131) a $\frac{dz}{zz+qq}$, e por conſeguinte ſaõ integraveis em parte algebricamente, e em parte por arcos de circulo.

Aſſim toda a fracçaõ racional he integravel exactamente, ou quando muito, naõ depende ſenaõ de arcos de circulo, e de logarithmos.

De algumas transformações, que podem facilitar as integrações.

141 SObre eſta materia naõ ſe podem dar regras gerais. A inſpecçaõ das quantidades, o exercicio, e a ſagacidade dictaõ nos caſos particulares o que ſe deve praticar.

As transformações, de que vamos a tratar, dirigem-ſe a fazer racionais as differenciais propoſtas; porque effeituada eſta reducçaõ, naõ ha difficuldade em integra-las. Vejamos alguns caſos em que iſſo he poſſivel.

142 Se os radicais naõ affectarem ſenaõ monomios, reduzilos-hemos todos ao meſmo grão, que repreſentamos por m; e ſuppondo $x^{\frac{1}{m}} = z$,

que dá $x = z^m$, e $dx = mz^{m-1}\,dz$, faremos as ſubſtituições, e virá huma quantidade racional.

Por exemplo, ſe tivermos $\frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}\,dx$, eſcreveremos aſſim $\frac{x^{\frac{3}{6}} + a}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}\,dx$. Fazendo pois $x^{\frac{1}{6}} = z$, teremos $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$, e conſeguintemente $\frac{6z^8 + 6az^5}{z^4 + z^3}\,dz$, iſto he $\frac{6z^5 + 6az^2}{z + 1}\,dz$, que ſe integra facilmente (132 e ſeg.).

143 Se houver hum ſó radical complexo do ſegundo gráo, e a variavel debaixo delle naõ paſſar do quadrado, iſto he, ſe a quantidade tiver a fórma $\sqrt{(a + bx + cxx)}$, ſempre ſe poderá fazer racional por qualquer dos dous modos ſeguintes. 1º Depois de deſembaraçar o quadrado da variavel dentro do radical, igualar-ſe-ha eſte radical á meſma variavel mais ou menos outra: 2º ou reſolver-ſe-ha a quantidade affecta do radical nos ſeus dous factores, e ſe igualará neſta fórma a hum delles multiplicado por huma nova variavel.

Se tivermos por exemplo $\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$, faremos $\sqrt{(xx - aa)} = x - z$, que dá $x = \frac{zz + aa}{2z}$; logo $dx = \frac{zz - aa}{2zz} dz$, e $\sqrt{(xx - aa)}$

$$x - z = \frac{zz + aa}{2z} - z = -\frac{zz - aa}{2z}$$; donde

$$\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = -\frac{dz}{z}$$, cujo integral he $-lz$.

Será pois $\int \frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = C - l[x - \sqrt{(xx - aa)}]$ $= C' + l[x + \sqrt{(xx - aa)}]$. O meſmo ſe acharia ſuppondo $\sqrt{(xx - aa)} = z - x$.

Podemos tambem neſte meſmo exemplo fazer $\sqrt{(xx - aa)}$ ou $\sqrt{[(x - a)(x + a)]} = (x - a)z$; donde quadrando, e dividindo depois por $x - a$, vem $x + a = (x - a)zz$, que dá $x = \frac{a + azz}{zz - 1}$;

logo $dx = \frac{-4azdz}{(zz - 1)^2}$, $\sqrt{(xx - aa)} = \frac{2az}{zz - 1}$, e por conſeguinte $\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = \frac{-2dz}{zz - 1}$.

Se a expreſſaõ for $dy \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)}$, que he o elemento ds da parabola, deſembaraçaremos primeiramente y^2, e teremos $ds =$

$\frac{2dy}{p}\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)}$. Fazendo pois $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)}=y+z$, que dá $dy=\frac{-dz}{2z^2}(\frac{1}{4}p^2+z^2)$, virá $ds=\frac{2ydy}{p}+\frac{2zdy}{p}=\frac{2ydy}{p}-\frac{dz}{pz}(z^2+\frac{1}{4}p^2)$; logo $s=\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{2p}-\frac{1}{4}plz=C-\frac{1}{8}p+\frac{y}{p}\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)}-\frac{1}{4}pl[-y+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)}]=C'+\frac{y}{p}\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)}+\frac{1}{4}pl[y+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)}]$.

144 Quando naõ houver ſenaõ hum radical quadrado, nem entrarem ſenaõ potencias pares da variavel, podemos igualar o radical a huma nova variavel, multiplicada pela variavel actual. Por exemplo em $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ poderiamos fazer $\sqrt{(aa-xx)}=xz$. E ainda que houveſſe hum ſegundo termo, poderia ſervir eſta transformaçaõ, fazendo logo deſaparece-lo, ao menos quando naõ houveſſe potencia alguma de x fóra do radical.

145

145 Em fim, querendo fazer huma expressaõ racional, podemos usar de tentativa, igualando a variavel, ou huma funçaõ qualquer della, a huma nova variavel ou a huma sua funçaõ, deixando nesta alguma quantidade indeterminada, que sirva para o fim que nos propomos.

Querendo, por exemplo, saber em que casos podemos fazer racional a quantidade $x^m dx\ (a + bx^n)^p$, supporemos $(a + bx^n)^p = z^q$, sendo q indeterminado, e teremos $x^m dx\ (a + bx^n)^p$,

$$= \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p}+q-1} dz \,.\left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1},$$ que

fazendo $q = p$ se reduz a racional, todas as vezes que $\frac{m+1}{n} - 1$ for numero inteiro negativo; porque se for numero inteiro positivo ou cifra, a expressaõ he integravel em qualquer valor de q. Se o valor de p for $\pm \frac{k}{2}$, sendo k hum numero inteiro impar, a expressaõ se reduzirá ao caso mencionado (143), fazendo $q = k$, se for $\frac{m+1}{n} = \pm \frac{k'}{2}$, sendo k' hum numero inteiro impar.

146 Naõ he preciso extender mais este genero de transformações; basta notar, que muitas vezes se facilitaõ certas integrações, igualando a variaria-

riavel a huma fracçaõ tal como $\frac{1}{z}$. Por exemplo, se nos dessem $\frac{x^{15}dx + adx}{x^{20} + x^{18}}$; fazendo $x = \frac{1}{z}$, teriamos $\frac{-z^{3}dz - az^{18}dz}{1 + zz}$, que por meio da divisaõ se reduziria a huma serie de monomios, e a huma quantidade da fórma $\frac{Adz}{1 + zz}$, cujo integral he actualmente conhecido.

Da integraçaõ das quantidades exponenciais e logarithmicas.

147 A Regra geral, que se póde dar sobre a integraçaõ das quantidades exponenciais consiste em tentar resolve-las em dous factores, dos quais hum seja a differencial do logarithmo do outro, ou huma parte constante della (28); porque entaõ para integrar naõ ha mais que dividir pela differencial do logarithmo do segundo factor.

Assim vemos que $x^{y}\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)$ he integravel, porque o factor $dylx + \frac{ydx}{x}$ he a differencial de ylx, que he o logarithmo de x^{y}; teremos pois $\int x^{y}\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right) = \frac{x^{y}\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)}{\frac{d(lx^{y})}{x^{y}}} =$

$x^3 + C$. Do mesmo modo $e^{ax}dx$ he integravel, porque dx he a differencial do logarithmo de e^{ax}, dividida por huma constante; logo teremos $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}dx}{adxle} = \frac{e^{ax}}{ale}$. Se e for o numero cujo logarithmo $= 1$, a regra se reduz a dividir a differencial proposta pela differencial do expoente de e.

Se tivermos para integrar $x^m e^{ax}dx$, podemos faze-lo quando m he numero inteiro positivo, suppondo $\int x^m e^{ax}dx = e^{ax}(Ax^m + Bx^{m-1} + Ex^{m-2} + \ldots + k)$. Seja proposta, por exemplo, a quantidade $x^2 e^{ax}dx$; faremos $\int x^2 e^{ax}dx = e^{ax}(Ax^2 + Bx + E)$, o que, differenciando e dividindo por $a^{ax}dx$, dá

$$x^2 = \left\{\begin{array}{c} Aale.x^2 + Bale.x + Eale \\ + 2Ax + B \end{array}\right\};$$

logo $A = \frac{1}{ale}$, $B = \frac{-2}{a^2l^2e}$, $E = \frac{2}{a^3l^3e}$, e consequintemente $\int x^2 e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{ale} - \frac{2x}{a^2l^2e} + \frac{2}{a^3l^3e}\right) + C$. Se for $le = 1$, será $\int x^2 e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C$.

Em geral: Como integrando por partes temos

$$\int x^m e^{ax}dx = \frac{x^m e^{ax}}{ale} - \frac{m}{ale}\int x^{m-1} e^{ax}dx,$$

$$\int x^{m-1}e^{ax}dx = \frac{x^{m-1}e^{ax}}{ale} - \frac{m-1}{ale}\int x^{m-2}e^{ax}dx,$$

e assim por diante ; será

$$\int x^m e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{ale}\left(x^m - \frac{m}{ale}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^2 l^2 e}x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{a^3 l^3 e}x^{m-3} + \&c.\right)$$

Se $m = -1$, isto he, se a expressaõ for $\frac{e^{ax}dx}{x}$, reduziremos e^{ax} em serie, e integraremos termo por termo.

Na integraçaõ de muitas quantidades, principalmente das que contém logarithmos, podemos usar com vantagem do numero e, cujo logarithmo he 1. Por exemplo, se tivermos para integrar $x^n dx l^m x$, faremos $lx = z = zle$, o que dá $x = e^z$, $dx = e^z dz$; e conseguintemente $x^n dx l^m x = z^m e^{(n+1)z} dz$, que se integra nos mesmos casos que a precedente, e do mesmo modo. Se $m = -1$, será $\int \frac{e^{(n+1)z}dz}{z} = \int \frac{dz}{z}\left(1 + (n+1)z + \frac{(n+1)^2 z^2}{2} + \frac{(n+1)^3 z^3}{2 \cdot 3} + \&c.\right) = C + lz + (n+1)z + \frac{(n+1)^2 z^2}{2 \cdot 2} + \frac{(n+1)^3 z^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \&c$; logo $\int \frac{x^n dx}{lx} = C + l \,.\, lx + (n+1)\, lx + \frac{(n+1)^2 l^2 x}{2 \cdot 2} + \frac{(n+1)^3 l^3 x}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \&c$, que no caso do de $n=0$ dá $\int \frac{dx}{lx}$, de huma differencial apparentemente taõ ſimples, igual á ſerie infinita $C + l.lx + lx + \frac{l^2x}{2.2} + \frac{l^3x}{2.3.3} +$ &c; e no caſo de $n=-1$ dá $\int \frac{dx}{xlx} = C + l.lx$, como ſe ſabe (27) independentemente da ſerie.

Da integraçaõ das quantidades de duas, ou mais variaveis.

148 SE nos lembrarmos da regra dada para differenciar as quantidades de muitas variaveis, facilmente veremos, que para integrar as differenciais de muitas variaveis (quando iſſo he poſſivel), devemos ajuntar todos os termos affectos da differencial de huma meſma variavel, e integra-los como ſe todas as outras variaveis foſſem conſtantes. Entaõ ſe eſte integral ſe differenciar fazendo variar ſucceſſivamente todas as variaveis, e o reſultado ſe tirar da differencial propoſta, o integral achado ſerá (ajuntando-lhe huma conſtante) o integral verdadeiro, ſe naõ houver reſto. Porém ſe o houver, nelle naõ entrará a variavel a reſpeito da qual ſe fez a integraçaõ; praticar-ſe-ha pois no meſmo reſto de hum modo analogo ao precedente, e aſſim por diante em ordem a cada huma das variaveis.

Por exemplo, ſe for dada a quantidade $3x^2ydx$ +

$+ x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$, tomaremos os dous termos affectos de dx, a saber $3x^2ydx + y^5dx$, e integrando-os como se y fosse constante, teremos $x^3y + y^5x$. E como a differencial desta quantidade, tomada em ordem a x e y, sendo tirada da differencial proposta naõ dá resto algum, concluiremos que o integral he $x^3y + y^5x + C$.

Se tivermos $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$; ajuntando todos os termos affectos de dx, e integrando na supposiçaõ de y e z serem constantes, acharemos $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Porém como subtrahindo da quantidade proposta a differencial da quantidade achada, tomada em ordem a x, y e z, apparece y^2dy, ajuntaremos o integral $\frac{y^3}{3}$ deste resto ao que ja se achou, e teremos o integral total $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$.

149 Como nem sempre he possivel integrar todas as differenciais de muitas variaveis, será conveniente que mostremos o caracter, porque se distingue quando a integraçaõ he possivel.

150 Para isso deve-se notar, que se em qualquer funçaõ Q de duas quantidades x e y substituirmos primeiramente, em lugar de x, huma quantidade qualquer p; e no resultado substituirmos em lugar de y huma quantidade q, virá o mesmo que te-

teriamos, ſe houveſſemos ſubſtituido primeiramente q em lugar de y, e depois p em lugar de x; iſto he evidente.

151 Donde ſe ſegue que ſe differenciarmos huma funçaõ qualquer $\mathcal{Q}$ de x e y, tomando primeiramente ſó a x como variavel, e depois differenciarmos o reſultado, conſiderando ſó a y como variavel, teremos o meſmo que achariamos, ſe principiaſſemos por differenciar ſómente em ordem a y, e differenciaſſemos depois o reſultado em ordem a x ſómente.

Com effeito, ſupponhamos que ſubſtituindo primeiramente $x + dx$ em lugar de x, $\mathcal{Q}$ ſe muda em $\mathcal{Q}'$; ſerá $\mathcal{Q}' - \mathcal{Q}$ a differencial. Supponhamos que pondo neſta $y + dy$ em lugar de y, $\mathcal{Q}'$ ſe muda em $\mathcal{Q}''$, e $\mathcal{Q}$ em $\mathcal{Q}'''$, de maneira que $\mathcal{Q}' - \mathcal{Q}$ ſe torne em $\mathcal{Q}'' - \mathcal{Q}'''$; ſerá $\mathcal{Q}'' - \mathcal{Q}''' - \mathcal{Q}' + \mathcal{Q}$ a ſegunda differencial.

Paſſando agora a fazer as ſubſtituições em ſentido contrario, como pela ſubſtituiçaõ de $y + dy$ em lugar de y, $\mathcal{Q}$ ſe torna em $\mathcal{Q}'''$, ſerá $\mathcal{Q}''' - \mathcal{Q}$ a primeira differencial na ſuppoſiçaõ de y variavel. Se neſta quantidade puzermos $x + dx$ em lugar de x, $\mathcal{Q}$ ſe mudará em $\mathcal{Q}'$ como acima; e $\mathcal{Q}'''$ (150) ſe tornará em $\mathcal{Q}''$, de maneira que $\mathcal{Q}''' - \mathcal{Q}$ ſe tornará em $\mathcal{Q}'' - \mathcal{Q}'$; logo a ſegunda differencial ſerá $\mathcal{Q}'' - \mathcal{Q}' - \mathcal{Q}''' + \mathcal{Q}$, identicamente a meſma que a de cima.

Iſto

Isto posto adoptaremos a notaçaõ seguinte. Seja A huma funçaõ de x e y; representaremos por $\frac{dA}{dy}dy$ a differencial de A tomada fazendo variar y, e por $\frac{dA}{dx}dx$ a de A tomada fazendo variar x. Da mesma sore $\frac{ddA}{dxdy}.dxdy$ indicará que primeiramente se faz a differenciaçaõ de A, suppondo só x variavel, e que depois se differenceia o resultado fazendo variar sómente y.

152 Seja agora $Adx + Bdy$ huma differencial exacta, e M o seu integral; teremos $\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy = Adx + Bdy$; logo $\frac{dM}{dx} = A$, e $\frac{dM}{dy} = B$; como tambem $\frac{ddM}{dxdy}dy = \frac{dA}{dy}dy$, e $\frac{ddM}{dydx}dx = \frac{dB}{dx}dx$, ou $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{dA}{dy}$, e $\frac{ddM}{dydx} = \frac{dB}{dx}$; mas demonstrámos (151) que $\frac{ddM}{dxdy}dxdy = \frac{ddM}{dydx}dydx$; logo $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{ddM}{dydx}$; logo tambem $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; quer dizer,

que

que *se* Adx + Bdy *he huma differencial completa, a differencial de* A, *tomada fazendo variar sómente* x, *e dividida por* dy, *deve ser igual á differencial de* B, *tomada fazendo variar só* y, *e dividida por* dx.

Assim $\frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$ he huma differencial completa, porque $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$; e com effeito o primeiro membro reduz-se a $\frac{y^2dy}{dy}$, e o segundo a $\frac{y^2dx}{dx}$: logo integrando (148) acharemos $\frac{1}{3}y^3x + C$. Pelo contrario $xydx + 2xdy$ naõ he integravel, porque $\frac{d(xy)}{dy}$ naõ he igual a $\frac{d(2x)}{dx}$.

Do mesmo modo a differencial $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ he exacta, porque $\frac{d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)}{dx}$, ou $\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$; com effeito a quantidade proposta he a differencial de *Arc. tang* $\frac{x}{y}$.

Fa-

Fazendo o mesmo exame na expressaõ $\frac{ae^x dx}{\sqrt{(a^2+y^2)}} - \frac{ae^x ydy}{\sqrt{(a^2+y^2)^3}}$, conheceremos que he huma differencial exacta; cujo integral será $\frac{ae^x}{\sqrt{(a^2+y^2)}} + C$.

153 Se na differencial proposta entrarem tres variaveis, isto he se a differencial constar de tres termos ou tiver a fórma $Adx + Bdy + Cdz$, para que seja completa, ou para que possa integrar-se, devem ter lugar estas condições $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Com effeito podemos considerar successivamente z, y e x como constantes, e a differencial que entaõ naõ tem mais que dous termos (porque esta supposiçaõ dá $dz = 0$, ou $dy = 0$, ou $dx = 0$) ha-de ser huma differencial completa, se a proposta o for; logo deve ter em cada caso as condições das differenciaes completas de duas variaveis.

Geralmente, em huma differencial completa de hum numero qualquer de variaveis haverá tantas equações identicas, a que se dá o nome de *equações de condiçaõ*, quantas forem as combinações duas a duas, que admittirem os termos da differencial proposta.

154 ADVERTENCIA. Seja Q huma funçaõ desconhecida de x, y e constantes, e supponhamos que he conhecida a sua differencial Adx tomada na supposiçaõ de ser y constante. Se quizermos ter a differencial total de Q, supporemos que ella he $Adx + Bdy$; entaõ B deve ser tal que tenhamos $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; logo $dB = \frac{dA}{dy}\, dx$. Integremos considerando x só como variavel, porque em B tambem fizemos variar sómente x; teremos $B = \int \frac{dA}{dy}\, dx$, e por conseguinte $Bdy = dy \int \frac{dA}{dy}\, dx$. Mas pela hypothese temos $Q = \int Adx$, fazendo-se a integraçaõ considerando sómente x como variavel; logo a differencial completa de Q ou de $\int Adx$ he $Adx + dy \int \frac{dA}{dy}\, dx$, onde a integraçaõ $\int \frac{dA}{dy}\, dx$ deve fazer-se, tomando y como constante.

Das Equações differenciais.

155 QUando a equaçaõ differencial proposta naõ contém mais que duas variaveis x e y; se ella estiver *separada*, isto he se os x e dx estiverem em hum só membro, e os y e dy no outro, a inte-

tegraçaõ ſe reduz a fazer uſo em cada membro das regras que havemos dado para as differenciais de huma ſó variavel.

Aſſim a equaçaõ geral de dous termos $ax^m y^n dx = by^q x^r dy$, na qual podemos ſeparar immediatamente as indeterminadas dividindo por $y^n x^r$, reduz-ſe a $ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$, cujo integral he

$$\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C.$$

156 Porém como acontece muitas vezes, que hum dos dous membros da equaçaõ differencial ſeparada, ou ambos elles naõ ſejaõ integraveis algebricamente, e com tudo a equaçaõ poſſa ſer algebrica, ou ao menos reduzir-ſe a huma fórma tal; ſerá conveniente, que examinemos os caſos que ſe encontraõ mais frequentemente.

I Se na equaçaõ antecedente for $m - r = -1$, e $q - n = -1$, teremos $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$, cujo integral naõ ſe acha para cada membro ſenaõ por meio dos logarithmos; de ſorte que vem $alx = bly + lC$, ſuppondo livremente, como he licito, que a conſtante he hum logarithmo. Porém eſta equaçaõ póde fazer-ſe algebrica, eſcrevendo-ſe deſte modo $lx^a = ly^b + lC$, ou deſte $lx^a = lCy^b$; porque como ſendo os dous logarithmos iguais, as quantidades reſpectivas devem ſer iguais, teremos $x^a = y^b$, que he huma equaçaõ algebrica.

157 II Se for sómente $q - n = -1$, a equaçaõ se reduzirá a $ax^{m-r}dx = \frac{bdy}{y}$, cujo integral he $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = bly + lC$. Porém podemos dar huma fórma algebrica a esta equaçaõ, multiplicando o primeiro membro por le, sendo e (114) o numero cujo logarithmo he 1, o que naõ altera a equaçaõ. Teremos pois $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} le = bly + lC$, ou fazendo $m - r + 1 = p$, $le^{\frac{ax^p}{p}} = lCy^b$; logo $e^{\frac{ax^p}{p}} = Cy^b$.

158 III Se a equaçaõ for $ndx = \frac{dz}{\surd(1-zz)}$; como o segundo membro exprime o elemento de hum arco de circulo, cujo seno he z, e o raio 1, será z o seno de $\int \frac{dz}{\surd(1-zz)}$, isto he, de $\int ndx$ ou de $nx + C$; logo o integral será $z = sen\,(nx + C)$.

Do mesmo modo da equaçaõ $ndx = \frac{-dz}{\surd(1-zz)}$ concluiremos $z = cos\,(nx + C)$.

159 A equaçaõ $ndx = \frac{dz}{1+zz}$ tambem dá $z = tang\,(nx + C)$. Porém se tivermos $ndx =$

$\frac{bdz}{a+fzz}$, para a reduzir á fórma da precedente faremos $z\sqrt{f} = u\sqrt{a}$, e virá $ndx = b\sqrt{\frac{1}{af}} \cdot \frac{du}{1+uu}$, iſto he $\frac{du}{1+uu} = \frac{n\sqrt{af}}{b}dx$, que dá $u = tang\left(\frac{n\sqrt{af}}{b}x + C\right)$; logo $z = \sqrt{\frac{a}{f}} \cdot tang\left(\frac{n\sqrt{af}}{b}x + C\right)$.

160 Note-ſe que nas expreſsões achadas $ſen\,(nx + C)$, $tang\,(nx + C)$ &c, $nx + C$ exprime o comprimento abſoluto do arco em partes do raio 1. Porem como he mais commodo uſar antes do numero dos gráos, devemos reduzir os arcos a gráos, o que he facil dividindo-os pelo numero de partes do raio de que conſta hum gráo, iſto he por 0,0174533, ou (que vem a ſer o meſmo) multiplicando-os por 57,2957795. Aſſim o ſeno do arco que tem o comprimento b, ou o ſeno do arco que tem o numero de gráos expreſſo por $b \times 57{,}2957795$, vem a ſer a meſma couſa.

161 IV Na equaçaõ $\frac{ndx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ em que ambos os membros exprimem os elementos de dous arcos, cuja razaõ he a de $1 : n$, e cujos ſenos ſaõ x e y, faremos $\sqrt{(1-xx)} = x\sqrt{-1} - z$, $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - t$, e virá a transfor-

formada racional $\frac{ndz}{z} = \frac{dt}{t}$, cujo integral (156) he $Ct = z^n$; logo $C[y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}]^n$.

Querendo fazer uſo deſta equaçaõ, que exprime geralmente a relaçaõ dos ſenos x e y de dous arcos multiplos hum do outro, devemos determinar antes diſſo a conſtante. Supponhamos como he licito, que os dous arcos tem a meſma origem; entaõ ſerá ao meſmo tempo $x = 0$, e $y = 0$; e por conſeguinte $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, ou $-C = \pm 1$, conforme n for par ou impar; logo $\mp[y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}]^n$, ſervindo o ſinal ſuperior para n par, e o inferior para n impar.

Em cada hum dos caſos particulares ſempre poderemos fazer deſapparecer as quantidades imaginarias; o meio porém mais ſimples de o conſeguir he igualar a nada a ſoma das quantidades reais, depois de haver tranſpoſto tudo para hum ſó membro; entaõ veremos, que a equaçaõ que reſtar ſerá diviſivel por $\sqrt{-1}$, e a meſma que ſe tiver formado, igualando a nada a ſoma das quantidades reais. Seja, por exemplo, $n = 2$; teremos $-y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-yy)} = -xx - 2x\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{(1-xx)} + 1 - xx$, ou $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 + 2x\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$. Igualando pois a nada a ſoma das quantidades reais, virá

$\sqrt{(1-yy)}+2xx-1=0$; e a equaçaõ total ſe reduzirá a $2x\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{(1-xx)}-y\sqrt{-1}=0$, que ſendo dividida por $\sqrt{-1}$ dá $y=2x\sqrt{(1-xx)}$ (Trig. 38), a meſma que a outra $\sqrt{(1-yy)}+2xx-1=0$, como ſe póde ver elevando ambas ao quadrado.

Do meſmo modo ſe podem achar os coſenos e as tangentes dos arcos multiplos. Quanto a eſtas ultimas integraremos $\frac{ndx}{1+xx}=\frac{dy}{1+yy}$, reſolvendo $1+xx$ em $(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1})$, e $1+yy$ em $(1+y\sqrt{-1})(1-y\sqrt{-1})$, e praticando depois conforme ſe enſinou nas fracções racionais (133 e 135).

162 Para moſtrarmos incidentemente hum modo util de exprimir o ſeno, o coſeno, e a tangente de hum arco, integremos a equaçaõ $dx=\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, que exprime a relaçaõ entre hum arco x e o ſeu ſeno y. Se fizermos $\sqrt{(1-yy)}=y\sqrt{-1}-z$, virá $\frac{dz}{z}=-dx\sqrt{-1}$, cujo integral he $lz=-x\sqrt{-1}+lC$, ou $lz=-x\sqrt{-1}\,le+lC$, que dá z ou $y\sqrt{-1}-\sqrt{(1-yy)}=Ce^{-x\sqrt{-1}}$. Quanto á determinaçaõ da conſtante, como ao arco $x=0$ correſponde o ſeu ſeno $y=0$,

$y = 0$, teremos $-\sqrt{1} = C$; logo $y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)} = -e^{-x\sqrt{-1}}$, e por conſeguinte $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$. Quadrando pois e reduzindo, teremos $y = \dfrac{1 - e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\,.\,e^{-x\sqrt{-1}}} =$

$\dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, iſto he *ſen* $x =$

$\dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Se no ſegundo membro da equaçaõ $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$ puzermos em lugar de y o ſeu valor achado, teremos $\sqrt{(1-yy)}$, iſto he, *coſ* $x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$; e por conſeguinte

$\dfrac{ſen\ x}{coſ\ x}$ ou *tang* $x = \dfrac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \dfrac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}$.

Voltemos á integraçaõ das equações.

163 Temos viſto que huma equaçaõ differencial propoſta, repreſentada geralmente por $Adx + Bdy = 0$, he integravel, todas as vezes que A for funçaõ ſó de x ou de y, e o meſmo aconteçer a B. Quando aſſim naõ for, iſto he quando as indeterminadas naõ eſtiverem ſeparadas, antes de tentar o reduzillas a eſſe eſtado, devemos examinar ſe acaſo a equaçaõ ſerá integravel na fórma em que ſe acha, iſto he, examinaremos (152) ſe $\dfrac{dA}{dy} = \dfrac{dB}{dx}$. Quando eſta equaçaõ tiver lugar, integraremos como fica dito (148).

164

164 Póde porém acontecer que esta condiçaõ naõ tenha lugar, e sem embargo a equaçaõ seja integravel; mas para isso será necessario multiplicalla por hum factor conveniente, funçaõ de x, y e constantes, o que naõ muda a igualdade.

Seja P este factor; será $APdx + BPdy = 0$ huma differencial completa; logo $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. Assim toda a questaõ se reduz a achar para P huma funçaõ de x e y, que satisfaça a esta equaçaõ. Porém como esta indagaçaõ requer hum exame muito extenso, naõ trataremos de achar P, senaõ no caso de elle incluir sómente x e constantes, ou sómente y e constantes.

Supponhamos pois que P deve ser funçaõ de x; teremos simplesmente $P\frac{dA}{dy} = B\frac{dP}{dx} + P\frac{dB}{dx}$, donde se tira $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)}{B}dx$; logo com facilidade acharemos P, se $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$ se reduzir a huma funçaõ de x, como deve ser necessariamente, para que P seja huma funçaõ de x sómente conforme a supposiçaõ.

Poderiamos tambem achar o factor, no caso de elle ser huma funçaõ de x, multiplicada ou dividida por huma funçaõ de y de huma fórma conhecida.

165 Por este meio podemos integrar geralmente qualquer equaçaõ da seguinte fórma $Xy^q dy + X'y^{q+1}dx + X''y^r dx = 0$, sendo X, X', X'' quaisquer funções de x; q e r quaisquer expoentes.

Poderiamos procurar se ella se faz integravel, multiplicando-a por hum factor da fórma Py^n, sendo P huma funçaõ de x, e n hum expoente indeterminado; e achariamos que isso he possivel, suppondo $n = -r$. Porém he mais simples reduzir immediatamente a equaçaõ á fórma

$$y^{q-r}dy + Fy^{q-r+1}dx + F'dx = 0,$$

dividindo por Xy^r, e representando por F e F' os quocientes $\frac{X'}{X}$ e $\frac{X''}{X}$. Entaõ para integrar esta, supponhamos que P, funçaõ de x, he o factor conveniente; teremos

$$Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx + F'Pdx = 0.$$

Como $F'P$ he huma funçaõ de x, $\int F'Pdx$ se reduzirá á integraçaõ das quantidades de huma só variavel; e assim naõ ha necessidade senaõ de fazer $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx$ huma differencial completa, para o que se requer que $\frac{d(Py^{q-r})}{dx}$ $= \frac{d(FPy^{q-r+1})}{dy}$; isto he, que $y^{q-r}\frac{dP}{dx} =$

(q —

$(q-r+1)y^{q-r}FP$, donde ſe tira $\frac{dP}{P} = (q-r+1)\,Fdx$; e integrando, $lP = \int(q-r+1)\,Fdx$; logo $P = e^{\int(q-r+1)\,Fdx}$. Subſtituindo pois eſte valor de P na equaçaõ $Py^{q-r}dy + \&c$, e integrando teremos

$$\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}e^{\int(q-r+1)\,Fdx} + \int F'dx\,e^{\int(q-r+1)Fdx} + C = 0.$$

Naõ ajuntámos conſtante na integraçaõ que deu P, porque naõ havendo condiçaõ alguma para a determinar, fica livre o ſuppolla nulla.

Exemplo. Se tivermos para integrar $dy + \frac{aydx}{x} + (bx^2 + cx + f)\,dx = 0$; multiplicando pelo factor P, virá

$$Pdy + \frac{ayPdx}{x} + P\,(bx^2 + cx + f)\,dx = 0,$$

Deve pois ſer $\frac{dP}{dx} = \frac{d\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x}$; logo $\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$, que dá $lP = alx$, iſto he $P = x^a$. Aſſim a equaçaõ ſe muda em

$$x^a dy + ax^{a-1}ydx + bx^{a+2}dx + cx^{a+1}dx + fx^a dx,$$

cujo integral he $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = 0$.

166

166 A equaçaõ geral que acabamos de integrar, encontra-ſe muitas vezes; e o methodo, de que nos havemos ſervido, póde applicar-ſe a outros muitos caſos.

Se tivermos, por exemplo, as duas equações *

$$dx + ady + (bx + cy)\,Tdt = 0,$$

$$kdx + a'dy + (b'x + c'y)\,Tdt = 0,$$

ſendo x, y e t tres variaveis; a, b, c, a' &c. conſtantes, e T huma funçaõ qualquer de t; poderemos integrallas pelo methodo expoſto, praticando da maneira ſeguinte.

Multiplique-ſe huma dellas, v. g. a primeira, por hum coefficiente conſtante e indeterminado g, e ajuntando o producto com a ſegunda, multiplique-ſe a totalidade por hum factor P, que ſe ſuppõe ſer funçaõ de t; teremos

$$(gP + kP)\,dx + (gaP + a'P)\,dy + \left[(gbP + b'P)\,x + (gcP + c'P)\,y\right]Tdt = 0$$

Suppondo agora que eſta equaçaõ he huma differencial completa, deve ſer (153)

$$1^{\circ}\ \frac{d(gP + kP)}{dt} = \frac{d\left[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y\right]}{dx}\,T;$$

$$2^{\circ}\ \frac{d\,(gaP + a'P)}{dt} = \frac{d\left[(gbP + b'P)\,x + (gcP + c'P)y\right]}{dy}\,T;$$

$$3^{\circ}\ \frac{d\,(gP + kP)}{dy} = \frac{d\,(gaP + a'P)}{dx}.$$

Mas

* Veja-ſe nas *Mem. Acad. de Berlin ann.* 1748 o methodo que Mr. d' Alembert deu para integrar eſtas equações.

Mas esta ultima equaçaõ tem lugar, porque se reduz a $0 = 0$ conforme a supposiçaõ de P ser funçaõ de t. Quanto ás outras duas, ellas daõ $(g+k)\frac{dP}{dt} = (gb+b')PT$, e $(ga+a')\frac{dP}{dt} = (gc+c')PT$; donde se tira $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, e $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'}Tdt$; logo igualando estes dous valores de $\frac{dP}{P}$, teremos $\frac{gb+b'}{g+k} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$; equaçaõ que dará dous valores para g, por quanto he do segundo gráo.

Agora sendo conhecido g, com facilidade acharemos P por meio da equaçaõ $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, que dá $P = e^{\int \frac{gb+b'}{g+b}Tdt}$. E como a equaçaõ $(gP+kP)dx +$ &c. he actualmente huma differencial exacta, se a integrarmos, teremos $(gP+kP)x + (gaP+a'P)y + C = 0$. Seja g o primeiro valor de g deduzido da equaçaõ do segundo gráo, g' o segundo valor, e P' o valor de P quando nelle se substitue g' em lugar de g; teremos tambem $(g'P'+kP')x + (g'aP' + a'P')y$

$a'P')y + C' = 0$, porque naõ ha razaõ para nos ſervirmos de hum valor de g com preferencia ao outro. Logo por meio deſtas duas equações deduziremos facilmente os valores de x e y, que viráõ expreſſos em t e em conſtantes.

Se a funçaõ T de t, que entra nas duas equações, for differente em ambas ellas, ſeguiremos o meſmo methodo, conſiderando porém g como funçaõ de t; e a integraçaõ ſe reduzirá á de huma equaçaõ a duas variaveis ſómente g e t.

Se tiveſſemos tres equações a quatro variaveis x, y, z e t, deſta fórma $adx + bdy + cdz + (ex + fy + ht)Tdt = 0$, ſendo a funçaõ T a meſma em todas; integrariamos do meſmo modo, multiplicando a ſegunda e a terceira por quantidades conſtantes e indeterminadas g e g': depois ajuntando os dous productos com a primeira, multiplicariamos a ſoma por hum factor P, funçaõ de t ſómente. Suppondo entaõ que eſta nova equaçaõ era huma differencial exacta, achariamos (153) as equações que devem determinar g, g' e P. A equaçaõ que determinar g, ou a que determinar g', ſerá do terceiro gráo; teremos pois tres valores para g, tres correſpondentes para g', e tres correſpondentes para P; o que dará, mudando a conſtante para cada valor de g, tres integrais, por meio dos quais com facilidade ſe determinaráõ x, y e z em t.

Bem ſe vê agora o que ſe deve fazer quando hou-

houver maior numero de variaveis, com tanto que as equações tenhaõ a mesma fórma que as precedentes. O methodo naõ variaria, ainda que nellas houvesse hum ou muitos termos expressos puramente em t, dt e constantes.

167 Se porém for dado em geral hum numero qualquer m de equações, em que entrem $m+1$ variaveis combinadas entre si de qualquer maneira; multiplicaremos a segunda, terceira, &c até a ultima, respectivamente por g, g', g'', &c funções indeterminadas das variaveis; entaõ havendo ajuntado os productos com a primeira, e multiplicado a soma por hum factor P, funçaõ tambem das mesmas variaveis, supporemos que a equaçaõ total he huma differencial completa.

Sejaõ dadas, por exemplo, as duas equações $Adx + Bdy + Cdz = 0$, $A'dx + B'dy + C'dz = 0$.

Formando, como se acaba de ensinar, a equaçaõ

$$P(A+A'g)dx + P(B+B'g)dy + P(C+C'g)dz = 0;$$

será necessario, para que esta seja differencial completa, que

$$\frac{d[P(A+A'g)]}{dy} = \frac{d[P(B+B'g)]}{dx};$$

$$\frac{d[P(A+A'g)]}{dz} = \frac{d[P(C+C'g)]}{dx};$$

$$\frac{d[P(B+B'g)]}{dz} = \frac{d[P(C+C'g)]}{dy}:$$

isto

isto he,

$$\frac{dP}{dy}(A+A'g)+P\frac{d(A+A'g)}{dy}=$$

$$\frac{dP}{dx}(B+B'g)+P\frac{d(B+B'g)}{dx};$$

$$\frac{dP}{dz}(A+A'g)+P\frac{d(A+A'g)}{dz}=$$

$$\frac{dP}{dx}(C+C'g)+P\frac{d(C+C'g)}{dx};$$

$$\frac{dP}{dz}(B+B'g)+P\frac{d(B+B'g)}{dz}=$$

$$\frac{dP}{dy}(C+C'g)+P\frac{d(C+C'g)}{dy}.$$

Se por meio das duas ultimas equações tirarmos os valores de $\frac{dP}{dx}$ e de $\frac{dP}{dy}$, e os substituirmos na primeira, teremos

$$(C+C'g)\left[\frac{d(A+A'g)}{dy}-\frac{d(B+B'g)}{dx}\right]+$$

$$(A+A'g)\left[\frac{d(B+B'g)}{dz}-\frac{d(C+C'g)}{dy}\right]+$$

$$(B+B'g)\left[\frac{d(C+C'g)}{dx}-\frac{d(A+A'g)}{dz}\right]=0,$$

equaçaõ independente de P. Buscaremos pois para g huma funçaõ de x, y, e z, a mais geral que for pos-

possivel, e que possa satisfazer a esta equaçaõ. Depois de ter achado g, buscaremos para P huma funçaõ de x, y e z, que satisfaça a duas quaisquer das tres equações de cima; o que na verdade muitas vezes requer grandes indagações, mas ao menos naõ envolve impossibilidade.

Advirta-se, que se naõ tivessemos mais que huma equaçaõ, isto he, se fosse $A'=0$, $B'=0$, $C'=0$, a ultima equaçaõ achada se reduziria a $C\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)+A\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)+B\left(\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}\right)=0$; equaçaõ de condiçaõ, que mostra a relaçaõ que deve haver entre os coefficientes A, B, C, para que seja integravel huma equaçaõ differencial de tres variaveis $Adx+Bdy+Cdz=0$, ainda no caso de se multiplicar por hum factor. Feita esta averigoaçaõ, ou preenchendo-se a condiçaõ $C\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)+\&c=0$, determinaremos o factor P de modo que satisfaça a duas das tres equações $\frac{d(AP)}{dy}=\frac{d(BP)}{dx}$, $\frac{d(AP)}{dz}=\frac{d(CP)}{dx}$, $\frac{d(BP)}{dz}=\frac{d(CP)}{dy}$.

Daqui se vê o que devemos fazer, quando for maior o numero das equações e das variaveis. Pelo mesmo meio poderemos achar, em que equa-

ções

ções basta que g seja huma constante, ou huma funçaõ de huma ou de duas &c variaveis.

168 Quando a equaçaõ differencial proposta naõ se comprehende nos casos de que havemos tratado até aqui, devemos ver se será possivel o separar as variaveis. Para isso algumas vezes basta unicamente a applicaçaõ das regras ordinarias da Algebra; outras vezes saõ necessarias as transformações: em muitas equações porém ignora-se qual seja a transformaçaõ conveniente.

A equaçaõ $ax^n dx + by^q x^n dx = y^k dy\,(e + fx^h)^r$ separa-se immediatamente pela divisaõ, porque he o mesmo que $(a + by^q)\,x^n dx = y^k dy\,(e + fx^h)^r$, e esta vem a ser $\frac{x^n dx}{(e + fx^h)^r} = \frac{y^k dy}{a + by^q}$, cuja integraçaõ depende da integraçaõ das quantidades binomias de huma só variavel. Em geral, na equaçaõ $Adx + Bdy = 0$, se for $A = XY$, e $B = X'Y'$, sendo X e X' funções de x, e Y e Y' funções de y, teremos a equaçaõ separada $\frac{Xdx}{X'} = -\frac{Ydy}{Y'}$.

Porém se tivessemos $gxdx = ax^4 ydy + 2abx^2y^3dy + abby^5dy$, que se póde escrever assim $gxdx = (x^2 + by^2)^2\,aydy$, vê-se que a separaçaõ terá lugar, se fizermos $x^2 + by^2 = z$; porque com effeito teremos $x^2 = z - by^2$, $xdx = \frac{1}{2}dz - bydy$, e por conseguinte $\frac{1}{2}gdz - bgydy = azzydy$, donde se ſe tira $\frac{\frac{1}{2}gdz}{bg+azz}=ydy$, equaçaõ ſeparada e facil de integrar.

Como naõ podemos dar regras gerais ſobre as transformações, trataremos ſómente de alguñs caſos, em que ſe conſegue a ſeparaçaõ.

169 Em geral, ſaõ ſeparaveis todas as equações homogeneas de duas variaveis, iſto he aquellas, em que a ſoma de dimensões das duas variaveis x e y he a meſma em todos os termos; e para iſſo naõ ha mais que fazer $\frac{y}{x}=z$.

Com effeito, ſe dividirmos huma equaçaõ homogenea $Adx+Bdy=0$ por huma potencia de x, cujo expoente ſeja igual ao numero de dimensões da equaçaõ, eſtá claro que em A e B naõ haverá mais que potencias de $\frac{y}{x}$ e conſtantes; de maneira que a equaçaõ ſerá $Fdx+F'dy=0$, ſendo F e F' funções de $\frac{y}{x}$ e de conſtantes. Iſto poſto, como $d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{xx}$, que dá $dx=\frac{-xx}{y}d\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x}{y}dy$; ſe fizermos $\frac{y}{x}=z$, teremos $dx=\frac{-ydz}{zz}+\frac{dy}{z}$; logo ſubſtituindo, a equaçaõ ſe mudará em $-\frac{Fydz}{zz}+$

Fdy

$\frac{Fdy}{z} + F'dy = 0$, iſto he em $-ydz + zdy + Zdy = 0$, ſendo Z huma funçaõ de z; logo teremos $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{Z+z}$, equaçaõ ſeparada.

Exemplo. Se tivermos a equaçaõ homogenea $y^3dx + y^2xdy + bx^3dy = 0$, que ſe póde reduzir á fórma $\frac{y^3}{x^3}dx + \frac{y^2}{x^2}dy + bdy = 0$, dividindo por x^3, porque 3 he o numero de dimensões da equaçaõ; faremos $\frac{y}{x} = z$, que dá $x = \frac{y}{z}$, $dx = \frac{zdy - ydz}{zz}$; e virá $z^2dy - yzdz + z^2dy + bdy = 0$; logo $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{2z^2 + b}$. Agora o integral deſta he $y^4 = C^4(2z^2 + b)$; e por conſeguinte $y^4 = C^4\left(\frac{2y^2}{x^2} + b\right)$.

170 Seria pois muito vantajoſo o poder fazer as equações homogeneas. Porém como para iſſo naõ ha methodo geral, devemos recorrer ás transformações. As que podem dar alguma eſperança, conſiſtem em igualar huma das variaveis, ou huma funçaõ da meſma e tambem de ambas, a huma funçaõ de huma nova variavel com expoentes indeterminados, os quais ſe determinaõ depois pela condiçaõ que ſeja homogenea a equaçaõ transformada.

Exemplo. Se quizermos achar os caſos, em que póde ſer homogenea a equaçaõ geral de tres termos $ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = 0$, faremos $x = z^h$, e virá a transformada $ahz^{mh+h-1}dz + by^n z^{qh} dy + cy^k dy = 0$, a qual ſerá homogenea quando $k = qh + n$, e $k = mh + h - 1$; logo $h = \dfrac{n+1}{m-q+1}$ e $k = \dfrac{mn+q+n}{m-q+1}$. Logo ſe os expoentes k, q, m e n forem tais, que eſta ultima equaçaõ tenha lugar, poderemos fazer a equaçaõ homogenea, e conſeguintemente ſeparar.

171 Em geral, na falta de methodos directos procuramos reduzir as equações propoſtas a outras, cuja integraçaõ ſeja conhecida. Aſſim ſe pratica, por exemplo, na equaçaõ particular $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, conhecida pelo nome de *equaçaõ de Riccati*, a qual naõ ſe ſabe integrar ſenaõ para certos valores de m.

Seja $m = 0$, teremos $dy + ay^2 dx = bdx$, que he ſeparavel, e dá $\dfrac{dy}{b - ay^2} = dx$, cuja integraçaõ he facil.

Mas quando m tem outros valores, he neceſſario mudar a equaçaõ em outra, onde ay^2 e b eſtejaõ multiplicados por huma meſma potencia de x, porque entaõ ſerá ſeparavel. Eis-aqui o modo de achar os valores de m, que permittem eſta transformaçaõ.

Fa-

Façamos $y = Ax^p + x^q t$, que dá $dy = pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt$; substituindo na equaçaõ proposta, virá $pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt + ax^{2q}ttdx + aAAx^{2p}dx + 2aAx^{p+q}tdx = bx^m dx$.

Supponhamos $p - 1 = 2p$, $pA + aAA = 0$, $p + q = q - 1$, $q + 2aA = 0$; teremos $p = -1$, $A = \frac{1}{a}$, $q = -2$; o que muda a transformada em $x^{-2}dt + ax^{-4}ttdx = bx^m dx$, ou em $dt + ax^{-2}ttdx = bx^{m+2}dx$, que será separavel, se $m = -4$

Façamos nesta $t = \frac{1}{z}$, ella se mudará em $dz + bx^{m+2}zzdx = ax^{-2}dx$. Fazendo pois $z = A'x^{p'} + x^{q'}t'$, e obrando como acima, teremos $p'A'x^{p'-1}dx + q'x^{q'-1}t'dx + x^{q'}dt' + bx^{2q'+m+2}t't'dx + bA'^2x^{2p'+m+2}dx$ . . . $+ 2bA'x^{p'+q'+m+2}t'dx = ax^{-2}dx$.

Suppondo $2p' + m + 2 = p' - 1$, $p'A' + bA'^2 = 0$, $q' + 2bA' = 0$, $q' - 1 = p' + q' + m + 2$, teremos $p' = -m - 3$, $A' = \frac{m+3}{b}$, $q' = -2m - 6$, e $x^{-2m-6}dt' + bx^{-3m-10}t't'dx = ax^{-2}dx$, ou $dt' + bx^{-m-4}t't'dx = ax^{2m+4}dx$, que será separavel, se $-m - 4 = 2m + 4$, ou se $m = -\frac{8}{3}$.

Se fizermos $t' = \frac{1}{z'}$, depois $z' = A''x^{p''} + x^{q''}t''$, e continuarmos ſempre da meſma ſorte, acharemos ſucceſſivamente, que a equaçaõ he ſeparavel, quando $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{16}{7}$, $m = -\frac{20}{9}$ &c, iſto he em geral, quando $m = \frac{-4r}{2r-1}$, ſendo r hum numero inteiro poſitivo.

E ſubindo ás ſubſtituições antecedentes, ver-ſe-ha, que y tem por expreſſaõ

$$y = Ax^{-1} + x^{-2} \cdot \cfrac{1}{A'x^{-m-3} + x^{-2m-6} \cdot \cfrac{1}{A''x^{-2m-5} + x^{-4m-10} \cdot \cfrac{1}{A'''x^{-3m-7} + \&c}}}$$

continuando até que o expoente de x no primeiro termo do ultimo denominador ſeja $-(m+2)(r-1)-1$; e entaõ o ſegundo termo deſte denominador ſerá $x^{-(2m+4)(r-1)-2}t$; ſendo t huma variavel, que depois da ſubſtituiçaõ deſte valor de y ſe determina pela integraçaõ da equaçaõ reſultante, que entaõ he ſeparavel; he preciſo ſómente exceptuar o caſo de ſer $r = 1$, no qual devemos fazer ſimplesmente $y = Ax^{-1} + x^{-2}t$.

Tornemos á equaçaõ $dy + ay^2dx = bx^m dx$, e em lugar de ſubſtituir como acima $y = Ax^g + x^it$

$x^q t$, façamos primeiramente $y = \frac{1}{z}$, depois $z = Ax^p + x^q t$, e continuemos a fazer o meſmo que precedentemente; concluiremos da meſma ſorte, que a equaçaõ ſe ſeparará, todas as vezes que $m = \frac{-4r}{2r+1}$, ſendo r hum numero inteiro poſitivo. O valor de y entaõ ſerá

$$y = \cfrac{1}{Ax^{-m-1} + x^{-2m-2} . \cfrac{1}{A'x^{-2m-3} + x^{-4m-6} . \cfrac{1}{A''x^{-3m-5} + \&c}}}$$

continuando da meſma ſorte até que o primeiro termo em x no ultimo denominador ſeja $-mr-2r+1$; entaõ o ſegundo termo deve ſer $x^{-2mr-4r+2}t$.

A equaçaõ $x^q dy + ay^2 x^n dx = bx^m dx$ reduz-ſe ao meſmo caſo, dividindo por x^q, e fazendo depois $x^{n-q+1} = z$,

Tais ſaõ os meios gerais, de que ſe faz uſo, todas as vezes que os dx e os dy naõ paſſaõ do primeiro gráo. Porém ſe paſſarem, como as equações, em que entrarem differentes potencias de dx e de dy, devem ſer homogoneas relativamente a dx e dy, dividiremos tudo por dx elevado á ſoma das dimensões de dx e dy; e reſolveremos a equaçaõ tomando $\frac{dy}{dx}$ por incognita. Tendo aſſim huma equaçaõ em dx e dy no primeiro gráo, trataremos de applicar-lhe os methodos precedentes.

Das

Das Quantidades e Equações differenciais da segunda, terceira, &c ordem.

172 A Liberdade, que temos quando differenciamos, de tomar por constante (20) qualquer differença primeira, póde facilitar a integraçaõ em muitos casos. Como porém póde acontecer, que se tenha feito constante a differencial, que naõ he a mais propria para facilitar a integraçaõ, mostraremos primeiramente de que modo huma equaçaõ differencial, em que se considerou esta ou aquella differença como constante, se reduz a outra em que naõ haja mais constante, para ao depois se poder livremente suppôr constante a differença que quizermos.

Seja pois $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddy = 0$ a equaçaõ de differenças segundas a duas variaveis, em que se tenha supposto constante a differença primeira dx de huma das variaveis. Havendo dividido a equaçaõ por dx, escreveremos deste modo $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + Dd\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, que vem a ser a mesma; porque suppondo dx constante, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ddy}{dx}$. Porém senaõ quizermos que dx seja constante, entaõ $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; logo a equaçaõ se transforma em $Adx + Bdy$

+

$+ \frac{Cdy^2}{dx} + D\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = 0$, na qual naõ ha mais differença alguma conſtante.

Seja $Adx^3 + Bdx^2dy + Cdy^2dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = 0$ a equaçaõ de differenças terceiras, ſendo dx conſtante. Dividindo por dx^2, e eſcrevendo deſta fórma $Adx + Bdy + C\frac{dy^2}{dx} + D\frac{dy^3}{dx^2} + Ed\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\frac{dy}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) + Gd\left[\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$, faremos variar tudo nas differenciações indicadas, e virá huma equaçaõ ſem differença alguma conſtante.

Exemplo. Se tivermos $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, em que ſe haja ſuppoſto dx conſtante, naõ ſe vê de repente como eſta equaçaõ ſe poderá integrar; mas ſe fizermos dx variavel, eſcrevendo $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx)\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, poderemos na differenciaçaõ indicada tomar dy por conſtante, e virá $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = 0$, cujo integral claramente he $xdx + adx - ydy + Cdy = 0$, ajuntando huma conſtante Cdy da meſma ordem do integral. Eſta equaçaõ, ſendo integrada novamente, dá $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C' = 0$.

173 A regra que demos (148) para integrar

as quantidades differenciais de muitas variaveis; applica-se ás quantidades differenciais de todas as ordens, considerando as differenças ddx, ddy, d^3x, d^3y, &c como outras tantas variaveis differentes.

Propondo-se, por exemplo, integrar $x^3ddy + 6x^2dxdy + 6xydx^2$, em que se suppoz dx constante; integraremos primeiramente, considerando ddy só como variavel; e teremos x^3dy, cuja differencial sendo tirada da proposta, vem o resto $3x^2dxdy + 6xydx^2$. Integremos este, considerando y sómente como variavel; virá $3x^2ydx$; quantidade que sendo differenciada, e tirada do primeiro resto, naõ dá mais resto algum; logo o integral da quantidade proposta he $x^3dy + 3x^2ydx + Cdx$, e integrando novamente teremos $x^3y + Cx + C'$.

174 Quanto ás equaçóes differenciais, integrallas-hemos do mesmo modo, quando forem integraveis no estado em que se propuzerem; o que se conhece procedendo á integraçaõ, e vendo se o ultimo resto he nullo, como acabamos de ensinar. Póde porém acontecer, que o ultimo resto naõ seja nullo, e com effeito as equaçóes sejaõ integraveis, pela multiplicaçaõ de hum factor conveniente, que vamos a considerar.

Examinemos primeiramente as equaçóes de differenças segundas a duas variaveis, isto he, aquellas em que naõ ha differença que passe da segunda ordem, seja qual for por outra parte a potencia a que dx e dy estejaõ elevados. Ainda que suppomos, que huma das differenças he constante; com tu-

tudo facilmente se fará applicaçaõ ao caso de serem ambas variaveis.

Representando pois por $Addy + B = 0$ a equaçaõ geral deste genero, onde A, e B saõ quaisquer funções de x, y, dx, dy e constantes; escrevamos deste modo . . . $Addy + \left(\frac{B-k}{dy}\right) dy + \frac{k}{dx} dx = 0$, sendo k huma funçaõ desconhecida da mesma natureza que A e B. Multipliquemos esta equaçaõ por hum factor P, funçaõ de x, y, dx, dy e constantes; teremos

$$APddy + P\left(\frac{B-k}{dy}\right) dy + \frac{Pk}{dx} dx = 0,$$

que suppomos ser huma differencial completa. Logo considerando as tres differenças ddy, dy e dx como de outras tantas variaveis differentes, he necessario (153) que tenhaõ lugar as tres equações

$$1^{a} \quad \frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left(P\frac{B-k}{dy}\right)}{ddy};$$

$$2^{a} \quad \frac{d(AP)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk}{dx}\right)}{ddy};$$

$$3^{a} \quad \frac{d\left(P\frac{B-k}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk}{dx}\right)}{dy}.$$

Podemos pois deduzir destas (167) huma equa-

çaõ

çaõ ſem P, a qual ſervirá para determinar k, tomando por k huma funçaõ, a mais geral que for poſſivel, de x, y, dx e dy com coefficientes indeterminados, para a ſubſtituirmos neſta meſma equaçaõ. Depois diſſo determinaremos P, tomando tambem huma funçaõ do meſmo genero, e tal que ſatisfaça a duas das tres equações de condiçaõ. Podemos porém ſimplificar eſta indagaçaõ, e limitalla a buſcar ſómente para P huma funçaõ de x, y, dx, dy, que ſatisfaça a duas equações.

Das duas primeiras equações de condiçaõ ſe tira

$$\frac{d(AP)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} P(B-k) + \frac{1}{dy}\frac{d(PB)}{ddy}$$

$$-\frac{1}{dy}\frac{d(Pk)}{ddy}, \text{ e } \frac{d(AP)}{dx} = \frac{1}{dx}\frac{d(Pk)}{ddy}.$$ Tomando neſta ultima o valor de $\frac{d(Pk)}{ddy}$, e ſubſtituindo-o na primeira, teremos

$$P(B-k) = dy\,\frac{d(PB)}{ddy} - dxdy\,\frac{d(AP)}{dx} - dy^2\,\frac{d(AP)}{dy},$$

por onde ſerá facil de achar k, huma vez que ſeja conhecido P.

Tire-ſe deſta ultima o valor de Pk, e ſubſtitua-ſe juntamente com o de $P(B-k)$ nas equações de condiçaõ 1ª e 3ª, teremos

$$\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left[\frac{d(PB)}{ddy} - dx\,\frac{d(AP)}{dx} - dy\,\frac{d(AP)}{dy}\right]}{ddy},$$

e

$$\frac{d\left[\frac{d(PB)}{ddy} - dx\,\frac{d(AP)}{dx} - dy\,\frac{d(AP)}{dy}\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{PB}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d(PB)}{ddy} + dy\,\frac{d(AP)}{dx} + \frac{dy^2}{dx}\,\frac{d(AP)}{dy}\right]}{dy}.$$

Reduz-ſe pois toda a queſtaõ a achar para P huma funçaõ de x, y, dx, dy e conſtantes, que ſatisfaça a eſtas duas equações. Porém ainda que iſto ſempre ſeja poſſivel, com tudo naõ he igualmente facil; por iſſo abandonamos eſta indagaçaõ geral, e paſſamos a examinar algumas equações mais limitadas, ainda que muito extenſas.

Antes de começar notaremos, que pelo que fica dito he facil o determinar, ſe a equaçaõ propoſta he integravel no eſtado em que ſe acha: naõ ha mais que ſuppôr $P = 1$. Aſſim huma equaçaõ para ſer integravel, deve ſatisfazer ás duas equações ſeguintes

$$\frac{dA}{dy} = \frac{d\left(\frac{dB}{ddy} - dx\,\frac{dA}{dx} - dy\,\frac{dA}{dy}\right)}{ddy},$$

$$\frac{d\left(\frac{dB}{ddy} - dx\,\frac{dA}{dx} - dy\,\frac{dA}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{B}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{dB}{ddy} + dy\,\frac{dA}{dx} + \frac{dy^2}{dx}\,\frac{dA}{dy}\right)}{dy}.$$

Eſta relaçaõ entre os coefficientes he geral, ſeja qual for a equaçaõ differencial da ſegunda ordem, ſendo dx conſtante.

175 Proponha-ſe agora integrar a equaçaõ $Gdx^2 + Hdxdy + Kdy^2 + Lddy = 0$, ſuppondo que tanto o factor P que a faz integravel, como as quantidades G, H, K e L, ſaõ unicamente funções de x, y e conſtantes.

Como comparando eſta equaçaõ com a geral $Addy + B = 0$, temos $A = L$, e $B = Gdx^2 + Hdxdy + Kdy^2$; ſe ſubſtituirmos eſtes valores nas duas equações acima achadas para determinar P, e attendermos á ſuppoſiçaõ de que P, G, H, K, L naõ incluem nem dx, nem dy, virá

(I) $\dfrac{d(PL)}{dy} = KP$, e outra equaçaõ, a qual depois de nella ſe ſubſtituir KP em lugar $\dfrac{d(PL)}{dy}$,

ſe reduz a $\dfrac{d\left(PHdx + KPdy - dx\,\dfrac{d(PL)}{dx}\right)}{dx} =$

$\dfrac{d\left(PGdx + dy\,\dfrac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$. Porém a primeira equaçaõ $\dfrac{d(PL)}{dy} = KP$ dá $\dfrac{d(KP)}{dx} = \dfrac{d\left(\dfrac{d(PL)}{dy}\right)}{dx} =$

$\dfrac{dy}{dy}\,\dfrac{d\left(\dfrac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$, e conſeguintemente $\dfrac{\dfrac{d(KP\,dy)}{dx}}{dy} =$

$$dy\,\frac{d\left(\frac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$$; logo a ſegunda equaçaõ ſe reduz a

$$\text{(II)}\quad \frac{d(PH)}{dx} - \frac{dd(PL)}{dxdx}\,{}^{*} = \frac{d(PG)}{dy}.$$

Executando a differenciaçaõ indicada na equaçaõ (I), em que ſómente y he conſiderada como variavel, teremos $\frac{dP}{P} = \frac{K}{L}dy - \frac{dL}{L}$; e integrando na meſma ſuppoſiçaõ de ſer y ſómente variavel, porque aſſim foi feita a differenciaçaõ, virá $P = \frac{X}{L}e^{\int \frac{K}{L}dy}$, ſendo a conſtante X funçaõ de x.

Para determinar X, ſubſtituiremos eſte valor de P na equaçaõ (II), e dividindo por $e^{\int \frac{K}{L}dy}$, teremos huma equaçaõ, em que os y devem deſapparecer, pois que X deve ſer funçaõ de x, para que a equaçaõ propoſta ſeja integravel pela multiplicaçaõ de hum factor, funçaõ ſómente de x, y e conſtantes. A condiçaõ de deſapparecerem os y dará muitas equações; mas eſtas deveráõ reduzirſe a huma unica, porque naõ ha mais que huma ſó indeterminada.

Exem-

* Por eſta expreſſaõ $\frac{dd(PL)}{dxdx}$ entendemos que ſe deve 1° differenciar PL, fazendo variar x, e dividir por dx; 2° differenciar o reſultado, fazendo variar x, e tornar a dividir por dx.

Exemplos.

I. Na equaçaõ da ſegunda ordem $2ydx^2 + (2x + 3yx)\, dxdy + 2x^2dy^2 + x^2yddy = 0$, que naõ he integravel no eſtado em que ſe acha, temos $L = x^2y$, $G = 2y$, $H = 2x + 3yx$, $K = 2x^2$; logo $P = \frac{X}{x^2y} e^{\int \frac{2dy}{y}} = \frac{X}{x^2y} e^{ly^2} = \frac{X}{x^2y} y^2 = \frac{Xy}{x^2}$. Subſtituindo eſte valor de P, e os de L, G, H, &c na equaçaõ (II), virá $-\frac{4Xy}{x^2} + \frac{2ydX}{xdx} - \frac{2Xy}{x^2} + \frac{3y^2dX}{xdx} - \frac{3Xy^2}{x^2} - \frac{y^2ddX}{dx^2} = 0$; igualando pois a nada a ſoma dos termos affectos de y, teremos $\frac{dX}{X} = \frac{3dx}{x}$, e $-x^2ddX + 3xdXdx - 3Xdx^2 = 0$. A primeira dá $X = x^3$, e eſte valor ſubſtituido na ſegunda ſatisfaz a ella; logo $X = x^3$, e por conſeguinte he poſſivel fazer integravel a equaçaõ propoſta, multiplicando-a por huma funçaõ de x e y, ou por hum factor $P = \frac{x^3y}{x^2} = xy$.

Como neſte caſo (174) $Pk = 2xy^2dx^2 + 3x^2y^2dxdy$, e $P(B - k) = 2x^2ydxdy + 2x^3ydy^2$, a equaçaõ propoſta referida á fórma geral (172) ſe eſcreverá aſſim $x^3y^2ddy + (2x^2ydx + 2x^3ydy)\, dy +$ (2x-

$(2xy^2dx + 3x^2y^2dy)\,dx = 0$. Logo integraremos o primeiro termo (148), confiderando dy fómente como variavel, e teremos x^3y^2dy; quantidade que fendo differenciada, e tirada da equaçaõ, dá o refto $(2x^2ydx)\,dy + (2xy^2dx)\,dx$. Integraremos o primeiro deftes termos, confiderando y fó como variavel, e teremos x^2y^2dx, cuja differencial, tomada fuppondo x e y variaveis, fendo tirada do refto antecedente, naõ deixa refto algum; logo o integral primeiro completo da equaçaõ propofta he $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx = 0$.

II. A equaçaõ $2dx^2 + (3x + y + 2)\,dydx + 2xdy^2 + (x^2 + xy)\,ddy = 0$ fe integrará do mefmo modo. Acharemos que deve fer $X = x$, e $P = x + y$.

176 Se depois da fubftituiçaõ do valor de P na equaçaõ (II), os y defapparecerem todos por fi mefmos, entaõ a equaçaõ, que deve dar X, ferá differencial da fegunda ordem; pelo que parece que o methodo naõ ferve para efte cafo. Devemos porém advertir, que entaõ virá huma equaçaõ defta fórma $Adx^2 + BXdx^2 + CdXdx + EddX = 0$, fendo A, B, C, E funções de x e de conftantes. Para a integrar pois efcreva-fe affim $AP'dx^2 + BP'Xdx^2 + (C - k')\,P'dxdX + k'P'dXdx + EP'ddX = 0$; e fuppondo actualmente que P' e k' faõ funções fómente de x, e que os quatro ultimos termos formaõ huma differencial exacta, o pri-

mei-

meiro termo, como he funçaõ de x, facilmente se integrará; e a respeito dos outros termos, teremos as quatro equações

$$\frac{d(EP')}{dx} = \frac{d(k'P'dX + BP'Xdx)}{ddX},$$

$$\frac{d(EP')}{dX} = \frac{[(C-k')P'dx]}{ddX},$$

$$\frac{d(k'P'dX + BP'Xdx)}{dX} = \frac{d[(C-k')P'dX]}{dx},$$

$$\frac{d[(C-k')P'dx]}{dx} = \frac{d(BP'Xdx)}{dX},$$

as quais, attendendo a que k', P', A, B, &c naõ incluem X, se reduzem ás duas

$$\frac{d(EP')}{dx} = k'P', \quad BP' = \frac{d[(C-k')P']}{dx}.$$

Logo igualando entre si os dous valores de $\frac{dP'}{P'}$, que tirarmos destas duas equações, virá

$$Edk' + (C-k')dE - k'(C-k')dx + BEdx - EdC = 0;$$

equaçaõ differencial da primeira ordem sómente, que dará o valor de k'; e conseguintemente se achará P' por meio da equaçaõ $k'P' = \frac{d(EP')}{dx}$ ou $\frac{dP'}{P'} = \frac{k'dx}{E} - \frac{dE}{E}$, que dá $P' =$

H

$\frac{H}{E} e^{\int \frac{k'dx}{E}}$, ſendo H huma conſtante. Agora para ter X, meteremos os valores de k' e P' na equaçaõ $AP'dx^2 + \&c$, que por ſer preſentemente huma differencial completa, tem por integral $dx \int AP'dx + Xdx \int BP'dx + dX \int k'P'dx + Ldx = 0$, ſendo L huma conſtante; integrando pois novamente (165) acharemos X. Logo em geral, todas as vezes que a equaçaõ $Gdx^2 + Hdxdy + Kdy^2 + Lddy = 0$, para ſer differencial exacta, depender ſómente de hum factor funçaõ de x, y e conſtantes, poderá reduzir-ſe a huma equaçaõ differencial da primeira ordem, quaiſquer que ſejaõ G, H, K, L.

Porém ſe depois da ſubſtituiçaõ do valor de P na equaçaõ (II), naõ podermos fazer deſapparecer os y ſem ſujeitar os coefficientes G, H, K, L a certas condiçóes, ſerá iſſo huma próva de que o factor P deve incluir tambem dx e dy; entaõ ſerá neceſſario recorrer ao methodo geral (174).

O meſmo ſe obſervará para achar, em que caſos outra qualquer equaçaõ differencial da ſegunda ordem de huma fórma conhecida, póde ſer integrada pela multiplicaçaõ de hum factor, funçaõ de x e y, ou de x, dy e dx, ou de y e dx.

177 O methodo, porque havemos integrado a equaçaõ $Adx^2 + BXdx^2 + \&c$, póde applicar-ſe facilmente á equaçaõ geral $d^n y + ad^{n-1} ydx + bd^{n-2} ydx^2 + \ldots + mydx^n + Xdx^n = 0$, ſendo

a, b, &c e dx conſtantes, e X huma funçaõ de x e conſtantes. Para iſſo eſcreveremos deſta maneira

$$Pd^n y + P(a-k)d^{n-1}ydx + Pkd^{n-1}ydx + P(b-k')d^{n-2}ydx^2$$
$$+ Pk'd^{n-2}ydx^2 + \&c \ldots + Pmydx^n + PXdx^n = 0,$$

ſendo o factor P funçaõ de x; e k, k', &c conſtantes indeterminadas.

Suppondo entaõ que os termos tomados dous a dous, começando pelo primeiro, fórmaõ huma differencial exacta, teremos as equações neceſſarias para determinar P, k, k', &c. Para iſſo havendo igualado os valores de $\frac{dP}{P}$, viráõ equações em k, k' &c, que determinaráõ k por huma equaçaõ reſultante do gráo n. Achado o valor de k, teremos os de k', k'' &c; e integrando, o que ſerá muito facil, acharemos o valor de P. Para cada valor pois de k teremos hum integral particular com conſtante differente; logo tirando de $n-1$ deſtas equações os valores de $d^{n-1}y$, $d^{n-2}y$, &c, e ſubſtituindo-os na ultima, acharemos o valor de y em x.

178 Quanto ás equações differenciais da terceira ordem, as quais ſe podem repreſentar geralmente por $Ad^3y + B = 0$, ſendo A e B funções de x, y, dx, dy, ddy e conſtantes; ſupponhamos que P he o factor, funçaõ de x, y, dx, dy, ddy e conſtantes, que faz integravel a equaçaõ propoſta. Iſto poſto, podemos eſcrevella deſta maneira

APd^3y

$$APd^3y + P\frac{B-k}{ddy}ddy + P\frac{k-k'}{dy}dy + \frac{Pk'}{dx}dx = 0:$$

Logo deverá ser

$$\frac{d(AP)}{ddy} = \frac{d(P\frac{B-k}{ddy})}{d^3y};\ \frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(P\frac{k-k'}{dy})}{d^3y};$$

$$\frac{d(AP)}{dx} = \frac{d(\frac{Pk'}{dx})}{d^3y};\ \frac{d(P\frac{B-k}{ddy})}{dy} = \frac{d(P\frac{k-k'}{dy})}{ddy},$$

$$\frac{d(P\frac{B-k}{ddy})}{dx} = \frac{d(\frac{Pk'}{dx})}{ddy};\ \frac{d(P\frac{k-k'}{dy})}{dx} = \frac{d(\frac{Pk'}{dx})}{dy}.$$

Por meio destas seis equações se determinaráõ k, k' e P.

Exemplo. Se tivessemos $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, escreveriamos assim $d^3y + kddydx + (a-k)ddydx + k'dydx^2 + (b-k)dydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, sendo k e k' constantes; e supporiamos que esta equaçaõ se fazia integravel pela multiplicaçaõ de hum factor P funçaõ de x. Dando pois ao producto a fórma seguinte $Pd^3y + Pkdxddy + [P(a-k)ddy + Pk'dydx]dx + [P(b-k')dydx + Pcydx^2 + PXdx^2]dx = 0$, deduziriamos seis equações, que pela supposiçaõ feita para k', k e P se reduziriaõ a tres; e a equaçaõ final daria tres valores para k, e tres correspondentes para k, e para P; donde viriaõ tres equações

ções em y, x, $dxdy$ e ddy, das quais eliminando ddy e dy, teriamos o valor finito de y em x e conſtantes.

Daqui ſe vê o que devemos fazer nas equações differenciais dos gráos ſuperiores.

179 O meſmo methodo terá lugar, quando houver maior numero de equações, e de variaveis que naõ paſſem do primeiro gráo, e que naõ eſtejaõ multiplicadas nem entre ſi, nem as ſuas differenças por differencial alguma das meſmas variaveis, á excepçaõ daquella que ſe houver ſuppoſto conſtante. Começaremos por reduzir todas as equações a huma, ſomando a primeira com a ſegunda, terceira &c, multiplicadas cada huma deſtas por hum coefficiente indeterminado e conſtante p, p' &c. Reſolvendo depois os termos affectos das differenças de huma meſma variavel, multiplicaremos por hum factor P, funçaõ da variavel, cuja differença ſe ſuppuzer conſtante.

Exemplo. Se tivermos as equações

$$addz + bddy + (cdz + edy)\, dx + (fz + gy)\, dx^2 = 0$$

$$a'ddz + b'ddy + (c'dz + e'dy)\, dx + (f'z + g'y)\, dx^2 = 0;$$

multiplicando a ſegunda por p, ajuntando o producto com a primeira, e multiplicando a ſoma por P, virá $P(a + a'p)\,ddz + P(c + c'p)\,dzdx + P(f + f'p)\,zdx^2 + P(b + b'p)\,ddy + P(e + e'p)\,dydx + P(g + g'p)\,ydx^2 = 0$.

Depois reſolveremos $c + c'p$ em $c + c'p - k$ e k, como tambem $e + e'p$ em $e + e'p - k'$ e k'.

Sup-

Suppondo entaõ que os termos tomados dous a dous formaõ differenciais exactas, teremos as equações necessarias para determinar k, k' e P. A equaçaõ em k subirá em geral ao gráo $2n$, o que dará $2n$ integrais, por meio dos quais se eliminaráõ todas as differenças, e teremos as equações em z e x, em y e x, &c.

Se as equações fossem mais gerais, considerariamos p, p' &c e P como funções de todas as variaveis, e das suas differenças; e determinariamos estas funções pela condiçaõ de que a equaçaõ total fosse huma differencial completa.

180 Quando em huma equaçaõ a duas variaveis faltar huma das variaveis finitas, podemos sempre reduzilla ás differenças da ordem immediatamente inferior, igualando a differença primeira de huma das variaveis á differença da outra variavel, multiplicada por huma nova variavel.

Exemplo. Querendo integrar

$\frac{ddy}{dy}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=(ay+b)\,dx$, em que dx se suppoz constante, e onde falta a variavel x; faremos $dy=pdx$, sendo p huma nova variavel, o que dá $ddy=dpdx$, e por conseguinte $\frac{dp}{p}\sqrt{(1+pp)}=(ay+b)\cdot\frac{dy}{p}$, ou $dp\sqrt{(1+pp)}=(ay+b)\,dy$, cujo segundo membro se integra algebricamente, e o primeiro em parte algebricamente e em parte por logarithmos, fazendo $\sqrt{(1+pp)}$ racional.

Con-

Concluiremos eſte tratado reſolvendo o problema ſeguinte: *Entre todas as curvas iſoperimetras, que paſſaõ pelos pontos dados* B *e* D (*Fig.* 66), *achar qual he a que faz a maior ſuperficie* ABDE, *ſupponde dada a poſiçaõ de* AE.

Eſta queſtaõ inverſa de *maximis & minimis* reduz-ſe a achar entre as curvas do meſmo comprimento, qual he aquella em que $\int ydx$ he hum maximo.

Supponhamos que BD he a curva procurada; eſtá claro pela natureza do maximo, que ſe hum ponto m variar infinitamente pouco em qualquer ſentido, por exemplo, parallelamente a AE para maior facilidade, ou ſe o elemento Mm ſe tornar em $M\mu$, e mm' em $\mu m'$, o elemento da abſciſſa Pp em $P\pi$, e pp' em $\pi p'$, conſervando-ſe $\mu\varrho = mr$; o valor do maximo poriſſo naõ terá mudança, iſto he, a variaçaõ que na ſua expreſſaõ reſultar da mudança que houver na curva, ſerá $= 0$. A meſma invariabilidade deve tambem ter lugar no comprimento da curva. Para exprimir pois eſtas duas condições, ſerá neceſſario fazer variar do meſmo modo outro ponto m'; e aſſim haverá variaçaõ em tres elementos Mm, mm', $m'm''$.

Iſto poſto, ſeja $AP = x$, Ap ou $x + dx = x'$, Ap' ou $x' + dx' = x''$; $PM = y$, $pm = y'$, $p'm' = y''$ &c; ſerá $Pp = dx$, $pp' = dx'$, $p'p'' = dx''$, $mr = dy$, $m'r' = dy'$, $m''r'' = dy''$, $Mm = ds$, $mm' = ds'$ &c; e em geral, ſendo F a funçaõ que convém a hum elemento, ſerá F', por abbreviar,

viar, a funçaõ refpectiva $F + dF$ do elemento confecutivo, de maneira que $F' - F = dF$.

Pela condiçaõ de maximo temos $\delta(ydx + y'dx' + y''dx'') = 0$, ifto he, pois que y, y', y'' naõ variaõ,

$$1^a \quad y\delta dx + y'\delta dx' + y''\delta dx'' = 0;$$

ufando da caracteriftica δ para naõ confundir eftas variações com as differenças naturais das coordenadas.

A condiçaõ de fe confervar conftante o comprimento do arco dá $\delta ds + \delta ds' + \delta ds'' = 0$; mas $ds^2 = dx^2 + dy^2$, e confeguintemente $\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx$, por fer $\delta dy = 0$, e affim nos outros elementos; logo fubftituindo virá

$$2^a \quad \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dx'}{ds'}\delta dx' + \frac{dx''}{ds''}\delta dx'' = 0.$$

E como o intervallo $dx + dx' + dx''$ naõ varia, teremos tambem

$$3^a \quad \delta dx + \delta dx' + \delta dx'' = 0.$$

Eliminando $\delta dx''$ das equações 1^a e 3^a, virá $dy\delta dx + dy'(\delta dx + \delta dx') = 0$; e fazendo o mefmo na 2^a e 3^a, acharemos $d\left(\frac{dx}{ds}\right)\delta dx + d\left(\frac{dx'}{ds'}\right)(\delta dx + \delta dx') = 0$; logo eliminando $\delta dx + \delta dx'$ deftas duas equações, teremos $\frac{d\left(\frac{dx'}{ds'}\right)}{dy'} - \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy} = 0$,

ifto he $d\left[\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}\right] = 0$. In-

Integrando virá $d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dy}{a}$; e integrando segunda vez, $\frac{adx}{ds} = y + b$, iſto he $a^2dx^2 = (y+b)^2 (dx^2 + dy^2)$; donde ſeparando teremos $dx = \pm \frac{dy(y+b)}{\sqrt{[a^2 - (y+b)^2]}}$, cujo integral he $x = c \pm \sqrt{[a^2 - (y+b)^2]}$; equaçaõ do circulo, que ſe poderá conſtruir depois de haver determinado as tres conſtantes a, b, c.

Para a determinaçaõ dellas obſervaremos: 1° que $x = 0$ dá $y = AB$; 2° que $x = AE$ dá $y = DE$; 3° que ſuppondo dado o comprimento da curva, ou o angulo que ella faz em B com huma linha dada de poſiçaõ, ou outra qualquer condiçaõ equivalente, facilmente deduziremos huma terceira equaçaõ.

As Obras que ſe pódem conſultar ſobre o Calculo Integral, ſaõ as de *MM. Euler*, *d'Alembert*, *Fontaine*, *Condorcet*, *Bougainville*, e *Reynau*.

Calculo Est. I. Fig. 1.

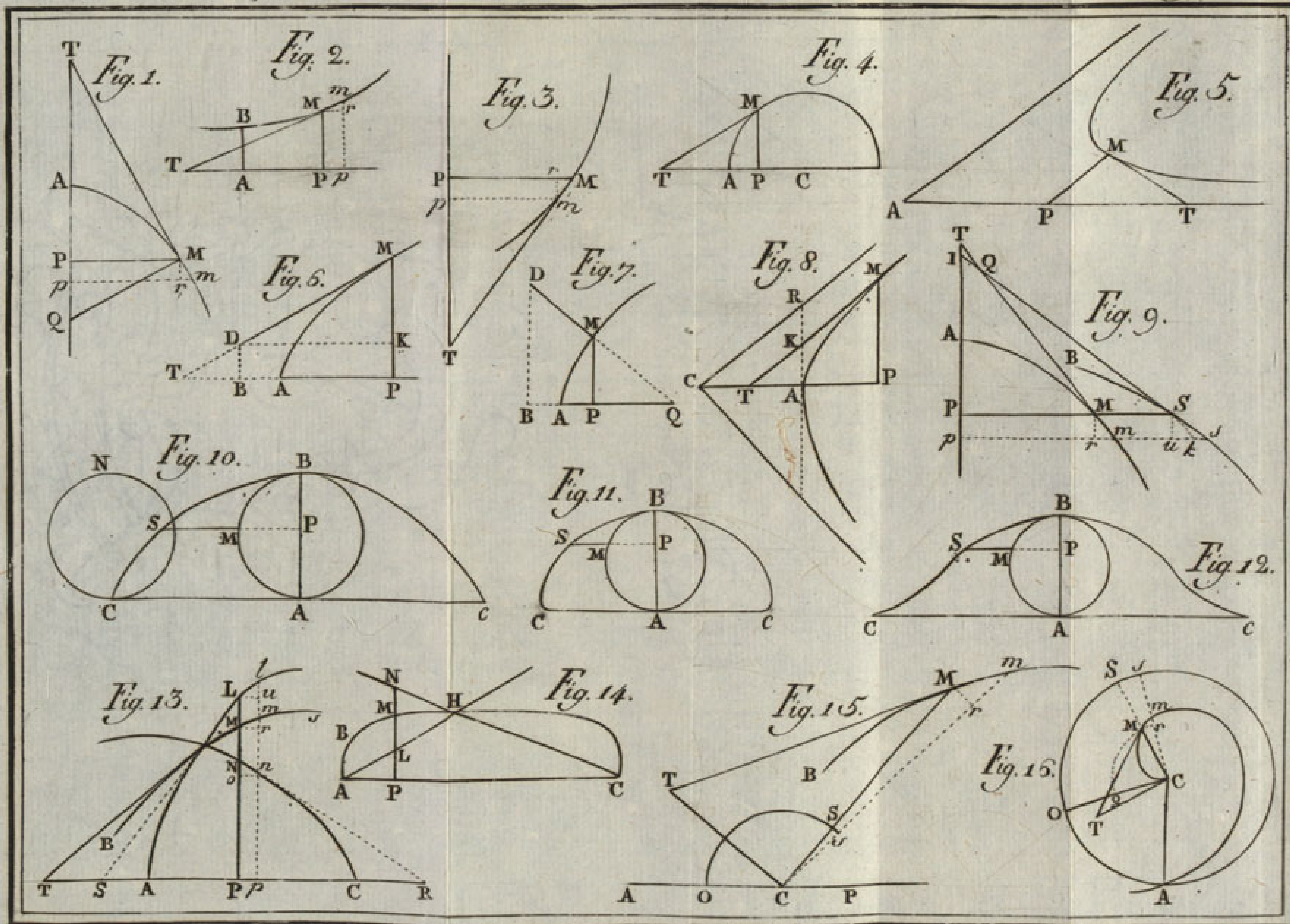
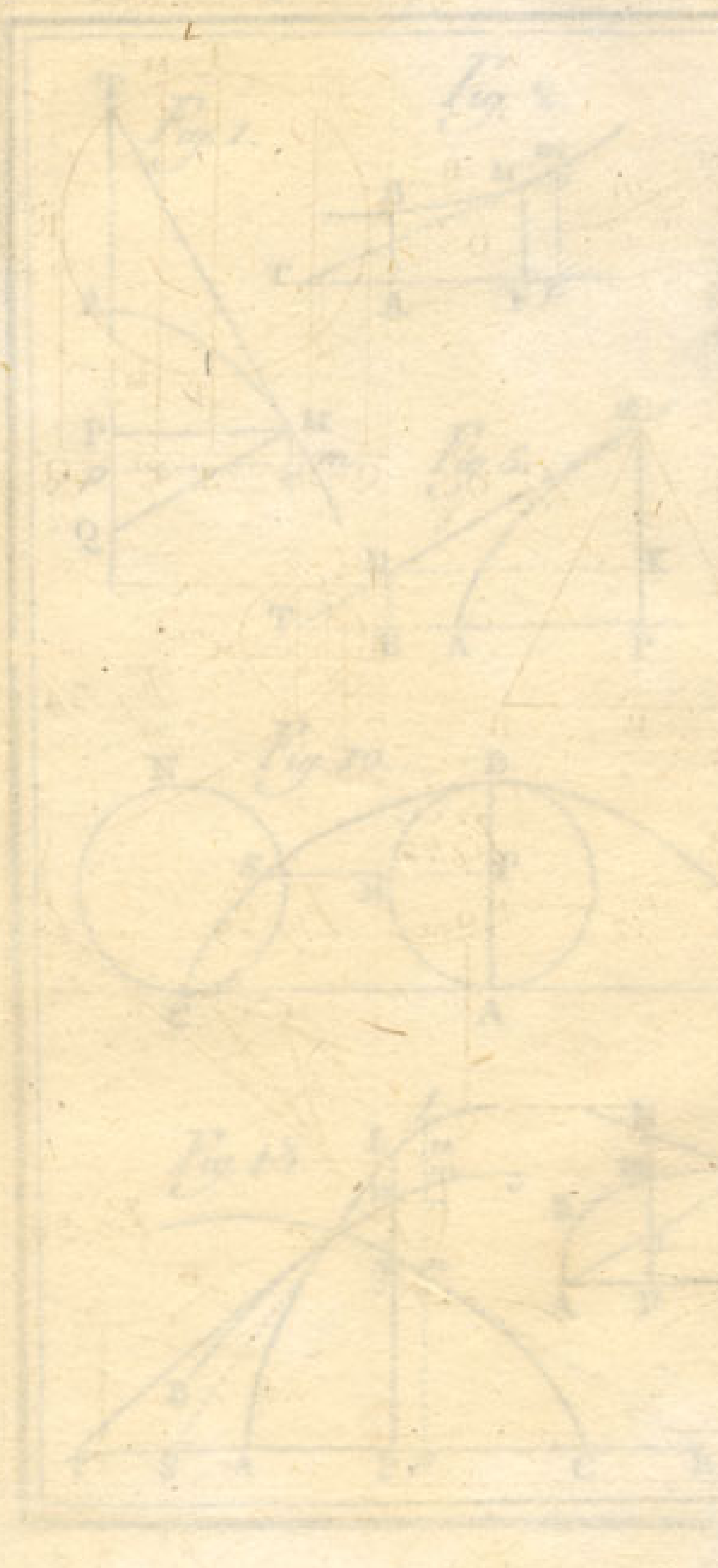


Fig. 16.

Calculo Vol. I



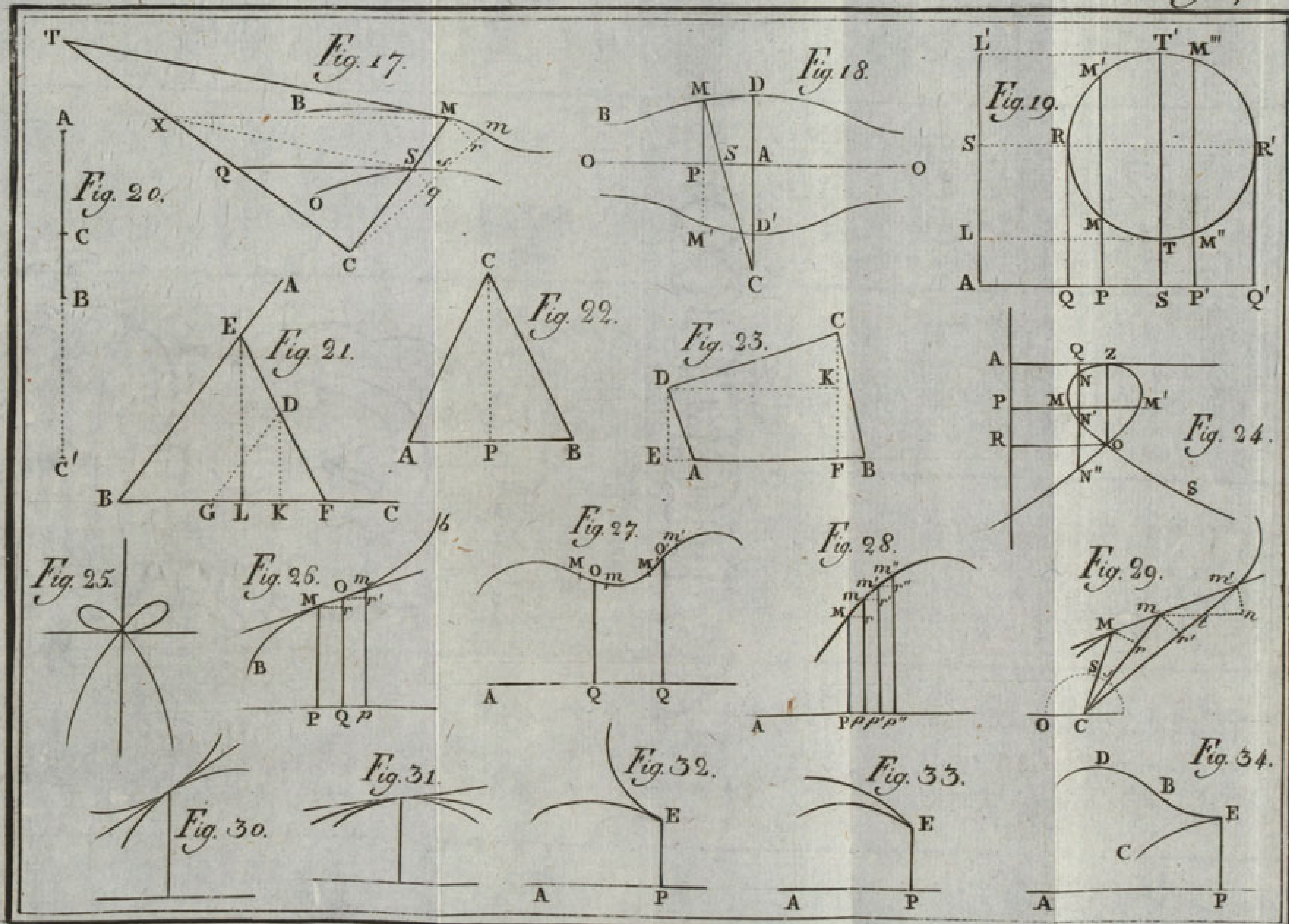


Fig. 17.
T
B
M
m
X
Q
S
O
C
Fig. 20.
A
C
B
C'
Fig. 18.
M
D
B
O
S
A
P
O
M'
D'
C
Fig. 19.
L'
T'
M'''
M'
S
R
R'
M
L
T
M''
A
Q
P
S
P'
Q'
Fig. 21.
A
E
D
B
G
L
K
F
C
Fig. 22.
C
A
P
B
Fig. 23.
C
D
K
E
A
F
B
Fig. 24.
A
Q
z
N
P
M
M'
N'
R
o
N''
S
Fig. 25.
Fig. 26.
b
O
m
M
r
r'
B
P
Q
p
Fig. 27.
m'
O'
M
O
m
M'
A
Q
Q
Fig. 28.
m''
m'
m
M
A
P
Fig. 29.
m'
m
M
n
S
O
C
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
E
A
P
Fig. 33.
E
A
P
Fig. 34.
D
B
E
C
A
P

Fig. 34.

Calculo Est. II

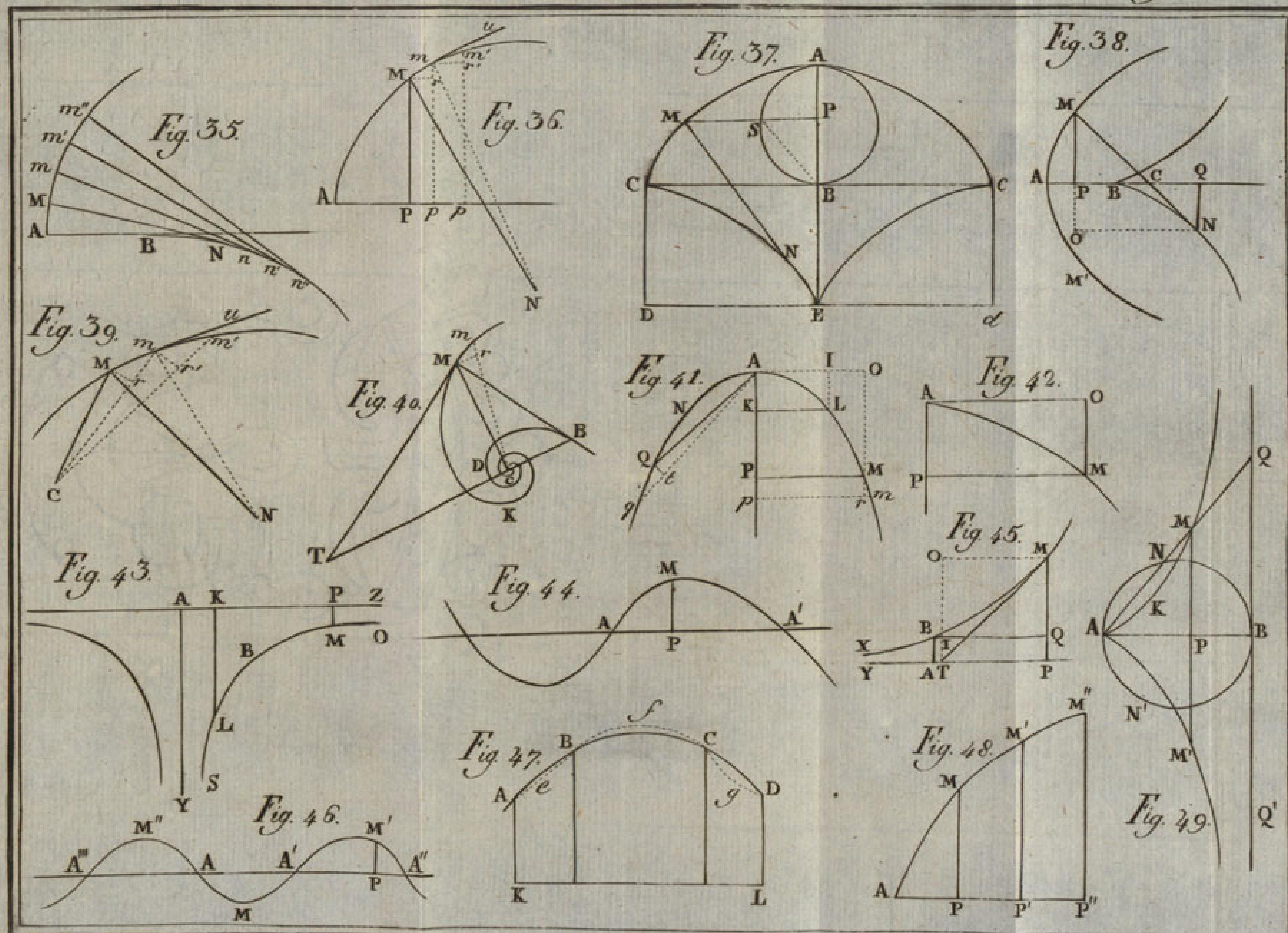


Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.

BEZOUT
ANALYS

2