4
2
4
12

90
60
30

$= \left(\frac{b}{1} + \frac{d}{1}\right) h$

ELEMENTOS
DE
TRIGONOMETRIA
PLANA
POR
M. BEZOUT
DA ACADEMIA REAL
Das Sciencias de Pariz &c

TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

COIMBRA:
NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE,

Anno de M.DCCLXXIV.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

Com Privilegio Real.

ADVERTENCIA.

M. *Bezout escreveu a Trigonometria Plana duas vezes; huma no seu Curso de Mathematica para uso da Marinha, e a outra no Curso ordenado para o uso dos Officiais da Artilharia. De huma e outra se tomáraõ e traduziraõ as cousas, que parecêraõ convenientes ao fim que nos foi proposto; ajuntando as idéas necessarias da mediçaõ das linhas e dos angulos, confórme ao que o Autor tinha ensinado na Geometria, por suppormos que os nossos Leitores haõ de passar immediatamente dos Elementos de Euclides para a Trigonometria Plana. Esta mesma supposiçaõ nos obrigou a referir as citaçoens aos sobreditos Elementos, e a alterar levemente algumas Demonstraçoens. Julgou-se conveniente ajuntar naõ sómente os Theoremas de* Cotes *sobre as variaçoens dos Triangulos Rectilineos, mas ampliar tambem a doutrina*

do

do Autor ſobre as propriedades dos ſenos, tangentes &c, e dar huma Taboa de formulas relativas a eſte ponto mais completa do que as publicadas até o preſente. Porém, para ſe evitar todo o embaraço, poderáõ os principiantes na primeira lição omittir, ſem prejuizo, tudo o que vai deſde o numero 31 *até o numero* 133., *exceptuando ſómente os numeros* 33. 34. 47. 48. *e* 52. *os quais ſaõ neceſſarios para a intelligencia das Propoſiçoens eſſenciais da Trigonometria Plana, que adiante ſe haõ de demonſtrar.*

		Erratas.	*Emendas.*
Pag.	l.		
11.	25	*coſecante* - - - - -	*cotangente*
15.	20	AD, = B - - - -	AD = B
16.	13	CD × CE - - - - -	CD × CF
32.	4	*coſ*A — *coſ*B - - - -	*coſ*B — *coſ*A
40.	10	indicadop - - - - -	indicado
57.	9	Complemento - - -	Complemento Logarithmico
60.	22	obſevados . - - -	obſervados

CD×CH = CE×CI (3)

ELE-

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA PLANA, OU RECTILINEA.

1 TRigonometria, em quanto á origem da palavra, quer dizer mediçaõ de Triangulos. Mas em geral, por este nome entendemos a Sciencia, que nos ensina a determinar as posiçoens, e dimensoens das differentes partes da extensaõ, por meio da relaçaõ necessaria, que ellas tem humas com as outras.

2 Imaginando pois que os differentes pontos, que se consideraõ em qualquer espaço, estaõ unidos por meio de linhas rectas, tres cousas se offerecem a considerar; 1º O comprimento destas linhas; 2º Os angulos que ellas formaõ entre si; 3º Os angulos comprehendidos pelos planos, nos quais as ditas linhas estaõ, ou se pódem imaginar. Da comparaçaõ destes tres objectos depende a soluçaõ de todas as questoens, que se pódem propor sobre a medida da extensaõ, e das suas partes; e a Sciencia, que nos ensina a determinar todas estas cousas, pelo conhecimento supposto de algumas dellas, se reduz a estes dous Problemas gerais: I. *Dadas tres das seis partes* (angulos e lados) *que concorrem em todo o Triangulo Rectilineo, achar as outras tres, quando he possivel.* II. *Dadas tres das seis partes de hum Triangulo Esferico* (isto he, de hum triangulo formado na superficie de huma esfera por tres arcos de circulo, os quais tenhaõ todos por centro o da mesma esfera), *achar qualquer das outras tres.*

3 O primeiro destes Problemas he o objecto da

Trigonometria Plana, *ou Rectilinea*; assim chamada, porque as seis partes do Triangulo estaõ todas no mesmo plano, e os seus lados saõ linhas rectas. O segundo pertence á *Trigonometria Esferica*; porque o triangulo se considera entaõ formado na superficie da esfera, e as seis partes de que consta estaõ em planos diversos. Reservando esta segunda para o seu lugar, aqui trataremos sómente da primeira.

4 A *Trigonometria Plana* he pois huma parte da Geometria, a qual ensina a determinar, ou calcular tres quaisquer partes das seis que contém hum Triangulo Rectilineo, sendo dadas ou conhecidas as outras tres, quando isso he possivel.

5 Digo, *quando he possivel*; porque para o ser, he necessario que as tres partes dadas determinem necessariamente as outras tres, circunstancia que falta nos triangulos rectilineos, todas as vezes que as tres partes dadas saõ os tres angulos.

Com effeito, se por qualquer ponto D tomado no lado AB do triangulo ABC (Fig. 1.), cujos tres angulos sejaõ dados, se fizer passar a recta DE parallela a BC, teremos o triangulo ADE equiangulo ao triangulo ABC (29. 1. Eucl.); e deste modo se pódem formar outros infinitos, que tenhaõ sempre os mesmos angulos, e os lados diversos. Donde se vê, que neste caso o valor dos angulos naõ fixa o valor dos lados, e por conseguinte he o Problema absolutamente indeterminado. Sem embargo, se entaõ naõ podemos determinar a grandeza absoluta dos lados, podemos ao menos conhecer a relativa, porque os tres angulos determinaõ a rasaõ que os tres lados devem sempre ter entre si, como adiante mostraremos.

6 He pois necessario, que nas partes dadas entre ao menos hum lado. Ainda entaõ ha hum caso, que em parte se deve considerar como indeterminado, e he o seguinte. Sup-

Supposto que no triangulo ABC (Fig. 2.) se conhecem os lados AB, BC, e o angulo A opposto a hum delles, naõ se póde determinar o valor do angulo C, nem do lado AC, sem que por outra parte se conheça, se o angulo C deve ser agudo, ou obtuso. Porque se do ponto B como centro, e com o intervallo BC, se descrever o arco CD, e do ponto D, onde elle corta a recta AC; se tirar para o ponto B a recta BD; teremos outro triangulo differente ABD, no qual concorrem as mesmas partes dadas que no triangulo ABC, isto he, o angulo A, o lado AB, e o lado BD igual a BC; e assim neste caso as partes dadas para determinar o angulo BDA saõ as mesmas, que havia para determinar o angulo C no triangulo ABC.

7 Differe porém este caso do precedente, porque neste póde assignar-se o valor tanto do angulo C, como de BDA, da maneira que adiante mostraremos. Sómente naõ he determinado, qual delles se deve adoptar, e por conseguinte qual deve ser a figura do triangulo, se por outra parte naõ constar. Ambos elles tem a propriedade de serem supplementos hum do outro; porque BDA he supplemento de BDC, e o angulo C he igual a BDC, por ser o triangulo BDC isosceles.

8 Naõ saõ os angulos por si mesmos os que entraõ na resoluçaõ dos triangulos. Em lugar delles se substituem humas linhas, as quais sem embargo de lhes naõ serem proporcionais, saõ com tudo proprias para os representar, e muito accommodadas para o calculo, por serem proporcionais aos lados, como adiante se mostrará. Por isso principiaremos pela theoria das ditas linhas, dando o conhecimento necessario dellas, e das suas propriedades, e mostrando como fazem as vezes dos angulos, que lhes correspondem.

9 Para se determinarem as referidas linhas era

preciso convir primeiro na medida dos angulos. Como estes se pódem considerar em hum circulo, que tenha o centro no vertice, e como todos os angulos ao redor de hum ponto valem quatro rectos (Cor. 15. 1. Eucl.), terá qualquer angulo para quatro rectos a mesma rasaõ que tem o arco por elle comprehendido para a circunferencia inteira (33. 6. Eucl.); ou para hum recto, a rasaõ do seu arco para a quarta parte da circunferencia.

10 Por esta rasaõ se assentou geralmente em dividir a circunferencia do circulo, ou seja grande ou pequeno, em 360 partes iguais que se chamáraõ *gráos*, cada gráo em 60 *minutos*, e cada minuto em 60 *segundos*. O segundo tambem se divide em 60 *terceiros*, e assim por diante; mas o mais ordinario he usar das partes decimais dos segundos. Notaõ-se desta maneira: $3^{o}\ 23'\ 42'', 3$; isto he, 3 gráos, 23 minutos, 42 segundos, e 3 decimas de hum segundo &c. Na Astronomia de cada 30^{o} se faz hum *signo*. Assim para denotar $5^{o}\ 35'\ 24''$ se escreve $0^{s}\ 5^{o}\ 35'\ 24''$; para denotar $102^{o}\ 28'$ se escreve $3^{s}\ 12^{o}\ 28'$ &c. Na Marinha se divide o circulo do Horizonte, representado pela rosa dos ventos, em 32 partes que chamaõ *rumos*, e vem cada rumo a ter $11^{o}\ 15'$. Assim navegar pelo quarto rumo do Norte para Leste, ou pelo rumo do Nordeste, he o mesmo que navegar pelo angulo de 45^{o} da linha Norte-Sul para o Nascente &c.

11 Deste modo temos huma medida fixa para avaliar a grandeza dos angulos, sendo manifesto, que o angulo de 90^{o} sempre he recto, o angulo de 30^{o} a terça parte de hum recto &c, porque em todo o circulo o arco de 90^{o} he a quarta parte da circunferencia, ou hum *quadrante*, o arco de 30^{o} a terça parte do quadrante &c.

12 Note-se, que dous arcos, ou angulos cor-

res-

respondentes, se dizem *Complementos* hum do outro, quando a sua soma ou differença he de 90°; e *Supplementos* hum do outro, quando a sua soma, ou differença he de 180°. Donde se segue, que sendo dous arcos entre si complementos, os seus dobros seráõ supplementos; e sendo supplementos, as suas ametades seráõ complementos entre si.

Dos Senos, Tangentes, e Secantes.

13 S*Eno recto*, ou simplesmente *Seno* de hum arco AB, ou do angulo correspondente ACB (Fig. 3.), he a perpendicular AP tirada da extremidade do arco A para o raio CB, que passa pela outra extremidade B do mesmo arco AB.

14 *Seno verso* he a linha BP, parte do raio comprehendida entre o seno AP, e a extremidade do arco B.

15 *Tangente* do mesmo arco AB, ou do angulo ACB, he a parte BD da perpendicular levantada da extremidade do raio CB, e comprehendida entre o mesmo raio CB e o outro CA, produzido até encontrar a dita perpendicular em D.

16 *Secante* he a recta CD tirada do centro C até a extremidade da tangente D.

17 Tirando-se o raio CF perpendicular a CB, e da sua extremidade F a perpendicular FE, que encontre o raio CA produzido, e tambem AQ perpendicular a CF; he manifesto pelas definiçoens precedentes, que AQ será o seno, FQ o seno verso, EF a tangente, e CE a secante do arco AF, ou do angulo ACF. E como o angulo ACF he complemento de ACB (n. 12.), diremos que AQ he o seno, FQ o seno verso, EF a tangente, e CE a secante do complemento do arco AB, ou do angulo ACB.

Para abbreviar estas denominaçoens tem-se assenſentado em dizer *Coſeno* em lugar de ſeno ſegundo, ou de ſeno do complemento; *Coſeno verſo*, em lugar de ſeno verſo do complemento; *Cotangente*, em lugar de tangente ſegunda, ou de tangente do complemento; e *Coſecante*, em lugar de ſecante do complemento. Deſte modo as linhas AQ, FQ, EF, CE, ſe chamaõ coſeno, coſeno verſo, cotangente, e coſecante do arco AB, ou do angulo ACB; e pela meſma raſaõ as linhas AP BP, BD, e CD, ſe chamaõ coſeno, coſeno verſo, cotangente, e coſecante do arco AF, ou do angulo ACF, porque os arcos AB, e AF, ſaõ reciprocamente complementos hum do outro.

Eſtas denominaçoens ſe coſtumaõ exprimir pelas abbreviaturas *ſen. coſ. tang. cot. ſec. coſec.* poſtas antes das letras que deſignaõ o arco, ou angulo, de que ſe trata. Aſſim *ſen*AB quer dizer ſeno do arco AB; *coſ* ACB quer dizer coſeno do angulo ACB &c; *ſen* (A + B), quer dizer ſeno da ſoma dos arcos A, B; e *ſen* (A — B, ſeno da differença dos meſmos arcos. *Sen* A × *coſ* B exprime o rectangulo comprehendido pelo ſeno de A e coſeno de B, ou o producto de *ſen*A por *coſ* B: o meſmo quer dizer eſta expreſſaõ *ſen* A. *Coſ* B, ou ſimpleſmente *ſen* A *coſ* B. *Sen* A^2 vale o meſmo que *ſen* A *ſen* A, e exprime o quadrado do ſeno de A; *ſen* A^3 o ſeu cubo &c: alguns exprimem iſto meſmo deſta maneira *ſen* ^{2}A, *ſen* ^{3}A &c; expreſſoens, que naõ devem confundir-ſe com eſtas *ſen* 2A, *ſen* 3A &c, que querem dizer ſeno do arco duplo, e triplo de A &c. O raio ſe denota pela letra R.

18 Reflectindo agora ſobre a poſiçaõ e grandeza deſtas linhas, conforme a variaçaõ dos arcos, ou angulos, a que ellas correſpondem, he manifeſto, que ſendo nullo o arco AB, iſto he, cahindo o ponto A ſobre B (Fig. 3.), tambem cahiraõ ſobre

B os pontos P, e D, e ſe deſvaneceráõ as rectas BD, AP, BP, fazendo-ſe AQ igual a BC; e que a recta FE naõ encontrará mais a CE, porque ſeráõ parallelas; e por conſeguinte o arco ou angulo de 0° tem o ſeno e tangente iguais a nada, o coſeno e ſecànte iguais ao raio, e a cotangente e coſecante infinitas.

A' medida que o angulo ou arco vai creſcendo, he evidente que creſcem os ſenos, tangentes, e ſecantes, e diminuem os coſenos, cotangentes, e coſecantes, até chegar a 90°, onde pela meſma raſaõ precedente o ſeno e coſecante ſe fazem iguais ao raio, a tangente e ſecante infinitas, e o coſeno e cotangente ſe reduzem a nada.

Como o ſeno de 90° he o maior de todos os ſenos, para diſtinçaõ dos outros coſtuma chamar-ſe *ſeno total*; pelo que, ſeno de 90°, ſeno total, e raio, ſaõ expreſſoens equivalentes.

Quando o arco AB paſſa de 90° (Fig. 4.), o ſeu ſeno AP principia a diminuir, e o coſeno AQ ou CP a creſcer, até chegar a 180°, onde o ſeno ſe reduz a nada, e o coſeno coincide com o raio, cahindo porém para a parte oppoſta a CB, para onde cahia ſendo o angulo menor que 90°, e por iſſo ſendo o angulo obtuſo ſe conſidéra o coſeno como negativo; quer dizer, que ſe diminue onde ſe haveria de ſomar, e ſe ſoma onde ſe haveria de diminuir. Tambem he manifeſto, que o ſeno AP, e o coſeno CP, do arco AB, ou do angulo ACB maior que 90°, igualmente pertencem ao arco AH, ou ao angulo ACH, menor que 90°, e ſupplemento de AB; e por iſſo para buſcar o ſeno ou coſeno de hum angulo obtuſo, he neceſſario buſcar os do ſeu ſupplemento, advertindo que o coſeno ſe ha de conſiderar negativo, como fica advertido.

Pelo que reſpeita á tangente, como ella he determiterminada (n. 15.) pelo encontro da perpendicular BD (Fig. 3.) com o raio produzido CA, eſtá claro que ſendo o arco AB (Fig. 4.) de mais que 90° deve ella ſer BD. E porque levantando a perpendicular HI, temos HI = *BD* (26.1. Eucl.), he tambem manifeſto, que o arco ou angulo de mais que 90° tem a meſma tangente do ſeu ſupplemento, ſómente com a differença de cahir para a parte oppoſta. Do meſmo modo ſe moſtra, que a cotangente do angulo obtuſo he igual á do ſeu ſupplemento, com a unica differença de cahir tambem para a parte oppoſta; e que de 90° até 180° a tangente diminue até nada, e a cotangente creſce até o infinito. Applicando o meſmo raciocinio ſe moſtra o valor das meſmas linhas de 180° por diante, e a ſua poſiçaõ, guardando reſpeito á que tinhaõ no lugar onde ſe começou.

19 Deſtas reflexoens reſultaõ as regras ſeguintes, as quais devem ſempre ter-ſe preſentes.

Primeira: *Que os arcos, ou angulos, que ſaõ entre ſi ſupplementos tem os meſmos ſeno e coſeno, tangente e cotangente, ſecante e coſecante, em quanto ao valor.*

20 Segunda: *Que ſuppondo principiarem todas eſtas linhas poſitivas ao naſcer do arco ou do angulo, os ſenos ſaõ negativos de* 180° *até* 360°, *os coſenos de* 90° *até* 270°, *e as tangentes e cotangentes de* 90° *até* 180°, *e de* 270° *até* 360°. Ou em geral: *Que os ſenos mudaõ de ſinal na paſſagem por* 0° *e* 180°, *os coſenos na paſſagem por* 90° *e* 270°, *e as tangentes e cotangentes na paſſagem por* 0°, 90°, 180°, *e* 270°.

Quando o arco for negativo, iſto he, quando ſe tomar em ſentido contrario á primeira ſuppoſiçaõ, em virtude da regra precedente ſe vê, que o ſeu coſeno deve ter o meſmo ſinal que teria ſe o arco foſſe poſitivo, e que os ſenos, tangentes, e

cotan-

cotangentes, devem ter o contrario. Porque neſſe caſo he viſivel, que o primeiro quadrante negativo cahe no quarto poſitivo, o ſegundo negativo no terceiro poſitivo &c; porém os coſenos retém o meſmo ſinal no primeiro, e quarto; no ſegundo, e terceiro quadrante, &c, e os ſenos, tangentes, e cotangentes, tem ſinal contrario nos meſmos quadrantes: logo &c.

21 Das meſmas definiçoens aſſima dadas he evidente: I. Que *o coſeno* AQ (Fig. 3.) *de qualquer arco* AB *he igual á parte do raio* CP *comprehendida entre o centro e o ſeno* (34. 1. Eucl.). II. Que *o ſeno verſo* BP *de qualquer arco* AB *he igual á differença entre o raio e o coſeno*. III. Que *o ſeno de qualquer arco* AB *he ametade da corda* AG *do arco duplo* AG, pois ſendo o raio CB perpendicular á corda AG, eſta e o ſeu arco ſe dividem por elle em partes iguais (3, e 30. 3. Eucl.).

22 Daqui ſe ſegue, que *o ſeno de* 30° *he ametade do raio*; porque deve ſer ametade da corda de 60°, iſto he, ametade do lado do hexagôno inſcripto, o qual lado he igual ao raio (Cor. 15. 4. Eucl.).

23 Tambem he manifeſto: I. Que *a tangente de* 45° *he igual ao raio*. Porque ſendo recto o angulo CBD (Fig. 3.), ſe o angulo ACB for de 45°, ſerá tambem o angulo CDB de 45°, por deverem todos tres fazer dous rectos, ou 180°; e conſeguintemente ſerá CB = BD (6. 1. Eucl.). II. Que *o arco de* 45° *tem o ſeno igual ao coſeno, a tangente igual á cotangente &c*, porque o ſeu complemento he igualmente de 45°. III. Que *a ſoma dos quadrados do ſeno e coſeno he igual ao quadrado do raio*, por ſerem lados de hum triangulo rectangulo (47. 1. Eucl.). IV. Que *a ſoma dos quadrados do raio e tangente he igual ao quadrado da ſecante, e*

a ſo-

a ſoma dos quadrados do raio e cotangente igual ao quadrado da coſecante ; pela meſma raſaõ.

24 *O ſeno de qualquer arco he meio proporcional entre a ſoma e a differença do raio e coſeno ; ou tambem, entre o coſeno e a differença da ſecante ao coſeno : e o coſeno, meio proporcional entre a ſoma e a differença do raio e ſeno ; ou tambem, entre o ſeno e a differença da coſecante ao ſeno.*

Seja o angulo qualquer ACH (Fig. 4.), ou o arco AH, que por abbreviar denotaremos ſomente com a letra A. Conſta dos Elementos, que HK he meia proporcional entre AK e KL (13. 6. Eucl.), e entre IK e CK (Cor. 8. 6. Eucl.); porem HK he o ſeno de AH, KL, e AK ſoma e differença do raio e coſeno, CK coſeno, e IK differença entre a ſecante e coſeno (n. 13. e ſeg.); logo R + *coſ*A : *ſen*A : : *ſen*A : R — *coſ*A; e *coſ*A : *ſen*A : : *ſen*A : *ſec*A — *coſ*A. Do meſmo modo ſe moſtra, que R + *ſen*A: *coſ*A : : *coſ*A: R — *ſen*A ; e *ſen*A : *coſ*A : : *coſ*A: *coſec* A — *ſen*A.

25 *A tangente de qualquer arco he meia proporcional entre a ſoma, e a differença da ſecante e raio ; ou tambem, entre a ſecante, e a differença da ſecante ao coſeno : e a cotangente, meia proporcional entre a ſoma, e differença da coſecante e raio; ou tambem, entre a coſecante, e a differença da coſecante ao ſeno.*

Suppoſto o meſmo arco AH (Fig. 4.), conſta tambem dos Elementos, que HI he meia proporcional entre IL, e AI (36. 3. Eucl.), e entre CI, e IK (Cor. 8. 6. Eucl.) ; porém HI he a tangente de AH, IL ſoma, e AI differença da ſecante e raio, CI ſecante, e IK differença da ſecante ao coſeno (n. 13. e ſeg.) : logo R + *ſec*A: *tang*A : : *tang*A : *ſec*A — R ; e *ſec*A : *tang*A : : *tang*A : *ſec*A — *coſ*A. Do meſmo modo ſe demonſtra, que R + *coſec*A : : *cot*A : : *cot*A : *coſec*A — R ; e *coſec*A : *cot*A : : *cot*A : *coſec*A — *ſen*A.

26 O

26 *O raio he meio proporcional: I. entre o seno, e a cosecante; II. entre a secante, e o coseno; III. entre a tangente, e a cotangente; IV. entre a soma, e a differença da secante e tangente; V. entre a soma, e a differença da cosecante e cotangente de qualquer arco.*

Seja o arco AB (Fig. 3.). Nos triangulos semelhantes ACP, e CFE, sabemos que AP : AC : : CF : CE; nos triangulos ACQ, e BCD, que AQ : AC : : CB : CD; e nos triangulos CBD, e ECF, que BD : CB : : CF : FE (4. 6. Eucl.). Logo *sen*A : R : : R : *cosec* A; *cos*A : R : : R : *sec*A; e *tang* A : R : : R : *cot*A (n. 13. e seg.). Alem disto, se do ponto D com o intervalo DB se descrever o arco BK, teremos BC meia proporcional entre CK e a recta composta de CD e DB (36. 3. e 17. 6. Eucl.), isto he, *sec*A + *tang*A : R : : R : *sec*A — *tang*A; e do mesmo modo se mostra, que *cosec*A + *cot*A : R : : R : *cosec*A — *cot*A.

27 Desta Propoliçaõ se segue. I. Que *o seno de qualquer arco he para a sua tangente, como a cotangente para a cosecante.* II. Que *o seno he para o coseno, como a secante para a cosecante.* III. Que *a tangente he para a secante, como o coseno para a cotangente.* Porque das duas analogias *sen*A : R : : R : *cosec*A, e *tang*A : R : : R : *cot*A, resulta *por igual*, que *sen*A : *tang*A : : *cot*A : *cosec*A (23. 5. Eucl.) Do mesmo modo das duas analogias *sen*A : R : : R : *cosec*A, e *cos*A : R : : R : *sec*A, se conclue que *sen*A : *cos*A : : *sec*A : *cosec*A; e das duas *cos*A : R : : R : *sec*A, e *tang*A : R : : R : *cot*A, que *tang*A : *sec*A : : *cos*A : *cot*A. &c.

28 Tambem se segue, que *as cosecantes, secantes, e cotangentes de dous quaesquer arcos saõ respectivamente na rasaõ inversa dos senos, cosenos, e tangentes.* Porque assim como para hum angulo A temos *cos*A : R : : R : *sec*A, *sen*A : R : : R : *cosec* A,

A, e *tang*A : R : : R : *cot*A, assim para outro qualquer B, teremos *cos*B : R : : R : *sec*B, *sen*B : R : : R *cosec*B, e *tang*B : R : : R : *cot*B (n. 26.); e comparando duas a duas estas analogias, concluiremos *por igual*, que *sec*A : *sec*B : : *cos*B : *cos*A, *cosec*A : *cosec*B : : *sen*B : *sen*A, e *cot*A : *cot*B : : *tang*B : *tang* A (23. 5. Eucl.).

29 *O seno de qualquer arco he para o seu coseno, como o raio para a cotangente, ou como a tangente para o raio; a cotangente para a cosecante, como o coseno para o raio, ou como o raio para a secante; e a secante para a tangente, como o raio para o seno, ou como a cosecante para o raio.*

Supponhamos o arco AB (Fig. 3.). He manifesto, que pela construcçaõ (n. 13. e seg.) saõ semelhantes os triangulos APC, DBC, CEF; e por conseguinte teremos AP : PC : : BD : BC, e AP : PC : : CF : FE (4. 6. Eucl.), isto he, *sen*A : *cos*A : : *tang*A : R, e *sen*A : *cos*A : : R : *cot*A. Os mesmos triangulos daõ EF : EC : : PC : CA, e EF : CE : : BC : CD, isto he, *cot*A : *cosec* A : : *cos*A : R, e *cot*A : *cosec*A : : R : *sec*A. E finalmente DC : DB : : AC : AP, e DC : DB : : CE : CF, isto he, *sec*A : *tang*A : : R : *sen*A, e *sec*A : *tang*A : : *cosec*A : R.

30 *O seno da ametade de qualquer arco he meio proporcional entre o raio, e a semidifferença do raio e coseno do dito arco; ou tambem, entre a ametade do seno do mesmo arco, e a tangente da sua ametade: e o coseno da ametade de qualquer arco, he meio proporcional entre o raio, e a semisomma do raio e coseno do dito arco; ou tambem, entre a ametade do seno do mesmo arco, e a cotangente da sua ametade.*

Seja o arco AB (Fig. 5.), e do ponto B tiremse as cordas BA, BH para as extremidades do diametro, e do centro C tirem-se as rectas CG, CI respectivamente parallelas ás cordas AB, BH, que

que por ellas feraõ cortadas em partes iguais, do mefmo modo que os arcos AB, BH, nos pontos E, F, D, G, como confta dos Elementos. Affim teremos AH : AB : : AB : AP, ou 2AC : 2AE : : 2AE : AP (Cor. 8. 6. Eucl.), isto he, 2R : 2*fen* $\frac{1}{2}$A : : 2*fen* $\frac{1}{2}$A : R—*cof*A, e confeguintemente R : *fen* $\frac{1}{2}$A : : *fen* $\frac{1}{2}$A : $\frac{1}{2}$ (R—*cof*A) (15. 5. Eucl.); e porque os triangulos femelhantes BPA, CAI, daõ CA : AI : : BP : PA, isto he, R : *tang* $\frac{1}{2}$A : : *fen*A : R—*cof*A, ou R : *tang* $\frac{1}{2}$A : : $\frac{1}{2}$ *fen*A : $\frac{1}{2}$ (R—*cof*A) (4. 6, e 15. 5. Eucl.), concluiremos *por igual*, que *tang* $\frac{1}{2}$A : *fen* $\frac{1}{2}$A : : *fen* $\frac{1}{2}$A : $\frac{1}{2}$ *fen*A (23. 5. Eucl.).

Do mefmo modo fe demonftra que AH : BH : : BH : HP, isto he, 2R : 2 *cof* $\frac{1}{2}$A : : 2 *cof* $\frac{1}{2}$A : R + *cof*A, ou R : *cof* $\frac{1}{2}$A : : *cof* $\frac{1}{2}$A : $\frac{1}{2}$(R + *cof*A); e nos triangulos femelhantes ACI, PHB, que CA : AI : : HP : PB, isto he, R : *tang* $\frac{1}{2}$A : : R + *cof*A : *fen*A, ou R : *tang* $\frac{1}{2}$A : : $\frac{1}{2}$ (R + *cof*A) : $\frac{1}{2}$ *fen*A, e *cot* $\frac{1}{2}$A : R : : $\frac{1}{2}$(R + *cof*A) : $\frac{1}{2}$ *fen*A (n. 26.); donde *por igual* refulta *cot* $\frac{1}{2}$A : *cof* $\frac{1}{2}$A : : *cof* $\frac{1}{2}$A : $\frac{1}{2}$ *fen*A.

31 Se em lugar de A tomarmos o feu complemento, que he 90°—A (n. 12.), advertindo que *fen* (90°—A) = *cof*A, e *cof* (90°—A) = *fen*A (n. 17.), pela Propofiçaõ precedente teremos as analogias feguintes. R : *fen* $\frac{1}{2}$ *compl.*A : : *fen* $\frac{1}{2}$ *compl.* A : $\frac{1}{2}$ (R—*fen*A); R : *tang* $\frac{1}{2}$ *compl.*A : : *cof*A : R —*fen*A; *tang* $\frac{1}{2}$ *compl.*A : *fen* $\frac{1}{2}$ *compl.*A : : *fen* $\frac{1}{2}$ *compl.*A : $\frac{1}{2}$ *cof*A. E do mefmo modo, R : *cof* $\frac{1}{2}$ *compl.* A : :

A: : $cos\frac{1}{2}compl.A : \frac{1}{2}(R + senA)$; R: $cot\frac{1}{2}$ $compl.$ A: : cosA: R + senA; $cot\frac{1}{2}compl.A: cos\frac{1}{2}compl.A$: : $cos\frac{1}{2}compl.A : \frac{1}{2}cosA$.

32 Como $secA = \frac{R^2}{cosA}$, e $tangA = \frac{RsenA}{cosA}$ (n. 26. 29. e Arith. n. 179.), teremos $secA + tangA = \frac{R^2 + RsenA}{cosA} = \frac{R(R + senA)}{cosA}$; porem -- $\frac{R(R + senA)}{cosA} = cot\frac{1}{2}compl.A$ (n. 31.): logo sec A + $tangA = cot\frac{1}{2}compl.A$. Do mesmo modo acharemos, que $secA - tangA = tang\frac{1}{2}compl.A$; $cosecA + cotA = cot\frac{1}{2}A$; e $cosecA - cotA = tang\frac{1}{2}A$.

33 *O raio he para o coseno de qualquer arco, como o dobro do seu seno para o seno do arco duplo.*

Seja o arco qualquer AD (Fig. 5.), e AB dobro de AD. Supposta a construcçaõ da Proposiçaõ precedente, he manifesto que os triangulos CAE, BAP saõ semelhantes, por terem o angulo A commum, e os angulos em E, P, ambos rectos. Assim teremos CA : CE: : AB : BP, isto he, R : cosA: : 2 senA : sen2A.

Se em lugar de A tomarmos o arco 45°—A, teremos pela Proposiçaõ precedente R : cos(45° —A) : : 2 sen (45°— A): sen (90°—2A), isto he, R: cos (45°—A): : 2 sen (45°—A): cos2A; e porque cos (45°—A) = sen (45° + A), e sen (45°—A) = cos (45° + A) (n. 17.), igualmente teremos R: sen (45° + A) : : 2 cos (45 + A): cos2A.

34 *Os rectangulos formados pelo raio e os senos da soma, e da differença de dous quaisquer arcos, saõ respectivamente iguaes á soma, e á differença dos rectangulos comprehendidos pelo seno de cada hum dos ditos arcos, e o coseno do outro.*

Sejaõ os dous arcos AB, AD (Fig. 6.); produzaduza-ſe o ſeno BF do maior AB até encontrar no ponto G o raio que paſſa pela extremidade do menor; e ſobre o meſmo raio tire-ſe a perpendicular BH, que ſerá o ſeno da ſoma dos ditos arcos.

Iſto ſuppoſto, nos triangulos ſemelhantes CED, CFG, e BGH, ſaõ iguais os dous rectangulos comprehendidos por CD, BH, e por CE, BG, e os outros dous comprehendidos por CE, FG, e por DE, CF (4, e 16. 6. Eucl.). Porèm o rectangulo comprehendido por CE, BG, he igual aos rectangulos comprehendidos por CE, FG, e por CE, BF (1. 2. Eucl.). Logo ſerá o rectangulo comprehendido por CD, BH, igual aos rectangulos comprehendidos por CE, FG, e por CE, BF. E porque o rectangulo formado por CE, FG, he igual ao rectangulo formado por DE, CF, ſerá o rectangulo comprehendido por CD, BH, igual á ſoma dos rectangulos comprehendidos por CE, BF, e por DE, CF; iſto he (fazendo $AB = A$, e $AD = B$), $R\ sen(A + B) = senA\ cosB + senB\ cosA$.

Do meſmo modo, ſendo propoſtos os dous arcos BD, AD, cuja differença he AB, os triangulos ſemelhantes CDE, CHI, e BFI, daõ $CD \times BF = CE \times BI$, e $DE \times CH = CE \times HI$; porèm $CE \times BI + CE \times HI = CE \times BH$: Logo $CE \times BH = CD \times BF + DE \times CH$, ou $CD \times BF = CE \times BH - DE \times CH$, iſto he (fazendo $BD = A$, e $AD = B$), $R\ sen(A - B) = senA\ cos B - senB\ cosA$.

35 *Os rectangulos comprehendidos pelo raio, e pelos coſenos da ſoma, e da differença de dous quaiſquer arcos ſaõ reſpectivamente iguais á differença, e á ſoma dos rectangulos formados pelos coſenos, e pelos ſenos dos meſmos arcos.*

Suppoſtos os dous arcos AB, AD, (Fig. 6.), e a meſma conſtrucçaõ da Propoſiçaõ precedente, por hum raciocinio ſemelhante ſe demonſtra, que nos

nos triangulos semelhantes CHI, CDE, e BFI, temos $CD \times CH = CE \times CI$, e $BF \times DE = CE \times FI$; porèm $CE \times CI + CE \times FI = CE \times CF$; logo $CD \times CH + BF \times DE = CE \times CF$, e por conseguinte $CD \times CH = CE \times CF - BF \times DE$, isto he, $R \times \mathit{cos}(A+B) = \mathit{cos}A\, \mathit{cos}B - \mathit{sen}A\, \mathit{sen}B$.

Do mesmo modo: sendo propostos os dous arcos BD, AD, nos triangulos semelhantes CDE, CGF, e BGH, teremos $CD \times CF = CE \times CG$, e $DE \times BH = CE \times HG$, e por conseguinte $CD \times CF - DE \times BH = CE \times CG - CE \times HG$; e como $CE \times CG - CE \times HG = CE \times CH$, será $CD \times CF - DE \times BH = CE \times CH$, ou $CD \times CF = CE \times CH + DE \times BH$, isto he, $R\mathit{cos}(A-B) = \mathit{cos}A\, \mathit{cos}B + \mathit{sen}A\, \mathit{sen}B$.

36 Somando, e diminuindo huma da outra as duas equaçoens $R\, \mathit{sen}(A+B) = \mathit{sen}A\, \mathit{cos}B + \mathit{sen}B\, \mathit{cos}A$, e $R\, \mathit{sen}(A-B) = \mathit{sen}A\, \mathit{cos}B - \mathit{sen}B\, \mathit{cos}A$, teremos $2\, \mathit{sen}A\, \mathit{cos}B = R\, \mathit{sen}(A+B) + R\, \mathit{sen}(A-B)$, e $2\, \mathit{sen}B\, \mathit{cos}A = R\, \mathit{sen}(A+B) - R\, \mathit{sen}(A-B)$. Do mesmo modo: das duas equaçoens $R\, \mathit{cos}(A+B) = \mathit{cos}A\, \mathit{cos}B - \mathit{sen}A\, \mathit{sen}B$, e $R\, \mathit{cos}(A-B) = \mathit{cos}A\, \mathit{cos}B + \mathit{sen}A\, \mathit{sen}B$, concluiremos, que $2\, \mathit{cos}A\, \mathit{cos}B = R\, \mathit{cos}(A+B) + R\, \mathit{cos}(A-B)$, e $2\, \mathit{sen}A\, \mathit{sen}B = R\, \mathit{cos}(A-B) - R\, \mathit{cos}(A+B)$.

37 Se fizermos $B = 30^{\circ}$, como o seno de 30° he a ametade do raio, teremos $R\, \mathit{sen}(30^{\circ} + A) = \frac{1}{2} R\, \mathit{cos}A + \mathit{sen}A\, \mathit{cos}\, 30^{\circ}$ (n. 34.); e como $\mathit{sen}A\, \mathit{cos}\, 30^{\circ} = \frac{1}{2} R\, \mathit{sen}(30^{\circ} + A) - \frac{1}{2} R\, \mathit{sen}(30^{\circ} - A)$ (n. 36.), teremos $\mathit{sen}(30^{\circ} + A) = \mathit{cos}A - \mathit{sen}(30^{\circ} - A)$. Do mesmo modo se achará, que $\mathit{cos}(30^{\circ} + A) = \mathit{cos}(30^{\circ} - A) - \mathit{sen}A$. Donde se vê, que tendo achado os senos, e cosenos até 30°, dahi para sima se podem determinar com summa facilidade por huma simples diminuiçaõ. Por hum

hum raciocinio semelhante, fazendo $B = 60^\circ$, acharemos $sen\,(60^\circ + A) = senA + sen\,(60^\circ - A)$, e $cos\,(60^\circ + A) = cosA - cos\,(60^\circ - A)$.

38 Sendo $B = A$, pelas mesmas Proposiçoens precedentes teremos $R\,sen\,2A = 2\,senA\,cosA$, e $R\,cos\,2A = cosA^2 - senA^2$. Sendo $B = 2A$, teremos $R\,sen\,3A = senA\,cos2A + sen\,2A\,cosA$; e como $sen\,2A = \frac{2\,sen\,A\,cos\,A}{R}$, e $cos2A = \frac{cosA^2 - senA^2}{R}$, será $R^2\,sen3A = 3\,sen\,A\,cosA^2 - senA^3$. Do mesmo modo acharemos $R^2\,cos3A = cosA^3 - 3senA^2\,cosA$; e fazendo consecutivamente B igual a 3A, 4A, &c. acharemos os senos, e cosenos dos arcos multiplos, por meio dos senos, e cosenos do arco simples.

39 Sendo tambem $B = A$, he manifesto que $2\,senA^2 = R^2 - R\,cos2A$, e $2\,cos\,A^2 = R^2 + R\,cos\,2A$ (n. 36. e 18.). Donde, multiplicando a primeira equaçaõ por $2senA$, teremos $4\,senA^3 = 2R^2senA - 2R\,senA\,cos\,2A$; porèm $2\,senA\,cos\,2A = R\,sen\,3A - R\,senA$ (n. 36.): logo $4\,senA^3 = 3R^2\,senA - R^2\,sen\,3A$. E multiplicando a segunda por $2\,cosA$, teremos $4\,cosA^3 = 2R^2\,cosA + 2\,R\,cosA\,cos2A$, e evolvendo o valor de $2cosA\,cos2A$, resultará $4\,cosA^3 = 3\,R^2\,cosA + R^2\,cos\,3A$. Procedendo desta maneira, se acharáõ os valores das potencias consecutivas do seno, ou coseno de qualquer arco, por meio dos senos, e cosenos dos arcos multiplos.

40 Os valores de $sen\,(A + B)$, e $sen\,(A - B)$, assima demonstrados (n. 34.), daõ a proporçaõ $sen\,(A + B) : sen\,(A - B) :: senA\,cosB + sen\,B\,cos\,A : sen\,A\,cos\,B - sen\,B\,cosA$, e dividindo os termos da segunda rasaõ por $cos\,A\,cos\,B$ (Arith. n. 170.), e substituindo em lugar de $\frac{sen\,A}{cos\,A}$, e $\frac{senB}{cosB}$, os seus valores $\frac{tang\,A}{R}$, $\frac{tang\,B}{R}$ (n. 29.), teremos $sen\,(A + B) : sen\,(A - B) :: tang\,A + tang\,B : tang\,A - tang\,B$. Do mesmo modo na pro-

porçaõ $cos(A+B) : cos(A-B) :: cos A\ cos B - sen A\ sen B : cos A\ cos B + sen A\ sen B$, dividindo ambos os termos da segunda rasaõ por $sen A\ cos B$, ou por $sen B\ cos A$, teremos $cos(A+B) : cos(A-B) :: cot A - tang B : cot A + tang B :: cot B - tang A : cot B + tang A$.

41 Como fica demonstrado que $tang(A+B) : R :: sen(A+B) : cos(A+B)$ (n. 29.), das mesmas Proposiçoens se segue que $tang(A+B) : R :: sen A\ cos B + sen B\ cos A : cos A\ cos B - sen A\ sen B$, e dividindo por $cos A\ cos B$ ambos os termos da segunda rasaõ, $tang(A+B) : R :: R(tang A + tang B) : R^2 - tang A\ tang B$. Por hum raciocinio semelhante se achará $tang(A-B) : R :: R(tang A - tang B) : R^2 + tang A\ tang B$; $cot(A+B) : R :: R(cot A - tang B) : R^2 + tang B\ cot A$; e $cot(A-B) : R :: R(cot A + tang B) : R^2 - tang B\ cot A$.

42 Donde podemos concluir, que fazendo $B = A$, teremos $tang 2A = \frac{2R^2\ tang A}{R^2 - tang A^2}$, e $cot 2A = \frac{cot A - tang A}{2}$. Do mesmo modo fazendo $B = 2A$, teremos $tang 3A = \frac{R^2(tang A + tang 2A)}{R^2 - tang A\ tang 2A}$, $cot 3A = \frac{R^2(cot A - tang 2A)}{R^2 + cot A\ tang 2A}$; donde, substituindo o valor de $tang 2A$, e reduzindo, teremos $tang 3A = \frac{3R^2\ tang A - tang A^3}{R^2 - 3\ tang A^2}$, e $cot 3A = \ldots\ldots \frac{R^2(cot A - 3\ tang A)}{3R^2 - tang A^2}$. Procedendo deste modo se acharáõ os valores seguintes das tangentes, e cotangentes dos multiplos de qualquer arco.

43 No caso de $B = 45°$, como $tang\ 45° = R$ (n. 23.), teremos (n. 41.) $tang(45° + A) =$

R(R

$\frac{R(R + tang\ A)}{R - tang A}$, e $tang(45° - A) = \cdots$ $\frac{R(R - tang A)}{R + tang A}$; e combinando estes dous valores, $tang(45° + A) = \frac{R^2}{tang(45° - A)}$. Donde se segue, que em tendo os Logarithmos das tangentes ate 45°, dahi para sima se pódem calcular por huma simples operaçaõ de diminuir.

44 Das mesmas Proposiçoens se segue tambem, que $sec(A+B) = \frac{R\ sec\ A\ sec\ B}{R^2 - tang\ A\ tang\ B} = \frac{sec\ A\ cosec\ B}{cot B - tang A}$. Porque sendo $sec(A+B) = \frac{R^2}{cos(A+B)}$ (n. 26.) $= \frac{R^3}{cos A\ cos\ B - sen\ A\ sen\ B}$ (n. 35.), e dividindo o numerador e o denominador por $cos\ A\ cos\ B$, ou por $cos\ A\ sen\ B$, teremos feitas as reducçoens $sec(A+B) = \frac{R\ sec\ A\ sec\ B}{R^2 - tang\ A\ tang\ B} = \frac{sec\ A\ cosec\ B}{cot\ B - tang A}$. Do mesmo modo se achará tambem $sec(A-B) = \frac{R\ sec\ A\ sec\ B}{R^2 + tang\ A\ tang\ B} = \frac{sec\ A\ cosec\ B}{cot\ B + tang\ A}$; $cosec(A+B) = \frac{R\ sec\ B\ cosec A}{R^2 + tang\ B\ cot\ A} = \frac{sec\ A\ sec\ B}{tang A + tang B}$; $cosec(A-B) = \frac{R\ sec B\ cosec\ A}{R^2 - tang\ B\ cot A} = \frac{sec\ A\ sec B}{tang A - tang B}$. E sendo B = A, teremos $sec\ 2\ A = \frac{R\ sec\ A^2}{R^2 - tang\ A^2} = \frac{sec\ A\ cosec\ A}{cot A - tang\ A}$, $cosec\ 2\ A = \frac{R\ sec\ A\ cosec\ A}{R^2 + tang\ A\ cot\ A} = \frac{sec\ A\ cosec\ A}{2R} = \frac{sec\ A^2}{2\ tang\ A}$ &c.

45 Segue-se tambem, que $tang\ A + tang\ B =$

B 2 $R^2 sen$

$\frac{R^2 \,sen(A+B)}{cos\,A\,cos\,B}$. Porque $tang\,A + tang\,B = \frac{R\,sen\,A}{cos\,A} + \frac{R\,sen\,B}{cos\,B}$ (n. 29.), ou reduzindo ao mesmo denominador (Arith. n. 90.) $= \frac{R(sen\,A\,cos\,B + sen\,B\,cos\,A)}{cos\,A\,cos\,B}$; porém $sen\,A\,cos\,B + sen\,B\,cos\,A = R\,sen(A+B)$ (n. 34.): logo $tang\,A + tang\,B = \frac{R^2 sen(A+B)}{cos\,A\,cos\,B}$. Do mesmo modo acharemos, que $tang\,A - tang\,B = \frac{R^2\,sen(A-B)}{cos\,A\,cos\,B}$; $cot\,A + cot\,B = \frac{R^2 sen(A+B)}{sen\,A\,sen\,B}$; $cot\,B - cot\,A = \frac{R^2\,sen\,(A-B)}{sen\,A\,sen\,B}$; $tang\,A + cot\,B = \frac{R^2\,cos(A-B)}{cos\,A\,sen\,B}$; e $cot\,B - tang\,A = \frac{R^2 cos(A+B)}{cos\,A\,sen\,B}$.

46 Fazendo nos valores precedentes $B = A$, concluiremos que $2\,tang\,A = \frac{R^2\,sen\,2A}{cos\,A^2}$; $2\,cot\,A = \frac{R^2\,sen\,2A}{sen\,A^2}$; $tang\,A + cot\,A = \frac{2\,R^2}{sen\,2A}$ (n. 18. e 36.); $cot\,A - tang\,A = 2\,cot\,2A$ (n. 29. e 36.). E fazendo $B = 45°$, teremos $R + tang\,A = \frac{R^2 sen\,(45° + A)}{cos\,A\,cos\,45°} = \frac{R^2 cos(45° - A)}{cos\,A\,cos\,45°}$ (n. 23.) $= \frac{R^2 cos\,\frac{1}{2}\,comp.\,2A}{cos\,A\,cos\,45°}$; $R - tang\,A = \frac{R^2\,sen\,\frac{1}{2}\,compl.\,2A}{cos\,A\,cos\,45°}$; $R + cot\,A = \frac{R^2 cos\,\frac{1}{2}\,comp.\,2A}{sen\,A\,sen\,45°}$; $cot\,A - R = \frac{R^2\,sen\,\frac{1}{2}\,compl.\,2\,A}{sen\,A\,sen\,45°}$.

47 *O rectangulo comprehendido pelo raio, e a soma dos senos de dous quaisquer arcos, he igual ao dobro do rectangulo comprehendido pelo seno da semisoma, e coseno da semidifferença dos mesmos arcos; e o rectangulo*

gulo comprehendido pelo raio, e a differença dos senos de dous arcos, he igual ao dobro do rectangulo comprehendido pelo coseno da semisoma, e seno da semidifferença dos mesmos arcos.

Sejaõ os arcos propostos AB $=$ A, e AD $=$ B (Fig. 7.), cujos senos saõ BP, DF, dos quais o maior BP se produza até G. Do ponto D tire-se DE parallela a AO, e dos pontos D, E, as cordas EB, EG, DG, DB. Pelo mesmo ponto D tire-se a tangente HI, e do centro C tirem-se as rectas CH, CI, respectivamente perpendiculares ás cordas DB, DG; e do ponto K a recta KL perpendicular a CD.

Isto supposto, he manifesto que saõ semelhantes os triangulos GDM, DCN, porque os angulos em M, e N, saõ rectos, e o angulo DGM he igual ao angulo DCN (20. 3. Eucl.). Por conseguinte será $CD \times GM = CN \times GD$ (4. e 16. 6. Eucl.). Porém GM he a soma de BP, e DF; GD, o dobro do seno da ametade do arco GD, ou de $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, por ser o arco GA $=$ AB, e ajuntando o commum AD, GD $=$ AB $+$ AD; e CN, o coseno da ametade do arco BD, ou de $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$. Logo $R(\mathit{sen}\,A + \mathit{sen}\,B) = 2\,\mathit{sen}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)\,\mathit{cos}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

Tambem saõ semelhantes os triangulos BME, CND. Donde teremos $CD \times BM = DN \times EB$; porém $BM = \mathit{sen}\,A - \mathit{sen}\,B$; $DN = \mathit{sen}\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)$; e EB dobro do seno da ametade do supplemento de AB $+$ EO, ou dobro do coseno de $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ (n. 12. e 17.). Logo $R(\mathit{sen}A - \mathit{sen}\,B) = 2\,\mathit{cos}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)\,\mathit{sen}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2})B$.

48 *O rectangulo comprehendido pelo raio, e a soma dos cosenos de dous quaisquer arcos, he igual ao dobro*

bro do rectangulo comprehendido pelos cosenos da semisoma, e da semidifferença dos mesmos arcos; e o rectangulo comprehendido pelo raio, e pela differença dos cosenos de dous arcos, he igual ao dobro do rectangulo comprehendido pelos senos da semisoma, e semidifferença dos mesmos arcos.

Supposta a mesma construcçaõ da Proposiçaõ precedente, os triangulos semelhantes GDM, CDN, BEM, daráõ $CD \times EM = EB \times CN$, e $CD \times MD = GD \times DN$. Porém $EM = cos\,A + cos\,B$; $EB = 2\,cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)$; $CN = cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)$; $MD = CF - CP = cos\,B - cos\,A$; $GD = 2\,sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)$; e $ND = sen\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)$. Logo $R\,(cos\,A + cos\,B) = 2\,cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)$, e $R(cos\,B - cos\,A) = 2\,sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) sen\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)$.

49 Das Proposiçoens precedentes se segue, que *a soma dos senos de dous quaisquer arcos he para a soma dos cosenos, como o seno da semisoma dos mesmos arcos para o seu coseno, ou como o raio para a sua cotangente.* Porque, pondo em analogia os valores achados, teremos $R(sen\,A + sen\,B) : R\,(cos\,A + cos\,B) :: 2\,sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right) : 2\,cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)$, e dividindo os termos da primeira rasaõ por R, e os da segunda por $2\,cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)$, teremos $sen\,A + sen\,B : cos\,A + cos\,B :: sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) : cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) :: R : cot\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)$ (n. 29.).

50 Segue-se tambem, que *a differença dos senos de dous quaisquer arcos he para a differença dos cosenos, como o coseno da semisoma dos mesmos arcos para o seu seno, ou como o raio para a sua tangente.* Por-

Porque $R(senA - senB) : R(cosB - cosA) :: 2 cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) sen(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) : 2 sen(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) sen(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$; e reduzindo, $senA - senB : cosB - cosA :: cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : sen(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) :: R : tang(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$.

51 Logo *as ſomas dos dous ſenos, e dos dous coſenos de dous quaiſquer arcos, ſaõ reciprocamente como as ſuas differenças.* Porque ſendo $sen A + sen B : cos A + cos B :: sen(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, e $senA - senB : cosB - cosA :: cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : sen(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, teremos $senA + senB : cosA + cosB :: cosB - cosA : senA - senB$.

52 Das meſmas Propoſiçoens precedentes ſe ſegue, que *a ſoma dos ſenos de dous quaiſquer arcos he para a ſua differença, como a tangente da ſemiſoma dos meſmos arcos para a tangente da ſemidifferença, ou como a cotangente da ſemidifferença para a cotangente da ſemiſoma.* Porque, ſendo $R(sen A + sen B) : R(sen A - sen B) :: 2 sen(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) : 2 cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) sen(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, e dividindo os termos da primeira raſaõ por R, e os da ſegunda por $2 cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) cos(A + \frac{1}{2}B)$, ou por $2 sen(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) sen(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, reſultará $senA + senB : sen A - sen B :: tang(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : tang(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) :: cot(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) : cot(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$.

53 Segue-ſe mais, que a *ſoma dos coſenos de dous quaiſquer arcos he para a ſua differença, como a cotangente da ſemiſoma dos meſmos arcos para a tangente da ſemidifferença, ou como a cotangente da ſemidifferença para a tangente da ſemiſoma.* Porque, ſendo

do $R(\cos A + \cos B) : R(\cos B - \cos A) :: 2 \cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) : 2 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \operatorname{sen}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, e dividindo os termos da primeira rasaõ por R, e os da segunda por $2 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, ou por $2 \cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \operatorname{sen}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, resulta $\cos A + \cos B : \cos B - \cos A :: \cot(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : \operatorname{tang}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) :: \cot(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) : \operatorname{tang}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$.

Todas estas consequencias, que tirámos das duas Proposiçoens precedentes (n. 47. e 48.), podiaõ demonstrar-se immediatamente pela comparaçaõ dos differentes triangulos semelhantes, que offerece a construcçaõ da figura 7.

54 Se em lugar de B tomarmos o seu complemento $90^{\circ} - B$, como $\operatorname{sen}(90^{\circ} - B) = \cos B$ (n. 17.), teremos $R(\operatorname{sen} A + \cos B) = 2 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2} \textit{compl.}\, B) \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2} \textit{compl.}\, B)$, e $R(\operatorname{sen} A - \cos B) = 2 \cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2} \textit{compl.}\, B) \operatorname{sen}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2} \textit{compl.}\, B)$ (n. 47.). Donde se segue, que $\operatorname{sen} A + \cos B : \operatorname{sen} A - \cos B :: \operatorname{tang}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2} \textit{compl.}\, B) : \operatorname{tang}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2} \textit{compl.}\, B)$. E no caso de $B = A$, $R(\operatorname{sen} A + \cos A) = 2 \operatorname{sen} 45^{\circ} \cos(A - 45^{\circ})$, $R(\operatorname{sen} A - \cos A) = 2 \operatorname{sen}(A - 45^{\circ}) \cos 45^{\circ}$; e $\operatorname{sen} A + \cos A : \operatorname{sen} A - \cos A :: \cos(A - 45^{\circ}) : \operatorname{sen}(A - 45^{\circ}) :: R : \operatorname{tang}(A - 45^{\circ})$, ou $\operatorname{sen} A + \cos A : \cos A - \operatorname{sen} A :: R : \operatorname{tang} \frac{1}{2} \textit{compl.}\, 2A$.

55 Como $\sec A + \sec B = \frac{R^2}{\cos A} + \frac{R^2}{\cos B}$ (n. 26.), reduzindo ao mesmo denominador, teremos $\sec A +$

sec

$secB = \frac{R^2\,(cosB + cosA)}{cosA\ cosB}$; e ſubſtituindo o valor de $R\,(cosA + cosB)$ (n. 48.), reſultará $secA + secB = \frac{2R\ cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)\ cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{cosA\ cosB}$. Do meſmo modo acharemos tambem, que $secA - secB = \frac{2R\ sen(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)\ sen(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{cosA\ cosB}$; $cosecA + cosecB = \frac{2R\ sen(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)\ cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{senA\ senB}$; $cosecB - cosecA = \frac{2R\ cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)\ sen(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{senA\ senB}$; $cosecA + secB = \frac{2R\ s(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}c\tilde{o}p.B)\ cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}c\tilde{o}p.B)}{senA\ cosB}$; $secB - cosecA = \frac{2R\ cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}compl.B)\ sen(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}compl.B)}{senA\ cosB}$.

Donde ſe ſegue, que no caſo de $B = 0^o$ teremos $R + secA = \frac{2\,cos\frac{1}{2}A^2}{cosA}$, $secA - R = \frac{2sen\frac{1}{2}A^2}{cosA}$; ſendo $B = 90^o$, $R + cosecA = \frac{2cos\frac{1}{2}compl.A^2}{senA}$, $cosecA - R = \frac{2sen\frac{1}{2}compl.A^2}{senA}$; e ſendo $B = A$, $secA + cosecA = \frac{4\,cos\,(A - 45^o)\ sen45^o}{sen\,2A}$, $cosecA - secA = \frac{4sen\,(45^o - A)\ sen45^o}{sen2A}$, e $cosecA + secA : cosecA - secA :: R : tang\frac{1}{2}compl.2A :: senA + cosA : cosA - senA$ (n. 54.).

Mui-

Muitas outras propriedades se pódem descobrir nas linhas, de que tratamos, por meio da Geometria Elementar; e muitas mais, por meio da Analyse. As que temos mostrado, saõ as mais importantes, e as que podem servir para o descobrimento das outras. Como dellas se faz uso muito frequente, será bem que as recopilemos em huma taboa geral, onde se achem com facilidade.

Formulas que resultaõ das Proposiçoens precedentes.

56 I. $R = \frac{\mathit{sen}A\,\mathit{cot}A}{\mathit{cos}A} = \frac{\mathit{tang}A\,\mathit{cos}A}{\mathit{sen}A} = \frac{\mathit{cos}A\,\mathit{cosec}A}{\mathit{cot}A} = \frac{\mathit{sec}A\,\mathit{cot}A}{\mathit{cosec}A} = \frac{\mathit{sen}A\,\mathit{sec}A}{\mathit{tang}A} = \frac{\mathit{tang}A\,\mathit{cosec}A}{\mathit{sec}A}$ (n. 29.) $= \frac{2\mathit{sen}A\,\mathit{cos}A}{\mathit{sen}2A} = \frac{2\mathit{sen}\,\frac{1}{2}\,\mathit{compl}\,2A\,\mathit{cos}\,\frac{1}{2}\,\mathit{compl}\,2A}{\mathit{cos}2A}$ (n. 33.);

57 II. $R^2 = \mathit{sen}A\,\mathit{cosec}A = \mathit{sec}A\,\mathit{cos}A = \mathit{tang}A\,\mathit{cot}A = (\mathit{sec}A + \mathit{tang}A)\,(\mathit{sec}A - \mathit{tang}A) = (\mathit{cosec}A + \mathit{cot}A)\,(\mathit{cosec}A - \mathit{cot}A)$ (n. 26.) $= \mathit{sen}A^2 + \mathit{cos}A^2$ (n. 23.).

58 III. $\mathit{sen}\,\frac{1}{2}A = \mathit{cos}\,\frac{1}{2}\,\mathit{suppl}.A$ (n. 12. 17.) $= \frac{R\,\mathit{sen}A}{2\mathit{cos}\,\frac{1}{2}A}$ (n. 33.) $= \frac{R\,\mathit{sec}\,\frac{1}{2}A}{2\mathit{cosec}A} = \frac{\mathit{sen}A\,\mathit{sec}\,\frac{1}{2}A}{2R}$ (n. 26.) &c.

59 IV. $\mathit{cos}\,\frac{1}{2}A = \mathit{sen}\,\frac{1}{2}\,\mathit{suppl}.A$ (n. 12. 17.) $= \frac{R\,\mathit{sen}A}{2\mathit{sen}\,\frac{1}{2}A}$ (n. 33.) $= \frac{R\,\mathit{cosec}\,\frac{1}{2}A}{2\mathit{cosec}A} = \frac{\mathit{sen}A\,\mathit{cosec}\,\frac{1}{2}A}{2R}$ (n. 26.) &c.

60 V. $\mathit{tang}\,\frac{1}{2}A = \mathit{cot}\,\frac{1}{2}\,\mathit{suppl}.A$ (n. 12. 17.) $= \frac{2\mathit{sen}\,\frac{1}{2}A^2}{\mathit{sen}A} = \frac{R(R - \mathit{cos}A)}{\mathit{sen}A} = \frac{R^2\,\mathit{sen}A}{2\mathit{cos}\,\frac{1}{2}A^2} = \frac{R\,\mathit{sen}A}{R + \mathit{cos}A}$ (n. 30.) $= \mathit{cosec}A - \mathit{cot}A$ (n. 32.) &c.

61 VI. $\mathit{cot}\,\frac{1}{2}A = \mathit{tang}\,\frac{1}{2}\,\mathit{suppl}.A$ (n. 12. 17.) $= \frac{2\mathit{cos}\,\frac{1}{2}A^2}{\mathit{sen}A} =$

R

$$\frac{R(R+\text{cos}A)}{\text{sen}A} = \frac{R^2\text{sen}A}{2\text{sen}\frac{1}{2}A^2} = \frac{R\text{sen}A}{R-\text{cos}A} \text{ (n. 30.) } = \text{cosec}A + \text{cot}A \text{ (n. 32.) \&c.}$$

62 VII.
$$\text{sen}A = \frac{R^2}{\text{cosec}A} \text{ (n. 26.) } = \frac{R\text{cos}A}{\text{cot}A} = \frac{R\text{tang}A}{\text{sec}A} = \frac{\text{cos}A\text{tang}A}{R} \text{ (n. 29.) } = \frac{\text{tang}A\text{cot}A}{\text{cosec}A} = \frac{\text{cos}A\text{sec}A}{\text{cosec}A} \text{ (n.27.) } = \frac{R\text{sen}2A}{2\text{cos}A}$$

$$\text{(n. 33.) } = \frac{\text{cos}A^2}{\text{cosec}A-\text{sen}A} \text{ (n. 24.) } = \frac{2\text{sen}\frac{1}{2}A\text{cos}\frac{1}{2}A}{R} \text{ (n. 38.) } =$$

$$\frac{(R-\text{cos}A)\,\text{cot}\frac{1}{2}A}{R} = \frac{(R+\text{cos}A)\,\text{tang}\frac{1}{2}A}{R} \text{ (n. 30.) } =$$

$$\frac{R^2 - 2\text{sen}\frac{1}{2}\text{compl.}A^2}{R} = \frac{2\text{cos}\frac{1}{2}\text{compl.}A^2 - R^2}{R} \text{ (n. 31.) \&c.}$$

63 VIII.
$$\text{cos}A = \frac{R^2}{\text{sec}A} \text{ (n. 26.) } = \frac{R\text{sen}A}{\text{tang}A} = \frac{R\text{cot}A}{\text{cosec}\,A} = \frac{\text{sen}A\text{cot}A}{R} \text{ (n. 29.) } = \frac{\text{tang}A\text{cot}A}{\text{sec}A} = \frac{\text{sen}A\text{cosec}A}{\text{sec}A} \text{ (n. 27.) } =$$

$$\frac{R\text{sen}2A}{2\text{sen}A} \text{ (n. 33.) } = \frac{\text{sen}A2}{\text{sec}A-\text{cos}A} \text{ (n. 24) } = \frac{\text{cos}\frac{1}{2}A^2 - \text{sen}\frac{1}{2}A^2}{R}$$

$$\text{(n. 38.) } = \frac{2\text{sen}\frac{1}{2}\text{compl.}A\text{cos}\frac{1}{2}\text{compl.}A}{R} \text{ (n. 33.) } = \frac{R^2 - 2\text{sen}\frac{1}{2}A^2}{R}$$

$$= \frac{2\text{cos}\frac{1}{2}A^2 - R^2}{R} \text{ (n. 30) } = \frac{(R-\text{sen}A)\,\text{cot}\frac{1}{2}\text{compl.}A}{R} = $$

$$\frac{(R+\text{sen}A)\,\text{tang}\frac{1}{2}\text{compl.}A}{R} \text{ (n. 31) \&c..}$$

64 IX.
$$\text{tang}A = \frac{R^2}{\text{cot}A} \text{ (n. 26.) } = \frac{\text{sen}A\text{cosec}A}{\text{cot}A} = \frac{\text{sec}A\text{cos}A}{\text{cot}A}$$

$$\text{(n. 27.) } = \frac{R\text{sen}A}{\text{cos}A} = \frac{R\text{sec}A}{\text{cosec}A} = \frac{\text{sen}A\text{sec}A}{R} \text{ (n. 29.) } = \frac{2\text{sen}A^2}{\text{sen}2A}$$

$$= \frac{R(R-\text{cos}2A)}{\text{sen}2A} = \frac{R^2\text{sen}2A}{2\text{cos}A^2} = \frac{R\text{sen}2A}{R+\text{cos}2A} \text{ (n. 30.) } =$$

$$\text{cot}\tfrac{1}{2}\text{compl.}A - \text{sec}A = \text{sec}A - \text{tang}\tfrac{1}{2}\text{compl.}A = \tfrac{1}{2}\text{cot}\tfrac{1}{2}\text{compl.}A - \tfrac{1}{2}\text{tang}\tfrac{1}{2}\text{compl}\,A = \text{cosec}2A - \text{cot}2A \text{ (n. 32.) \&c.}$$

65 X.
$$\text{cot}A = \frac{R^2}{\text{tang}A} \text{ (n. 26.) } = \frac{\text{sen}A\text{cosec}A}{\text{tang}A} = \frac{\text{sec}A\text{cos}A}{\text{tang}A} \text{ (n}$$

$27.) = \frac{R\cos A}{\text{sen}\, A} = \frac{R\,\text{cosec}\, A}{\sec A} = \frac{\cos A\, \text{cosec}\, A}{R}$ (n. 29.) $= \frac{2\cos A^2}{\text{sen}\, 2A}$ $= \frac{R\,(R + \cos 2A)}{\text{sen}\, 2A} = \frac{R^2 \text{sen}\, 2A}{2\,\text{sen}\, A^2} = \frac{R\,\text{sen}\, 2A}{R - \cos 2A}$ (n. 30.) $= \cot \frac{1}{2} A - \text{cosec}\, A = \text{cosec}\, A - \text{tang}\, \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} A - \frac{1}{2}\, \text{tang}\, \frac{1}{2} A =$ $\text{cosec}\, 2A + \cot 2A$ (n. 32.) . &c.

66 XI. $\sec A = \frac{R^2}{\cos A}$ (n. 26.) $= \frac{\text{sen}\, A\, \text{cosec}\, A}{\cos A} = \frac{\text{tang}\, A \cot A}{\cos A}$ (n. 27.) $= \frac{R\,\text{cosec}\, A}{\cot A} = \frac{R\,\text{tang}\, A}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{tang}\, A\, \text{cosec}\, A}{R}$ (n. 29.) $= \,..\, \frac{\text{tang}\, A^2}{\sec A - \cos A}$ (n. 25.) $= \cot \frac{1}{2} \text{compl.}\, A - \text{tang}\, A = \text{tang}\, A + \text{tang}\, \frac{1}{2} \text{compl.}\, A = \frac{1}{2}\, \text{tang}\, \frac{1}{2} \text{compl.}\, A + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} \text{compl.}\, A$ (n. 32.) $= \frac{2R\,\text{sen}\, A}{\text{sen}\, 2A}$ (n. 26. e 33.) &c.

67 XII. $\text{cosec}\, A = \frac{R^2}{\text{sen}\, A}$ (n. 26.) $= \frac{\sec A \cos A}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{tang}\, A \cot A}{\text{sen}\, A}$ (n. 27.) $= \frac{R \sec A}{\text{tang}\, A} = \frac{R \cot A}{\cos A} = \frac{\sec A \cot A}{R}$ (n. 29.) $= \frac{\cot A^2}{\text{cosec}\, A - \text{sen}\, A}$ (n. 25.) $= \cot \frac{1}{2} A - \cot A = \text{tang}\, \frac{1}{2} A + \cot A = \frac{1}{2}\, \text{tang}\, \frac{1}{2} A$ $+ \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} A$ (n. 32.) $= \frac{2R\cos A}{\text{sen}\, 2A}$ (n. 26. e 33.) &c.

68 XIII. $R\,\text{sen}\, 2A = 2\,\text{sen}\, A \cos A$ (n. 38.)

$R^2 \text{sen}\, 3A = 3\,\text{sen}\, A \cos A^2 - \text{sen}\, A^3$

$R^3 \text{sen}\, 4A = 4\,\text{sen}\, A \cos A^3 - 4\,\text{sen}\, A^3 \cos A$

$R^4 \text{sen}\, 5A = 5\,\text{sen}\, A \cos A^4 - 10\,\text{sen}\, A^3 \cos A^2 + \text{sen}\, A^5$

$R^5 \text{sen}\, 6A = 6\,\text{sen}\, A \cos A^5 - 20\,\text{sen}\, A^3 \cos A^3 + 6\,\text{sen}\, A^5 \cos A.$

&c. &c.

69 XIV. $R\cos 2A = \cos A^2 - \text{sen}\, A^2$ (n. 38.) $= 2\cos A^2 - R^2$

$R^2 \cos 3A = \cos A^3 - 3\,\text{sen}\, A^2 \cos A$

$R^3 \cos 4A = \cos A^4 - 6\,\text{sen}\, A^2 \cos A^2 + \text{sen}\, A^4$

$R^4 \cos 5A = \cos A^5 - 10\,\text{sen}\, A^2 \cos A^3 + 5\,\text{sen}\, A^4 \cos A$

$R^5 \cos 6A = \cos A^6 - 15\,\text{sen}\, A^2 \cos A^4 + 15\,\text{sen}\, A^4 \cos A^2 - \text{sen}\, A^6$

&c. &c.

70 XV. $\text{tang}\, 2A = \frac{2R^2\, \text{tang}\, A}{R^2 - \text{tang}\, A^2}$ (n. 42.) $= \frac{2R^2}{\cot A - \text{tang}\, A}$.

$\text{tang}\, 3A = \frac{3R^2\, \text{tang}\, A - \text{tang}\, A^3}{R^2 - 3\,\text{tang}\, A^2}$

$\text{tang}\, 4A = \frac{4R^4\, \text{tang}\, A - 4R^2\, \text{tang}\, A^3}{R^4 - 6R^2\, \text{tang}\, A^2 + \text{tang}\, A^4}$

tang

$$tang\,5A = \frac{5R^4 tangA - 10R^2 tangA^3 + tangA^5}{R^4 - 10R^2 tangA^2 + 5 tangA^4}$$

&c. &c

71. XVI. $cot\,2A = \frac{cotA^2 - R^2}{2cotA} = \frac{cotA - tangA}{2}$

$$cot\,3A = \frac{cotA^3 - 3R^2 cotA}{3cotA^2 - R^2}$$

$$cot\,4A = \frac{cotA^4 - 6R^2 cotA^2 + R^4}{4cotA^3 - 4R^2 cotA}$$

$$cot\,5A = \frac{cotA^5 - 10R^2 cotA^3 + 5R^4 cotA}{5cotA^4 - 10R^2 cotA^2 + R^4}$$

&c. &c.

72. XVII. $2senA^2 = R^2 - Rcos2A$ (n. 39.) $= sen2A\,tangA$ (n. 30.)

$4senA^3 = 3R^2 senA - R^2 sen3A$

$8senA^4 = 3R^4 - 4R^3 cos2A + R^3 cos4A$

$16senA^5 = 10R^4 senA - 5R^4 sen3A + R^4 sen5A$

$32senA^6 = 10R^6 - 15R^5 cos2A + 6R^5 cos4A - R^5 cos6A$

&c. &c.

73. XVIII. $2cosA^2 = R^2 + Rcos2A$ (n. 39.) $= sen2A\,cotA$ (n. 30.);

$4cosA^3 = 3R^2 cosA + R^2 cos3A$

$8cosA^4 = 3R^4 + 4R^3 cos2A + R^3 cos4A$

$16cosA^5 = 10R^4 cosA + 5R^4 cos3A + R^4 cos5A$

$32cosA^6 = 10R^6 + 15R^5 cos2A + 6R^5 cos4A + R^5 cos6A$

&c. &c.

74. XIX. $R + senA = \frac{2cos\frac{1}{2}comp.A^2}{R} = \frac{cosA\,cot\frac{1}{2}comp.A}{R}$ (n. 31.);

75. XX. $R - senA = \frac{2sen\frac{1}{2}comp.A^2}{R} = \frac{cosA\,tang\frac{1}{2}cõp.A}{R}$ (n. 31.);

76. XXI. $R + cosA = \frac{2cos\frac{1}{2}A^2}{R} = \frac{senA\,cot\frac{1}{2}A}{R}$ (n. 30.);

77. XXII. $R - cosA = \frac{2sen\frac{1}{2}A^2}{R} = \frac{senA\,tang\frac{1}{2}A}{R}$ (n. 30.);

78. XXIII. $R + tangA = \frac{R^2 cos(45^\circ - A)}{cos45^\circ cosA}$ (n. 46.).

79. XXIV. $R - tangA = \frac{R^2 sen(45^\circ - A)}{cos45^\circ cosA}$ (n. 46.).

80. XXV.

80. XXV. $R + cotA = \frac{R^2 cof(45^\circ - A)}{fen\,45^\circ fenA}$ (n. 46.);

81. XXVI. $cotA - R = \frac{R^2 fen(45^\circ - A)}{fen45^\circ fenA}$ (n. 46.).

82. XXVII. $R + fecA = \frac{2cof\frac{1}{2}A^2}{cofA}$ (n.55.) $= \frac{tangA cot\frac{1}{2}A}{R}$ (n.30.)

83. XXVIII. $fecA - R = \frac{2fen\frac{1}{2}A^2}{cofA}$ (n.55.) $= \frac{tangA tang\frac{1}{2}A}{R}$ (n. 30.).

84. XXIX. $R + cofecA = \frac{2cof\frac{1}{2}comp.A^2}{fenA}$ (n. 55.);

85. XXX. $cofecA - R = \frac{2fen\frac{1}{2}compl.A^2}{fenA}$ (n. 55.).

86. XXXI $fenA + cofA = \frac{2fen45^\circ cof(45^\circ - A)}{R}$ (n. 54.);

87. XXXII. $cofA - fenA = \frac{2fen45^\circ fen(45^\circ - A)}{R}$ (n. 54.);

88. XXXIII. $fenA + tangA = \frac{(R + cofA)\,tangA}{R} = \frac{2tangA cof\frac{1}{2}A^2}{R^2}$.

89. XXXIV. $tangA - fenA = \frac{(R - cofA)tangA}{R} = \frac{2tangA fen\frac{1}{2}A^2}{R^2}$;

90. XXXV. $cofA + cotA = \frac{(R + fenA)cotA}{R} = \frac{2cotA cof\frac{1}{2}comp.A^2}{R^2}$.

91. XXXVI. $cotA - cofA = \frac{(R - fenA)\,cotA}{R} = \frac{2cotA fen\frac{1}{2}comp.A^2}{R^2}$.

92. XXXVII. $tangA + cotA = \frac{2R^2}{fen2A}$ (n.46.) $= 2cofec2A$ (n. 26.));

93. XXXVIII. $cotA - tangA = 2cot2A$ (n. 46.).

94. XXXIX. $fecA + tangA = cot\frac{1}{2}compl.A$ (n. 32.);

95. XL. $fecA - tangA = tang\frac{1}{2}compl.A$ (n. 32.).

96. XLI. $cofecA + cotA = cot\frac{1}{2}A$ (n. 32.);

97. XLII.

97. XLII. $\operatorname{cosec} A - \cot A = \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ (n. 32.).

98. XLIII. $\sec A + \operatorname{cosec} A = \frac{4 \operatorname{sen} 45^\circ \cos(45^\circ - A)}{\operatorname{sen} 2A}$ (n. 55.).

99. XLIV. $\operatorname{cosec} A - \sec A = \frac{4 \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen}(45^\circ - A)}{\operatorname{sen} 2A}$ (n. 55.).

100. XLV. $\operatorname{sen}(A + B) = \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A}{R}$ (n. 34.).

101. XLVI. $\operatorname{sen}(A - B) = \frac{\operatorname{sen} A \cos B - \operatorname{sen} B \cos A}{R}$ (n. 34.).

102. XLVII. $\cos(A + B) = \frac{\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{R}$ (n. 35.).

103. XLVIII. $\cos(A - B) = \frac{\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{R}$ (n. 35.).

104. XLIX. $\operatorname{tang}(A + B) = \frac{R^2(\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B)}{R^2 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}$ (n. 41.) $= \frac{R2 + \operatorname{tang} B \cot A}{\cot A - \operatorname{tang} B}$.

105. L. $\operatorname{tang}(A - B) = \frac{R^2(\operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B)}{R^2 + \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}$ (n. 41.) $= \frac{R^2 - \operatorname{tang} B \cot A}{\cot A + \operatorname{tang} B}$.

106. LI. $\cot(A + B) = \frac{R^2(\cot A - \operatorname{tang} B)}{R^2 + \operatorname{tang} B \cot A}$ (n. 41.) $= \frac{R2 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B}$.

107. LII. $\cot(A - B) = \frac{R^2(\cot A + \operatorname{tang} B)}{R^2 - \operatorname{tang} B \cot A}$ (n. 41.) $= \frac{R^2 + \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B}$.

108. LIII. $\sec(A + B) = \frac{R \sec A \sec B}{R^2 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B} = \frac{\sec A \operatorname{cosec} B}{\cot B - \operatorname{tang} A}$ (n. 44.)

109. LIV. $\sec(A - B) = \frac{R \sec A \sec B}{R^2 + \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B} = \frac{\sec A \operatorname{cosec} B}{\cot B + \operatorname{tang} A}$ (n. 44.)

110. LV. $\operatorname{cosec}(A + B) = \frac{R \sec B \operatorname{cosec} A}{R^2 + \operatorname{tang} B \cot A} = \frac{\sec A \sec B}{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B}$ (n. 44.).

111. LVI. $\operatorname{cosec}(A - B) = \frac{R \sec B \operatorname{cosec} A}{R2 - \operatorname{tang} B \cot A} = \frac{\sec A \sec B}{\operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B}$ (n. 44.)

112. LVII. $$sen A + sen B = \frac{2\, sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)}{R}$$ (n. 47.)

113. LVIII. $$sen A - sen B = \frac{2\, cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) sen\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)}{R}$$ (n. 47.)

114. LIX. $$cos A + cos B = \frac{2\, cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)}{R}$$ (n. 48.)

115. LX. $$cos B - cos A = \frac{2\, sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) sen\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)}{R}$$ (n. 48.)

116. LXI. $$sen A + cos B = \frac{2\, sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2} compl.B\right) cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2} compl.B\right)}{R}$$ (n. 54.).

117. LXII. $$sen A - cos B = \frac{2\, cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2} compl.B\right) sen\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2} compl.B\right)}{R}$$ (n. 54.)

118. LXIII. $$tang A + tang B = \frac{R^2\, sen(A+B)}{cos A\, cos B}$$ (n. 45.).

119. LXIV. $$tang A - tang B = \frac{R^2\, sen(A-B)}{cos A\, cos B}$$ (n. 45.).

120. LXV. $$cot A + cot B = \frac{R^2\, sen(A+B)}{sen A\, sen B}$$ (n. 45.).

121. LXVI. $$cot B - cot A = \frac{R^2\, sen(A-B)}{sen A\, sen B}$$ (n. 45.).

122. LXVII. $$tang A + cot B = \frac{R^2\, cos(A-B)}{cos A\, sen B}$$ (n. 45.).

123. LXVIII. $$cot B - tang A = \frac{R^2\, cos(A+B)}{cos A\, sen B}$$ (n. 45.).

124. LXIX. $$sec A + sec B = \frac{2R\, cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)}{cos A\, cos B}$$ (n. 55.).

125. LXX. $$sec A - sec B = \frac{2R\, sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) sen\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)}{cos A\, cos B}$$ (n. 55.)

126. LXXI. $$cosec A + cosec B = \frac{2R\, sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)}{sen A\, sen B}$$ (n. 55.)

127

127. LXXII. $cosec\,B - cosec\,A = \frac{2R\,cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)\,sen\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)}{sen\,A\,sen\,B}$ (n. 55.)

128. LXXIII. $cosec\,A + sec\,B = \frac{2R\,sen\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\,compl.\,B\right)\,cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\,compl.\,B\right)}{sen\,A\,cos\,B}$
(n. 55.).

129. LXXIV. $sec\,B - cosec\,A = \frac{2R\,cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\,compl.\,B\right)\,sen\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\,compl.\,B\right)}{sen\,A\,cos\,B}$
(n. 55.)

130. LXXV. $sen\,A\,sen\,B = \frac{1}{2}R\,cos\,(A-B) - \frac{1}{2}R\,cos\,(A+B)$ (n. 36.).

131. LXXVI. $sen\,A\,cos\,B = \frac{1}{2}R\,sen\,(A-B) + \frac{1}{2}R\,sen\,(A+B)$ (n. 36.).

132. LXXVII. $cos\,A\,sen\,B = \frac{1}{2}R\,sen\,(A+B) - \frac{1}{2}R\,sen\,(A-B)$ (n. 36.).

133. LXXVIII. $cos\,A\,cos\,B = \frac{1}{2}R\,cos\,(A+B) + \frac{1}{2}R\,cos\,(A-B)$ (n. 36).

NB. Suppoem-se nestas Formulas, que os dous arcos A, e B, saõ menores que 90°. Quando forem maiores ter-se-há conta com o final dos cosenos, tangentes &c, segundo as Regras assima dadas (n. 19. e 20.).

Para se manifestar sensivelmente a homogeneidade dos termos, conservámos nellas o raio denotado sempre pela letra R. Porém como este costuma suppor-se igual á unidade, para maior facilidade dos calculos, póde nesta supposiçaõ omittir-se nos termos onde he factor, ou divisor, e nos mais escrever-se em lugar delle, ou das suas potencias, a unidade.

Combinando entre si as mesmas Formulas referidas, póde achar-se huma infinidade de outras, que omittimos. Por exemplo, dividindo a formula XXI pela formula XXII, teremos . . . .

$\frac{R + cos\,A}{R - cos\,A} = \frac{cos\,\frac{1}{2}A^2}{sen\,\frac{1}{2}A^2} = \frac{cot\,\frac{1}{2}A^2}{R^2}$ (n. 29.), e assim das mais.

Das Taboas dos senos, tangentes, e secantes, e do uso dellas.

134 SUpposta a relaçaõ de grandeza, que a Geometria nos tem mostrado nas linhas, que chamamos senos, tangentes &c, imaginemos que a quarta parte da circunferencia BF (Fig. 3.) está dividida

vidida de minuto em minuto, isto he, em 5400 partes iguais, e que de cada ponto de divisaõ estaõ tiradas as perpendiculares, ou senos, como AP, sobre o raio BC; imaginemos tambem, que o mesmo raio BC está dividido em hum grande numero de partes iguais v.g. em 10000000. He manifesto, que cada huma das perpendiculares ha de conter hum certo numero daquellas partes do raio; e que sendo huma vez calculado o numero de partes, que compete a cada huma das mesmas linhas, podem estas servir para fixar e determinar a grandeza dos angulos. De sorte, que tendo escrito por ordem em huma columna todos os minutos de 0° até 90°, se de fronte de cada hum se puzesse o numero das partes da perpendicular, ou seno, que lhe corresponde, por meio desta Taboa se podia conhecer o numero de gráos e minutos de hum angulo, sendo conhecido o valor do seu seno; e o valor do seno, sendo dada a grandeza do angulo.

135 Tambem era facil de ver, que sendo calculada huma Taboa semelhante, naõ seria util sómente para os angulos, cujo raio fosse o mesmo que nella se suppoz, mas tambem para outros quaisquer, cujo raio fosse conhecido.

Supponhamos, por exemplo, hum angulo DCG (Fig.8.) comprehendido pelo arco DG, cujo raio CD seja de 8 pés, e a perpendicular DE de 3 pés. Supponhamos tambem, que CA he o raio para o qual foi calculada a sobredita Taboa; e imaginando descrito o arco AB, e tirada a perpendicular AP, esta será o seno que na mesma Taboa corresponde ao angulo DCG, ou DCE. Isto supposto he facil de achar o valor da dita perpendicular em partes do raio; porque sendo semelhantes os triangulos CDE, CAP, por serem parallelas as rectas DE e AP, teremos CD: DE::CA:AP (4.6.Eucl.), isto he, $8^p:3^p::10000000:$ AP. Assim acharemos (Arith. n. 179.), que AP he de de 3750000 partes; e buſcando eſte numero entre os ſenos da Taboa, ao lado delle acharemos os gráos e minutos do angulo DCE, 22° 1′ 27,″5.

Reciprocamente, dando-ſe o angulo DCG, e o ſeu raio CD, ſe determinaria do meſmo modo a perpendicular DE. Porque com o angulo dado ſe acharia na Taboa o valor da perpendicular, ou ſeno correſpondente AP; e entaõ, em virtude dos meſmos triangulos ſemelhantes, teriamos CA:AP::CD: DE, e ſe calcularia o quarto termo, ſendo conhecidos os outros tres, a ſaber, CA, e AP por meio da Taboa, e CD por ſer dado em pés. No meſmo exemplo, ſendo DCE = 22° 1′ 27,″5, e CD = 8ᵖ, achariamos 10000000 : 3750000 :: 8ᵖ : DE, e conſeguintemente DE = 3ᵖ.

Agora ſe entenderá, que os ſenos ſaõ as linhas, que no principio diſſemos podiaõ fazer as vezes dos angulos no calculo dos triangulos (n.8.). As tangentes, e as ſecantes, das quais ſe uſa algumas vezes, ſervem tambem para o meſmo fim; como he facil de moſtrar com exemplos ſemelhantes ao precedente.

136 Os livros pois, que contém os valores numericos das referidas linhas, ſaõ os que ſe intitulaõ *Taboas dos Senos*. Eſtas de ordinario naõ ſomente contém os ditos valores numericos, que ſaõ os *ſenos*, e *tangentes naturais*, mas tambem os ſeus Logarithmos, que ſe chamaõ *ſenos*, e *tangentes artificiais*, e alem diſſo os Logarithmos dos numeros de 1 até 10000, ou 20000. Em algumas ediçoens ſe tem dado ſomente os ſenos, e tangentes artificiais, porque deſtes ſe uſa com preferencia no calculo dos triangulos, pela raſaõ de facilitarem muito as operaçoens; e quando ſeja preciſo alguma vez ſaber o ſeno, ou tangente natural de qualquer angulo, ſem difficuldade ſe acha por meio do ſeno ou tangente artificial, na Taboa dos Logarithmos dos numeros.

137 Antes de moſtrarmos o uſo deſtas Taboas na Reſoluçaõ dos Triangulos, ſerá bem que digamos alguma couſa da ſua formaçaõ, expondo o methodo pelo qual ſe calcuiáraõ, ou podiaõ calcular os valores numericos dos ſenos, tangentes &c.

Suppoſto o raio de 1000000 partes, o ſeno de 30° ſerá 500000 (n. 22.), e com o raio e o ſeno deſte arco ſe achará o ſeu coſeno. Porque ſendo o quadrado do raio igual á ſoma dos quadrados do ſeno e coſeno, ſerá o quadrado do coſeno igual á differença dos quadrados do raio e do ſeno, e conſeguintemente o coſeno igual á raiz quadrada da dita differença. Aſſim do quadrado do raio, que he 1000000000000, tirando o quadrado do ſeno de 30° que he 250000000000, ficará o reſto 750000000000, cuja raiz 866025 he o coſeno de 30°.

138 Com o ſeno e coſeno de 30° ſe podia buſcar o ſeno e coſeno de 15°. Porque tirando, e ajuntando ao raio o coſeno de 30°, multiplicando a differença, e a ſoma por ametade do raio, e extrahindo a raiz quadra dos dous productos, teriamos 258819, e 965926, ſeno e coſeno de 15° (n. 30.). E com eſtes ſe achariaõ conſecutivamente da meſma maneira os de 7° 30′; 3°45′; 1°52′30″; 0° 56′ 15″; 0° 28′ 7,″5; 0° 14′ 3,″75; 0° 7′ 1,″875; 0° 3′ 30,″9375; 0 1′ 45,″46875 &c.

139 Iſto ſuppoſto, he de advertir, que ſendo os arcos muito pequenos, naõ differem ſenſivelmente dos ſeus ſenos, e ſaõ conſeguintemente proporcionais aos meſmos ſenos. Pelo que, para achar o ſeno de 1′, póde fazer-ſe eſta proporçaõ: *Como o arco de 0° 1′ 45″, 46875 he para o arco de 0° 1′, aſſim o ſeno do primeiro para o do ſegundo.* Neſtas operaçoens devem os ſenos calcular-ſe com as letras decimais que baſtarem, para que os reſultados finais ſejaõ exactos até a caſa das unidades.

140 De 1′ até 10′ (na ſuppoſiçaõ de naõ ſer o

raio

raio de mais que 1000000 partes) baſtaria multiplicar o ſeno de 1′ por 2, 3 &c. para ter os ſenos de 2′, 3′, &c. De 10′ para ſima ſeria neceſſario uſar da Propoſiçaõ aſſima demonſtrada (n 33.), e ſe abbreviaria o trabalho conſideravelmente naõ uſando della ſenaõ de 10 em 10 minutos. Porque eſtes intervallos ſe encheriaõ buſcando a differença entre os dous ſenos immediatos, e praticando eſta regra de proporçaõ: *Como 10′ para o numero intermedio de minutos, aſſim a differença dos ſenos calculados para a differença entre o menor e o ſeno procurado.* Aſſim v. g. tendo achado para 16° 20′ o ſeno 281225, e para 16° 30′ o ſeno 284015, ſe quizeſſemos o ſeno de 16° 27′, praticariamos eſta regra 10′ : 7′ : : 2790 : ?, e ajuntando o quarto termo 1953 ao ſeno de 16° 20′ teriamos 283178 ſeno de 16° 27′, e aſſim dos mais.

A raſaõ deſta pratica he, porque ſendo o arco KL (Fig. 9.) muito pequeno v. g. de 10′, as differenças L*m*, *m n* dos ſenos LH, GI, ſaõ proximamente proporcionais ás differenças KL, KI, dos arcos correſpondentes AL, AI, porque os triangulos K*n*L, I*m*L, podendo ſer conſiderados como rectilineos, ſaõ ſemelhantes.

Naõ devia com tudo praticar-ſe eſte methodo para o fim do quadrante. Entaõ naõ ſe póde tomar *i u* pela differença dos ſenos PB, Q*x*; porque a quantidade *u x*, por pequena que ſeja, tem huma raſaõ ſenſivel com *i u*, e tanto mais ſenſivel quanto o arco AB ſe chega mais para 90°. Porém neſte caſo podemos ter outro recurſo, reflectindo que as linhas DE, D*t*, que ſaõ as differenças entre o raio e os ſenos PB, Q*x*, ſaõ na raſaõ duplicada das cordas DB, D*x*, (ou dos arcos DB, D*x*, por ſerem eſtes muito pequenos, e por conſeguinte proporcionais ſenſivelmente ás meſmas cordas); pois conſta dos Elementos, que os quadrados das cordas

DB,

DB, D x, saõ respectivamente iguais aos rectangulos comprehendidos pelo dobro do raio CD, e pelas rectas DE, e Dt (Cor. 8. 6. Eucl.); porém estes rectangulos saõ na rasaõ de DE para Dt (1.6. Eucl.): logo será DE para Dt como o quadrado de DB para o de D x.

Assim tendo calculado o seno de 89°, e querendo saber o seno de qualquer outro arco entre 89° e 90°, faremos esta proporçaõ: *Como o quadrado do complemento de 89° he para o quadrado do complemento do arco proposto, assim a differença entre o raio e o seno de 89°, para a differença entre o raio e o seno do arco proposto.* Por exemplo, tendo achado que o seno de 89° he 9998477, e querendo saber o de 89° 27′, faremos esta proporçaõ $(60')^2 : (33')^2 :$ 1523 : ?, ou 3600 : 1089 :: 1523 : ? pela qual acharemos o quarto termo 461, e diminuindo-o do raio teremos 9999539 por seno de 89° 27′, como se acha com effeito nas Taboas.

141 Sendo calculados os senos de 1′ até 90°, com elles se podiaõ calcular facilmente as tangentes, e secantes, pois temos já mostrado, que o coseno he para o seno como o raio para a tangente (n. 29.); e que o coseno he para o raio, como o raio para a secante (n. 26.). Porém das secantes raras vezes se usa, bastando para todos os calculos Trigonometricos os senos, e as tangentes; e por isso nas ediçoens modernas das Taboas se supprimiraõ as secantes.

142 Conhecidos os valores numericos dos senos, os seus Logarithmos se podiaõ achar como os dos numeros naturais (Arith. n. 220.). E com os Logarithmos dos senos se determinariaõ facilmente os das tangentes e secantes, practicando as proporçoens que acabamos de indicar (Arith. n. 223.).

He porém de advertir, que tomando nas Taboas

boas o valor numerico de qualquer ſeno ou tangente, e buſcando o ſeu Logarithmo na Taboa dos Logarithmos dos numeros naturais (Arith. n.239.), naõ acharemos exactamente o meſmo que eſtá na coluna dos Logarithmos dos ſenos, e tangentes. A raſaõ he, porque os ſenos foraõ originalmente calculados para o raio de 10000000000 partes; e naõ ſendo para os calculos ordinarios neceſſaria taõ grande exactidaõ, nas Taboas actuais ſe ſupprimiraõ as tres ultimas letras em todos elles. Naõ ſe fez o meſmo porém com os ſeus Logarithmos. Conſervaraõ-ſe tais como foraõ calculados para o raio ſuppoſto de 10000000000 partes; e por iſſo tem huma characteriſtica maior do que pediaõ os valores numericos dos ſenos e tangentes, que actualmente lhes correſpondem. Aſſim, uſando dos Logarithmos, calculamos na ſuppoſiçaõ tacita de que o raio he de 10000000000 partes; e uſando dos ſenos e tangentes naturais, na ſuppoſiçaõ de que o raio he de 1000000 partes ſómente.

Advirta-ſe tambem, que hoje para maior facilidade dos calculos ſe conſidera o raio igual á unidade, e os ſenos ſe exprimem por fracçoens decimais. Felizmente ſervem a eſte fim as meſmas Taboas actuais, porque he manifeſto, que tendo por ſeno de 1° o numero 174524 na hypotheſe de ſer o raio 10000000, ſe fizermos o raio igual á unidade, ſerá o dito ſeno 0,0174524. Deſte modo os Logarithmos dos ſenos, e tangentes, que ſe achaõ nas Taboas involvem conſeguintemente hum complemento arithmetico, ou tem na characteriſtica huma dezena de mais, do que convinha ao valor numerico, que lhes correſponde; complemento, que nos calculos ſe deve tratar, conforme as regras que explicamos na Arithmetica (n. 248. e ſeg.)

De muitos outros modos ſe podiaõ calcular os ſenos e tangentes de 1′ a té 90°, uſando de differentes

tes meios, que offerece a Geometria Elementar. O que temos expoſto, he ſomente a fim de dar huma idéa da conſtrucçaõ das Taboas; porque ſe foſſe neceſſario repetir eſte trabalho, naõ uſariamos hoje ſenaõ dos meios deſcubertos pela Analyſe, os quais ſaõ incomparavelmente mais breves, e expeditos.

143 Como o ſeno de hum arco he ametade da corda do arco duplo (n. 21.), ſe continuaſſemos o calculo aſſima indicado (n. 138.) até achar o ſeno de 1'', cujo dobro ſeria a corda de 2'', e multiplicaſſemos eſta corda pelo numero das vezes que a ſemicircunferencia contém a 2'', he manifeſto que teriamos hum numero muito proximo ao valor da ſemicircunferencia, porem mais pequeno do que ella. E ſe com o ſeno de 1'', e o ſeu coſeno (n. 137.) calculaſſemos a ſua tangente (n. 141.) e multiplicaſſemos o dobro della pelo numero das vezes que a ſemicircunferencia contém a 2'', he igualmente manifeſto, que teriamos hum numero muito chegado ao valor da meſma ſemicircunferencia, maior porém do que ella. Donde ſe vê, que pelo calculo dos ſenos e tangentes ſe podia approximar mais e mais a raſaõ do diametro para a circunferencia, ſe naõ foſſem conhecidos outros meios mais expeditos, que explicaremos em outro lugar. Com effeito pelo methodo que acabamos de indicar ſe acharia, q̃ ſendo o raio de 10000000000, a ſemicircunferencia ſeria entre 31415926535 e 31415926536. Por conſeguinte ſendo o raio 1, os 180° da ſemicircunferencia valem 3,1415926535, hum gráo 0,0174532925 2, hum minuto primeiro 0,000290888208, e hum ſegundo 0,000004848 1368 &c. O arco igual ao raio he de 57°,295779513, ou de 57°17'44'',806, ou de 206264,''806247. Referimos aqui eſtes numeros, porque he neceſſario fazer uſo delles muitas vezes.

144 Ain-

144 Ainda que as Taboas ordinarias naõ daõ os ſenos, ſenaõ de minuto em minuto, pelas partes proporcionais conheceremos os ſenos que correſpondem aos ſegundos intermedios, e iſto ſeguindo a meſma regra, que aſſima apontámos, para encher os intervallos de 10′ em 10′. Como porém em lugar deſtas linhas uſamos quaſi ſempre dos ſeus Logarithmos, ſobre elles nos demoraremos hum pouco com mais individuaçaõ.

145 Quando pois o arco, ou angulo propoſto, he juſtamente de gráos e minutos, nas Taboas acharemos immediatamente os Logarithmos do ſeu ſeno, e tangente; e reciprocamente. Porém ſendo dado hum angulo de gráos, minutos, e ſegundos, buſcaremos o Logarithmo do ſeno correſpondente aos gráos e minutos, e a differença entre elle e o Logarithmo ſeguinte, e faremos eſta proporçaõ: *Como 60″ para o numero propoſto dos ſegundos, aſſim a differença dos dous Logarithmos das Taboas, para a differença entre o primeiro delles, e o Logarithmo procurado.*

Ex. gr. Querendo o Logarithmo do ſeno de 28° 3′ 12″, buſcaremos nas Taboas o Logarithmo do ſeno de 28° 3′ que he 9,6723213, e a differença entre elle e o Logarithmo de 28° 4′ a qual he 2370, e diremos: Se 60″ daõ 2370, 12″ quanto daraõ? Praticando a regra, acharemos 474, que ajuntaremos ao Logarithmo 9,6723213, e ſerá 9,6723687 o Logarithmo do ſeno de 28° 3′ 12″.

146 Pelo contrario, ſendo dado o Logarithmo de hum ſeno que naõ correſponda exactamente a gráos e minutos, acharemos os ſegundos praticando eſta proporçaõ: *Como a differença dos dous Logarithmos das Taboas, entre os quais cabe o Logarithmo propoſto, para a differença entre eſte e o menor daquelles, aſſim 60″ para o numero dos ſegundos, que*

ſe

se haõ de ajuntar aos grãos e minutos indicados pelo mesmo Logarithmo proximamente menor.

Ex. gr. Sendo dado o Logarithmo de hum seno 9,9362547, nas Taboas acharemos que cahe entre os Logarithmos dos senos de 59° 42′ e 59° 43′, os quais tem entre si a differença 738, sendo a differença entre o menor delles e o Logarithmo dado 449. Assim diremos: Se a differença 738 dá 60″ a differença 449 quanto dará? e acharemos 36″,5; donde concluiremos, que o Logarithmo dado corresponde a 59° 42′ 36″,5.

147 As duas regras precedentes naõ devem praticar-se de 0° até 3°, porque no principio do quadrante as differenças dos Logarithmos dos senos diminuem rapidamente, e naõ se pódem suppôr proporcionais ás differenças dos senos, ou dos arcos, sem commetter erro sensivel. Neste caso, como os senos saõ sensivelmente proporcionais aos arcos correspondentes, será o arco proximamente menor das Taboas para o seu seno, como o arco dado para o seno que lhe compete, e resolvendo esta regra por Logarithmos (Arith. n. 232.). *Ao Logarithmo do seno do arco proximamente menor ajuntaremos o Logarithmo do arco proposto reduzido a segundos, e da soma tiraremos o Logarithmo do arco proximamente menor reduzido tambem a segundos; e o resto será o Logarithmo do seno que buscamos.*

Ex. gr. Se quizermos o Logarithmo do seno de 1° 55′ 48″, buscaremos nas Taboas o Logarithmo do seno do arco proximamente menor 1° 55′ que he 8,5243430, ao qual ajuntaremos o Logarithmo de 1° 55′ 48″ ou de 6948″ que he 3,8418598, e da soma 12,3662028 tiraremos o Logarithmo de 1° 55′ ou de 6900″ q̃ he 3,8388491, e o resto 8,5273537 será proximamente o Logarithmo do seno de 1° 55′ 48″.

148 Reciprocamente, para achar os grãos, minutos,

nutos, e ſegundos de hum arco menor do que 3° por meio do Logarithmo do ſeu ſeno: *Buſcar-ſe-ha primeiro nas Taboas o arco proximamente menor, e ſendo reduzido a ſegundos o ſeu Logarithmo ſe ajuntará ao Logarithmo do ſeno propoſto; da ſoma ſe tirará o Logarithmo do ſeno do meſmo arco proximamente menor, e o reſto ſerá o Logarithmo do numero dos ſegundos do arco procurado.*

Ex. gr. Sendo dado por Logarithmo de hum ſeno 8,1132110, nas Taboas acharemos que o arco correſpondente cahe entre 0° 44′, e 0° 45′. Pelo que, ajuntando ao Logarithmo dado o Logarithmo de 0° 44′, ou de 2640″, que he 3,4216039, teremos a ſoma 11,5348149; da qual tirando o Logarithmo do ſeno de 0° 44′ que he 8,1071669, o reſto 3,4276480 ſerá o Logarithmo de 2677″, e por conſeguinte o arco procurado 0° 44′ 37″.

149 Pelo que reſpeita aos Logarithmos das tangentes, ſeguir-ſe-haõ as meſmas regras, que temos dado para os dos ſenos. Sómente devem exceptuar-ſe os arcos, que cahirem entre 87° e 90°, nos quais ſe praticará deſta maneira: *Calcule-ſe o Logarithmo da tangente do complemento pelo modo que acabamos de dizer, o qual tirando-ſe do dobro do Logarithmo do raio, o reſto ſerá o Logarithmo da tangente que ſe pede.* A raſaõ diſto he, porque a cotangente he para o raio como o raio para a tangente (n. 26.).

Ao contrario, ſendo propoſto o Logarithmo de huma tangente, que cahindo entre 87° e 90° naõ correſpondeſſe juſtamente a gráos e minutos, tirar-ſe-hia do dobro do Logarithmo do raio, e o reſto ſeria o Logarithmo da tangente do complemento, o qual cahindo neceſſariamente entre 0° e 3° determinar-ſe-hia da maneira aſſima declarada; e tomando o complemento do arco aſſim achado, teriamos o arco procurado.

Saõ neceſſarias eſtas regras, ainda que de méra approximaçaõ, para ſe uſar das Taboas ordinarias ſem erro attendivel. Nos calculos porém, que requerem ſumma exactidaõ, devem procurar-ſe Taboas maiores, como ſaõ entre outras as de *Gardiner*, nas quais os Logarithmos dos ſenos e tangentes do principio do quadrante ſe achaõ calculados com exactidaõ de ſegundo em ſegundo, e no reſto de dés em dés ſegundos.

Da mediçaõ das linhas e dos angulos.

150 A Reſoluçaõ de hum triangulo ſuppoem neceſſariamente, como já diſſemos, o conhecimento de tres quaiſquer das ſuas partes, entrando ſempre nellas ao menos hum lado. Se a parte que ſe quer ſaber, pudeſſe ſempre determinar-ſe por huma mediçaõ actual, naõ ſeria a Trigonometria de utilidade alguma, antes ſeria hum rodeio trabalhoſo, porque ſe buſcaria por meio da mediçaõ de tres partes, e do calculo Trigonometrico, o valor de huma ſó, que pela mediçaõ ſe podia alcançar immediatamente. Succede porem, e iſto muitas vezes, que naõ he practicavel a mediçaõ actual da parte que ſe buſca; e neſſe caſo he de hum ſocorro admiravel a Trigonometria, porque nos facilita o conhecimento della, por meio da mediçaõ de quaiſquer tres partes do meſmo triangulo, que commodamente ſe puderem medir; mediçaõ, que neceſſariamente ha de preceder ao calculo. Por iſſo, antes de paſſarmos a moſtrar a reſoluçaõ dos triangulos, ſerá conveniente que expliquemos brevemente o methodo de medir tanto as linhas como os angulos.

151 As linhas naõ pódem medir-ſe, ſenaõ por outras linhas; e como a recta he a mais ſimples, e uniforme de todas, por ella ſe medem, naõ ſómente

mente as outras rectas, mas tambem as curvas. Medir huma linha recta, ou curva, ou qualquer distancia, he procurar quantas vezes ella contém huma linha recta determinada, que entaõ se considéra como unidade.

Esta unidade he absolutamente arbitraria, e por isso ha tanta variedade de medidas lineares em todas as Nasçoens, e tanta diversidade de grandeza nas que conservaõ o mesmo nome, cuja relaçaõ se achará no Livro *Connoissance des Temps*, que a Academia Real das Sciencias de Pariz faz imprimir todos os annos. As pequenas distancias costumaõ avaliar-se em *pés*, *passos*, *toesas &c*, as maiores em *estadios*, *milhas*, *leguas &c.* Neste Reino as medidas mais ordinarias saõ os *palmos* de *craveira*, *pés*, *varas*, e *braças*. O palmo divide-se em 8 *pollegadas*, a pollegada em 12 *linhas* &c; mas para maior commodidade póde dividir-se em 10 partes, cada huma destas em outras 10 &c. O pé tem palmo e meio, ou 12 pollegadas de craveira; a vara he de 5 palmos, e a braça commua de 10, e no uso da marinha de 8. A legua Portugueza naõ tem medida fixa; porém supponde, ao uso da marinha, que 18 leguas fazem hum grão, e que o valor de hum grão medio do meridiano terrestre he de 57010 toesas (sendo a braça para a toesa como 323 para 288) será o grão terrestre de 50832 braças; e por conseguinte a legua terá 2824 braças, a milha ou minuto 847 braças e 2 palmos, e o segundo 14 braças 1 palmo e $\frac{1}{5}$ de palmo. Donde, qualquer distancia dada em minutos será facil de converter em braças, e reciprocamente.

152 Para medir a distancia que se mete entre dous pontos, he necessario tirar de hum para o outro huma linha recta, e applicar sobre ella de huma

huma até á outra extremidade a medida, pela qual ſe pertende conhecer.

Sobre o papel tiraõ-ſe as linhas rectas por meio de huma *Regoa*, cuja exactidaõ ſe póde examinar, mudando-lhe as extremidades, e tornando-a a applicar ſobre a meſma linha, que por ella ſe traçou; e ſe naõ ajuſtar neſtas ſituaçoens contrarias, he ſinal de ter alguma tortuoſidade.

Sendo a diſtancia menor do que a medida, com a qual ſe ha de comparar, ou havendo reſto menor do que ella na mediçaõ das diſtancias maiores, he neceſſario recorrer ás diviſoens e ſubdiviſoens da meſma medida, as quais devem nella eſtar já marcadas com exacçaõ. Querendo, por exemplo, formar huma *Eſcala* de palmo craveiro, ſobre huma regoa de largura, e comprimento ſufficiente (Fig. 10.) ſe tirará huma linha indefinida C E, e do ponto C proximo á extremidade da regoa ſe conduzirá perpendicularmente a CE huma recta CD (de arbitraria grandeza, conforme a largura da regoa), a qual ſe dividirá em 10 partes iguais, e pelos pontos da diviſaõ ſe conduziráõ outras tantas parallelas a CE. Nas duas extremas CE, DF, produzidas, ſe tomarà deſde os pontos C, D, o comprimento do palmo, o qual ſe dividirá em 10 partes iguais, como AE, BF, e pelos pontos de diviſaõ ſe tiraráõ as rectas AB, EF &c, as quais marcaráõ em todas as parallelas a decima parte de hum palmo. A ultima deſtas partes ſe dividirá em outras 10 de B até D, e de A até C, cada huma das quais valerá huma centeſima do palmo, e ſe notaráõ com os numeros 1. 2. 3 &c, de huma e outra parte. Cada huma deſtas ſe divide finalmente em outras 10 por meio das tranſverſais A 1, 1 2, 2 3 &c (4. 6. Eucl.); e eſtas ultimas, cada huma das quais he huma milleſima do do palmo, basta que se notem na primeira transversal A 1 com os numeros 1. 2. 3. 4 &c.

Isto supposto, se na mediçaõ de huma linha tomassemos com o compasso o valor de hum palmo, e sobre ella o applicassemos duas vezes, e houvesse hum resto que tomado com o mesmo compasso ajustasse na Escala de K até *x*, sendo K *t* huma decima de palmo, *x* 3 (igual a A 7) sete centesimas, *t* 3 tres millesimas do mesmo palmo, a linha proposta seria de 2,173 palmos. Nas medidas, que requerem mais delicadeza, pódem tomar-se por estimaçaõ as decimas-millesimas do palmo, partindo mentalmente o intervallo das parallelas. Assim, suppondo *m p* de 10 partes, e julgando *m n* de 6, a recta *n z* valerá 0,1276 de hum palmo &c.

153 Sobre o terreno, sendo pequenas as distancias, tiraõ-se as linhas rectas por meio de hum cordel bem estendido; sendo grandes, he preciso fazer o alinhamento por meio do raio visual, fazendo pôr a pequenos intervallos entre as duas extremidades alguns meios piques ou bandeirolas, perpendiculares ao plano horizontal, e desorte que fiquem todos os intermedios encubertos á vista applicada aos extremos. Nas distancias parciais de cada intervallo se tiraõ as linhas ao cordel, livellando-as na direcçaõ das duas extremidades da distancia total. Quando de huma das extremidades se naõ puder ver a outra, será necessario recorrer a outro methodo, que depois ensinaremos.

154 Feito o alinhamento, sobre elle se vaõ applicando as medidas, que neste caso devem ser maiores, para facilitar mais a operaçaõ. Tendo v. gr. quatro regoas de pinho bem secco, por ser mais leve, bem oleadas ou envernizadas, para naõ empenarem com a humidade, e terminadas nas extremidades por chapas de metal exactamente planas, para se ajuntarem perfeitamente ao

longo

longo humas das outras, cada huma de 25 palmos de comprido sobre tres pollegadas de largura, e 2 de grossura, poderemos com ellas medir as maiores distancias. Primeiramente, começando de huma das extremidades, e ajuntando bem as quatro regoas humas com as outras na direcçaõ do alinhamento, se verificará o seu comprimento total, medindo-as com huma braça, e notando quanto tem actualmente de mais ou menos que 10 braças, e esta verificaçaõ se repetirá de espaço em espaço, principalmente sentindo alguma mudança na atmosfera. Depois, se iráõ mudando as regoas huma por huma sobre o alinhamento, e por cada lanço de 4 regoas se contaráõ 10 braças, e para naõ haver equivocaçaõ se iráõ pondo sinais no mesmo alinhamento. Em fim, do numero das braças que se medirem de espaço em espaço v. gr. de seiscentas em seiscentas, se tirará ou ajuntará o que as quatro regoas se acharem ter, pela verificaçaõ, de menos ou de mais que 10 braças, multiplicado pelo numero das vezes que ellas se applicáraõ; e assim por diante. Deste modo, havendo todas as cautelas, póde medir-se a distancia de duas mil braças sem commetter erro de dous palmos. Vejaõ-se sobre esta materia, as obras de *Cassini*, *La-Caille*, *Bouguer*, e outros que fizeraõ as grandes Operaçoens Geodesicas, relativas á mediçaõ e figura do Globo Terrestre.

155 Os angulos sobre o papel medem-se com hum pequeno instrumento, que se chama *Transferidor*. Este consiste (Fig. 11.) em hum semicirculo de lataõ, ou de vista de lanterna, que pela sua transparencia he de maior commodidade. No meio do diametro A B tem hum pequeno chanfro, para que o centro C se distinga melhor, e se applique mais justamente ao vertice dos angulos;

e a

e a circumferencia está dividida em 180° de B até A. Querendo pois saber o valor de qualquer angulo, applicar-se-há ao vertice delle o centro C do transferidor, ajustando o raio CB sobre hum dos lados do angulo proposto, e o outro lado produzido, se for necessario, passará por baixo da graduaçaõ, e nella mostrará os gráos do angulo proposto, tomando-se os minutos por estimaçaõ. E reciprocamente, querendo sobre hum ponto de huma linha recta formar hum angulo dado, sobre ella se ajustará o raio CB do transferidor, ficando o centro C sobre o ponto dado, e junto á circumferencia graduada se notará hum ponto no lugar indicado pelos gráos, que o angulo deve ter; levantando o transferidor, e tirando huma linha do ponto dado para o ponto sinalado, será feito o angulo dezejado. Para isto mesmo serve a *Escala das cordas*, o *Compasso de proporçaõ*, e outros instrumentos, que por menos simples deixamos de descrever neste lugar.

156 Sobre o terreno, o instrumento de que se usa na medida dos angulos, e com exactidaõ sufficiente ao fim da maior parte das operaçoens, he o *Grafómetro*, ou semicirculo dimensorio. Este se costuma fazer de lataõ, dividindo-se em 180°, e ainda em meios gráos, conforme a sua grandeza. O arco DHB (Fig. 12.), no qual se sinalaõ as divisoens, naõ he huma simples linha, mas huma coróa semicircular, que se chama *limbo* do instrumento. O diametro DB he fixo, e faz huma só peça com o limbo, no mesmo plano delle; porem o diametro EG, que se chama *alidáda*, he movediço ao redor do centro A, e com a sua extremidade G póde correr em roda todas as divisoens do limbo. Ambos estes diametros tem nas suas extremidades humas *pinnulas*, pelas quais se enfiaõ os objectos, que se observaõ. Saõ porem mais

perfeitos os que em lugar de pinnulas tem oculos de alcance, com dous fios encruzados no fóco commum das lentes. Este instrumento se arma sobre hum pé de tres pernas, e por meio de hum joelho com seu parafuso se póde inclinar, e accommodar á direcçaõ de qualquer plano, conforme for necessario, sem alterar a posiçaõ fixa do dito pé.

157 Para que o Grafometro sirva mais exactamente para a medida dos angulos, costuma ajuntar-se na extremidade da alidada huma divisaõ, a qual, pelo modo com que corresponde ás divisoens do limbo, mostra as partes de gráo de 5′ em 5′, ou de 4′ em 4′ &c. (A primeira idéa desta ingenhosa divisaõ foi attribuida ao Doutor Pedro Nunes, Lente de Mathematica nesta Universidade de Coimbra, e primeiro Cosmografo Mor do Reino; e porisso lhe deraõ os Estrangeiros o nome de *Nonnius*). Para fazer, que o *Nonnius* mostre, por exemplo, os minutos de 5 em 5, toma-se na extremidade da alidada, onde pela sua largura corresponde ao arco do limbo, hum intervallo de 11° do mesmo limbo, o qual se divide na alidada em 12 partes iguais, cada huma das quais valerá por conseguinte 55′. Entaõ, se a primeira divisaõ da alidada ajustar com qualquer divisaõ do limbo, será o angulo comprehendido pelos dous diametros, medido justamente pelos gráos indicados no limbo; porem se a primeira divisaõ da alidada naõ cahir em direitura com a divisaõ do limbo, buscar-se-ha entre as seguintes qual se chega mais a corresponder, e aos gráos indicados pelo limbo se ajuntaráõ tantas vezes 5 minutos, quantos forem os intervallos entre a primeira divisaõ da alidada, e a que se achar em direitura com a divisaõ do limbo; porque por cada intervallo ha 5′ de differença entre o limbo e a alidada.

Se quizessemos hum *Nõnnius*, que mostrasse os mi-

minutos de 4 em 4, tomariamos ſobre a alidada hum intervallo de 14°, e o dividiriamos em 15 partes iguais. Para indicar porém de minuto em minuto, ſeria neceſſario (por naõ dar largura deſproporcionada á regoa da alidada) que o limbo foſſe dividido de meio em meio grão, e entaõ ſe tomaria ſobre a extremidade da alidada o intervallo de 29 diviſoens do limbo, ou de 14° 30′, o qual ſe dividiria em 30 partes iguais. As diviſoens de *Nonnius* pódem eſtar de huma, e outra parte a reſpeito da primeira dellas, que correſponde ao centro do inſtrumento, e ſe chama tambem *linha de fé*, ou de huma parte ſómente; do que ſe fará idéa mais clara á viſta dos meſmos inſtrumentos, em que ellas ſe achaõ executadas.

158 Para medir pois hum angulo com eſte inſtrumento, v.gr. o angulo GAF (Fig. 12.) formado no ponto A pelas linhas AG, AF, dirigidas pelo raio viſual aos objectos G, F; poem-ſe o centro do Grafometro em A, e diſpoem-ſe o plano do limbo na direcçaõ do plano A, G, F. Entaõ, dirige-ſe o diametro fixo BD para hum dos objectos F, enfiando-o pelas pinnulas, ou reduzindo-o á ſecçaõ commua dos fios no campo do oculo, e ſe move a alidada EC, até que pelas ſuas pinnulas, ou oculo, ſe enfie da meſma maneira o outro objecto G; e o arco BC, comprehendido entre os dous diametros do inſtrumento, ſerá a medida do angulo GAF. He facil de ver, que uſando do meſmo inſtrumento ſe póde formar no terreno hum angulo dado, mandando andar em roda com huma bandeirola a certa diſtancia, e fazendo ſinal para ſe cravar no chaõ, aſſim que ſe enfiar pelas pinnùlas da alidada, applicada previamente ao limbo na diviſaõ competente.

159 Quando ſe houver de uſar do Grafometro para medir angulos no plano vertical, por-ſe-

há o instrumento na devida situaçaõ por meio do hum prumo, que se suspende no centro, e o fio delle deverá corresponder ao ponto de 90°, chegando quasi a tocar o limbo do mesmo instrumento.

Antes de fazer uso do Grafometro, he necessario verificar tanto a exactidaõ das divisoens, como a posiçaõ da linha de fé em ordem ao primeiro ponto da divisaõ. O modo de verificar as divisoens, mais natural e immediato, he por meio de hum compasso de pontas bem finas. E pelo que respeita ao primeiro ponto da divisaõ, he necessario que ajustando a alidada sobre elle, e olhando para hum objecto distante por ambos os oculos, se ajuste o mesmo ponto delle na intersecçaõ dos fios. Quando assim naõ succeda, se moverá a alidada até ajustarem, e notando entaõ o que ella aponta na graduaçaõ, se conhecerá a quantidade constante, que se deve ajuntar, ou tirar aos gráos, e minutos indicados pelo instrumento, na mediçaõ de qualquer angulo.

Resoluçaõ dos Triangulos Rectangulos.

160 NOs triangulos rectangulos, pela mesma condiçaõ de serem rectangulos, ha sempre huma parte dada, que he o angulo recto. E porque na resoluçaõ de qualquer triangulo se requer o conhecimento de tres partes, nas quais entre ao menos hum lado (n. 5.), no triangulo rectangulo além do angulo recto, será preciso conhecer duas cousas, entrando sempre nellas hum lado ao menos. Pelo que respeita aos dous angulos agudos, he de notar, que hum se determina pelo outro, porque ambos juntos devem fazer hum recto, e saõ complementos hum do outro; e em qualquer triangulo hum angulo he necessariamente supplemento dos outros dous; rasaõ porque realmen-

te naõ ſe daõ mais do que duas couſas, quando ſe daõ os tres angulos.

161 Donde ſe vê, que a reſoluçaõ dos triangulos rectangulos ſe reduz a quatro caſos: Porque ou ſe dá hum dos angulos agudos com hum dos lados adjacentes ao angulo recto; ou hum dos angulos agudos com o lado oppoſto ao angulo recto, o qual tem particularmente o nome de *Hypothenuſa*; ou hum dos dous lados com a hypothenuſa; ou os dous lados. Igualmente ſe vê, que em cada hum deſtes caſos ha duas partes que determinar; donde reſultaõ oito Problemas gerais, que comprehendem todas as queſtoens poſſiveis ſobre os triangulos rectangulos, cuja reſoluçaõ poderá ſempre reduzir-ſe aos dous Theoremas ſeguintes.

162 I. *Em todo o triangulo rectangulo, o raio he para o ſeno de qualquer dos angulos agudos, como a hypothenuſa para o lado oppoſto ao meſmo angulo.*

Seja o triangulo rectangulo CED (Fig. 8.), e na hypothenuſa CD tome-ſe a recta CA, que repreſente o raio das Taboas. Entaõ, imaginando o arco AB, a perpendicular AP ſerá o ſeno do angulo ACB, ou DCE (n. 13.). E porque ſaõ parallelas as rectas AP, DE, ſeraõ ſemelhantes os triangulos CAP, CDE, e por conſeguinte CA : AP : : CD : DE (4. 6. Eucl.), iſto he, R : *ſen* DCE : CD : DE. Do meſmo modo ſe provará, que R : *ſen* CDE : : CD : CE. Logo &c.

163 Como os dous angulos agudos do triangulo rectangulo ſaõ reciprocamente complementos hum do outro, manifeſtamente ſe ſegue da Propoſiçaõ precedente: Que *o raio he para o coſeno de qualquer dos angulos agudos, como a hypothenuſa para o lado adjacente ao meſmo angulo.*

164 II. *Em todo o triangulo rectangulo o raio he para*

para a tangente de qualquer dos angulos agudos; como o lado adjacente para o lado oppoſto ao meſmo angulo.

Seja o triangulo rectangulo CEF(Fig.13.), e tome-ſe no lado CE a parte CA, que repreſente o raio das Taboas. Levantando do ponto A a perpendicular AD, eſta ſerá a tangente do angulo C, ou FCE (n.15.); e ſendo ſemelhantes os triangulos CAD, CEF, teremos CA : AD : : CE : EF, iſto he, R : *tang* FCE : : *CE* : *EF*. Do meſmo modo ſe provará, que R : *tang* CFE : : EF : CE. Logo &c.

165 E porque os dous angulos agudos ſaõ entre ſi complementos, igualmente concluiremos: Que *no triangulo rectangulo o raio he para a cotangente de qualquer dos angulos agudos, como o lado oppoſto para o lado adjacente ao meſmo angulo.*

166 Na applicaçaõ deſtes principios aos quatro caſos aſſima ditos, he manifeſto, que temos de praticar a regra de tres, a qual executaremos por meio dos Logarithmos, e iſto uſando ſempre do complemento arithmetico do Logarithmo do primeiro termo, por ſer o methodo mais expedito (Arith. n. 252.).

Como nas analogias precedentes entra ſempre o raio, e o Logarithmo deſte he 10,0000000, cujo complemento he 0,0000000, he eſcuſado eſcrevello, quando o raio ſervir de primeiro termo na proporçaõ. Tambem he eſcuſado eſcreve.lo, quando naõ for o primeiro termo; porque neſſe caſo naõ ſerviria de mais, que de ajuntar huma dezena á characteriſtica da ſoma, e eſſa recompenſa juſtamente a que ſe havia de deſprezar, por ter entrado tacitamente de mais no complemento do primeiro termo. Deſte modo a reſoluçaõ dos triangulos rectangulos ſe reduz á ſoma de dous Logarithmos, como ſe vê nos exemplos ſeguintes.

167 Exemplo I. *Determinar a altura AC de hu-*

ma

ma torre (Fig. 14.), *por meio de medidas tomadas ſobre o terreno.*

Eſcolha-ſe no terreno adjacente, que ſuppomos eſtar no plano horizontal, hum ponto D em tal diſtancia, que o angulo formado pelas duas linhas, que ſe imaginaráõ tiradas do meſmo ponto D para a baſe e vertice da torre, nem ſeja muito agudo, nem muito chegado a recto. Medida a diſtancia CD, no ponto D ſe fixará o pé do Grafometro; e diſpondo o inſtrumento verticalmente, e dirigindo-o para o meio da torre AC, de ſorte que o diametro fixo HF eſteja horizontal (n. 159.), mover-ſe-ha a alidada até que pelo oculo, ou pinnulas, ſe enfie o vertice da torre A; e a diviſaõ do inſtrumento moſtrará o angulo FEG, e conſeguintemente o que lhe he verticalmente oppoſto AEB.

Sendo pois a altura AC perpendicular ao plano horizontal, no triangulo ABE, alem do angulo recto em B, conhecemos pela mediçaõ actual o angulo AEB, e o lado BE igual a CD, e procuramos ſaber o outro lado AB. Aſſim eſtamos no caſo do Theorema ſegundo (n. 164.), e teremos R : *tang*AEB : : BE : AB.

Supponhamos, que ſe achou CD, ou BE, de 132 palmos, e AEB de 48° 54′. Será entaõ a analogia R : *tang*48° 54′ : : 132^p : AB. Donde, uſando dos Logarithmos, obraremos do modo ſeguinte:

Log. *tang* 48° 54′ - - - - - 10,0593064
Log. 132^p - - - - - - - - 2,1205739

Log. de AB - - - - 2,1798803; ao qual coreſponde nas Taboas o numero 151,314. Pelo que ſerá AB de 151 palmos e 2 pollegadas e meia proximamente, e ajuntando-lhe a quantidade BC igual á altura do inſtrumento DE, teremos a altura total AC.

Se com os meſmos dados quizeſſemos ſaber a diſtan tancia AE, deveriamos (n. 163.) praticar a analogia *cos* 48° 54′ : R : : 132^P : AE, como aqui se mostra:

CL. *cos*. 48° 54′ - - - - - - 0,1821867
Log. 132^P - - - - - - - - 2,1205739
Log. AE - - - - - - - 2,3027606; E por

conseguinte achariamos AE de 200^P,8 proximamente.

168 Exemplo II. *Dada a distancia de dous lugares A, B* (Fig. 15.), *e o rumo a que demóra hum delles B a respeito do outro A, determinar a sua differença de latitude AC, e de longitude BC.*

Sendo AM a linha meridiana, que passa pelo lugar A, e imaginando tirada do lugar B a perpendicular BC, será AC a differença de latitude dos dous lugares. Assim tendo medido a linha AB, e observado o angulo do rumo, ou da sua posiçaõ a respeito da meridiana MAB, no triangulo rectangulo ABC teremos R : *cos* CAB : : AB : AC. (n. 163.).

Suppondo, que CAB se achou de 52° 8′, e AB de 2572 braças, a operaçaõ se fará deste modo:

Log. *cos* 52° 8′ - - - - - - - - 9,7880453
Log. 2572^{br} - - - - - - - - 3,4102710
Log. AC - - - - - - - 3,1983163; donde

será AC de 1578^{br},76, e por conseguinte a differença de latitude 1′51″,8 (n. 151.).

Com os mesmos dados se determinará a differença de longitude CB, fazendo R : *sen*. CAB : : AB : BC (n. 162.), ou na supposiçaõ precedente R : *sen* 52° 8′ : : 2572^{br} : BC.

Log. 2572^{br} - - - - - - - - 3,4102710
Log. *sen* 52° 8′ - - - - - - - 9,8973199
Log. BC - - - - - - - 3,3075909; e BC

será de 2030^{br},44.

Porém este valor de BC naõ póde converter-se ter-se em minutos, como a differença da latitude, se os lugares naõ estiverem perto do Equador; porque a differença geodesica de longitude BC está sensivelmente sobre o parallelo que passa por B, e os parallelos saõ cada vez menores do Equador para os Polos, na rasaõ dos cosenos da latitude. Por isso deveremos aumentar BC na rasaõ do coseno da latitude para o raio, o que se faz ajuntando ao seu Logarithmo o complemento do coseno da latitude, e teremos a differença de longitude contada em hum circulo maximo, a qual se converterá em minutos como a latitude (n. 151.).

Se v. gr. estivessemos no parallelo de 40°, á differença achada BC de 2030,^{br}44 corresponderia no Equador a differença 2650,^{br}56; e esta convertida em minutos dá 3′ 7″,7 (n. 151.) por differença de Longitude Geografica entre os lugares A, B.

169 Exemplo III. *Dada a distancia de dous lugares A, B (Fig. 15.), e a sua differença de latitude AC, achar o angulo de posiçaõ BAC, e a differença de longitude BC.*

Na primeira parte desta questaõ teremos a combinaçaõ da hypothenusa com hum dos lados e o angulo adjacente, donde será AB : AC :: R : *cos* BAC (n. 163.); e supponda, como no Exemplo precedente, AB = 2572^{br}, e AC = 1578^{br},76, será 2572 : 1578,76 :: R : cosBAC. Donde

CL. 2572 - - - - - 6,5897290
Log. 1578,76 - - - - 3,1983163
Log. *cos*BAC - - 9,7880453; e BAC = 52° 8′

Na segunda parte, temos a combinaçaõ da hypothenusa com os dous lados; e esta naõ entra immediatamente nos dous Theoremas assima demonstrados. Por isso, se quizermos fazer uso delles, com os dados da questaõ buscaremos como na primeira parte o angulo BAC, e depois com a hypothenuthenusa AB e o angulo calculado BAC, buscaremos o lado BC, como na segunda parte do Exemplo precedente.

170 Porem com os mesmos dados podemos achar immediatamente o lado BC, reflectindo que BC he meia proporcional entre a soma e a differença das rectas AB, AC (n. 24.); e como temos no caso figurado AB+AC = 4150,76, e AB—AC=993,24, praticaremos desta maneira (Arith. n. 178. 227. 230.).

Log. 4150,76	- - - - -	3,6181276
Log. 993,24	- - - - -	2,9970542
Soma	- - - -	6,6151818

Semisoma - - 3,3075909, ou Log. de BC, que se achará como assima, de 2030^{br},44.

171 Exemplo IV. *Dadas as differenças de latitude, e de longitude de dous lugares A, B* (Fig. 15.), *determinar o angulo do rumo a que demórao, e a sua distancia.*

Pelo que respeita á primeira parte, concorrem os dous lados com hum angulo, e teremos AC : BC :: R : *tang*BAC (n. 164.); e sendo AC= 1578^{br},76, e BC=2030^{br},44, praticaremos deste modo:

CL. 1578,76	- - - -	6,8016837
Log. 2030,44	- - - -	3,3075909
Log.*tang*BAC	- -	10,1092746; e BAC=52° 8′.

Para resoluçaõ da segunda parte, será primeiro necessario buscar o angulo BAC, como acabamos de fazer, e depois com elle e hum dos lados determinar a hypothenusa AB (n. 162. 163.).

172 Este ultimo caso póde resolver-se, sem usar de Trigonometria, *somando os quadrados dos lados, e extrahindo a raiz quadrada da soma* (47. 1. Eucl.). Assim, tendo AC=1578,56, e BC=2030,44, quadra-

draremos estes dous numeros, que daraõ 2492484, e 4122700; de cuja soma 6615184, extrahindo a raiz quadrada teremos 2572^{br}, valor da hypothenusa AB.

Resoluçaõ dos Triangulos Obliquangulos.

173 POr *Triangulos Obliquangulos* entendemos aqui todos aquelles, que ou naõ tem, ou naõ sabemos que tenhaõ angulo recto.

A resoluçaõ delles se reduz a quatro casos gerais; porque, *ou se dá hum lado com dous angulos*; *ou dous lados com o angulo opposto a hum delles*: *ou dous lados com o angulo comprehendido*; *ou os tres lados*; aos quais se satisfará por meio dos Theoremas seguintes.

174 *Em todo o triangulo rectilineo os lados saõ entre si como os senos dos angulos oppostos.*

Seja o triangulo ABC (Fig. 16.), ao qual se entenda circunscrito o circulo ABC, e para o centro delle D tirados os raios AD, BD, CD. Com o intervallo D*b* igual ao raio das Taboas imaginese descrito o circulo *abc*, e juntos os pontos de intersecçaõ pelas cordas *ab*, *bc*, *ac*.

Isto supposto, he facil de ver, que sendo iguais as rectas *Aa*, e B*b*, saõ proporcionais ás rectas *Da*, *Db*, tambem iguais entre si (7. 5. Eucl). Logo será *a b* parallela a AB (2. 6. Eucl.), e pela mesma rasaõ *b c* parallela a BC, e *a c* parallela a AC; e por conseguinte será o angulo D*ba* igual a DBA, e D*bc* igual a DBC (29. 1. Eucl.), e o angulo total *a b c* igual ao total ABC, e pela mesma rasaõ *acb* igual a ACB, e *b a c* igual a BAC. Logo os triangulos *a b c*, e ABC, saõ entre si equiangulos, e conseguintemente teremos $AB : BC :: ab : bc$ (4. 6. Eucl.), ou $AB : BC :: \frac{1}{2} ab : \frac{1}{2} bc$ (15. 5. Eucl.). Porem $\frac{1}{2} ab$,

ou

ou *a i* he o ſeno do arco *a b*, ou do angulo *aDi*, e o angulo *aDi* he igual ao angulo *acb*, por ſer cada hum delles ametade do angulo *aDb* (20.3.Eucl.), e temos moſtrado que o angulo *ACB* he igual ao angulo *a c b*; logo $\frac{1}{2}$*a b* ſerá o ſeno do angulo ACB, e pela meſma raſaõ $\frac{1}{2}$ *bc* o ſeno do angulo BAC; logo *AB* : *BC* : : *ſen*ACB : *ſen*BAC. Do meſmo modo ſe provará, que *AB* : *AC* : : *ſenACB* : *ſenABC*. e *BC* : *AC* : : *ſenBAC* : *ſenABC*. Logo &c.

Eſta Propoſiçaõ ſerve para reſolver qualquer triangulo em dous caſos: 1º *Sendo dados dous angulos, e hum lado.* 2º *Sendo conhecidos dous lados, e o angulo oppoſto a qualquer delles*, como ſe moſtra praticado nos exemplos ſeguintes.

175 Exemplo I. *Determinar a diſtancia de huma Galiota* C (Fig. 17.) *a duas baterias A, B, ſituadas na praya AB.*

Tendo previamente conhecido a diſtancia AB, dos pontos A, B, ſe obſervaráõ os angulos CAB, CBA; e iſſo ao meſmo inſtante, ſe a galiota for velejada. Entaõ, no triangulo ABC o ſupplemento da ſoma dos dous angulos obſevados, nos daráo terceiro C, e determinaremos os dous lados deſconhecidos por eſtas duas analogias, *ſen*C : *ſen*B :: AB : AC, e *ſen*C : *ſen*A : : AB : BC (n. 174.).

Supponhamos, por exemplo, que AB ſe achou de 256 braças; o angulo A, de 84° 14′; o angulo B, de 85° 40′; e conſeguintemente o angulo C de 10° 6′. A operaçaõ ſe fará deſte modo:

CL. *ſen* 10° 6′ - - - - -	0,7560528
Log. *ſen* 85° 40′ - - - -	9,9987567
Log. 256 - - - - - - - -	2,4082400
Log. AC - - - - -	3,1630495

; e AC de 1456 braças proximamente.

CL. *sen* $10^\circ 6'$ - - - - - 0,7560528
Log. *sen* $84^\circ 14'$ - - - - 9,9977966
Log. 256 - - - - - - - - 2,4082400
Log. BC - - - - - - 3,1620894 ; e BC de 1452 braças.

176 Exemplo II. *Conhecendo a distancia* AC (Fig. 18.) *do ponto* C *ao angulo flanqueado* A *de hum baluarte, a distancia* AB *dos dous angulos flanqueados* A, B, *ou o lado exterior do polygôno, e o angulo* ACB; *achar a distancia* CB *do mesmo ponto* C *ao outro angulo flanqueado* B.

Seja AB de 200 braças, AC de 130, e o angulo C de $45^\circ 16'$. Com estes dados buscaremos primeiro o angulo B, por esta proporçaõ, $AB : AC :: senC : senB$ (n. 174.), como aqui se vê:

CL. 200 - - - - - - - 7,6989700
Log. 130 - - - - - - - 2,1139434
Log. *sen* $45^\circ 16'$ - - - 9,8514969
Log. *sen* B - - - - 9,6644103

Assim, temos o Logarithmo do seno do angulo B. Mas, como hum seno igualmente pertence aos angulos, que saõ entre si supplementos (n. 19.), e neste caso os dados da questaõ naõ determinaõ a especie do angulo achado (n. 6.), senaõ quando for obtuso o angulo dado, porque entaõ, naõ podendo haver dous obtusos no triangulo, será necessariamente agudo o que se busca; he preciso, que por outra parte saibamos, se devemos tomar o angulo B de $27^\circ 30'$, valor que proximamente corresponde nas Taboas ao dito Logarithmo, ou de $152^\circ 30'$ que he o seu supplemento. Achando pois, pelo exame da configuraçaõ do nosso triangulo sobre o terreno, que he agudo o angulo B, será entaõ de $27^\circ 30'$; e conseguintemente o terceiro angulo A de $107^\circ 14'$. Donde, para determinar o lado BC, faremos esta proporçaõ $senC : senA :: AB : BC$ (n. 174.), isto he: CL.

CL. *sen* $45^o\ 16'$ - - - - - 0,1485031
Log. *sen* $107^o\ 14'$ - - - - - 9,9800516
Log. 200 - - - - - - - - - 2,3010300

Log. BC - - - - - - - - 2,4295847 ; e BC de 269 braças.

177 Antes de passarmos ás duas Proposiçoens, que servem para resolver os outros casos dos triangulos obliquangulos, he necessario estabelecer este principio : Que *a semisoma juntamente com a semidifferença de duas quaisquer quantidades dá a maior dellas ; e a semisoma menos a semidifferença, a menor.*

Sejaõ as duas quantidades representadas pelas duas rectas AB, BC, postas em direitura (Fig. 19.). Se da maior AB cortarmos huma parte AD igual á menor BC, he manifesto, que será DB a differença dellas ; e se partirmos a total AC, e por conseguinte DB em duas partes iguais no ponto E, tambem he manifesto, que será AE ou EC a semisoma, e DE ou EB a semidifferença das rectas AB, BC ; porém $AE + EB = AB$, e $EC - EB = BC$. Logo &c.

178 *Em todo o triangulo rectilineo a soma de dous quaisquer lados he para a sua differença, como a tangente da semisoma para a tangente da semidifferença dos dous angulos oppostos aos mesmos lados.*

Em qualquer triangulo ABC (Fig. 20.) temos demonstrado, que he $AB : AC :: senC : senB$ (n. 174.). Logo $AB + AC : AC :: senC + senB : senB$, ou $AB + AC : senC + senB :: AC : senB$ (18, e 16. 5. Eucl.) ; e do mesmo modo $AB - AC : AC :: senC - senB : senB$, ou $AB - AC : senC - senB :: AC : senB$ (17. e 16 5. Eucl.). Logo $AB + AC : senC + senB :: AB - AC : senC - senB$, ou $AB + AC : AB - AC :: senC + senB : senC - senB$ (11. e 16. 5. Eucl.). Porém, sendo C, e B, dous quaisquer angulos, temos $senC + senB : senC - senB ::$

tang

tang $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B)$: *tang* $(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$ (n. 52.). Logo AB + AC : AB — AC : : *tang* $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B)$: *tang* $(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$.

Esta Proposiçaõ serve para *resolver qualquer triangulo no caso de serem dados dous lados com o angulo comprehendido.* Porque o supplemento do angulo dado será a soma dos outros dous angulos oppostos aos lados conhecidos, e a ametade delle a sua semisoma. Assim na analogia da Proposiçaõ precedente, sendo conhecidos os tres primeiros termos, calcularemos o quarto, que nos mostrará a semidifferença dos mesmos angulos. Donde, pelo principio assima estabelecido (n. 177.), conheceremos o valor de cada hum delles; advertindo, que o maior deve ficar opposto ao lado maior, e o menor ao menor.

179 Exemplo. Supponhamos, que o lado AB he de 182 braças, AC de 120, e o angulo A de 24° 12′ 36″. Diminuindo este de 180° será 155° 47′ 24″ a soma dos angulos C, B, e conseguintemente 77° 53′ 42″ a semisoma. Assim faremos esta proporçaõ 182 + 120 : 182 — 120 : : *tang* 77° 53′ 42″ : *tang* $(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$, ou 302 : 62 : : *tang* 77° 53′ 42″ : *tang* $(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$, como aqui se mostra:

CL. 302 - - - - - - - - -	7,5199991
Log. 62 - - - - - - - - - -	1,7923917
Log. *tang* 77° 53′ 42″ - -	10,6686280
Log. *tang* $(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$ - - -	9,9810128

Assim acharemos a semidifferença dos angulos C, B, de 43° 44′ 53″, a qual juntando-se á semisoma 77° 53′ 42″ dará o maior C de 121° 38′ 35″; e diminuindo-se, o menor B de 34° 8′ 49″. E para determinar finalmente o lado BC, faremos esta proporçaõ *sen*C : *sen*A : : AB : BC (n. 174.), isto he, he, $sen\ 121^o\ 38'\ 35'' : sen\ 24^o\ 12'\ 36'' :: 182 : BC$; e praticando, como nos exemplos aſſima dados, acharemos BC de $87^{br}, 67$.

Neſte meſmo caſo póde determinar-ſe o terceiro lado BC, ſem calcular primeiro os angulos C, B, por meio da Propoſiçaõ ſeguinte.

180 *O quadrado de qualquer lado de hum triangulo rectilineo he igual á ſoma dos quadrados dos outros dous lados, menos o dobro do rectangulo dos meſmos lados multiplicado pelo coſeno do angulo por elles comprehendido.*

Porque, tirando do angulo C (Fig. 20.) para o lado oppoſto a perpendicular CD, teremos $BC^2 = AB^2 - 2\,AB \times AD + AC^2$ (13. 2. Eucl.); porém

1 : cos A :: AC : AD

$AD = \frac{AC\,cos\,A}{R}$ (n. 163.): Logo $BC^2 = AB^2 - \frac{2\,AB.\,AC\,cos\,A}{R} + AC^2$, ou (fazendo $R = 1$) $BC^2 = AB^2 - 2\,AB.\,AC.\,cos\,A + AC^2$.

Quando A for maior que 90^o, o coſeno muda de ſinal, e conſeguintemente o termo ſubtractivo ſe muda em additivo.

Por eſta Propoſiçaõ naõ póde achar-ſe o lado BC mais facilmente do que por meio das duas operaçoens Logarithmicas, que reſultaõ da Propoſiçaõ antecedente. Deve com tudo ter-ſe preſente, porque a ella ſeremos obrigados a recorrer em muitas occaſioens, pela ventagem que tem de reſolver immediatamente a queſtaõ pelos termos dados.

181 *Em todo o triangulo rectilineo, tomando qualquer lado por baſe, e tirando do angulo oppoſto huma perpendicular, ſerá a baſe para a ſoma dos outros dous lados, como a differença deſtes para a differença dos ſegmentos da meſma baſe.*

Seja o triangulo ABC (Figura 21.), e tome-ſe por baſe AC, para a qual ſe tire do angulo oppoſto

ſto a perpendicular BD. Do ponto B com o intervallo igual ao menor dos outros lados deſcrev a-ſe a circumferencia CEGF, e produza-ſe o lado AB até a encontrar em E. Entaõ ſerá $AG \times AE = AF \times AC$ (Cor. 36. 3. Eucl.), e conſeguintemente $AC : AE :: AG : AF$ (16. 6. Eucl.). Porém $AE = AB + BE = AB + BC$; $AG = AB - BG = AB - BC$; e $AF = AD - DF = AD - DC$. Logo $AC : AB + BC :: AB - BC : AD - DC$.

No caſo de cahir a perpendicular fóra da baſe (Fig. 22.), o ſegmento DC tem huma ſituaçaõ oppoſta, e ſerá entaõ conſiderado como negativo; ou, querendo preſcindir diſſo, enunciar-ſe-há entaõ a Propoſiçaõ deſta maneira: *Como a baſe para a ſoma dos outros dous lados, aſſim a differença deſtes para a ſoma dos ſegmentos da meſma baſe produzida.*

Por eſta Propoſiçaõ, ſendo dados os tres lados de hum triangulo, podemos determinar os ſegmentos formados pela perpendicular, tirada de hum dos angulos para o lado oppoſto. Porque, ou he dada a ſoma dos ſegmentos AC (Fig. 21.), e pela proporçaõ demonſtrada calculamos a differença, ou he dada a differença AC (Fig. 22.); e calculamos a ſoma; donde, uſando do principio aſſima eſtabelecido (n. 177.), determinaremos a cada hum dos meſmos ſegmentos.

Iſto ſuppoſto, he facil *de reſolver qualquer triangulo no caſo de ſerem dados os tres lados.* Porque imaginando huma perpendicular tirada de hum dos angulos para o lado oppoſto, teremos dous triangulos rectangulos ADB, CDB; e calculando pela Propoſiçaõ precedente hum dos ſegmentos v. g. DC, no triangulo DCB além do angulo recto conheceremos a hypothenuſa BC, e o lado CD, donde concluiremos o angulo C (n. 163).

182 Exemplo. Seja AB de 142 braças, BC de 64, e AC de 184; pergunta-se o angulo C.

Primeiramente calcularemos a differença dos segmentos AD e DC, por esta proporçaõ, $184 : 142+64 :: 142-64 : AD-DC$, ou $184 : 206 :: 78 : AD-DC$, que acharemos ser de 87,326, e conseguintemente CD (n. 177.) de 48,337. Depois no triangulo rectangulo CDB, calcularemos o angulo BCD por esta proporçaõ, $BC : CD :: R : cos BCD$ (n. 163.), isto he, $64 : 48,337 :: R : cos C$, e acharemos C de $40^{\circ}\ 57'\ 6''$.

Como esta soluçaõ requer duas operaçoens, e procede de hum modo indirecto, será melhor, que neste caso usemos de alguma das Proposiçoens seguintes.

183 I. *Em todo o triangulo rectilineo, o quadrado do raio he para o quadrado do coseno da ametade de qualquer dos angulos, como o rectangulo formado pelos lados adjacentes, para o rectangulo formado pela semisoma dos tres lados, e pela differença entre o lado opposto e a mesma semisoma.*

II. *E o quadrado do raio he para o quadrado do seno da ametade de qualquer dos angulos, como o rectangulo comprehendido pelos lados adjacentes, para o rectangulo comprehendido pelas duas differenças entre cada hum dos lados adjacentes, e a semisoma dos tres lados.*

Porque em qualquer triangulo ABC (Fig. 21.) temos mostrado, que $BC^2 = AB^2 - \frac{2AB.\ AC.\ cos A}{R}$

$+ AC^2$ (n. 180.); Porém $\frac{cos A}{R} = \frac{2\, cos \frac{1}{2} A^2}{R^2} - 1$

(n. 30.): logo $BC^2 = AB^2 - \frac{4AB.\ AC cos \frac{1}{2} A^2}{R^2}$

+2

$+ 2\,AB.\,AC + AC^2$. E porque $AB^2 + 2\,AB.\,AC + AC^2 = (AB + AC)^2$ (4. 2. Eucl.), ſerá $BC^2 = (AB + AC)^2 - \frac{4\,AB.AC.\,cos\frac{1}{2}A^2}{R^2}$, e por conſeguinte $\frac{4\,AB.\,AC\,cos\frac{1}{2}A^2}{R^2} = (AB + AC)^2 - BC^2$. Porem $(AB + AC)^2 - BC^2 = (AB + AC + BC)(AB + AC - BC)$ (5. 2. Eucl.). Logo $\frac{4\,AB.\,AC.\,cos\frac{1}{2}A^2}{R^2} = (AB + AC + BC)(AB + AC - BC)$, ou $4AB.AC.\,cos\frac{1}{2}A^2 = R^2(AB + AC + BC)(AB + AC - BC)$; e conſeguintemente $R^2 : cos\frac{1}{2}A^2 :: AB.AC : (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC)(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC)$.

Por hum raciocinio ſemelhante, tendo $BC^2 = AB^2 - \frac{2AB.AC.cosA}{R} + AC^2$ (n. 180.), e $\frac{cosA}{R} = 1 - \frac{2sen\frac{1}{2}A^2}{R^2}$ (n. 30.), acharemos que $R^2 : sen\frac{1}{2}A^2 :: AB.AC : (\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC) \times (\frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC)$.

A praxe logarithmica de qualquer deſtes Theoremas ſe reduz a huma ſó operação. Uſando, por exemplo, do primeiro, *tomaremos os Complementos dos Logarithmos de cada hum dos lados adjacentes ao angulo procurado, e os Logarithmos da ſemiſoma dos tres lados, e da differença entre a meſma ſemiſoma e o lado oppoſto; e a ametade da ſoma deſtes quatro Logarithmos ſerá o Logarithmo do coſeno da ametade do angulo procurado.*

 184 Ex-

184 Exemplo. Sendo no triangulo ABC o lado AB de 142 braças, BC de 64, AC de 184, e buscando-se o angulo C, a operaçaõ será desta maneira.

AB	142			
AC	184		CL.	7,7351822
BC	64		CL.	8,1938200
	390			
	195		Log.	2,2900346
	53		Log.	1,7242759
	Soma			19,9433127
	Log. $\cos \frac{1}{2}C$			9,9716563

Donde nas Taboas acharemos que $\frac{1}{2}C$ he de 20 $28' \, 33''$, e conseguintemente C de $40^{\circ} \, 57' \, 6''$.

185 Temos mostrado os principios, que se podem empregar na resoluçaõ dos triangulos rectilineos. Agora mostraremos, como elles se devem applicar ás questoens mais complicadas, por meio dos exemplos indicados nos Problemas seguintes.

186 Probl. I. *Determinar a distancia de dous objectos inaccessiveis C, D* (Fig. 23.), *e a posiçaõ da linha recta C D que passa por elles ambos.*

Tome-se no terreno adjacente huma linha recta AB por base, de sorte que de ambas as extremidades della se avistem os objectos C, D; e tendo medido a dita base, na extremidade A se observaráõ os angulos CAB, DAB, que com ella fazem as rectas AC, AD, que se imaginaráõ tiradas de A para C, e D; e na extremidade B se observaráõ do mesmo modo os angulos CBA, DBA.

Isto supposto, conhecidos no triangulo CBA os dous angulos CAB, CBA, e o lado AB, poderemos calcular o lado AC (n.174.): e do mesmo modo, conhecidos no triangulo ADB os dous angulos

los DAB, DBA, e o lado AB, calcularemos o lado AD. Entaõ, no triangulo CAD feraõ conhecidos os dous lados AC, AD, que acabamos de calcular, e o angulo por elles comprehendido CAD, que he a differença dos dous angulos obfervados CAB, DAB; donde concluiremos o lado CD (n.178.), que he a diftancia procurada.

Tambem determinaremos a pofiçaõ da linha CD, fem embargo de naõ podermos chegar a ella. Porque no mefmo triangulo CAD, e com os mefmos dados, podemos calcular o angulo ACD, que a linha CD fórma com AC. Porém, imaginando que pelo ponto C paffa huma linha CZ parallela a AB, fabemos que o angulo ACZ he fupplemento do angulo conhecido CAB, e por iffo ferá tambem conhecido. Logo tomando a differença entre o angulo conhecido ACZ, e o calculado ACD, teremos o angulo DCZ, que CD faz com CZ, e q̃ fará tambem com a fua parallela AB produzida. Logo, tendo orientado a bafe AB, ifto he, fendo conhecida por obfervaçaõ a fua pofiçaõ a refpeito da linha meridiana, igualmente fe conhecerá a pofiçaõ da linha CD.

186 Probl. II. *Determinar quaifquer pontos intermedios* D, D, *do alinhamento dos objectos* A, B, (Fig. 24.), *quando de hum deftes naõ póde ver-fe o outro.*

Bufque-fe, fendo poffivel, no terreno adjacente hum ponto C, do qual fe defcubraõ os dous objectos A, B; obferve-fe o angulo ACB, e averiguem-fe as diftancias AC, e CB, ou immediatamente por huma mediçaõ actual, ou formando triangulos de que eftas linhas fejaõ lados, e que fe poffaõ calcular, como no Problema antecedente. Entaõ, no triangulo ACB feraõ dados os lados AC, CB, e o angulo comprehendido ACB, com os quais poderemos

remos calcular o angulo BAC (n.178.) Feito isto, mandaremos fixar algumas bandeirolas em qualquer direcçaõ CD, e tendo observado o angulo ACD conheceremos no triangulo ACD o lado AC, e os dous angulos A, e ACD, com os quais calcularemos o lado CD (n. 174.); e continuando a mandar fixar bandeirolas na direcçaõ e alinhamento CD, até chegar a huma distancia CD, que seja igual á que tivermos calculado, o ponto D, aonde pararmos, estará no alinhamento dos objectos A, e B.

Naõ sendo possivel achar hum ponto, donde se vejaõ os dous objectos dados, buscaremos hum ponto C (Fig. 25.), donde se veja o objecto B, e outro ponto E, donde se veja o objecto A e o ponto C. Entaõ, medindo actualmente, ou determinando por qualquer meio tirado dos principios até agora estabelecidos, as distancias AE, EC, CB, e observando no ponto E o angulo AEC, e no ponto C o angulo ECB; no triangulo AEC seraõ conhecidos os lados AE, EC, e o angulo comprehendido AEC, e calcularemos o lado AC, e o angulo ECA (n. 178): e tirando este do angulo observado ECB, conheceremos o angulo ACB. Assim, tendo calculado AC, medido CB, e conhecido o angulo ACB, estamos reduzidos ao primeiro caso, como se os objectos A e B fossem ambos visiveis do ponto C, e acabaremos a soluçaõ da mesma maneira.

187 Probl. III. *Achar a altura de hum objecto, a cuja base se naõ póde chegar* : v. gr. *a altura de huma montanha* (Fig. 26.).

Tome-se no terreno adjacente huma base FG, das extremidades da qual se veja o ponto A, cuja altura se quer saber; e tendo medido FG, com o Grafometro (cuja altura se representa pelas rectas BF e CG) se observem os angulos ABC, ACB, que formaõ com a base BC as linhas BA, CA, que se ſe imaginaráõ tiradas dos pontos B e C para o ponto A; e em huma das eſtaçoens, v. gr. em C, ſe diſporá o inſtrumento verticalmente, e ſe obſervará o angulo ACD, que he a inclinaçaõ da linha AC a reſpeito do plano horizontal, q̃ paſſa pelo ponto C.

Entaõ, ſendo no triangulo ACB conhecidos os dous angulos ABC, ACB, e o lado BC, pelo calculo acharemos o lado AC (n. 174.); e no triangulo ADC, onde já ſabemos o lado AC, o angulo obſervado ACD, e o angulo D, que he recto, por ſer a altura AD perpendicular ao plano horizontal, calcularemos o lado AD, e ſaberemos a altura do ponto A ſobre o plano horizontal que paſſa pelo ponto C. Se quizeſſemos ſaber a altura do meſmo ponto a reſpeito do ponto B, deveriamos obſervar o angulo vertical na eſtaçaõ B, e no triangulo ABC calcular o lado AB. Porem achada huma vez a altura do ponto A reſpectivamente ao ponto C, he muito mais facil achar a altura do meſmo ponto a reſpeito de B, ou de qualquer outro ponto do terreno adjacente, buſcando a differença do livel dos ditos pontos, do modo que mais abaixo ſe moſtrará.

188 Probl. IV. *Dados tres pontos* A, *B*, C (Fig. 27.), iſto he, *dadas as diſtancias de tres quaiſquer pontos, e os angulos que ellas formaõ entre ſi, determinar hum ponto* D, *do qual ſe vejaõ as diſtancias AB e BC por angulos dados.*

Imagine-ſe hum circulo, cuja circunferencia paſſe pelos tres pontos A, C, e D; pelos pontos D, B, ſupponha-ſe tirada a recta DF que encontre a circunferencia no ponto F, para o qual ſe entenderáõ tiradas dos pontos A e C as cordas AF, CF; e para o ponto D, as cordas AD, CD.

No triangulo AFC conhecemos o lado AC, o angulo FAC igual a FDC, e o angulo FCA igual a FDA;

FDA ; donde podemos calcular os lados FC , e FA (n. 174.). Conheceremos pois no triangulo FBC os lados FC , BC , e o angulo FCB , compoſto de FCA igual a FDA , e de ACB conhecido ; e poderemos calcular o angulo CBF (n. 178.) , cujo ſupplemento he CBD. E no triangulo CBD , ſendo conhecidos os angulos CBD , BDC , e o lado CB , acharemos o lado CD (n.174.) .

Do meſmo modo, por meio dos triangulos AFC , ABF , e ABD, chegaremos a conhecer a recta AD, a qual juntamente com CD determina o ponto D. O meſmo conſeguiriamos , encaminhando o calculo a achar BD , e juntamente o angulo ABD , ou CBD.

Se a ſoma dos dous angulos dados ADB , BDC , for igual ao angulo ABC , ou ao ſeu ſupplemento , ſerá o Problema indeterminado neſſe caſo , ou ſuſceptivel de huma infinidade de ſoluçoens , por cahir entaõ o ponto B na circunferencia.

Por eſtes exemplos ſe entenderá , como ſe ha de proceder nos caſos mais complicados , imaginando differentes triangulos enfiados conſecutivamente , pelos quais , como por degráos ſe chegue a determinar o que ſe pertende. Para iſſo contribue muito a ſagacidade particular de cada hum , a qual , ſendo ajudada de algum exercicio practico , logo moſtrará a melhor ordem e arrumaçaõ, com que ſe devem imaginar e unir os triangulos , conforme as circunſtancias dos lugares. Huma das couſas , que deve ſempre ter-ſe preſente , he o eſcolher a baſe , e todos os mais pontos arbitrarios , de tal ſorte que os erros inevitaveis da mediçaõ actual della , e dos angulos obſervados influaõ o menos que for poſſivel no reſultado , que ſe ha de concluir por meio do calculo. A eſte fim ſerviráõ de muito os principios , que logo moſtraremos.

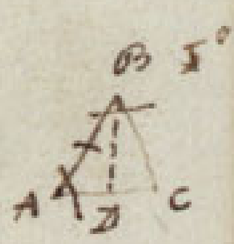
189 Probl.

tirase do nº 183. o valor sen.$\frac{1}{2}A^2$, o cos $\frac{1}{2}A^2$ taes as arbit. e da formula 38. fazem-se as arbitr. e depois vem $A' = \frac{CAC.BD}{a}$, e quad.º vem a formula.

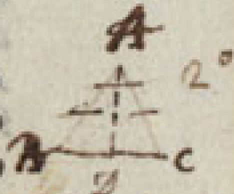
189 Probl. V. *Dadas tres partes de hum triangulo rectilineo, calcular trigonometricamente a sua área.*

Consta da Geometria, que a área de qualquer triangulo se determina pelo producto da base multiplicada pela ametade da altura. Succede porém muitas vezes na pratica, que naõ se póde conduzir, nem medir a perpendicular sobre a base; e nesses casos he necessario recorrer aos principios da Trigonometria, da qual se deduzem as regras seguintes.

Caso I. Sendo dado hum lado com dous angulos, e sendo conseguintemente conhecido o terceiro angulo, será *o rectangulo comprehendido pelo dobro do raio e pelo seno do angulo opposto ao lado dado, para o rectangulo comprehendido pelos senos dos angulos adjacentes; como o quadrado do lado para a área do triangulo.*. Demonstra-se pelos principios, que ficaõ estabelecidos n. 162. e 174.

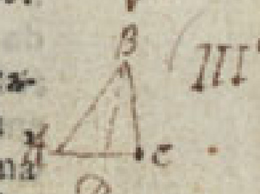


Caso II. Sendo dados dous lados com o angulo comprehendido, será *o dobro do raio para o seno do angulo, como o rectangulo dos lados para a área do triangulo.* Demonstra-se pelo n. 162.



R : sen B :: AD
: AD
Logo AD = AD sen B / R

Caso III, Sendo dados os tres lados, *será a área do triangulo meia proporcional entre os dous rectangulos, hum comprehendido pela semisoma dos tres lados e pela differença entre ella e qualquer dos mesmos lados, e o outro comprehendido pelas differenças entre a mesma semisoma e cadahum dos outros dous lados.* Demonstra-se pelos n. 38. e 183.



Estas tres regras tem a ventagem de se praticarem por meio de huma só operaçaõ logarithmica, como he facil de entender e de executar, na fórma dos Exemplos assima dados. No caso de serem dados dous lados com o angulo opposto a hum delles, será preciso determinar pelo calculo, e pela configuraçaõ do triangulo, o angulo opposto ao outro lado

174. sen B : sen C :: AC : AB = AC . sen C / sen B   162 R : sen A :: AB : BD

Logo BD = sA . AB / R = sen A . AC . sen C / R . sen B   chamando A' a area do tri[angulo]

[te]mos A' = AC . BD / 2 = AC . sen A . AC . sen C / 2 . R . sen B = AC² sen A . sen C / 2 R . sen B

lado (n. 176.); e entaõ ſe calculará a área confórme a regra do caſo I.

Das Variaçoens, ou Differenças dos Triangulos Rectilineos.

190 POr *Variaçaõ*, ou *Differença* de qualquer parte de hum triangulo, entendemos o pequeno aumento, ou diminuiçaõ que ella recebe, reſpectivamente á ſua grandeza. Aſſim, poderá huma braça conſiderar-ſe como differença ſobre huma legua de diſtancia, mas naõ deverá hum palmo ter-ſe por differença de huma vara.

Eſtas pequenas variaçoens, ou differenças, coſtumaõ notar ſe com a letra *d* poſta antes da quantidade que as padece. Aſſim *d AB* quer dizer a pequena differença, ou variaçaõ da linha AB; *d* B, e *d* ACB, as variaçoens reſpectivas dos angulos B, ACB &c. A parte, ou partes, que naõ variaõ, ou ſe ſuppoem naõ variar, chamaõ-ſe *conſtantes*.

191 As differenças dos lados de hum triangulo devem ſempre entender-ſe referidas á unidade que mede os meſmos lados. Para as differenças dos angulos he neceſſario convir em huma medida fixa. Aqui entenderemos, que ſe medem tanto os angulos, como as ſuas differenças, pela circunferencia do circulo deſcrito com o raio igual á unidade. Aſſim a differença do angulo *B*, ou *d B*, ſerá repreſentada pelo pequeno arco, que no dito circulo lhe correſponder. Donde, ſe quizermos ſaber o arco que em outro qualquer circulo correſponde á meſma variaçaõ, naõ he preciſo mais do que multiplicalla pelo raio delle: BC. *d* B, por exemplo, ſerá o arco da variaçaõ do angulo B, tomado na circunferencia deſcrita com o raio BC, ſendo *d*B o arco correſpondente á meſma variaçaõ na circunferencia

cia deſcrita com o raio igual á unidade.

192 Como hum triangulo he perfeitamente determinado por tres quaiſquer das ſuas partes, entrando nellas ao menos hum lado; he manifeſto, que a variaçaõ das outras tres ſerá determinada pela variaçaõ de huma dellas, ſendo duas conſtantes; pela de duas, ſendo huma conſtante; e pela de tres, ſendo todas variaveis. Igualmente he manifeſto, que ſendo conſtante a ſoma dos tres angulos do triangulo rectilineo, todas as vezes que dous forem conſtantes, conſeguintemente o ſerá tambem o terceiro; e que ſendo hum delles conſtante, ſerá igual a variaçaõ dos outros dous, mas em ſentido contrario, creſcendo hum quanto o outro diminue.

193 *Em qualquer triangulo rectilineo, ſendo conſtante hum lado com hum dos angulos adjacentes, ſerá a variaçaõ de qualquer dos outros dous angulos para a variaçaõ do lado* $\left\{\begin{matrix}\textit{opposto}\\ \textit{adjacente}\end{matrix}\right\}$ *ao angulo conſtante, como* $\left\{\begin{matrix}\textit{a tangente}\\ \textit{o ſeno}\end{matrix}\right\}$ *do angulo opposto ao lado conſtante para o lado opposto ao angulo conſtante; e a variaçaõ do lado adjacente para a variaçaõ do lado opposto ao angulo conſtante, como o raio para o coſeno do angulo opposto ao lado conſtante.*

Seja o triangulo ABC (Fig.28.), e nelle conſtante o lado AB com o angulo adjacente A. Imagine-ſe, que o lado AC recebe a pequena variaçaõ *Cc*; e tirando a recta *Bc*, ſerá o triangulo ABC mudado em *ABc*. Do ponto B com o intervallo BC deſcreva-ſe o arco *Cn*, e ſerá *nc* a variaçaõ do lado BC.

Sendo pois *Cn* hum arco muito pequeno, e podendo conſeguintemente tomar-ſe como huma

linha

linha recta, será o pequeno triangulo *Cnc* sensivelmente rectilineo, e rectangulo em *n*. Logo *Cn* : *cn* : : *tang* c : R (n.164.). Mas he *Cn* = BC.*d* B (n 191.), *cn* = *d* BC (n. 190.), e *tang* c = *tang*C sensivelmente. Logo BC.*dB* : *d* BC : : *tang*C : R, ou *d*B : *d* BC : : *tang*C : BC, fazendo R = 1. Do mesmo modo se mostra, que *Cn* : *Cc* : : *sen* c : R, isto he, BC.*d*B : *d* AC : : *sen* C : R, ou *d*B: *d* AC : : *sen* C: BC; e que *Cc* : *cn* : : R : *cos* c, isto he, *d*AC : : *d* BC : : R : *cos*C.

Como no caso desta Proposiçaõ temos *dB* = − *dC* (n. 192.), será tambem pelo que fica demonstrado − *d* C: *d* BC : : *tang*C : BC, − *dc* : *d*AC : : *sen*C : BC.

194 *Em qualquer triangulo rectilineo, sendo constante hum lado com o angulo opposto, será a variaçaõ de qualquer dos outros dous lados para a variaçaõ do angulo opposto, como o dito lado para a tangente do mesmo angulo; e as variaçoens dos dous lados seraõ como os cosenos dos angulos oppostos.*

Seja no triangulo ABC (Fig. 29.) constante o angulo A com o lado opposto BC. Supponde, que o lado AB recebe o pequeno aumento B*b*, he evidente que, para ser *bc* = BC, deve AC diminuir huma pequena quantidade *Cc*; e que sendo B*b*D + BD*b* = ABC (32. 1. Eucl.), o pequeno angulo *BDb* será a variaçaõ do angulo ABC, e o verticalmente opposto *CDc* a variaçaõ do angulo ACB. Descrevaõ-se pois do ponto D, e com os intervallos DB, D*c*, os pequenos arcos *Bm*, *cn*.

Como BC = *bc* pela hypothese, e B*n* = *mc* pela construcçaõ, será tambem *bm* = *Cn*. Mas no triangulo *Bmb* he *bm* : *Bm*: : R : *tang* b, isto he, *bm* : dB : : BD : *tang*B; e no triangulo *Cnc* pela mesma

ra-

raſaõ, $Cn : dB :: DC : tangC$. Logo $BD : DC :: tangB : tangC$; e *compondo* $BC : DC :: tangB + tangC : tangC$. Porem $tangB + tangC = \frac{sen(B+C)}{cosBcosC}$ (n. 45.) $= \frac{senA}{cosBcosC}$ (n. 19.); e por ſer $senA = \frac{BCsenB}{AC}$ (n. 174.) $tangB + tangC = \frac{BCtangB}{ACcosC}$. Logo $BC : DC :: \frac{BCtangB}{AC.cosC} : tangC$; e reduzindo $AC : DC :: tangB : senC$, ou $DC : senC :: AC : tangB$. Mas no triangulo Cnc he $Cc : cn ::$ $\dot{x} = \frac{senC\,AC}{tangB}$
$R : senC$, ou $dAC : dB :: DC : senC$. Logo $dAC : dB :: AC : tangB$. E do meſmo modo ſe moſtrará que $dAB : dC :: AB : tangC$.

Tambem no triangulo Bmb he $Bb : Bm :: R : cosB$, e no triangulo Cnc, he $Cc : Cn :: R : cosC$; porém $Cn = bm$: logo por *igualdade perturbada* $Bb : Cc :: cosC : cosB$, iſto he, $dAB : - dAC : cosC : cosB$.

195 *Em qualquer triangulo rectilineo, ſendo dous lados conſtantes, a variaçaõ do angulo por elles comprehendido ſerá para a variaçaõ de qualquer dos outros dous na raſaõ composta da raſaõ dos lados oppoſtos, e da raſaõ do raio ao coſeno do terceiro; e para a variaçaõ do lado oppoſto, na raſaõ da coſecante de qualquer dos outros angulos para o lado conſtante, que lhe he adjacente: Será tambem a variaçaõ do terceiro lado para a variaçaõ de hum dos ſeus angulos adjacentes, como o meſmo lado para a cotangente do outro; e as variaçoens dos angulos adjacentes ao lado variavel ſeraõ como as ſuas tangentes.*

Seja o triangulo ABC (Fig. 30.), e nelle conſtantes os lados AB, e AC. Imagine-ſe, que o lado AC ſem variar de grandeza toma a poſiçaõ *Ac*, e tirando a recta Bc, o triangulo ſe mudará em em *ABc*. Dos pontos A, B, com os intervallos AC, BC, defcrevaõ fe os pequenos arcos *Cc*, e *Cn*, e ferá *cn* a variaçaõ do lado BC.

No triangulo *cnC* teremos pois *Cc* : *Cn* : : R : *cof cCn* (n. 163.); porem *Cc* = AC.*d*A, *Cn* = BC.*d*B, e *c*C*n* = ACB, por fer *c*CA = *n*CB, e tirando o commum *n*CA ficar *c* C*n* = ACB : logo AC. *d*A : − BC. *d*B : : R : *cof*C, e confeguintemente *d*A : − *d*B : : R. BC : AC *cof*C; e do mefmo modo fe provará que *d*A : − *d* C : : R.BC : AB.*cof*B. Tambem teremos no mefmo triangulo *Cc* : *cn* : R : *fen cCn*, ifto he, AC. *d*A : *d* BC : : R : *fen*C, ou *d* A : *d* BC : : *cofec* C : AC, fuppondo R = 1; e do mefmo modo fe moftrará, que *d*A : *d*BC : : *cofec*B : AB.

Será tambem no mefmo triangulo *cn* : *Cn* : : *tang cCn* : R (n. 164.), ifto he, *d*BC : − BC. *d* B : : *tang*C : R, ou *d* BC : − *d*B : : BC : *cot*C; e do mefmo modo fe achará *d*BC : − *d*C : : BC : *cot*B. Donde concluiremos tambem, que *d*B : *d*C : : *tang*B : *tang*C.

196 No cafo de ferem dous angulos conftantes, tambem o terceiro ferá conftante (n. 192.); e entaõ, *quaifquer variaçoens dos lados, por grandes que fejaõ, faõ proporcionais aos mefmos lados.* Porque fendo os angulos invariaveis, o triangulo naõ póde mudar fenaõ para outro femelhante; e affim, fendo os novos lados proporcionais aos feus homologos, tambem as variaçoens eftaráõ na mefma rafaõ (17. 5. Eucl.).

197 Se hum fó angulo, ou hum fó lado for conftante, a variaçaõ de qualquer parte ferá determinada pela variaçaõ de duas quaifquer outras (n. 192.); e neffe cafo acharemos a variaçaõ total della, fuppondo tambem conftantes a cada huma das partes, cujas variaçoens fe fuppoem dadas, e determinando pelas

pelas Propoſiçoens precedentes o que a variaçaõ da outra deve influir. Do meſmo modo, naõ havendo no triangulo parte alguma conſtante, as variaçoens de tres quaiſquer partes determinaráõ a variaçaõ de outra qualquer; e para acharmos o que cadahuma por ſi influe, ſupporemos duas a duas conſtantes as partes cujas variaçoens ſabemos, e pelas meſmas Propoſiçoens calcularemos a variaçaõ parcial, que depende da variaçaõ da terceira.

Ex. gr. Em hum triangulo ABC, ſendo dadas as variaçoens de dous lados AB, e AC, e do angulo comprehendido A, ſe quizermos ſaber a variaçaõ do terceiro lado BC, 1°. faremos conſtantes os lados AB, AC, e teremos $d\,BC = AB\,sen B.\ d\,A$ (n. 195); 2°. faremos conſtante o angulo A com o lado AB, e teremos $d\,BC = cos C.\ d\,AC$ (n. 193.); 3°. faremos conſtante o angulo A com o outro lado AC, e teremos $d\,BC = cos B.\ d\,AB$ (n. 193.); e reunindo eſtas tres variaçoens parciais, ſerá a variaçaõ total do lado BC, ou $d\,BC = AB\,sen B.\ d\,A + cos C.\ d\,AC + cos B.\ d\,AB$.

198 As analogias demonſtradas nas Propoſiçoens precedentes, e as formulas que dellas reſultaõ, pódem transformar-ſe em outras muitas, ſubſtituindo em lugar dos lados, e ſenos, que nellas entraõ, os ſeus valores tirados das Propoſiçoens que ſervem para a reſoluçaõ dos triangulos.

199 O uſo deſtas analogias he, naõ ſómente para calcular o effeito, que produz a incerteza de huma das partes dadas ſobre a parte calculada de hum triangulo, e determinar os limites, dentro dos quais podemos ſegurar o reſultado, ſem calcular de novo o meſmo triangulo; mas tambem para conhecer a ſituaçaõ mais ventajoſa, que devemos procurar nas partes dadas, para que influaõ o menos que for poſſivel na parte, que havemos de determinar por meio do calculo. Por

Por exemplo: Havendo de determinar huma altura AC (Fig. 14.) por meio de huma base medida CD, e de hum angulo observado AEB, e suppondo que na mediçaõ da base se naõ receia erro algum, mas taõ sómente da parte do angulo observado pelo instrumento; pergunta-se, que angulo deve ser AEB, para que o erro nelle comettido influa o menos que he possivel na altura calculada AB. No triangulo ABE rectangulo em B, teremos constantes o angulo B, e o lado BE; donde será d AB : d AEB : : AE: *sen*BAE (n.193.), ou d AB : d AEB :: AE: *cos*AEB (n. 17.), e multiplicando os termos da segunda rasaõ por *sen*AEB, será d AB : d AEB : : AE *sen* AEB : *sen*AEB.*cos*AEB; porem AE *sen*AEB $=$ AB (n. 162.), e *sen*AEB *cos*AEB $= \frac{1}{2}$ *sen* 2 AEB (n. 38.); logo d AB: d AEB : : 2AB : *sen*2AEB, e $d\,\text{AB} = \frac{2\text{AB}.\, d\,\text{AEB}}{sen\ 2\,\text{AEB}}$. He evidente pois, que sendo dada a variaçaõ do angulo d AEB, a variaçaõ do lado d AB será tanto menor, quanto for maior o divisor *sen* 2AEB; e sendo o seno de 90° o maior de todos, será necessario que o dobro do angulo AEB seja de 90°, e por conseguinte AEB de 45°.

Se quizessemos saber os limites da segurança do lado calculado AB, suppondo que da parte do instrumento naõ pudessemos responder por mais do que até 10 minutos, lembrando-nos que contamos as differenças angulares por arcos que tem o raio igual á unidade (n.191.), e que sendo o raio igual á unidade o arco de hum minuto he 0,0002908882, será d AEB $=$ 0,002908882; donde suppondo que AB he de 151 palmos, e AEB de 45°, teremos d AB $=$0,88, e naõ terá a altura calculada hum palmo de differença. Se o angulo AEB fosse de 15°, ou 75°, haveria o dobro da incerteza; e se fosse de 1°, ou ou 89°, haveria mais do que 25 palmos de incerteza. E por essa rasaõ he, que para huma determinaçaõ semelhante se disse assima que se devia procurar, que o angulo AEB nem fosse muito agudo, nem muito chegado a recto (n. 167.). Do modo que mostramos neste exemplo, se discorrerá em todos os mais casos da Trigonometria Plana.

Uso da Trigonometria no risco das Plantas, ou Cartas Topograficas.

200 A Arte de riscar as plantas consiste em determinar qualquer numero de pontos, que sobre o papel tenhaõ entre si a mesma posiçaõ, que tem sobre o terreno os objectos, que elles devem representar. Para isto, se suppoem quasi sempre que os objectos, de que se trata, estaõ todos no mesmo plano horizontal. Quando assim naõ for, isto he, quando as observaçoens ordenadas a determinar as situaçoens respectivas dos objectos, naõ tiverem sido feitas todas no mesmo plano horizontal, ou proximamente no mesmo, será necessario, que antes de riscar a planta se reduzaõ as ditas observaçoens ao que ellas deveriaõ ser, se todas fossem feitas no mesmo plano horizontal. Por ora supporemos, que os objectos estaõ no mesmo plano horizontal, ou se tem reduzido a elle, e depois mostraremos como se reduzem.

201 Sejaõ A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, (Fig. 31.) os objectos mais notaveis de hum terreno, cujas posiçoens respectivas se haõ de representar em huma planta.

Primeiramente se desenharáõ estes objectos grosseiramente sobre hum papel, dando-lhes a posiçaõ que a olho se julgar; para o que será necessario, que nos transportemos aos sitios que forem mais a proposito, para fazer idéa da configuraçaõ do terreno, e poſiçaõ dos meſmos objectos. Eſte primeiro deſenho, que chamaõ *borrador*, ſerve para nos guiar nas operaçoens, que devemos fazer, e para aſſentar as differentes medidas, que havemos de tomar no decurſo dellas.

Depois diſto, eſcolheremos e mediremos huma baſe AB, cujo comprimento naõ ſeja muito deſproporcionado a reſpeito da diſtancia dos objectos mais remotos, que das extremidades della ſe pódem ver, e que tenha alem diſſo a ventagem de ſe aviſtar das meſmas extremidades o maior numero de objectos que puder ſer.

Entaõ mediremos com o Grafometro na extremidade A os angulos EAB, FAB, GAB, CAB, DAB, que formaõ no ponto A com a baſe AB as linhas, que ſe imaginaráõ tiradas do meſmo ponto para os objectos E, F, G, C, D, que ſuppomos poderem ſer todos viſtos das extremidades A e B da baſe AB. Do meſmo modo, na extremidade B obſervaremos os angulos EBA, FBA, GBA, CBA, DBA, formados no ponto B com a linha BA pelas linhas, que ſe imaginaráõ tiradas do meſmo ponto B para os ditos objectos.

Havendo alguns objectos, como H, *I*, que naõ poſſaõ ſer viſtos das extremidades de A, B, paſſaremos a quaiſquer dous Lugares dos que já obſervámos, como E, e F, donde elles ſe poſſaõ deſcobrir; e entaõ, tomando EF como baſe, mediremos os angulos HEF, IEF, HFE, IFE, que com ella fazem as linhas tiradas das extremidades E, F, para os ditos objectos H, I. E ſe ainda houver algum outro objecto, como K, que ſe naõ poſſa ver nem das extremidades de AB, nem das de EF, tomarſe-há outra que ajunte dous pontos obſervados, como FG, e nas ſuas extremidades ſe mediráõ do meſmo modo os angulos KFG, KGF.

Iſto ſuppoſto, em cadahum dos triangulos ACB, ADB,

ADB, AEB, AFB, AGB, ſendo conhecido hum lado e dous angulos, calcularemos os outros dous lados (n. 174.), e eſcreveremos o valor de cadahum ſobre o borrador. Pelo que reſpeita aos triangulos HEF, IEF, como naõ medimos ſenaõ os angulos formados ſobre EF, ſerá preciſo começar pelo calculo de EF, por meio do triangulo EAF, no qual ſaõ conhecidos já os lados AE, AF, e o angulo comprehendido EAF igual á differença entre os dous obſervados EAB, FAB; e tendo calculado EF (n. 178.), em cadahum dos triangulos HEF, IEF, conheceremos hum lado com dous angulos, e calcularemos os outros dous lados, como nos primeiros triangulos; e do meſmo modo praticaremos a reſpeito do triangulo KFG.

Feitos eſtes calculos, tiraremos ſobre o papel huma linha *a b* (Fig. 32.) de tantas partes de huma *eſcala*, ou do *petipé* (que deverá acompanhar a planta, e proporcionar-ſe á grandeza della) quantas ſaõ as *braças* ou *palmos*, que pela mediçaõ tivermos achado na baſe AB. Entaõ, para determinar o ponto correſpondente a qualquer dos objectos obſervados das extremidades de AB, por exemplo E, tomaremos ſobre o petipé tantas partes, quantas foraõ as braças ou palmos, que achamos ter A E, e do ponto *a* como centro, e com o raio *a e* igual a eſſe numero de partes deſcreveremos hum arco de circulo; do meſmo modo do ponto *b*, como centro, e com hum intervallo igual ao numero das partes correſpondentes a B E, deſcreveremos outro arco, que cortará o primeiro em hum ponto *e*; e eſte terá no papel huma poſiçaõ a reſpeito de *a b*, ſemelhante á que no terreno tem o ponto E a reſpeito de A B; porque os triangulos *a e b*, AEB, tem pela conſtrucçaõ os lados proporcionais, e conſeguintemente ſaõ entre ſi ſemelhantes. Da meſma maneira ſe determinaõ os pontos *f*, *g*, *c*, *d*, que devem repreſentar os objectos F, G, C, D.

Em quanto aos pontos *h*, *i*, *k*, que devem ser a reprefentaçaõ dos objectos H, I, K, obfervados dos pontos E, F; dos pontos *e*, *f*, já determinados, como centros, e com os intervallos *e h*, *f h*, de tantas partes do petipé, quantas faõ as braças, ou palmos de EH, FH, fe defcreveráõ dous arcos, os quais fe cortaráõ no ponto *h*, que reprefentará o objecto H; e affim dos mais.

Defte modo a figura total fobre o papel ferá femelhante á do terreno, pois ferá compofta de igual numero de triangulos, femelhantes cada hum a cada hum, e femelhantemente poftos. Pelo que, naõ refta mais do que defenhar nos pontos determinados os refpectivos objectos, e encher os efpaços intermedios, que naõ requerem tanto efcrupulo, pelos meios de que mais abaixo fallaremos.

He de advertir, que devendo fazer-fe ufo defte methodo, para fixar os pontos principais e fundamentais de huma planta, he precifo que fe obfervem os angulos com exactidaõ, e para iffo fe prefiriráõ os Grafometros guarnecidos de oculos de alcance aos de pinnulas, fendo primeiro verificados. Efte methodo ferve para formar as Cartas Topograficas, que reprefentaõ hum pequeno Territorio, o qual fe póde fem erro attendivel confiderar como hum plano. Pelo que refpeita porém ás Cartas Geograficas, que reprefentaõ as partes maiores do Globo Terreftre, he precifo recorrer a outros meios, que naõ faõ defte lugar.

Da Reducçaõ dos angulos obfervados.

202 QUando naõ eftaõ os objectos, nas operaçoens precedentes, fituados todos no mefmo plano horizontal, he neceffario, antes de formar a planta que os deve reprefentar, reduzir os angulos obfervados ao que elles deviaõ fer, fe todos

os objectos estivessem no mesmo plano horizontal: eisaqui o methodo, que nisto se póde ter.

203 Sejaõ A, B, C (Fig. 33.) tres pontos desigualmente altos a respeito do plano horizontal F DE, sendo as suas respectivas alturas AD, BF, CE. Como o plano sobre o qual se querem representar estes tres pontos he FDE, he necessario imaginar que A está em D, B em F, e C em E; e conseguintemente em lugar do angulo observado BAC se deverá tomar o angulo FDE.

Para este se determinar, no ponto A depois de observar o angulo BAC, se observaráõ tambem os angulos BAD, CAD, formados pelos raios visuais AB, AC, e pela linha do prumo CD (n. 159.). Continuem-se, sendo necessario, as rectas AB, AC, até encontrarem o plano horizontal FDE nos pontos G, I. Nos triangulos ADG, ADI, rectangulos em D, tomando-se AD como raio das Taboas, DG e DI seraõ as tangentes dos angulos observados GAD, IAD; e AG, AI, seraõ as secantes. Logo, tomando nas Taboas as tangentes e secantes dos angulos GAD, IAD, conheceremos no triangulo GAI os lados GA, AI, com o angulo observado GAI, e calcularemos o lado GI (n. 178.); depois disto, no triangulo GDI conheceremos os lados GD, DI, com o que acabamos de calcular GI, e por meio delles calcularemos o angulo GDI (n. 181.). Do mesmo modo se reduzirá o angulo observado em B; e em cada triangulo he desnecessario reduzir o terceiro angulo, pois sabemos que deve ser o supplemento da somma dos outros dous.

Reduzidos os angulos, facilmente se reduziráõ as distancias, ou huma dellas (que he o que basta em cada triangulo). Porque, imaginando a horizontal BO, no triangulo BAO rectangulo em O conheceremos BA, e o angulo BAO e calcularemos BO, ou FD (n. 162.)

Exem-

Exemplo. Supponhamos, que se achou BAC de 62° 37′, BAD de 88° 5′, e CAD de 78° 17′; teremos

sec. 88° 5′, ou AG - - - - - -	29,8990
sec. 78° 17′, ou AI - - - - - -	4,9244
tang. 88° 5′, ou DG - - - - - -	29,8823
tang. 78° 17′, ou DI - - - - - -	4,8218

Entaõ, no triangulo AGI (n. 178.) acharemos GI de 27,9778, e no triangulo DGI com os tres lados (n. 181.) acharemos o angulo GDI de 62° 24′ 53″.

204 Esta reducçaõ, que pelo methodo precedente requer tres operaçoens, póde fazer-se por huma só operaçaõ logarithmica. Porque supponho o angulo que havemos de reduzir BAC = A, os angulos observados BAD = B, e CAD = C, e o angulo reduzido EDF = D, teremos $cos\ \frac{1}{2} D^2 =$

$$\frac{sen\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A\right) sen\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A\right)}{sen B\ sen C}.$$

Assim, somando os complementos logarithmicos dos senos dos angulos B, C, com os Logarithmos dos senos da semisoma dos tres angulos, e da differença entre esta semisoma e o angulo *A*, e partindo ao meio a soma que vier, teremos o logarithmo do coseno da ametade do angulo reduzido, como aqui se mostra:

A - - -	62°	37′		
B - - -	88	5 - - - - - - -	CL. *sen*	0,0002430
C - - -	78	17 - - - - - - -	CL. *sen*	0,0091447
	228	59		
	114	29 30″ - - - -	Log *sen*	9,9590517
	51	52 30 - - - -	Log *sen*	9,8957902
				19,8642296
			Log *cos* $\frac{1}{2}$ D - - - -	9,9321148,

que

que nas Taboas dará 31° 12′ 28″, e conſeguintemente D=62° 24′ 56″.

A raſaõ he, porque no triangulo GAI temos $GI^2 = GA^2 + IA^2 - 2GA.\,IA\cos A$ (n. 180.), e no triangulo GDI, $GI^2 = GD^2 + ID^2 - 2GD.\,ID \cos D$; e por conſeguinte $GA^2 - GD^2 + IA^2 - ID^2$, ou $2AD^2 + 2GD.\,ID\cos D = 2GA.IA\cos A$. Porém $GD = AD\,\text{tang}\,B$, $ID = AD\,\text{tang}\,C$, $GA = \frac{AD}{\cos B}$, $IA = \frac{AD}{\cos C}$ (n. 164, e 163.). Logo ſubſtituindo, e reduzindo, ſerá $\cos B\cos C + \cos D\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C = \cos A$, e $\cos D = \frac{\cos A - \cos B\cos C}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}$. Logo, fazendo o raio igual à unidade, e ajuntando-o de ambas as partes, ſerá $1 + \cos D = \frac{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C - \cos B\cos C + \cos A}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}$, e por conſeguinte $2\cos\frac{1}{2}D^2 = \frac{\cos A - \cos(B+C)}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}$ (n. 30. e 35.); porém $\cos A - \cos(B+C) = 2\,\text{sen}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A)\,\text{sen}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A)$ (n. 48.) : logo

$$\cos\frac{1}{2}D^2 = \frac{\text{sen}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A)\,\text{sen}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A)}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}.$$

205 Muitas vezes he neceſſaria outra eſpecie de reducçaõ, que ſe chama *reducçaõ dos angulos ao centro.* Por exemplo : Obſervou-ſe do ponto *a* (Fig. 34.) o angulo B *a* C, formado pelas linhas *a B*, *a C*, dirigidas a dous objectos diſtantes, cuja diſtancia ſuppomos conhecida, e quer-ſe ſaber o angulo BAC formado no ponto A pouco diſtante de *a*, onde naõ póde fazer-ſe a obſervaçaõ.

Neſte caſo podemos uſar da Theoria das variaçoens aſſima explicada, para o que mediremos a pequena diſtancia *a A*, e no ponto *a* obſervaremos tambem os angulos *A a B*, e *A a C*. Aſſim, ſendo mani-

manifesto que mudando-se o triangulo B a C em BAC, deve o angulo B a C crescer tanto quanto diminuir o angulo a B C, e diminuir quanto crescer o angulo a CB ; será conseguintemente d BaC = dB − dC (n. 192.). Porém, sendo aBA, ou dB hum angulo muito pequeno, e sensivelmente igual ao seu seno, temos dB $= \frac{Aa.sen\,AaB}{AB}$, e dC $= \frac{Aa.sen\,A\,a\,C}{AC}$ (n. 162.). Logo d $B\,a\,C = \frac{Aa.sen\,A\,a\,B}{AB} - \frac{Aa\,sen\,A\,a\,C}{AC}$.

Quando o ponto a cahir sobre BA produzida, será nullo o primeiro termo da expressaõ precedente ; e cahindo para a outra parte, mudará de final. O mesmo se entenderá do segundo termo, confórme a posiçaõ do mesmo ponto a a respeito da linha AC.

Methodo de supprir a Trigonometria no risco das Plantas.

206 O calculo Trigonometrico naõ he indispensavelmente necessario para riscar, e desenhar as Plantas, senaõ quando os pontos principais do espaço, que na Carta se houver de configurar, estiverem consideravelmente distantes huns dos outros. Quando as distancias saõ medianas, depois de ter medido huma base, e observado os angulos necessarios da maneira assima declarada (n. 201.), em lugar de resolver os triangulos, para formar com os lados calculados, e reduzidos ao petipé da Carta, triangulos semelhantes aos que se observáraõ sobre o terreno ; podemos contentarnos de formar os mesmos triangulos por meio dos angulos observados, do modo que agora mostraremos.

Este methodo he menos exacto que o precedente, porque o *Transferidor*, ou qualquer outro instrumentrumento de que ſe uſe, para formar ſobre o papel angulos iguais aos obſervados ſobre o terreno, he ſempre de hum raio muito pequeno; e por iſſo naõ he de eſperar, que os angulos por meio delle ſe formem com a exactidaõ que reſulta, quando ſe toma no petipé o valor dos lados determinado pelo calculo. Mas, como muitas vezes naõ he neceſſaria taõ eſcrupuloſa exactidaõ, ſendo por outra parte o methodo de tirar as plantas por meio dos angulos mais expedito, e de menos trabalho, a elle ſe recorre quaſi ſempre nos uſos ordinarios.

Tira-ſe pois ſobre o papel no lugar conveniente huma linha $a\,b$ (Fig. 31. 32.), que tenha tantas partes do petipé quantas ſaõ as medidas, que ſe acháraõ na baſe AB, e das extremidades a, b, ſe fazem os angulos $e\,a\,b$, $e\,b\,a$, $f\,a\,b$, $f\,b\,a$ &c. reſpectivamente iguais aos angulos EAB, EBA, FAB, FBA &c, que ſe obſerváraõ dos pontos A, B. Depois unindo os pontos $e\,f$, com a recta $e\,f$, nas extremidades della, como baſe, ſe formaõ angulos iguais aos que ſe obſerváraõ dos pontos E, F; e aſſim por diante.

207 Póde tambem diſpenſar-ſe o calculo trigonometrico na reducçaõ dos angulos inclinados ao plano horizontal. Eiſaqui o methodo.

Suppoſtas as obſervaçoens aſſima declaradas (n. 203. e Fig. 33.) formem-ſe no ponto A de qualquer linha recta AD (Fig. 35.) os angulos DAG, DAI, reſpectivamente iguais aos angulos verticais obſervados DAG, DAI (Fig. 33.). De qualquer ponto D (Fig. 35.) levante-ſe ſobre AD huma perpendicular indefinida IDG; do ponto A tire-ſe a recta AM, que forme com AI o angulo IAM igual ao angulo BAC, que ſe pertende reduzir; e tomando AM igual a AG, tire-ſe a recta IM. Entaõ do ponto I, como centro, com o intervallo IM, e do ponto D, com o intervallo DG, ſe deſcreveráõ dous

dous arcos, cuja intersecçaõ se fará no ponto O; e tirando a recta DO será o angulo procurado IDO igual ao angulo GDI da Fig. 33.

A rasaõ desta operaçaõ he facil de se entender, porque sendo os triangulos IAD, GAD (Fig. 35.) respectivamente equiangulos aos triangulos IAD, GAD (Fig. 33.), e AB igual a AG, será tambem o triangulo AIM equiangulo ao triangulo AIG; e porque IO he igual a IM, e DO igual a DG, será finalmente o triangulo IDO equiangulo ao triangulo IDG.

208 O methodo, que fica exposto para transferir ao papel os triangulos do terreno por meio dos angulos observados, póde igualmente servir para resolver graficamente todos os casos da Trigonometria rectilinea, quando naõ for necessaria a exactidaõ, que della resulta; operaçaõ taõ facil, que naõ carece de se declarar com mais exemplos do que os referidos.

Da Bussola, e do seu uso para configurar as partes meudas de huma Planta.

209 A *Bussóla*, que na marinha se chama *agulha de marear*, he hum instrumento, cuja peça principal consiste em huma agulha de aço tocada na pedra de cevar, ou iman, e sustentada em equilibrio sobre hum ponteiro de cobre agudo, e bem limado, por meio de hum pequeno capitel vasado em fórma de piaõ, fixo no meio da agulha, e bem torneado e polido, para que ella tenha toda a mobilidade possivel. Esta agulha (Fig. 36.) está dentro de huma boceta de lataõ, ou de madeira, a qual tem gravada no fundo a rosa dos ventos, e em roda a circunferencia do horizonte dividida em 360°; e exteriormente nos pontos correspondentes a 180°, e

e 360° da circunferencia, ou parallelamente á linha que passa por elles tem duas pinnulas, para se enfiarem por ellas os objectos.

210 Funda-se o uso da bussola na propriedade, que tem as agulhas tocadas na pedra de cevar, de se conservarem na mesma direcçaõ, e de se restituirem a ella, quando saõ desviadas; direcçaõ, que he constante, ao menos no mesmo lugar, e por largo espaço de tempo. Donde se segue, que andando em roda com a caixa da bussola, podemos determinar a quantidade angular do giro, comparando o ponto da graduaçaõ marcado actualmente pela agulha com o que dantes mostrava.

211 De ordinario se ajunta ao Grafometro huma bussola, naõ com o fim de supprir o uso deste instrumento, mas para *orientar* os objectos, isto he, para determinar até meio gráo de differença a posiçaõ delles a respeito dos quatro pontos cardeais, ou da linha *norte-sul*, com a qual faz a direcçaõ da agulha constantemente o mesmo angulo no mesmo lugar, na fórma assima declarada; angulo, que previamente se deve ter conhecido, applicando a agulha sobre huma linha meridiana.

212 A bussola serve, como o Grafometro, na mediçaõ dos angulos. Mas naõ podendo ter as agulhas muito comprimento, a graduaçaõ dellas he necessariamente em ponto muito pequeno, para que se possaõ determinar os angulos com tanta exactidaõ, como a do Grafometro. Por isso naõ deve fazer-se uso da bussola, senaõ para configurar os pontos meudos de huma Carta, depois que os pontos principais forem determinados, pelos meios que ficaõ explicados.

213 Supponhamos pois, que se trata, por exemplo, de configurar o curso de hum rio. Tendo mandado fixar bandeirolas nos cotovelos, bojos, ou reconcavos mais notaveis A, B, C, D, E, F

(Fig.

(Fig. 37.), pôr-nos-hemos com a bussola em A, e enfiando pelas pinnulas a bandeirola B, observaremos na graduaçaõ o angulo comprehendido entre a linha AB, e a direcçaõ actual da agulha AN, e depois mediremos AB. Do mesmo modo no ponto B enfiaremos a bandeirola C, e notaremos o angulo que fórma BC com a direcçaõ da agulha BN, que he parallela á primeira AN, e mediremos BC; e assim por diante.

Tendo medido todos os angulos, e distancias, tomaremos sobre o papel arbitrariamente o ponto *a* para representar o ponto A (Fig. 37. 38.), e tiraremos a recta *a n* para representar a direcçaõ da agulha. No ponto *a* faremos com o transferidor o angulo *n a b* igual ao angulo observado NAB, e daremos a *a b* tantas partes do petipé, quantas foraõ as medidas que achamos em AB. Pelo ponto *b* tiraremos *b n* parallela a *a n*; faremos o angulo *n b c* igual ao observado NBC; e daremos a *b c* as partes correspondentes ás medidas de BC. Do mesmo modo continuaremos pelos mais pontos demarcados; e depois disso configuraremos as partes intermedias confórme as julgarmos á vista.

O que temos dito do curso de hum rio, se applica evidentemente ás voltas de hum caminho, ao circuito de hum bosque, de huma lagoa &c, tomando os melhores expedientes que permittirem as circunstancias, as quais se deveráõ sempre ponderar, antes de estabelecer os pontos principais, que se haõ de determinar por meio das observaçoens.

Da Prancheta, e do seu uso no risco das Plantas.

214 AInda nos falta declarar outro methodo de tirar a configuraçaõ de hum terreno, mais expedito que o precedente, assim porque naõ requer

quer tanto apparato de obſervaçoens, como tambem porque ſe obſervaõ os objectos ſobre o terreno, e ſe determinaõ ſobre o papel ao meſmo tempo.

A *Prancheta*, de que para iſto nos ſervimos, conſiſte em huma meza ABCD (Fig. 39.) de 16 até 18 pollegadas de comprido, e outro tanto de largo com pouca differença, ſuſtentada ſobre hum pé como o Grafometro. Sobre ella ſe eſtende a folha de papel, em que ſe haõ de determinar as ſituaçoens dos objectos que ſe obſervarem, a qual ſe fixa por meio de hum caixilho praticado nas extremidades da meza, ou de qualquer outra ſorte. LM he huma regoa, ou alidada, guarnecida de pinnulas nas extremidades, cujo alinhamento deve ſer parallelo aos lados della. Para maior commodidade, póde ter-ſe neſta meſma regoa huma eſcala, dividida como já fica declarado (n. 142.).

Para tirar com eſte inſtrumento a planta de hum terreno, eſcolhe-ſe, e mede-ſe huma baſe *m n* (Fig. 39.), como nos methodos precedentes. Depois aſſentando o inſtrumento em *m*, e mandando cravar huma bandeirola em *n*, para ella ſe dirige o alinhamento das pinnulas da regoa LM poſta ſobre o papel fixo na prancheta, e do ponto E que perpendicularmente correſponde ao ponto *n*, ſe tira na direcçaõ de *m n* a recta EF, á qual ſe daràõ tantas partes da eſcalla ou petipé, quantas forem as medidas da baſe *m n*. Entaõ, fazendo girar a regoa ſobre o ponto E, como centro, ſe hiráõ enfiando pelas pinnulas todos os objectos que da eſtaçaõ *m* ſe deſcobrirem, tirando no alinhamento de cadahum delles huma recta indefinida, como EI, EH, EG. Feito iſto, deixaremos huma bandeirola em *m*, e tranſportaremos o inſtrumento para a eſtaçaõ *n*. Aqui, fazendo primeiro correſponder o ponto F verticalmente ao ponto *n* por elle repreſentado, e ajuſtando a linha EF na direcçaõ de *n m* por meio do do alinhamento da bandeirola deixada em *m*, faremos girar a regoa ſobre o ponto F, como centro, e buſcaremos o alinhamento dos meſmos objectos I, H, G, obſervados na primeira eſtaçaõ, na direcçaõ dos quais tiraremos as linhas FI, FH, FG, que ſobre o papel cortaráõ as primeiras nos pontos *i*, *h*, *g*; e eſtes repreſentaráõ a ſituaçaõ dos objectos, I, H, G; e aſſim nos mais.

215 A prancheta ſerve principalmente para tirar as plantas das pequenas extenſoens, e para encher as partes intermedias das maiores, depois de ſerem eſtabelecidos os pontos principais, como aſſima diſſemos, ou para ajuntar a huma Carta já delineada alguns objectos que nella faltáraõ.

Supponde, por exemplo, que A, B, C, (Fig. 40.) ſaõ pontos já determinados ſobre a Carta em *a*, *b*, *c*, e que D he hum ponto do terreno ainda naõ determinado, acharemos a ſua poſiçaõ *d* deſta maneira: Collocaremos o inſtrumento em D, e tendo orientado a Carta fixa ſobre a prancheta, como abaixo explicaremos, dirigiremos a regoa ſegundo o alinhamento *A a*, e depois ſegundo o alinhamento *B b*, tirando por cadahum delles huma linha; e a interſecçaõ deſtas no ponto *d* moſtrará a ſituaçaõ que na Carta compete ao ponto do terreno D. Eſta determinaçaõ ſe verificará, dirigindo a regoa pelo alinhamento de *C c*, e obſervando ſe elle tambem paſſa, como deve, pelo ponto *d*.

216 De ordinario coſtuma marcar-ſe ſobre as plantas a direcçaõ da agulha, a qual ſerve para as orientar. Eſta ſe determina, aſſentando a regoa ſegundo a linha que paſſa pelo ponto que repreſenta o lugar da eſtaçaõ, e por outro qualquer marcado na Carta, e andando com a meza da prancheta em roda, até que pelas pinnulas ſe enfie o objecto correſpondente ao dito ponto. Entaõ, poem-ſe a buſſola ſobre a prancheta, e ſe anda em roda com ella,

até

até que a agulha correſponda á linha norte-ſul da meſma buſſola, iſto he, até que fique em huma direcçaõ parallela ao lado exterior da caixa; e tirando por elle huma linha, eſta marcará a direcçaõ da agulha.

217 Reciprocamente: Querendo orientar huma planta, iſto he, querendo dar-lhe a ſituaçaõ que tem o terreno por ella repreſentado, a reſpeito dos pontos cardeais do mundo, naõ he neceſſario mais do que fazer concordar a linha norte-ſul da Carta com a da buſſola.

218 Muitas vezes, em lugar de determinar a poſiçaõ dos objectos, por meio dos alinhamentos tomados de duas eſtaçoens, como aſſima moſtramos (n. 214.), naõ ſe uſa de mais que de huma ſó eſtaçaõ. Mas entaõ medem-ſe as diſtancias da prancheta a cadahum dos objectos, e eſtas reduzidas ás partes do petipé ſe marcaõ ſobre as linhas reſpectivas tiradas ſegundo o alinhamento dos meſmos objectos. Eſte he o melhor modo de praticar, quando os objectos eſtaõ perto da eſtaçaõ.

Do Livelamento.

219 POr muitas obſervaçoens ſe tem moſtrado, que a ſuperficie da terra naõ he plana, como parece, mas convexa, e ainda esferica, ou ſenſivelmente esferica. Quando do mar ſe começa a ver a terra, os primeiros objectos que ſe deſcobrem, ſaõ os mais elevados. Se a ſuperficie terreſtre foſſe plana, ao meſmo tempo que ſe deſcobriſſe a torre B (Fig. 41.), devia apparecer todo o terreno adjacente ABC; e ſe aſſim naõ ſuccede, he porque o arco DAC da ſuperficie terreſtre encobre ao obſervador poſto em D todos os objectos, que eſtaõ para baixo da tangente DB. Pódem logo dous pontos D e B parecer na meſma linha horizon-

tal

tal DB, ſem embargo de eſtarem deſigualmente diſtantes da ſuperficie da terra, e do centro della T por conſeguinte.

Linha vertical de hum lugar he a que por elle ſe dirige ao centro da terra, e *planos verticais* ſaõ todos os que tem por ſecçaõ commua a linha vertical; *plano horizontal* de hum lugar he o que por elle paſſa perpendicularmente á linha vertical, e *linhas horizontais* ſaõ todas as que do meſmo lugar ſe pódem tirar ſobre o plano horizontal.

Livelar he determinar quanto hum objecto eſtá mais ou menos diſtante, que outro, a reſpeito do centro da terra.

220 Quando hum dos objectos, ſendo viſto do outro, ſe obſerva na direcçaõ da linha horizontal delle, he certo que eſtá mais diſtante do centro. Para conhecer a differença neſte caſo, he neceſſario reflectir, que a diſtancia em que ſe póde obſervar hum objecto terreſtre, ou em que ſe obſerva na pratica do livelamento, he ſempre taõ pequena, que ſendo medida ſobre a ſuperficie da terra, como DI (Fig. 41.), póde tomar-ſe como igual ſenſivelmente á tangente DB. Conſta porém dos Elementos, que DB he meia proporcional entre a ſecante tirada do ponto B, e a parte exterior BI (36. 3, e 17. 6. Eucl.), e ſendo o arco DI muito pequeno, póde a ſecante que paſſa pelo ponto B, e pelo centro T, conſiderar-ſe igual ao diametro, ou ao dobro de IT, ou de DT. Logo ſerá 2DT : DI : : DI : BI.

Supponhamos, por exemplo, que DI ſe achou pela mediçaõ de 1000 braças, ou 10000 palmos. Tomando 29124600 palmos pelo raio medio da terra, ſerá o diametro 2DT de 58249200 palmos, e fazendo a proporçaõ 58249200 : 10000 : : 10000 : BI, acharemos BI de 1,7167, ou de 1 palmo, 5 pollegadas, e 8',8.

221 Calculada huma differença de livel, como

BI,

BI, pódem determinar-ſe as que competem a outras diſtancias, como *b i*; reflectindo, que as diſtancias *BI*, *b i*, ſaõ ſenſivelmente parallelas, e iguais ás linhas *DQ*, *Dq*, as quais ſaõ entre ſi como os quadrados das cordas, ou arcos *DI*, *Di*, porque no caſo preſente as cordas ſe confundem ſenſivelmente com os arcos.

Aſſim para achar a differença de livel *b i*, que tem lugar a 500 braças de diſtancia, faremos eſta proporçaõ $\overline{1000}^2 : \overline{500}^2 :: 1,7167 : bi$, ou $4 : 1 :: 1,7167 : bi$, e ſerá *b i* de 0,4292 de hum palmo, ou de 3 pollegadas, e 5^{l}, 2.

222 O ponto B, que eſtá na linha horizontal DB, ſe diz eſtar no livel *apparente* do ponto D, e o ponto I no *verdadeiro*; de ſorte que BI he a differença entre o livel apparente e verdadeiro do ponto B a reſpeito de D. A eſta differença ſe dá o nome de *Correcçaõ do livel*

223 Iſto ſuppoſto, para ſe conhecer a differença de livel de dous pontos B, A (Fig. 42.), que naõ exiſtem na linha horizontal que paſſa por hum delles, medir-ſe-há a diſtancia CD ou CI, e ſe obſervará o angulo BCD. Entaõ, no triangulo CDB conſiderado como rectangulo em D, poderemos calcular o lado BD, ao qual ajuntaremos a altura CA do inſtrumento, e a differença de livel DI, calculada como aſſima moſtrámos (n. 220. 221.).

Como porém eſte modo de obrar requer grande exactidaõ na medida do angulo BCD, a qual ſe naõ póde eſperar dos inſtrumentos dos liveladores, ordinariamente ſe prefere na pratica, ſem embargo de ſer mais longo e trabalhoſo, o methodo ſeguinte.

224 He neceſſario ter o inſtrumento repreſentado por CABD (Fig. 43.), chamado *Livel d'agua*. Eſte conſiſte em hum canudo de folha de flandes,

ou de qualquer outro metal, terminado em dous cotovelos A, B. Nas duas extremidades eminentes AC, BD, se ajustaõ e prégaõ com betume dous pequenos canudos de vidro I, K. No meio, e por baixo do canudo AB, se pratica hum encaixe, de sorte que se possa assentar sobre hum pé, e girar horizontalmente. He claro, que enchendo de agua todo o canal até que se eleve a duas ou tres pollegadas de altura em ambos os canudos de vidro, a linha que passa pela superficie da agua em ambos elles IA, KB, he huma linha horizontal.

O uso deste instrumento requer outra peça, que se chama *mira*; e he hum papelaõ, ou folha de flandes (Fig. 44.), de hum pé em quadro, pouco mais ou menos, dividido em duas partes iguais por huma linha horizontal MN, que separa a parte inferior pintada de negro da superior que ficará branca. Este papelaõ se préga sobre huma corrediça estreita, ficando a linha MN perpendicular ao comprimento della; e a corrediça se ajusta no encaixe aberto pelo meio da regua OP, dividida de huma e outra parte em palmos, pollegadas, e linhas; de sorte, que a linha da mira se possa levantar, ou abaixar o que for necessario.

225 Para usar deste livel, poem-se em huma estaçaõ que diste igualmente com pouca differença dos dous pontos que se querem livelar, e naõ he necessario que a estaçaõ se faça no alinhamento delles. Entaõ, pondo successivamente a mira em cada hum dos ditos pontos, de sorte que a regoa fique perpendicular, e levantando ou abaixando a corrediça, até que o observador posto ao livel CABD ajuste a linha da mira MN no prolongamento da horizontal CD; a differença de altura da mesma linha da mira achada nas duas observaçoens será a differença do livel dos ditos dous pontos.

Achando-se, por exemplo, que em hum dos pon-

pontos foi neceſſario levantar a linha de mira MN á altura de 7 palmos, e no outro á de 5 palmos e 5 pollegadas, concluiremos que a differença de livel deſtes pontos he de 1 palmo, e 3 pollegadas, ſendo mais baixo aquelle, onde a mira ſe levantou mais.

Do meſmo modo nos haveremos com todos os mais pontos, que eſtiverem a diſtancias iguais da meſma eſtaçaõ, e della ſe puderem obſervar, com tanto que a ſua differença de livel a reſpeito de CD naõ exceda o comprimento da regoa OP.

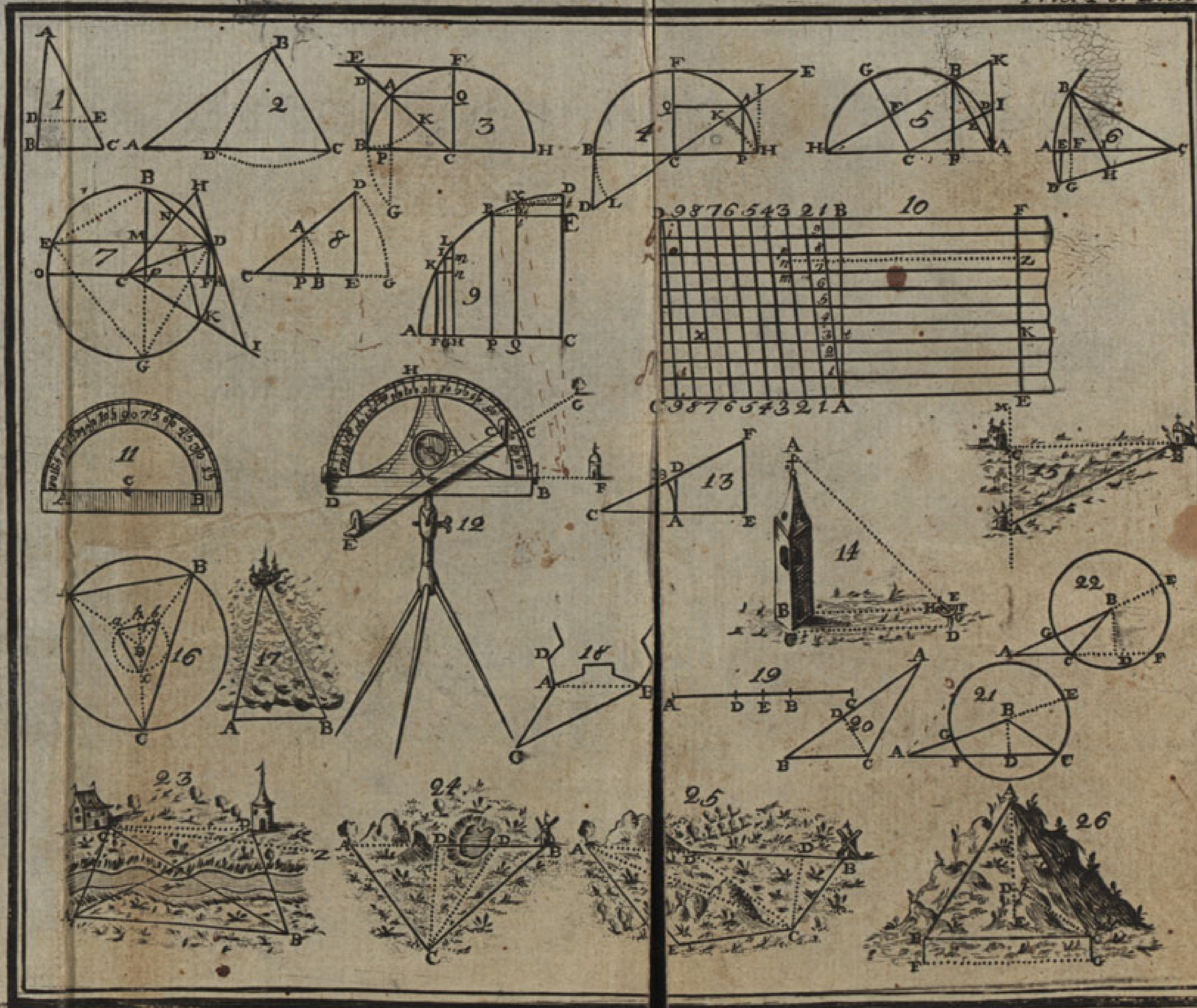
226 Quando porém os outros objectos forem muito diſtantes, ou muito grande a differença de livel, tomar-ſe-há outra eſtaçaõ entre hum dos pontos livelados na primeira, e os mais que ſe querem livelar, a fim de os comparar com elle, e aſſim por diante; procurando ſempre, que a eſtaçaõ ſeja ſenſivelmente em igual diſtancia dos objectos.

227 No caſo de naõ ſe poder aſſentar o livel a diſtancias ſenſivelmente iguais dos pontos, que ſe houverem de livelar, deve notar-ſe que a differença reſpectiva do livel delles naõ ſerá repreſentada pela differença das alturas da linha da mira, obſervadas em ambos elles; porque a differença do livel apparente ao verdadeiro naõ he igual, ſe naõ a diſtancias iguais. Por iſſo deveremos entaõ da altura da mira obſervada em cada hum dos pontos tirar a *correcçaõ do livel* competente; e depois de correctas as duas alturas, a ſua differença ſerá a differença do livel dos dous objectos.

Por exemplo: Se de hum objecto ſituado a 1000 braças da eſtaçaõ for neceſſario levantar a mira a 16 palmos de altura, e de outro a 500 braças ſe levantar ſómente a 6 palmos, naõ diremos que os ditos objectos tem 10 palmos de differença de livel; mas de 16 palmos da primeira obſervaçaõ tiraremos a correcçaõ 1 palmo, 5 pollegadas, e 9 linhas (n. 220.), 220.), e dos 6 palmos da segunda, tiraremos a correcçaõ 3 pollegadas e 5 linhas; e seraõ as alturas correctas 14 palm., 2 poll. e 3 linh. e 5 palm. 4 poll. e 7 linh., cuja differença 8 palm. 5 poll. e 8 linh. será a differença verdadeira do livel dos ditos objectos.

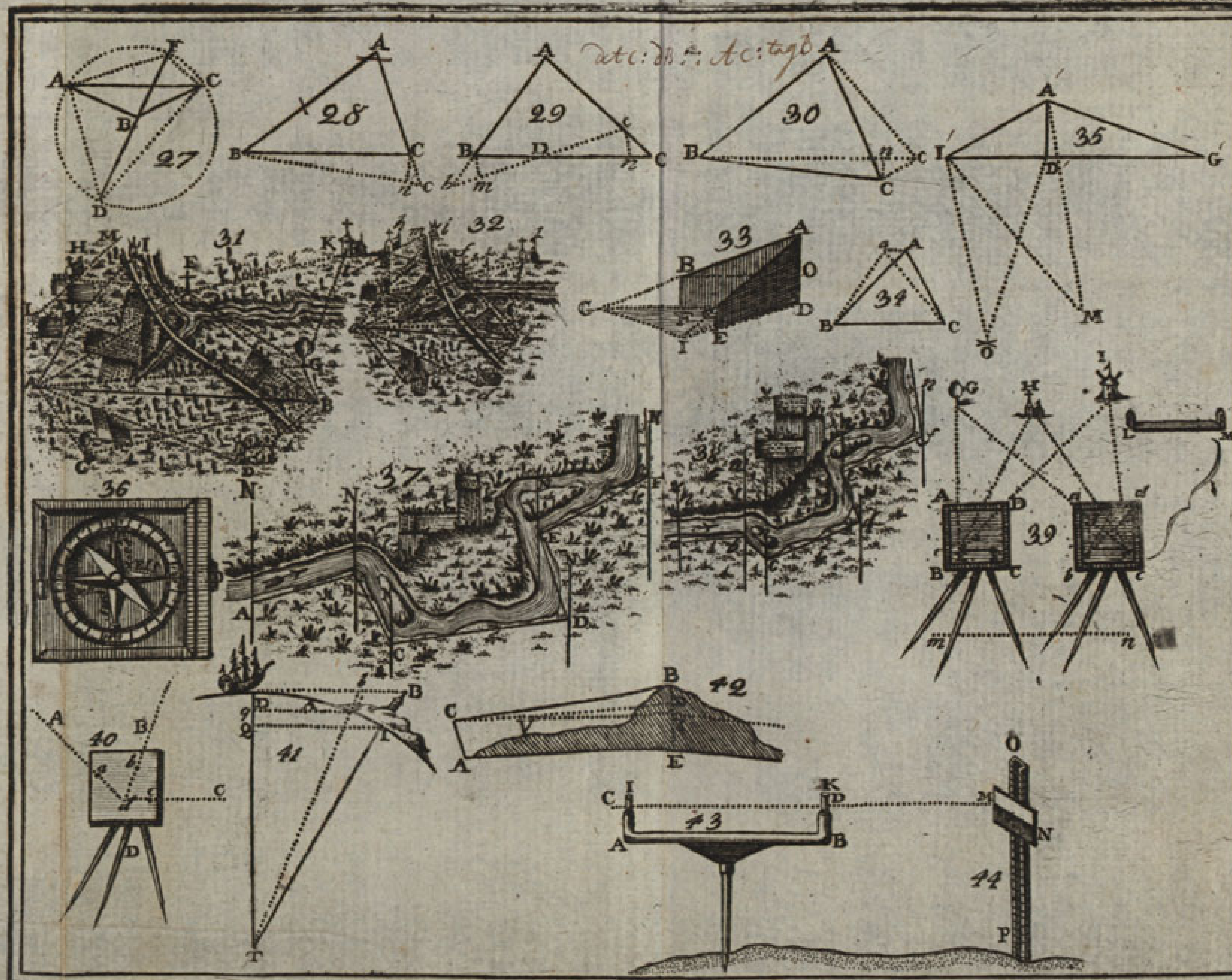
Como naõ he nossa tençaõ escrever aqui sobre esta materia circunstanciadamente, mas dar sómente as idéas fundamentais aos principiantes, naõ descrevemos outros methodos, e outros instrumentos, que se tem imaginado para o mesmo fim. Sobre esta materia póde ver-se o *Tratado do Livelamento* de M. Picard impresso em Paris no anno de 1728.

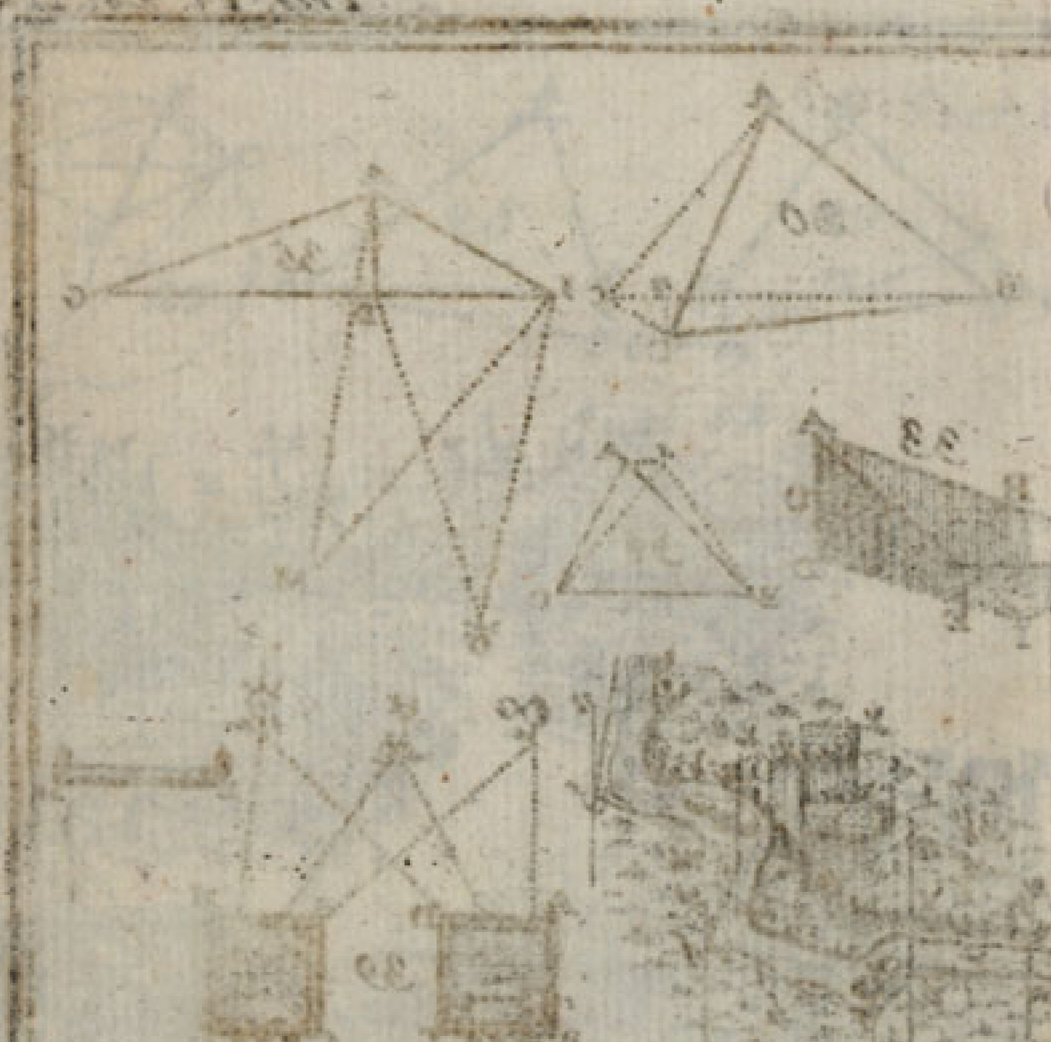
FIM.

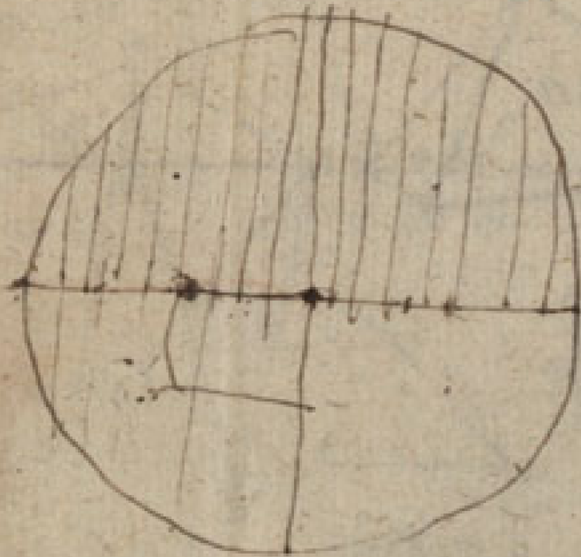

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

$\partial B : \partial BC :: \tan C : BC$

$\partial B : \partial AC :: \sin C : BC$





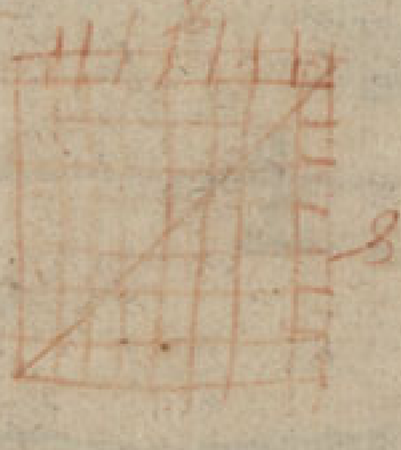


128

8

4

12



dup 2 son: 01:

sen

R + of C: sen A : sen A : D

TRIG.