mero, e grandeza das pennas, e da rafaõ que exifte entre a fua velocidade e a da corrente. Examinemos pois, como todos eftes elementos concorrem para produzir a dita força, a fim de defcobrirmos a combinaçaõ mais ventajofa, que lhe póde dar toda a intenfaõ de que he fufceptivel.

542 Seja $XYTZ$ (Fig. 157.) huma corrente horizontal, cujos pontos fe movem todos com a mefma velocidade, e que faz andar a roda vertical $AHLK$ guarnecida de pennas rectangulares AB, DE, KS &c dirigidas ao centro C; e fupponhamos, que a roda levanta o pezo Q por meio da corda $Qgbf$ que paffa pela roldana fixa g, e fe enrofca no cylindro ou tambor fbd. Nos primeiros inftantes o movimento do pezo Q ferá accelerado, mas depois de tres ou quatro voltas da roda fe fará uniforme. Entaõ a impulfaõ do fluido eftará a cada inftante em equilibrio com o pezo Q e com a refiftencia da fricçaõ. Donde fe vê, que reprefentando a velocidade uniforme do pezo Q por v, o producto Qv deverá reprefentar o effeito real da maquina, feita a deducçaõ das refiftencias, que abforbem continuamente huma parte da força movente.

543 Muito tempo fe tem agitado a queftaõ, fe huma penna tem mais força para girar quando lhe ferida perpendicularmente, ou quando obliquamente. Para faber o que devemos ter fobre efte ponto, fupponhamos a penna AB vertical, e confeguintemente DE inclinada á corrente. Tomando fobre AB dous pontos infinitamente vezinhos R, r, conduzaõ-fe as horizontais RM, rm, que determinaõ fobre DE o elemento Mm correfpondente a Rr. Comparando entre fi o momento de impulfaõ que receberia o elemento Rr, fe foffe ferido livremente, ou fe a penna DE que o encobre foffe aniquilada, com o momento de impulfaõ que refulta perpendicularmente fobre o elemento Mm; he manifefto, que a percuffaõ fobre cada ponto de Rr he maior que fobre cada ponto de Mm; mas por outra parte Rr he menor que Mm, e o braço de alavanca CR de Rr he menor que o braço CM de Mm. A determinaçaõ exacta deftes dous momentos he a que fomente póde decidir qual delles he maior.

544 Supponhamos pois que Mx reprefenta o efpaço corrido pelo fluido em hum inftante, e que Rt, My reprefentaõ os efpaços corridos pelos pontos R, M das duas pennas

nas no mesmo tempo. Tomando CM por seno total, e representando a velocidade Mx por V, e Rt por u, será a impulsaõ sobre Rr representada por $Rr \,.\, CM^2 \,.\, (V - u)^2$ (n. 508.), e o momento della relativo ao centro da roda por $Rr \,.\, CM^2 \,.\, (V-u)^2 \,.\, CR$.

Para conhecer o momento de impulsaõ contra Mm, resolvamos a velocidade Mx em outras duas, huma My igual á do ponto M e na mesma direcçaõ, a qual naõ obra conseguintemente sobre o elemento Mm, e a outra Mz. Em virtude desta resulta perpendicularmente a Mm a impulsaõ representada por $Mm \,.\, Mz^2 \,.\, sen\, DMz^2$ (n. 508.), e o momento della relativo ao centro C por $Mm \,.\, Mz^2 \,.\, sen\, DMz^2 \,.\, CM$. Ora os triangulos semelhantes Mnx, MRC daõ $xn = \frac{CR \,.\, Mx}{CM} = \frac{CR \,.\, V}{CM}$, e temos $zx = My = \frac{CM \,.\, Rt}{CR} = \frac{CM \,.\, u}{CR}$; logo $nz =$ $nx - zx = \frac{CR \,.\, V}{CM} - \frac{CM \,.\, u}{CR} = \frac{CR}{CM}\left(V - \frac{CM^2 \,.\, u}{CR^2}\right)$. Mas $sen\, DMz = \frac{CM \,.\, nz}{Mz}$ (sendo sempre CM o seno total); e por conseguinte $sen\, DMz = \frac{CR}{Mz}\left(V - \frac{CM^2 \,.\, u}{CR^2}\right)$. Logo, substituindo este valor na expressaõ do momento, teremos $Mm \,.\, Mz^2 \,.\, sen\, DMz^2 \,.\, CM = Mm \,.\, CR^2 \,.\, CM \left(V - \frac{CM^2 \,.\, u}{CR^2}\right)^2$.

He pois o momento da impulsaõ contra Rr para o momento da impulsaõ contra Mm, como $Rr : CM (V-u)^2$ para $Mm \,.\, CR \left(V - \frac{CM^2 \,.\, u}{CR^2}\right)^2$. E porque temos $Rr : Mm :: CR : CM$, e conseguintemente $Rr \,.\, CM = Mm \,.\, CR$, será em fim o primeiro momento para o segundo como $(V-u)^2$ para $\left(V - \frac{CM^2 \,.\, u}{CR^2}\right)^2$. Mas $\frac{CM^2}{CR^2} > 1$, e conseguintemente $\left(V-u\right)^2 > \left(V - \frac{CM^2 \,.\, u}{CR^2}\right)^2$. Logo o primeiro momento he sempre maior que o segundo. O mes-

mesmo raciocinio tem lugar em todos os outros elementos correspondentes das partes finitas AO, VE; e assim concluiremos, que a penna vertical he mais ventajosa que a inclinada.

545 Quando as pennas estaõ em quietaçaõ no momento em que saõ feridas pelo fluido, temos $u = 0$; e nesse caso o momento de impulsaõ contra cada elemento de Rr he igual ao momento do elemento correspondente Mm. Entaõ he indifferente, que o fluido fira a parte AO da penna vertical, ou a parte correspondente da penna inclinada. Mas como a parte OB da penna vertical he ferida tambem pela corrente, bem se vê que ainda nesse caso he mais ventajosa a situaçaõ vertical do que a inclinada.

546 Alguns autores tem estabelecido em geral a ventagem da penna vertical de hum modo erroneo. He certo, dizem elles, que se a penna DE tem entrado na agua quando AB está ainda na vertical, a parte VE da primeira cubrirá a parte AO da segunda, que naõ será ferida conseguintemente senaõ na parte OB. He verdade, continuaõ, que esta diminuiçaõ parece ser reparada pela impulsaõ que recebe a parte VE maior que AO; mas a compensaçaõ naõ he completa. Porque a percussaõ directa contra AO ou VI he para a percussaõ que resulta perpendicularmente contra VE, como $VI.(\text{sen tot.})^2$ para $VE.\text{sen}\,VEI^2$, ou como $VI.VE^2$ para $VE.VI^2$, ou em fim como VE para VI. Donde concluem ser necessario, que a extremidade E da penna DE (Fig. 158.) naõ toque a superficie do fluido, senaõ quando a penna AB começa a deixar a situaçaõ vertical. Entaõ he facil de determinar o numero das pennas, que a roda deve ter. Porque no triangulo rectangulo EAC conhece-se o lado CA que he o raio da roda, e a hypothenusa CE, porque he dada a altura da penna DE. Assim se conhecerá o arco DA; e dividindo por elle a circumferencia inteira da roda, o quociente dará o numero das pennas.

Os autores, de quem fallamos, calcuĺáraõ assim, e com muito trabalho, longas taboadas do numero das pennas convenientes a cada roda, relativamente ao raio della, e á altura das pennas.

547 Todo este apparato de calculaçoens vem abaixo, 1° porque naõ se teve conta com os differentes braços de alavanca da penna vertical e da inclinada. 2.° porque

se

ſe no caſo da Fig. 158, o momento da impulſaõ contra a penna vertical *AB* he o maior poſſivel; por outra parte quando a penna *DE* tiver tomado huma poſiçaõ tal, que o angulo *ECB* ſeja dividido pela vertical em partes iguais, o momento ſerá menor do que ſeria quando a roda tiveſſe maior numero de pennas; e fica incerto, ſe o momento *medio* no ſegundo caſo ſerá maior que no primeiro.

548 O meſmo paralogiſmo foi já advertido em huma Memoria ſobre as Maquinas Hydraulicas, impreſſa ha poucos annos. Mas o Autor della emprega tambem hum principio falſo, do qual concluio que o momento de impulſaõ contra a parte *VE* da penna inclinada *DE* (Fig. 157.) he ſempre igual ao momento contra a parte correſpondente *AO* da penna vertical; o que naõ he verdadeiro, ſenaõ quando a roda eſtá em quietaçaõ ao inſtante da percuſſaõ (n. 544. 545.). O modo que tem eſte Autor em medir a percuſſaõ de hum fluido contra hum plano movel, he defeituoſo. Reſolve a velocidade do plano em outras duas, huma parallela, e outra perpendicular á direcçaõ do fluido; e ſuppoem que o fluido naõ obra ſobre o plano, ſenaõ em virtude do exceſſo da ſua velocidade ſobre a primeira das duas precedentes, deſprezando inteiramente a ſegunda. Mas he evidente, que em virtude da velocidade que o plano tem perpendicularmente á direcçaõ do fluido, he repellido pela agua como ſe elle eſtiveſſe em quietaçaõ, e a agua vieſſe a ferillo com eſſa meſma velocidade; donde reſulta outra impulſaõ, que ſe combina com a primeira, e que o Autor deſprezou inadvertidamente. A ſua memoria contém por outra parte muitas couſas verdadeiras, e uteis.

549 Por quanto o momento da impulſaõ ſobre *VE* he igual ao momento ſobre *AO* (n. 545.), quando a roda eſtá em quietaçaõ no tempo que he ferida pelo fluido, ſegue-ſe que entaõ quanto maior for o numero das pennas tanto maior ſerá o momento; porque aſſim ſe diminue o angulo *ECB* comprehendido entre duas pennas vezinhas, e ſe aumenta o momento quando ellas ſe achaõ na poſiçaõ menos favoravel, que he quando o dito angulo he dividido pela vertical em duas partes iguais. Donde concluiremos, pela lei de continuidade, que ſe a roda andar com huma velocidade muito pequena em comparaçaõ da velocidade do fluido, a ſua força ſe aumentará dando-lhe grande numero de pennas.

Em

Em rigor parece, que ſendo a roda immovel no inſtante da percuſſaõ, o numero mais ventajoſo das pennas deveria ſer infinito, e as ſuas extremidades formariaõ huma circumferencia de circulo *FBGO* (Fig. 159.). Entaõ a impulſaõ, que reſultará perpendicularmente ſobre cada elemento *KN* do arco *FBG*, ſerá dirigida ao centro *C*, e naõ produzirá movimento algum de rotaçaõ: donde ſe ſegue, que bem longe de receber entaõ o maior momento poſſivel de impulſaõ, naõ receberá nenhum. Eſta difficuldade ſe deſvanece, reflectindo que as pennas ſe conſideraõ no noſſo calculo, como huma ſerie de planos differentemente inclinados, todos dirigidos ao centro. A ſuppoſiçaõ de ſer *FBG* hum arco de circulo continuo, cujos elementos *KN* taõ longe eſtaõ de ſerem dirigidos ao centro, que ſaõ perpendiculares aos raios *CK*, he inteiramente contraria á precedente; e aſſim naõ he de admirar, que conduza a hum reſultado muito differente.

Além diſto, como os fios de agua ſaõ compoſtos de moleculas phyſicas, e tem conſeguintemente groſſuras finitas, as extremidades das pennas devem deixar entre ſi hum certo intervallo, que permitta ao fluido exercitar a ſua acçaõ quanto lhe he poſſivel. E por iſſo o numero das pennas que ſe deve dar a huma roda em quietaçaõ, e com mais forte raſaõ em movimento, he ſempre finito e limitado. Accreſce tambem, que multiplicando o numero das pennas, a roda ſe faz mais pezada, e ſujeita a maior fricçaõ.

550 Quando o movimento da roda chega ao eſtado uniforme, a ſua velocidade he ordinariamente muito comparavel com a do fluido; e entaõ he difficil de determinar o momento de impulſaõ da agua contra todas as pennas a qualquer inſtante, e de concluir o numero mais ventajoſo dellas. Adiante daremos a ſoluçaõ geometrica deſta queſtaõ. Aqui indicaremos hum meio indirecto, que he ſufficiente para o uſo ordinario.

Havendo fixado o raio da roda, a quantidade que as pennas devem mergulhar-ſe na agua, e a velocidade que ſe quer fazer tomar a hum ponto dado da roda em comparaçaõ da velocidade do fluido, ſupporemos que ella tem ſucceſſivamente differentes numeros de pennas; e determinaremos, para differentes poſiçoens da meſma roda, os momentos de impulſaõ da agua contra todas as partes mergulhadas

gulhadas ao mesmo tempo. O numero de pennas, que der maior momento *medio* de impulsaõ será o mais ventajoso. Bastará considerar tres posiçoens de cada roda; quando huma penna *AB* (Fig. 157.) está vertical; quando o angulo *BCe*, ametade do angulo *BCE* comprehendido por duas pennas vezinhas, he dividido pela vertical em duas partes iguais; e quando a recta *Ce* estiver vertical. Deste modo, supposto a velocidade do ponto *B* igual a hum terço da velocidade do fluido, $AB = \frac{1}{5} CB$, e consequintemente o arco *FBG* de 72°, achámos que convém dar 36 pennas á roda. Supposto a velocidade do ponto *B* constante, será necessario maior, ou menor numero de pennas, conforme o arco *FBG* for menor ou maior que 72°. Estes calculos saõ longos, e penosos; e a experiencia he o caminho mais simples e expedito, para resolver a questaõ.

551 Examinemos agora a rasaõ, que deve ter a largura com a altura das pennas. He evidente, que sendo dado o raio exterior da roda *CB*, e a velocidade do fluido, o momento da impulsaõ contra á superficie *dada* de huma penna será tanto maior, quanto maior for o braço de alavanca, a que a impulsaõ se applicar. Este braço aumenta á medida que se aumenta a largura da penna, e se diminue proporcionalmente a sua altura. Donde se segue, que he ventajoso dar muita largura ás pennas, que se mergulhaõ em hum rio. Mas quando as rodas se movem por canais estreitos, ou por correntes, cuja agua se deve economizar, e empregar-se com a maior utilidade possivel, a cousa requer novas consideraçoens.

552 Seja *ABKD* (Fig. 160.) a face vertical de huma reserva, na qual se tem practicado a abertura rectangular *MNOP*, e represente *AB* o livel da agua. Supponhamos que á abertura *MNOP* está applicado hum canal rectangular, que conduz a agua a ferir as pennas de huma roda; e porque he necessario para evitar a fricçaõ, que as pennas tenhaõ hum jogo livre no vaõ do canal, imaginemos que a parte de huma penna que recebe a percussaõ perpendicular he representada pelo rectangulo *mnop*, cujos lados saõ parallelos aos do rectangulo *MNOP*, e distantes delles huma quantidade dada. Assim sómente a agua, que

que sahe pela abertura $mnop$, he a que se emprega em mover a penna, perdendo-se a que sahe pelos intersticios rectangulares Mp, No, Oz. Imaginemos agora, que a penna $mnop$ se transforma em outra $efgh$ tambem rectangular, e de igual superficie; e que a abertura $MNOP$ se transforma em outra $EFGH$, de maneira que os intersticios Ee, Ff, Hi sejaõ iguais respectivamente aos primeiros Mm, Nn, Pz. Suppondo que a quantidade que a reserva póde fornecer he limitada, e *dada*, está claro que o livel primitivo se abaixará até certa altura ab; e resta saber, se em virtude desta depressaõ diminuirá o momento de impulsaõ. O fundamento desta duvida he, porque se perde mais agua quando o vazio Gi tem maior base GH, por ser nelle maior a pressaõ do que nos vazios laterais. Adiante daremos a soluçaõ directa e geometrica deste problema. Aqui nos contentaremos de indicar o meio seguinte de apreciar o effeito da transformaçaõ proposta em cada caso particular.

553 Conduza-se a vertical TR, que divida cada huma das aberturas $MNOP$, $EFGH$ em duas partes iguais, e semelhantes; e supponhamos $TS = b$, $Sm = b$, $Sr = c$, $Mm = d$, $rR = e$, $tV = b'$, $Ve = p$, $Vr = q$, o tempo $= t$, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$. Assim teremos $TR = b + c + e = H$, $SM = b + d = f$, $tR = b' + q + e$, $VE = p + d$. Isto posto, como a penna $efgb$ deve ser igual a $mnop$, teremos primeiramente esta equaçaõ $pq = bc$.

Depois, como a quantidade de agua que sahe no tempo t pela abertura $SMPR$ he representada por $\frac{4}{3} tf \left(H^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right) \sqrt{a}$ (n. 245.), e a que sahe pela abertura $VEHR$ por $\frac{4}{3} t (p + d) \left((b' + q + e)^{\frac{3}{2}} - b'^{\frac{3}{2}} \right) \sqrt{a}$; igualando entre si estas quantidades teremos esta segunda equaçaõ, $f \left(H^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right) = (p + d) \left((b' + q + e)^{\frac{3}{2}} - b'^{\frac{3}{2}} \right)$;

Don:

Donde se vê, que sendo dada huma das tres quantidades b', p, q, as unicas que podem ser desconhecidas, viremos no conhecimento de todas tres. Quando for dada p, ou q, a equaçaõ será do quarto gráo; e do quinto, se for dada b'. Estas equaçoens se resolveráõ na practica pelos methodos conhecidos de approximaçaõ.

554 Havendo pois determinado pelas operaçoens indicadas o valor das linhas tV, Vr, Ve, será facil de comparar o momento de impulsaõ contra a penna $mnop$ com o momento de impulsaõ contra $efgb$, e de julgar qual he mais ventajosa. Porque, seja X o centro de impressaõ da penna $mnop$, isto he, o ponto ao qual corresponderia a altura media do fluido, se elle sahisse pelo orificio $mnop$, e Z o centro de impressaõ da penna $efgb$, determinado como X; e supponhamos que C he o centro da roda, e Cr o raio exterior. Entaõ, imaginando para maior simplicidade que a penna está em quietaçaõ quando he ferida pelo fluido, e advertindo que a impulsaõ perpendicular sobre huma superficie plana he proporcional á mesma superficie multiplicada pelo quadrado da velocidade, ou (que vem a ser o mesmo) pela altura media do fluido, será o momento de impulsaõ sobre $mnop$ representado por $mnop.TX.CX$, e sobre $efgb$ por $efgb.tZ.CZ$. Assim teremos a rasaõ destes dous momentos, e pronunciaremos se se ganha ou perde alguma cousa em transformar a penna $mnop$ em $efgb$.

555 Passemos ao exame da velocidade, que a roda deve tomar em comparaçaõ da velocidade do fluido, para que a maquina produza o maior effeito possivel.

O effeito da maquina he a quantidade de movimento impresso no pezo Q, que ella eleva uniformemente. Fazemos abstracçaõ das resistencias, ou ao menos suppomo-las comprehendidas no pezo Q. Assim, suppondo que o pezo Q tem a velocidade uniforme v, he necessario combinar de tal maneira o pezo com a velocidade, que o producto Qv seja hum *maximo*. Quando todos os fios da agua se movem com igual velocidade, e a roda está em quietaçaõ ao tempo que vem a ser ferida pelo fluido, o momento que resulta de todas as impulsões sobre as partes das pennas mergulhadas na agua he sempre igual ao momento, que receberia huma superficie plana vertical da mesma largura das pennas, e igualmente mergulhada (n.545.). O centro

tro de impreſſaõ deſta ſuperficie coincide com o ſeu centro de gravidade, por ſe ſuppor que todas as moleculas de agua a ferem com velocidades iguais, e parallelas. Naõ ſuccede o meſmo em huma roda, que já ſe move quando he ferida pelo fluido. Porque as partes de huma meſma penna tem differentes velocidades, conforme as diſtancias do eixo, e ſerá neceſſario calcular o momento elementar de cada parte, e attender ao numero das pennas, como adiante moſtraremos.

556 Aqui ſuppomos, conforme ao uſo ordinario, que em lugar das pennas ſe ſubſtitue huma ſuperficie plana vertical, que antes da percuſſaõ actual tenha já huma velocidade uniforme e permanente. Repreſentando eſta ſuperficie por A, a velocidade primitiva e uniforme do ſeu centro de impreſſaõ por u, a diſtancia deſte centro ao da roda por b, a velocidade conſtante do fluido por V, o pezo elevado por Q, a ſua velocidade por v, e o ſeu braço de alavanca por c; e ſuppondo que a impulſaõ perpendicular do fluido ſobre huma ſuperficie B em quietaçaõ he repreſentada pelo pezo F; ſerá a impulſaõ ſobre a ſuperficie A repreſentada por $\frac{F.A.(V-u)^2}{B.V^2}$ (n.504.). Logo, em raſaõ do equilibrio que ha a cada inſtante entre eſta impulſaõ e o pezo Q, teremos $\frac{F.A(V-u)^2}{B.V^2}\cdot b = Q.c$; e multiplicando o ſegundo membro por v, e o primeiro por $\frac{cu}{b}$ quantidade igual a v, acharemos $Qv = \frac{F.A(V-u)^2 u}{B.V^2}$. Como pois he conſtante o coefficiente $\frac{F.A}{B.V^2}$, a queſtaõ ſe reduz a fazer que $(V-u)^2 u$ ſeja hum *maximo*. Aſſim teremos $(V-u)^2 du - 2(V-u)u du = 0$, e $u = \frac{1}{3}V$; donde ſe ſegue, que *para ſer o effeito da maquina hum maximo, he neceſſario que a velocidade do centro de impreſſaõ da ſuperficie A ſeja hum terço da velocidade do fluido.*

557 Subſ-

557 Subſtituindo o valor achado de u na equaçaõ $Qv = \frac{F.A(V-u)^2 u}{B.V^2}$, teremos $Qv = \frac{4F.A.V}{27B}$, ou (fazendo a ſuperficie dada $B = A$), $Qv = \frac{4F.V}{27}$. Porém ſendo H a altura devida á velocidade V, temos proximamente $F = 2A.H$; logo $Qv = \frac{8A.H.V}{27}$. Donde ſe vê, que quando a maquina produz o maior effeito, póde imprimir a hum pezo de agua repreſentado por $\frac{8A.H}{27}$ a velocidade do fluido V, ou (que vem a ſer o meſmo) póde dar a hum pezo $A.H$ huma velocidade que ſeja $\frac{8}{27}$ da velocidade da corrente.

558 Tudo o que havemos dito das rodas mergulhadas verticalmente em huma corrente, ſe entenderá tambem das rodas horizontais, que tem as pennas rectangulares, e que ſaõ movidas por hum fluido cuja direcçaõ eſtá no plano da roda. Algumas vezes ſe uſa de rodas deſta eſpecie; mas ordinariamente a direcçaõ do fluido he obliqua ao plano da roda horizontal, e ſe dá certa inclinaçaõ ás pennas a reſpeito do meſmo plano. A fig. 161 repreſenta huma deſtas rodas, movida pela corrente VQ que cahe de certa altura, e que fere cada huma das pennas á medida que a ſua linha do meio AB ſe acha na horizontal CB perpendicular ao plano vertical que paſſaria pela direcçaõ VQ do canal. Bem ſe vê, que convem dar a eſta eſpecie de rodas hum grande numero de pennas, a fim de que os golpes do fluido ſe ſuccedaõ huns aos outros ſem interrupçaõ, pois o pezo que a roda ſe ſuppoem levantar actua continuamente em ſentido contrario. Deve com tudo evitar-ſe o multiplicar as pennas a ponto de fazer a roda muito pezada.

559 Sendo dada a direcçaõ do fluido, e a velocidade da roda, entre todas as poſições, que podem dar-ſe a cada penna relativamente á direcçaõ do fluido, ou do plano da roda, haverá huma que ſerá mais ventajoſa pa-

ra

ra imprimir força na roda. Esta posiçaõ se determina, como no n.º 518.

Seja o plano da penna representado por ef (Fig. 162.) $= A$, a direcçaõ do fluido VQH, e a sua velocidade representada por $QH = V$, a velocidade horizontal da roda por $QF = u$, e a percussaõ perpendicular do mesmo fluido sobre hum plano dado B por F. Assim teremos a percussaõ que resulta perpendicularmente sobre o plano inclinado $ef = \frac{F.A.QG^2.MB^2}{B.QA^2.V^2}$ (n. 508.), representando QA o seno total. Tomando QR perpendicular a ef, para representar esta impulsaõ, e resolvendo-a em duas, huma QS pela direcçaõ de QF, e a outra QT perpendicular a QF, he evidente que a força QT he destruida, e que somente QS tende a mover a roda. Porém os triangulos semelhantes RQS, MQN daõ $QS = \frac{QR.MN}{QM}$ $= \frac{QR.MN}{QA}$. Logo, substituindo o valor de QR será a força $QS = \frac{F.A.QG^2.MB^2.MN}{B.QA^3.V^2}$, ou (suppondo o raio arbitrario $QA = 1$) $QS = \frac{F.A.QG^2.sen\,GQM^2.sen\,FQf}{B.V^2}$, ou (fazendo o angulo constante $GQN = p$, e o angulo $GQM = x$) $QS = \frac{F.A.QG^2.sen\,x^2.sen\,(p-x)}{B.V^2}$. Esta força faz equilibrio a cada instante com o pezo Q' (Fig. 161.); e assim designando o raio da roda CQ por b, e o braço de alavanca do pezo Q' por c, teremos $Q'.c = \frac{F.A.QG^2.sen\,x^2.sen\,(p-x)\,b}{B.V^2}$. Sendo pois a velocidade do pezo $= v$, e multiplicando por $v = \frac{cu}{b}$, acharemos $Q'v = \frac{F.A.QG^2.sen\,x^2.sen\,(p-x).u}{B.V^2}$. Nesta equaçaõ he he conſtante o factor $\frac{F.A.QG^2}{B.V^2}$, e a queſtaõ ſe reduz a fazer que $sen\, x^2\, sen\,(p-x)$ ſeja hum maximo; donde acharemos, como no n.º 518,

$$tang\, x = -\frac{3}{2} cot\, p + \sqrt{\left(\frac{9}{4} cot\, p^2 + 2\right)},$$

ou faremos huma conſtrucçaõ como no n.º 519.

Tambem he facil de calcular trigonometricamente o angulo AQX (Fig. 162.), ou a ſua ametade AQM. Porque ſendo dado o angulo VQF, no triangulo FQH conheceremos o angulo FQH e os dous lados QH, QF, e determinaremos o angulo FHQ, ou o ſeu igual HQG. Logo conheceremos o angulo GQF, e o ſeu ſupplemento GQN. No triangulo QKX conhecemos os lados QK, QX e o angulo $QKX = GQN$; e aſſim determinaremos o angulo QXK, ou o ſeu igual XQN. Logo conheceremos o angulo AQX, ſoma dos dous calculados GQN, XQN.

Tendo de qualquer maneira determinado em cada caſo particular os valores de $sen\, x^2$, e $sen\,(p-x)$, ſubſtituir-ſe-haõ na equaçaõ, para conhecer o valor abſoluto do *maximo*, iſto he, o effeito $Q'v$ da maquina quando elle he o maior poſſivel.

560 Se os angulos formados pela direcçaõ do fluido com o plano da penna, e com o da roda, forem dados, e quizermos ſaber a velocidade que deve ter a roda para o ſeu effeito ſer hum maximo, faremos a meſma conſtrucçaõ do n.º precedente (Fig. 163.), e acharemos a meſma equaçaõ $Q'v = \frac{F.A.QG^2.\, sen\, x^2.\, sen\,(p-x).\, u}{B.V^2}$.

Entaõ he facil de ver que tudo he conſtante, exceptuando a quantidade $QG^2.\, sen\, x^2.u$. Tirando pois dos pontos A, G as perpendiculares AI, GZ, GP para as rectas QM, QH, e repreſentando por m o ſeno do angulo dado GHP, teremos $QG : GZ :: QA : AI :: QM : MB :: 1 : sen\, x$, e conſeguintemente $QG^2.\, sen\, x^2 = GZ^2$; teremos tambem $GH = QF = u = \frac{GP}{m}$. Logo ſerá $QG^2.\, sen\, x^2.\, u = \frac{GZ^2.GP}{m}$; e deſprezando o diviſor conſtante m, a queſtaõ ſe ſe reduzirá a fazer que $GZ^2 . GP$ ſeja hum *maximo*. E porque o ponto G deve achar-ſe na recta HY dada de poſiçaõ e de grandeza, fazendo $HY = b$; e abaixando a perpendicular QO, os triangulos ſemelhantes QOY, GZY daraõ $GZ = \frac{GY.QO}{QY} = \frac{QO(b-u)}{QY}$, e os triangulos ſemelhantes QOH, GPH daraõ $GP = \frac{QO.GH}{QH} = \frac{QO.u}{QH}$. Logo $GZ^2.GP = \frac{QO^3(b-u)^2 u}{QY^2.QH}$; e deſprezando o factor conſtante $\frac{QO^3}{QY^2.QH}$, ſeremos reduzidos a fazer que $(b-u)^2 u$ ſeja hum maximo. Aſſim teremos $(b-u)^2 du - 2u(b-u)du = 0$, e $u = \frac{1}{3}b$.

Donde ſe vê, que conduzindo pelo ponto dado H parallelamente á direcçaõ dada QF a recta HY que encontre em Y o prolongamento da penna fe; e que tomando $HG = \frac{1}{3}HY$, conduzindo QG, e acabando o parallelogrammo $QGHF$, a velocidade mais ventajoſa da roda ſerá repreſentada por QF. Calculando pois em cada caſo particular o valor de QF ou HG, ſubſtituir-ſe-ha na equaçaõ geral para determinar o valor abſoluto do maior effeito poſſivel da maquina $Q'v$.

561 As pennas naõ ſaõ ordinariamente planas, mas encurvaõ-ſe á maneira de culheres (Fig.164.). Por meio deſta figura, depois de ſerem feridas pela agua conſervaõ parte della por algum tempo, a qual pelo ſeu pezo aumenta a velocidade, e a força da roda. Devem pois os reſultados dos calculos precedentes modificar-ſe hum pouco, relativamente a eſta circunſtancia. Em muitas Provincias de França, principalmente no Delfinado, e na Provença, ſe uſa de rodizios deſta forma na conſtrucçaõ dos moinhos.

562 Em Guienna e Languedoc applicaõ tambem aos moinhos outra eſpecie de rodas (Fig. 165.), que tem a forma de huma pyramide conica inverſa, ſituada verticalmente, e guarnecida na ſuperficie de pennas obliquas, ou ſpirais. Eſtas rodas ſe poem dentro de tinas de alvenaria

naria conſtruidas de propoſito para eſſe effeito. He bem difficil calcular rigoroſamente os effeitos deſta eſpecie de rodizios; mas poderá fazer-ſe huma idêa ſufficiente na practica, por meio da theorica que havemos dado para as outras eſpecies.

563 Ha pouco tempo que entre as Memorias da Academia appareceraõ indagações muito ingenhoſas ſobre as rodas hydraulicas, nas quais ſe ſerve o Autor de huma theorica diverſa da precedente. Suppoem, que as pennas de huma roda recebem todo o effeito da agua, e naõ deixaõ eſcapar parte alguma deſte fluido, ſem lhe haver tirado o exceſſo da ſua velocidade ſobre a dellas. Deſte modo compara a percuſſaõ dos fluidos á de hum corpo duro em movimento, que vai encontrar outro duro em quietaçaõ; e acha, que para o maior effeito poſſivel da maquina deve a velocidade da roda ſer a ametade, e naõ o terço da velocidade do fluido, como ſe diz ordinariamente. Mas eſta theorica naõ he applicavel ás rodas mergulhadas nos rios, onde o fluido naõ he contido de ambos os lados, nem por conſeguinte neceſſitado a perder ametade da ſua velocidade contra as pennas. Tambem ſofre reſtricções muito ſenſiveis nas rodas, que ſe movem dentro de canais; porque ſe perde ſempre huma parte do fluido pelos interſticios, que he neceſſario deixar entre as extremidades das pennas e o interior do canal. De mais, ſuppondo dados eſtes interſticios, a theorica referida conduz ſempre aos meſmos reſultados, ſeja qual for o numero das pennas; ou ao menos naõ parece propria para determinar, ſe ha hum numero de pennas mais ventajoſo que outro. Porém agora veremos pela experiencia, que o numero das pennas naõ he indifferente, relativamente ao effeito da maquina. 91

Experiencias e Reflexões ſobre as Rodas movidas pela impulſaõ da agua.

564 A Fig. 166 repreſenta huma roda, que primeiramente tinha 48 pennas, e que ſucceſſivamente reduzimos a 24, e a 12, todas planas, e dirigidas ao centro, cuja largura era de 5 pollegadas juſtas, e a altura de 4 até 5. Ellas mergulhavaõ na agua do canal, que referimos no nº. 426, a 50 pés de diſtancia da reſer-

reserva, deixando meia linha de intersticio entre as extremidades dellas, e o fundo e paredes do canal. O diametro exterior *B K* era de 3 pés 1 poll. 10 linh.; o do cylindro, em que se enroscava a corda de 2 poll.; o das espigas do eixo de 2 linhas e meia; o da roldana *O* de 3 poll. 8 linh.; o das espigas do seu eixo de 2 linhas e 2 terços; e o da corda de 2 linh. A velocidade da corrente tinha sido determinada pelas experiencias do nº. 426; e as voltas da roda em todas as experiencias seguintes naõ se começáraõ a contar, senaõ depois que o movimento se tinha feito uniforme; o que succede sempre, quando a roda tem dado 4 ou 5 voltas.

565 Sendo pois a elevaçaõ da adufa de 1 pollegada, e a velocidade permanente da agua no canal de 300 pés em 33 segundos (n. 426.), observámos os factos seguintes.

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	12 *libr.*	60''	33, 25
48	16	60	28, 5
24	12	60	29
24	16	60	25, 5
12	12	60	25, 5
12	16	60	19, 25

566 E sendo a elevaçaõ da adufa a mesma, porém a velocidade da agua no canal de 300 pés em 30 segundos (n. 426.), achámos os factos seguintes.

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	12 *libr.*	48''	34
48	16	48	31, 25
24	12	48	30, 33...
24	16	48	28, 5
12	12	48	25
12	16	48	23

567 Por

567 Por estas experiencias se vê, que a roda com o mesmo pezo anda mais velozmente, quando tem maior numero de pennas. Logo em todos os casos semelhantes ás mesmas experiencias, será conveniente dar a huma roda ao menos 48 pennas, se ella as puder ter sem ficar muito pezada, e sem enfraquecer o anel, em que ellas encaixaõ. Vejamos pois, qual he o valor do arco *MBN*, que mergulha na agua. A extremidade de huma penna vertical mergulhava-se 13 linhas proximamente. Com esta quantidade, e com o raio da roda, acharemos $MBN = 24° \ 54'$. Nas rodas grandes, que tem perto de 20 pés de diametro, e que saõ movidas por huma corrente rapida, o arco mergulhado naõ excede de 25° até 30°; e ordinariamente se lhes naõ dá mais que 40 pennas. Se fosse maior o numero dellas, seriaõ mais ventajosas.

568 He praxe recebida dar hum pequeno numero de pennas ás rodas, que mergulhaõ em rios; e isso, para impedir que as pennas se naõ cubraõ humas ás outras, ou para que cada huma receba inteiramente a percussaõ da agua. A experiencia nos ensinará o que devemos pensar neste ponto.

A roda, de que nos servimos para isto (Fig. 167. 168.) he de construcçaõ diversa da precedente. *BGFHbbgf* he a elevaçaõ commua de duas coroas de ferro, cuja largura *Bb* he de 9 linhas, e a grossura de 1 linha. As pennas saõ de folha de ferro de meia linha de espessura. A extremidade exterior *B* de cada huma he sustentada por huma pequena cavilha de ferro, que se encaixa nas duas coroas, e a outra extremidade por duas hastes *AR* de de ferro, que estaõ prezas em *R* á roda *K* movel ao redor do centro *C*. Por este meio se póde diminuir o numero das pennas, quando for necessario, e dirigillas ao centro, ou inclinallas ao raio, conforme se quizer. O diametro exterior *BF* he de 3 pés, a largura das pennas de 5 pollegadas, e a altura de 6; o diametro do cylindro que recebe a corda de 2 poll. 6 linh., o das espigas do seu eixo de 3. linh., o da roldana de 3 poll. 8 linh., o das espigas do seu eixo de 2 linh. e 2 terços, e o da corda de 2 linhas. O eixo da roda he guarnecido de huma pequena roda dentada, que por meio de huma taramella a faz parar no instante que se quer, e que serve para medir as fracções de huma volta. O pezo total da maquina he de 44 libras.

569 Pro-

569 Procurando pois huma corrente incluida entre dous muros verticais, parallelos, e distantes hum do outro de 12 até 13 pés, cujo fundo era bem unido, e a profundidade da agua de 7 até 8 pollegadas, assentámos a maquina (Fig. 167.), de maneira que as pennas se mergulhassem 4 pollegadas segundo a vertical, e que naõ houvesse obstaculo que alterasse os effeitos da percussaõ; e assim achamos os resultados seguintes

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	24 *libr.*	60″	$27 \frac{19}{48}$
24	24	60	$27 \frac{7}{48}$
24	40	40	$15 \frac{28}{48}$
12	40	40	$13 \frac{15}{48}$

570 Por estas experiencias se vê, que a roda levanta o mesmo pezo com maior velocidade sensivel quando tem 24 pennas, do que quando tem 12 sómente; mas quando tem 48 pennas a velocidade naõ differe quasi nada da que se observa quando tem 24 pennas. O arco mergulhado MBN era de $77^{\circ} 53'$. He pois certo, que em casos semelhantes a este convém dar ao menos 24 pennas á roda; e se o mergulhamento fosse mais consideravel, poderia ser o numero menor. Na practica ordinaria daõ-se ás rodas dos moinhos mergulhadas em rios 8 até 10 pennas, e algumas vezes menos. Este numero he muito pequeno; e ellas andariaõ muito melhor, se tivessem de 12 até 18 pennas.

571 Havemos determinado pela theorica (n. 556.) a velocidade, que a roda deve tomar em comparaçaõ da velocidade do fluido, para que resulte o maior momento possivel. Agora consultemos sobre isso a experiencia.

Sendo

Sendo a roda de 48 pennas (Fig. 167.) applicada ao canal do n. 425, cuja velocidade era 300 pés em 27 seg.			Sendo a roda de 24 pennas (Fig. 167.) applicada ao canal do n. 569, e as pennas mergulhadas 4 polleg. verticalmente,		
Pezo levantado.	*Tempo.*	*Voltas da roda.*	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
33 libr.	40″	21 $\frac{8}{48}$	57 libr.	40″	12 $\frac{19}{48}$
33 $\frac{1}{2}$	40	20 $\frac{44}{48}$	58	40	12 $\frac{10}{48}$
34	40	20 $\frac{32}{48}$	59	40	12 $\frac{1}{48}$
34 $\frac{1}{2}$	40	20 $\frac{21}{48}$	60	40	11 $\frac{40}{48}$
35	40	19 $\frac{44}{48}$	61	40	11 $\frac{30}{48}$
35 $\frac{1}{2}$	40	19 $\frac{15}{48}$	62	40	11 $\frac{19}{48}$
36	40	18 $\frac{28}{48}$	63	40	11 $\frac{7}{48}$

572 Como os differentes pezos levantados tem o mesmo braço de alavanca, e os tempos saõ iguais, as suas velocidades seraõ como os numeros das voltas respectivas da roda. Assim, desprezando a fricçaõ e resistencia do ar, o maior effeito da maquina será, quando for maior o producto do pezo levantado pelo numero correspondente das voltas da roda. No primeiro caso acharemos, que o maior destes productos he o que corresponde ao pezo de 34 $\frac{1}{2}$ libras, quando a roda dá 20 $\frac{7}{16}$ voltas em 40 segundos.

Sendo pois a velocidade do fluido de 300 pés em 27″, ou de 5334 poll. em 40″, busquemos a velocidade do centro de impressaõ da roda no mesmo tempo. Por quanto o diametro da roda era de 36 pollegadas, e o diametro da circumferencia descrita pelo centro de impressaõ de 34 proximamente, o dito centro descrevia em 40″ o espaço

paço de $34 . \frac{355}{113}\left(20 + \frac{7}{16}\right)$, isto he, de 2183 pollegadas. Assim achamos, que a velocidade da agua era para a velocidade do centro de impressaõ, como 5334, para 2183, ou como 5 para 2 proximamente. Donde se vê, que a velocidade do centro de impressaõ das pennas he maior que o terço, e menor que a ametade da velocidade do fluido, quando a roda se move em canal estreito.

573 Mas esta rasaõ será a mesma, havendo respeito ás resistencias? a questaõ póde reduzir-se a isto. Temos duas quantidades semelhantes, e consecutivas Mv, Nv', cada huma das quais exprime o producto do pezo pela sua velocidade, e suppoem-se que Mv he hum *maximo*, e por conseguinte $Mv > Nv'$. Entaõ, para ter conta das resistencias, cada hum dos pezos M, N deve suppor-se aumentado de certa quantidade. Suppondo pois que M se torna em $M + m$ e N em $N + n$; pergunta-se, se a mesma velocidade v que faz Mv hum *maximo*, fará tambem $Mv + mv$ hum *maximo*, ou $Mv + mv > Nv' + nv'$? He evidente, que em geral póde ser, ou naõ ser, conforme a rasaõ dos pezos m, n. Mas aqui he provavel, que as forças das resistencias mv, nv' saõ, ao menos sensivelmente, como as forças Mv, Nv'. Assim teremos $mv : nv' :: Mv : Nv'$, e conseguintemente $Mv + mv : Nv' + nv' :: Mv : Nv'$. Porém $Mv > Nv'$; logo $Mv + mv > Nv' + nv'$.

574 No segundo caso medimos a velocidade da corrente por meio de hum molinete muito ligeiro, situado ao lado da roda, e achámos que a velocidade *media* da agua era de 2740 em 40''. E multiplicando cada pezo das experiencias pelas voltas correspondentes da roda, vemos que o *maximo* corresponde ao pezo de 60 libras, quando a velocidade da circumferencia da roda he de 1338 pollegadas em 40'', e a do centro de impressaõ de 1189 pollegadas no mesmo tempo. Donde se vê, que tambem nas rodas mergulhadas nos rios deve ser a velocidade do centro de impressaõ 2 quintos da velocidade da corrente, sem grande differença.

575 Examinemos agora, se nas rodas verticais he ventajoso, ou naõ, inclinar as pennas ao raio, como se pratica algumas vezes (Fig. 168.).

Primeiramente no canal estreito do n.º 426, sendo a velo-

velocidade da agua de 300 pés em 27″ com a roda de 48 pennas, para differentes inclinaçoens dellas, ou angulos *CBA*, achamos os resultados seguintes

Inclinaçaõ.	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
0°	34 libr.	40″	20 $\frac{26}{48}$
8	34	40	19 $\frac{20}{48}$
8	38	40	17 $\frac{5}{48}$
12	34	40	19 $\frac{40}{48}$
12	38	40	17 $\frac{22}{48}$
16	34	40	20 $\frac{24}{48}$

E depois no canal largo do n° 569, sendo a roda de 12 pennas, e estando mergulhada na agua 4 pollegadas verticalmente, achamos os resultados seguintes

Inclinaçaõ.	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
0°	40 libr.	40″	13 $\frac{17}{48}$
15	40	40	14 $\frac{21}{48}$
30	40	40	14 $\frac{22}{48}$
37	40	40	14 $\frac{15}{48}$

576 Donde se vê, que no primeiro caso, as pennas dirigidas ao centro saõ mais ventajosas que as inclinadas de

de 8° ; porém estas menos ventajosas que as inclinadas de 12°, e estas menos que as inclinadas de 16°. A rasaõ he ; porque sendo as pennas inclinadas, a percussaõ obliqua se resolve em duas, huma perpendicular á penna, a qual só executa a percussaõ, e a outra parallela á mesma penna, a qual faz subir a agua ao longo della. Esta agua elevada fica por algum tempo sobre a penna, e pelo seu pezo compensa, e póde exceder o que se tinha perdido na percussaõ pela obliquidade.

No segundo caso se vê, que a obliquidade mais ventajosa se acha entre 15° e 30°. Sempre ha huma obliquidade que se naõ deve passar, porque se perderia mais na percussaõ do que se ganharia no pezo da agua. M. Deparcieux (*Mem. de l'Acad.* 1759.) refere muitas outras experiencias, em que as pennas inclinadas ao raio saõ mais ventajosas, que as dirigidas ao centro.

Das rodas movidas pelo pezo da agua; ou pelo pezo, e pela impulsaõ ao mesmo tempo.

577 AS rodas de que agora tratamos, e que ordinariamente se chamaõ *rodas de cubos*, saõ as que recebem a agua de huma corrente em certas vasilhas *Amn* practicadas na circumferencia (Fig. 170.), cujo pezo as faz andar. Os cubos devem conservar a agua recebida o mais que he possivel, e conseguintemente naõ devem começar a despejar-se, senaõ quando tem chegado perto do ponto *D* extremidade inferior da vertical *AD*.

578 Algumas vezes a roda tem menos velocidade, do que o fluido que entra nos cubos ; e entaõ he movida ao mesmo tempo pela percussaõ da agua que entra de novo a cada instante, e pelo pezo da que elles contém.

579 O movimento da roda he accelerado nos primeiros instantes ; mas depois de algumas revoluções se faz uniforme. Entaõ, a força que a roda recebe ou do pezo do fluido, ou do pezo combinado com a percussaõ, faz continuamente equilibrio com o pezo *Q*, que a maquina levanta, ou que se considera levantar, e com a resistencia da fricçaõ. Neste caso o equilibrio he, como se a maquina estivesse em quietaçaõ ; e por isso naõ consideramos o movimento, senaõ depois de haver chegado á uniformidade.

580 Isto

580 Isto posto, seja $ABDE$ (Fig. 171.) huma roda vertical perfeitamente movel ao redor do centro C; e seja cuberta de agua a porçaõ da coroa $GgBbH$, cuja altura Gg ou Hb se considera infinitamente pequena em comparaçaõ do raio CM. Do centro C tirem-se os raios infinitamente vezinhos CM, Cm, que determinaõ a quantidade elementar de agua $MNnm$; e pelos pontos G, H, M, m tirem-se as horizontais GF, HV, MP, mp, e abaixe-se a vertical MI, que encontre em I o diametro horizontal BE, e em t a ordenada mp ao diametro vertical AD. A porçaõ de agua $MNnm$ póde representar-se por $Mm.MN$; e o seu momento relativo ao centro C será $Mm.MN.CI$, ou $Mm.MN.MP$. Porém os triangulos semelhantes Mtm, MPC daõ $Mm.MP = CM.Pp$. Logo o momento será representado por $MN.CM.Pp$; e conseguintemente o momento total de toda a agua $GgBbH$, por $MN.CM.FV$.

581 Logo, se a roda girar com velocidade igual á da agua que entra nos cubos, de maneira que naõ haja percussaõ, e se designarmos o pezo elevado por Q, o seu braço de alavanca por c, e a sua velocidade por v, a velocidade da circumferencia da roda por u, a secçaõ rectangular de hum cubo por A, cuja largura he horizontal, e a altura MN; teremos $Qc = A.CM.FV$, e $v = \frac{cu}{CM}$; donde se tira $Qv = A.FV.u$.

582 Seja primeiramente huma roda vertical $ABDE$ (Fig. 172.), movida pela agua de hum canal fechado $OZGg$, de maneira que conduzindo a horizontal GF, a velocidade em G seja devida á altura RF da reserva provisional $XZYT$; e supponhamos, que a roda se move com huma velocidade igual á do fluido, e que a porçaõ da coroa $GBHbbg$ representa a agua que está constantemente nos cubos, de maneira que se vase tanta por Hb como entra por Gg. Guardando as denominações do n.º precedente, e supponde que H he a altura devida a huma velocidade dada V, e fazendo $RV = b$, $RF = x$, teremos $u = V\sqrt{\frac{x}{H}}$, e $Qv = \frac{AV(b-x)\sqrt{x}}{\sqrt{H}}$.
Assim para ser o effeito maior que he possivel, deverá

 ser

ser $(b-x)\sqrt{x}$ hum *maximo*, e conseguintemente teremos $\frac{(b-x)dx}{2\sqrt{x}} - dx\sqrt{x} = 0$; donde se tira $x = \frac{1}{3}b$. Para ser pois o effeito da maquina o maior que he possivel, he necessario que a altura devida á velocidade da roda seja hum terço da altura da reserva acima do ponto mais baixo, onde a agua dos cubos se despeja.

qf.

583 Substituindo o valor achado de x na equaçaõ $Qv = \frac{AV(b-x)\sqrt{x}}{\sqrt{H}}$, teremos $Qv = \frac{2AVb\sqrt{b}}{3\sqrt{3H}}$ por expressaõ do maior effeito possivel.

584 A soluçaõ deste problema póde ser util, quando tendo construido huma roda se quer fazer andar do modo mais ventajoso, e quando sendo dada a altura da reserva, temos a liberdade de tomar mais ou menos agua, conforme for necessario. Bem se vê, que entaõ he necessario conduzir o canal $OZGg$ de maneira, que a agua seja recebida toda nos cubos, que a altura RF seja hum terço de RV, e que a circumferencia da roda tome a velocidade do fluido em G. He indifferente, que a agua entre por cima da roda como na Fig. 172, ou de ilharga como na Fig. 173.

585 Quando podemos dar ao fluido a queda RV, perguntar-se-ha se em lugar da roda de cubos naõ seria mais ventajoso empregar huma roda de pennas, que fosse movida pela percussaõ do fluido com a velocidade devida á dita altura. Para responder a isto observaremos, que suppondo a superficie A constante, e sendo a velocidade adquirida por RV representada por $\frac{V.\sqrt{RV}}{\sqrt{H}}$, o maior effeito da roda de pennas será $\frac{8A.V.RV.\sqrt{RV}}{27\sqrt{H}}$ (n.557.). Logo o maior effeito da roda de cubos he para o maior effeito da roda de pennas como $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ para $\frac{8}{27}$, ou como 9 para $4\sqrt{3}$. Donde se vê, que a roda de cubos he mais ventajosa que a de pennas na rasaõ de 9 para 7 proximamente: ao que se

ſe deve acreſcentar, que a primeira deſpende menos que a ſegunda na raſaõ de $\sqrt{RF}$ para $\sqrt{RV}$, ou de 1 para $\sqrt{3}$.

586 A hypotheſe, que ſerve de baſe aos n.os 582, 583, 584, que ſendo conſtante a altura da reſerva podemos tomar mais ou menos agua conforme quizermos, naõ tem lugar ordinariamente na practica. Pela maior parte ſuccede, que a reſerva dá quantidades iguais de agua em tempos iguais, de qualquer maneira, e em qualquer altura que ella ſe receba na roda.

Supponhamos pois, que $ABDE$ (Fig. 174.) he huma roda vertical, movida pela agua de hum canal aberto; e repreſentemos por M a quantidade conſtante de agua, que elle fornece em hum tempo dado, em hum ſegundo por exemplo. A velocidade u da circumferencia da roda ſerá o eſpaço deſcrito por ella no meſmo tempo; e teremos $Au = M$, ou $A = \frac{M}{u}$. Logo ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ do n.º 581, teremos $Qv = M.FV$. Donde ſe vê, que para fazer o effeito Qv o maior que he poſſivel, he neceſſario aumentar FV quanto for poſſivel.

587 Daqui ſe ſegue, que ſendo dada a altura RV, e conſervando-ſe ſempre a meſma deſpeza M por meio das mudanças que ſe podem fazer no orificio OZ, quanto mais ſe diminuir a parte RF, mais ſe aumentará o effeito da maquina. Porém á medida que diminue RF, diminue a velocidade do fluido, e conſeguintemente a da roda. Logo a roda produzirá hum effeito maior, quando girar com menor velocidade. Mas iſto tem ſeus limites; porque ſendo dadas as dimenſões dos cubos pela equaçaõ $A = \frac{M}{u}$, deve creſcer A quando u diminue, e o aumento de A deve ter ſeus limites, de outra ſorte a roda deveria ſer muito alta, e muito larga, e conſeguintemente muito pezada.

588 Sendo pois o effeito deſta roda repreſentado por $M.FV$, ou por $M(RV - RF)$, he facil de ver (n. 557.) que o maior effeito de huma roda de pennas debaixo da altura RV ſeria repreſentado por $\frac{8\,M.RV}{27}$; porque

T 2

a despeza da agua he como a velocidade multiplicada pelo orificio, e a velocidade como a raiz quadrada da altura. Logo o effeito da roda de cubos he para o maior effeito da roda de pennas como 27 $(RV - RF)$ para $8RV$; e porque RF se suppoem muito menor que RV, o effeito da primeira será muito maior que o da segunda.

589 Supponhamos agora huma roda, que ande com menor velocidade que a do fluido em G; e seja u a velocidade da roda, V a do fluido em G, F a impulsaõ perpendicular que elle daria em hum plano B em quietaçaõ, e C a superficie plana a que se reduz a superficie dos cubos ferida perpendicularmente pelo fluido. Conservando as outras denominaçoes dos n.os precedentes, acharemos $Qv = M.FV + \frac{F.C(V-u)^2 u}{B.V^2}$ (n. 556. e 586.).

590 Para determinar o maximo, reflectiremos, que no segundo membro tudo he constante, excepto $(V-u)^2 u$, e acharemos $u = \frac{1}{3} V$. Metendo este valor na equaçaõ, tomando $B = C$, fazendo $F = 2C.RF$ (n. 527.), e advertindo que $M = C.V$, acharemos $Qv = M.FV + \frac{8M.RF}{27}$, ou $Qv = M\left(RV - \frac{19RF}{27}\right)$.

Donde se vê, que esta roda produzirá tanto maior effeito, quanto menor for a sua velocidade, e que o seu maior effeito será para o de huma roda de pennas debaixo da queda RV, como $27\left(RV - \frac{19RF}{27}\right)$ para $8RV$.

591 De tudo isto se segue, que as rodas de cubos saõ mais ventajosas que as de pennas, quando se póde dar á agua grande queda. Porém ha occasiões, em que he necessario que a roda ande com grande velocidade, e por outra parte a agua he em abundancia. Entaõ saõ preferiveis as rodas de pennas; porque produzindo as de cubos o maior effeito quando andaõ de vagar, seria necessario, que endentassem em alguns carretes ou lanternas, o que complicaria a maquina, e aumentaria a fricçaõ. As rodas de pennas saõ tambem as unicas, que podem servir nas correntes dos rios.

592 So-

592 Sobre as rodas de cubos fizemos poucas experiencias; mas naõ deixará de ser util ajuntarmolas aqui.

A Fig. 170 representa a maquina, de que nos servimos. O canal *XYTZ* que conduzia a agua era horizontal, de 5 pollegadas de largura, e dava constantemente 1194 pollegadas cubicas por minuto. A roda tinha 48 cubos de 3 pollegadas de altura, e 5 de largura; o diametro da roda *AD* era de 3 pés, o do eixo de 2 pollegadas e 7 linhas, e o das suas espigas de 2 linhas e meia. A roldana *O* era a mesma, que nas experiencias das rodas de pennas.

593 Contando pois o numero das voltas, assim que o movimento tinha chegado á uniformidade, o que succede sempre depois de 5 ou 6 revoluções, observámos os factos seguintes

Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
11 *libr.*	60″	$11 \frac{46}{48}$
12	60	$11 \frac{11}{48}$
13	60	$10 \frac{25}{48}$
14	60	$9 \frac{40}{48}$
15	60	$9 \frac{10}{48}$
16	60	$8 \frac{31}{48}$
17	60	$8 \frac{9}{48}$
18	60	$7 \frac{32}{48}$

Com o pezo de 19 libras ainda se movia a roda, mas muito de vagar; e com 20 libras parava, aindaque se puzesse primeiro em movimento com a maõ, para lhe fazer

fazer tomar a agua; e naõ tendo pezo algum, dava $40 \frac{1}{4}$ voltas em hum minuto.

594 Multiplicando cada pezo pelo numero correſpondente das voltas da roda, acharemos què o maior producto correſponde proximamente ao pezo de 17 libras; e entaõ he a velocidade da roda ſenſivelmente, como a formula do nº. 590 requer.

Por quanto no caſo do maior effeito dá a roda $8 \frac{3}{16}$ voltas em 1 minuto, e no meſmo tempo daria $40 \frac{1}{4}$, ſe naõ levantaſſe pezo algum, ſegue-ſe que a velocidade competente ao maior effeito he para a velocidade, que a roda tomaria naturalmente ſendo deſcarregada, como 1 para 5 proximamente. Eſta reflexaõ póde ſer util na practica.

Determinaçaõ geral dos effeitos das rodas de pennas.

595 O Objecto, que aqui nos propomos, he determinar em geral o effeito de huma roda de pennas, havendo reſpeito á impulſaõ do fluido contra todas as pennas, que elle fere ao meſmo tempo. Eſte problema he inteiramente novo. Todos os Autores que eſcreveraõ ſobre eſta materia, naõ conſideráraõ mais que a impulſaõ contra huma ſó penna; o que facilita a ſoluçaõ, mas perde a generalidade, que he de tanto preço para os Geometras.

596 Seja $AKDB$ (Fig. 169.) a circumferencia exterior de huma roda vertical, guarnecida de qualquer numero de pennas Ee, Ff &c dirigidas ao centro C, e mergulhadas em huma corrente horizontal $XYTZ$, cujos pontos ſe movem todos com a meſma velocidade. Seja Mm hum elemento qualquer da penna Ee; e do ponto A onde a ſuperficie do fluido encontra a circumferencia $AKDB$, conduza-ſe para o centro o raio AC, e abaixe-ſe o raio vertical CI. Supponhamos o raio da roda $CA = a$, a largura das pennas $= b$, o ſeno total $= 1$, o angulo $ACI = m$, o angulo ECI que faz a primeira penna ferida com a vertical $= p$, o angulo comprehendido por duas pennas conſecutivas $= q$, a velocidade do fluido $= V$, a

de

de qualquer ponto da circumferencia $AKDB = u$, $EM = x$, $Mm = dx$, e a impulsaõ do fluido contra hum plano B em descanço $= F$.

Assim resolvendo a velocidade do fluido, como acima fizemos (n. 544.), teremos evidentemente My ou zx $= \frac{CM.u}{CA} = \frac{u(a-x)}{a}$, $nx = V\cos p$, $nz = nx - zx = V\cos p - \frac{u(a-x)}{a}$, e em fim $\operatorname{sen} z Mn = \frac{nz}{Mz}$ $= \frac{aV\cos p - u(a-x)}{a.Mz}$. Logo a impulsaõ, que resulta perpendicularmente a Mm, será representada pela quantidade $\frac{Fbdx(aV\cos p - u(a-x))^2}{a^2 BV^2}$; e designando por dM o momento elementar que ella produz, teremos

$$dM = \frac{Fbdx(aV\cos p - u(a-x))^2.(a-x)}{a^2 BV^2},$$

ou fazendo, por abbreviar $\frac{Fb}{BV^2} = f$, e mudando hum pouco a fórma da equaçaõ

$$(A)\ldots dM = fdx\left(V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}\right)^2.\cos p^2.(a-x).$$

597 Bem se vè, que esta equaçaõ se integra sem difficuldade. Mas antes de fazer esta operaçaõ, observaremos que se a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}$ fosse negativa, a penna seria a que feriria o fluido; e porque o quadrado he huma e outra expressaõ he o mesmo, naõ se poderia discernir qual dos dous casos tem lugar, se a integraçaõ se fizesse do modo ordinario. Eisaqui pois o que se deve fazer em geral.

Examinar-se-ha o que dá a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}$, quando $x = EV = CE - CV = a - \frac{a\cos m}{\cos p}$, e quando $x = 0$. Isto posto, 1º Se a dita quantidade for positiva em ambos os casos, o fluido ferirá a penna em toda a exten-

extensaõ VE, e o calculo se fará como logo veremos; 2°. Se for negativa em ambos os casos, a penna ferirá o fluido em toda a extensaõ VE, e o calculo se fará do mesmo modo; 3°. Se for positiva no primeiro caso e negativa no segundo huma parte VR será ferida pelo fluido, e a outra RE o ferirá a elle. Entaõ determinaremos o momento M, de maneira que o integral desvaneça quando tivermos $V - \frac{u(a-x)}{a \cos p} = 0$, ou quando $x = \frac{au - Va \cos p}{u}$, e que tenha o seu valor completo quando $x = EV = a - \frac{a \cos m}{\cos p}$. Seja G este integral, que exprime o momento de impulsaõ da agua contra VR. Tambem determinaremos M de maneira que o integral desvaneça quando $x = 0$, e tenha o valor completo quando $x = ER = \frac{au - Va \cos p}{u}$. Seja H este integral, que exprime o momento da impulsaõ da parte RE contra o fluido. Está claro, que $G - H$, ou $H - G$ representará o momento da força resultante que impelle a penna, ou o fluido.

598 He evidente, que o processo do calculo he o mesmo nos tres casos, e que se trata sempre de tomar huma soma, ou huma differença de momentos de impulsaõ. Aqui naõ examinaremos mais que o primeiro, porque he o que tem lugar quasi sempre. Para que a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a \cos p}$ seja positiva em toda a extensaõ EV, basta que seja $V \cos p = u$; e na practica temos quasi sempre $V \cos p > u$. Porque, seja $u = \frac{V}{3}$, como succede ordinariamente; a equaçaõ $V \cos p = u$ daria $\cos p = \frac{1}{3}$, e o angulo $p = 70° 30'$. Porém he extremamente raro que o angulo p seja taõ consideravel, ou que a penna se mergulhe na agua até dous terços do raio. Sendo a quantidade

dade $V - \frac{u(a-x)}{a \cos p}$ positiva, com maior rasaõ o seraõ as quantidades $V - \frac{u(a-x)}{a \cos(p-q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a \cos(p-2q)}$ &c.

599 Integrando pois a equaçaõ (A) de maneira que o integral desvaneça quando $x = 0$, e receba o valor completo quando $x = EV = a - \frac{a \cos m}{\cos p}$, acharemos

$$M = \frac{fa^2 V^2 (\cos p^2 - \cos m^2)}{2} - \frac{2fa^2 Vu}{3}\left(\cos p - \frac{\cos m^3}{\cos p^2}\right)$$
$$+ \frac{fa^2 u^2}{4}\left(1 - \frac{\cos m^4}{\cos p^4}\right).$$

E fazendo, por abbreviar, $fa^2 V^2 = N$, e $u = kV$; sendo k hum coefficiente dado, teremos

$$M = N\left[\frac{\cos p^2 - \cos m^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\cos p - \frac{\cos m^3}{\cos p^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\cos m^4}{\cos p^4}\right)\right].$$

600 Pelo ponto E seja conduzida $E\,1$ parallela á superficie XY da agua. Está claro, que só a parte FV' da penna Ff he ferida pelo fluido; e designando por M' o momento de impulsaõ contra esta parte, acharemos pelo mesmo methodo

$$M' = N\left[\frac{\cos(p-q)^2 - \cos p^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\cos(p-q)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\cos p^3}{\cos(p-q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\cos p^4}{\cos(p-q)^4}\right)\right].$$

Do mesmo modo, conduzindo $F\,2$, $G\,3$ &c parallelas á superficie do fluido, e representando por M'', M''',....M^n os momentos de impulsaõ contra as partes GV'', HV''' &c, e contra huma parte indeterminada, teremos as equações seguintes

$$M'' = N\left[\frac{\cos(p-2p)^2 - \cos(p-q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\right.$$
$$\left(\cos(p-2q) - \frac{\cos(p-q)^3}{\cos(p-2q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \right.$$

cos

$$\frac{\cos(p-q)^4}{\cos(p-2q)^4})],$$

$$M''' = N\left[\frac{\cos(p-3q)^2 - \cos(p-2q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\right.$$

$$\left(\cos(p-3q) - \frac{\cos(p-2q)^3}{\cos(p-3q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \right.$$

$$\left.\left.\frac{\cos(p-2q)^4}{\cos(p-3q)^4}\right)\right],$$

. . . .

$$M^n = N\left[\frac{\cos(p-nq)^2 - \cos(p-(n-1)q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\right.$$

$$\left(\cos(p-nq) - \frac{\cos(p-(n-1)q)^3}{\cos(p-nq)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \right.$$

$$\left.\left.\frac{\cos(p-(n-1)q)^4}{\cos(p-nq)^4}\right)\right];$$

reprefentando-fe pelo numero inteiro $n+1$ o numero das pennas feridas pela agua.

601 Por confeguinte, fe por abbreviar a expreffaõ, tomarmos $S = \frac{M + M' + M'' \ldots . + M^n}{N}$, omittindo os termos que fe deftroem, teremos a equaçaõ feguinte

$$S = \frac{\cos(p-nq)^2 - \cos m^2}{2}$$

$$-\frac{2k}{3} \times \left\{\begin{array}{l} + \cos p - \frac{\cos m^3}{\cos p^2} \\ + \cos(p-q) - \frac{\cos p^3}{\cos(p-q)^2} \\ + \cos(p-2q) - \frac{\cos(p-q)^3}{\cos(p-2q)^2} \\ + \cos(p-3q) - \frac{\cos(p-2q)^3}{\cos(p-3q)^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \cos(p-nq) - \frac{\cos(p-(n-1)q)^3}{\cos(p-nq)^2} \end{array}\right.$$

+

$$+\frac{k_2}{4}\times\left\{\begin{array}{l} +1-\frac{\cos m^4}{\cos p^4} \\ +1-\frac{\cos p^4}{\cos(p-q)^4} \\ +1-\frac{\cos(p-q)^4}{\cos(p-2q)_4} \\ +1-\frac{\cos(p-2q)^4}{\cos(p-3q)^4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +1-\frac{\cos(p-(n-1)q)^4}{\cos(p-nq)^4}; \end{array}\right.$$

formula, que dá o momento total da impulsaõ da agua a cada instante, qualquer que seja o numero das pennas. Está claro, que S varía á medida que varía o angulo p, sendo as mais quantidades constantes, isto he, á medida que a roda na sua revoluçaõ toma differentes posiçoens, desde que huma penna entra no fluido até entrar a seguinte.

602 Além das denominaçoens precedentes, representemos por Q o pezo variavel, ao qual a percussaõ da agua póde fazer equilibrio a cada instante, por c o seu braço de alavanca, por dt o elemento do tempo, e por dy o pequeno arco descrito por hum ponto da circumferencia $AKDB$ no instante dt. Assim teremos $Q.c = N.S$, e $Qcdt = NSdt$. Mas $dt = \frac{dy}{u} = -\frac{a\,dp}{u}$ (ponho $-dp$, porque crescendo t diminue p). Logo $Qcdt = -\frac{aNSdp}{u}$, e conseguintemente $c\int Qdt = \frac{aN}{u}\int -Sdp$.

603 Substituindo no segundo membro o valor de S acima achado (n. 601.), teremos differentes especies de termos, de cujos coefficientes constantes prescindimos por agora.

Primeiramente o termo $dp\,(\cos(p-nq)^2 - \cos m^2)$ se integra facilmente: porque se reduz á fórma $\frac{dp}{2}$ +

dp

$\frac{dp\, cos(2p - 2nq)}{2} - dp\, cos\, m^2$, cujo integral he $\frac{p}{2} +$ $\frac{sen(2p - 2nq)}{4} - p\, cos\, m^2$. O integral de $dp\, cos\, p$ he $sen\, p$; o de $dp\, cos(p - q)$, he $sen(p - q)$; o de $dp\, cos(p - 2q)$, he $sen(p - 2q)$; e assim dos mais desta especie.

A unica difficuldade he integrar os termos $\frac{dp\, cos\, m^3}{cos\, p^2}$, $\frac{dp\, cos\, p^3}{cos(p - q)^2}$, $\frac{dp\, cos(p - q)^3}{cos(p - 2q)^2}$ &c, assim como tambem os termos $\frac{dp\, cos\, m^4}{cos\, p^4}$, $\frac{dp\, cos\, p^4}{cos(p - q)^4}$, $\frac{dp\, cos(p - q)^4}{cos(p - 2q)^4}$, &c. Eisaqui o modo de fazer estas integraçoens.

604 1.° He facil de integrar $\frac{dp}{cos\, p^2}$. Porque fazendo $cos\, p = \frac{1}{z}$, teremos $\frac{dp}{cos\, p^2} = \frac{z\, dz}{\sqrt{(zz - 1)}}$, cujo integral he $\sqrt{(zz - 1)} = \frac{sen\, p}{cos\, p}$.

2.° Para integrar $\frac{dp\, cos\, p^3}{cos(p - q)^2}$, observaremos que $cos\, p = cos((p - q) + q) = cos(p - q)\, cos\, q - sen(p - q)\, sen\, q$, e por conseguinte acharemos que he $\frac{dp\, cos\, p^3}{cos(p - q)^2} =$

$$dp\, cos(p - q)\, cos\, q^3 - 3\, dp\, sen(p - q)\, sen\, q\, cos\, q^2 + \frac{3\, dp\, sen(p - q)^2\, sen\, q^2\, cos\, q}{cos(p - q)} - \frac{dp\, sen(p - q)^3\, sen\, q^3}{cos(p - q)^2} =$$

$$cos\, q^3 . dp\, cos(p - q) - 3\, sen\, q\, cos\, q^2 . dp\, sen(p - q) + 3\, sen\, q^2\, cos\, q . \frac{dp}{cos(p - q)} - 3\, sen\, q^2\, cos\, q . dp\, cos(p - q) - sen\, q^3 . \frac{dp\, sen(p - q)}{cos(p - q)^2} + sen\, q^3 . dp\, sen(p - q).$$

Porém $\int dp\, cos(p - q) = sen(p - q)$; $\int dp\, sen(p - q) = - cos(p - q)$.

$-q$). O termo $\frac{dp}{cos(p-q)}$ se integra fazendo $cos(p-q) = \frac{1}{s}$; o que dá $dp = \frac{-d\left(\frac{1}{s}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{s}\right)^2\right)}} = \frac{ds}{s\sqrt{(ss-1)}}$, $\frac{dp}{cos(p-q)} = \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}}$, cujo integral he $l(s+\sqrt{(ss-1)}) = l\left(\frac{1+sen(p-q)}{cos(p-q)}\right)$. O termo $\frac{dp\, sen(p-q)}{cos(p-q)^2}$ he o mesmo que $\frac{-d.cos(p-q)}{cos(p-q)^2}$, e tem conseguintemente por integral $\frac{1}{cos(p-q)}$. Assim o integral inteiro de $\frac{dp\, cos\, p^3}{cos(p-q)^2}$ he $cos\, q^3\, sen(p-q) + 3\, sen\, q\, cos\, q^2\, cos(p-q) + 3\, sen\, q^2\, cos\, q.\, l\left(\frac{1+sen(p-q)}{cos(p-q)}\right) - 3\, sen\, q^2\, cos\, q\, sen(p-q) - \frac{sen\, q^3}{cos(p-q)} - sen\, q^3\, cos(p-q)$.

Do mesmo modo, observando que $cos(p-q) = cos((p-2q)+q) = cos(p-2q)\, cos\, q - sen(p-2q)\, sen\, q$, acharemos que o integral do termo $\frac{dp\,(p-q)^3}{cos(p-2q)^2}$ he $cos\, q^3\, sen(p-2q) + 3\, sen\, q\, cos\, q^2\, cos(p-2q) + 3\, sen\, q^2\, cos\, q.\, l\left(\frac{1+sen(p-2q)}{cos(p-2q)}\right) - 3\, sen\, q^2.\, cos\, q\, sen(p-2q) - \frac{sen\, q^3}{cos(p-2q)} - sen\, q^3\, cos(p-2q)$. E pelo mesmo methodo se integraráõ as quantidades analogas $\frac{dp\, cos(p-2q)^3}{cos(p-3q)^2}$, $\frac{dp\, cos(p-3q)^3}{cos(p-4q)^2}$ &c.

3.° Para integrar $\frac{dp}{\cos p^4}$, faremos $\cos p = \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$; e teremos $\frac{dp}{\cos p^4} = dz + z^2\, dz$, cujo integral he $z + \frac{z^3}{3} = \frac{\text{sen}\, p}{\cos p} + \frac{\text{sen}\, p^3}{3 \cos p^3}$.

4.° Para integrar $\frac{dp \cos p^4}{\cos (p-q)^4}$, observaremos que $\cos p = \cos((p-q)+q) = \cos(p-q) \cos q - \text{sen}\,(p-q)\, \text{sen}\, q$; e conseguintemente, que $\frac{dp \cos p^4}{\cos(p-q)^4} = dp \cos q^4 - 4 \cos q^3\, \text{sen}\, q\, \frac{dp\, \text{sen}\,(p-q)}{\cos(p-q)} + 6 \cos q^2\, \text{sen}\, q^2\, \frac{dp\, \text{sen}\,(p-q)^2}{\cos(p-q)^2} - 4 \cos q\, \text{sen}\, q^3\, \frac{dp\, \text{sen}\,(p-q)^3}{\cos(p-q)^3} + \text{sen}\, q^4\, \frac{dp\, \text{sen}\,(p-q)^4}{\cos(p-q)^4} = dp\,(\cos q^4 - 6 \cos q^2\, \text{sen}\, q^2 + \text{sen}\, q^4) - (4 \cos q^3\, \text{sen}\, q - 4 \cos q\, \text{sen}\, q^3)\, \frac{dp\, \text{sen}\,(p-q)}{\cos(p-q)} + (6 \cos q^2\, \text{sen}\, q^2 - 2\, \text{sen}\, q^4)\, \frac{dp}{\cos(p-q)^2} - 4 \cos q\, \text{sen}\, q^3\, \frac{dp\, \text{sen}\,(p-q)}{\cos(p-q)^3} + \text{sen}\, q^4\, \frac{dp}{\cos(p-q)^4}$. Os differentes termos desta quantidade integraõ-se por methodos e transformações analogas ás precedentes; e acharemos que o integral inteiro de $\frac{dp \cos p^4}{\cos(p-q)^4}$ he $p\,(\cos q^4 - 6 \cos q^2\, \text{sen}\, q^2 + \text{sen}\, q^4) + (4 \cos q^3\, \text{sen}\, q - 4 \cos q\, \text{sen}\, q^3)\, l \cos(p-q) + (6 \cos q^2\, \text{sen}\, q^2 - \text{sen}\, q^4)\, \frac{\text{sen}\,(p-q)}{\cos(p-q)} - \frac{2 \cos q\, \text{sen}\, q^3}{\cos(p-p)^2} + \frac{\text{sen}\, q^4\, \text{sen}(p-q)^3}{3 \cos(p-q)^3}$.

As quantidades $\frac{dp \cos(p-q)^4}{\cos(p-2q)^4}$, $\frac{dp \cos(p-2q)^4}{\cos(p-3q)^4}$ &c integrar-se-haõ da mesma maneira.

605 Acabados estes calculos, tomaremos o integral $\int$ -

$\int -S\,dp$ de maneira que desvaneça quando $p = m$, e receba o valor completo quando $p = m - q$; e acharemos differentes series de termos, tais que de huma serie para a outra se destroem em parte. Assim omittindo todos esses termos, a equaçaõ $c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\int -S\,dp$ se reduzirá á fórma seguinte

$$(B) \ldots\ldots c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\Big[\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos m^2}{2}\right)q +$$

$$\frac{1}{8}\Big(\operatorname{sen}(2m - 2nq) - \operatorname{sen}(2m - 2(n+1)q)\Big)$$

$$+ \frac{2k\cos m^3}{3}\left(\frac{\operatorname{sen} m}{\cos m} - \frac{\operatorname{sen}(m-a)}{\cos(m-q)}\right) - \frac{2k}{3}\Big(\operatorname{sen} m -$$

$$\operatorname{sen}(m-(n+1)q)\Big) + \frac{2k}{3}(\cos q^3 - 3\operatorname{sen} q^2 \cos q)(\operatorname{sen}(m$$

$$-q) - \operatorname{sen}(m-(n+1)q)) + \frac{2k}{3}(3\operatorname{sen} q \cos q^2 -$$

$$\operatorname{sen} q^3)(\cos(m-q) - \cos(m-(n+1)q)) -$$

$$\frac{2k\operatorname{sen} q^3}{3}\left(\frac{1}{\cos(m-q)} - \frac{1}{\cos(m-(n+1)q)}\right) + 2k\operatorname{sen} q^2 \cos q$$

$$l\left(\frac{1 + \operatorname{sen}(m-q)(\cos(m-(n+1)q))}{\cos(m-q)(1 + \operatorname{sen}(m-(n+1)q))}\right) +$$

$$\frac{k^2 q}{4}(n + 1 - \operatorname{sen} q^4 - \cos q^4 + 6\cos q^2 \operatorname{sen} q^2) -$$

$$\frac{k^2 \cos m^4}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} m}{\cos m} + \frac{\operatorname{sen} m^3}{3\cos m^3} - \frac{\operatorname{sen}(m-q)}{\cos(m-q)} - \frac{\operatorname{sen}(m-q)^3}{3\cos(m-q)^3}\right)$$

$$-k^2(\cos q^3 \operatorname{sen} q - \cos q \operatorname{sen} q^3)\, l\left(\frac{\cos(m-q)}{\cos(m-(n+1)q)}\right)$$

$$-\frac{k^2}{4}(6\cos q^2 \operatorname{sen} q^2 - \operatorname{sen} q^4)\left(\frac{\operatorname{sen}(m-q)}{\cos(m-q)} -\right.$$

$$\left.\frac{\operatorname{sen}(m-(n+1)q)}{\cos(m-(n+1)q)}\right) + \frac{k^2\cos q \operatorname{sen} q^3}{2}\left(\frac{1}{\cos(m-q)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\cos(m-(n+1)q)^2}\right) - \frac{k^2}{12}\operatorname{sen} q^4\left(\frac{\operatorname{sen}(m-q)^3}{\cos(m-q)^3}\right.$$

$-$

$$- \frac{\mathrm{sen}\,(m-(n+1)q)^3}{\cos(m-(n+1)q)^3} \Big) \Big] \, .$$

606 Nesta formula, $\int Q\,dt$ representa o pezo, ao qual a percussaõ da agua póde fazer equilibrio durante o tempo t, que a roda emprega em descrever o angulo q. Supponhamos $\frac{\int Q\,dt}{t} = Q'$, sendo Q' simplesmente hum pezo; e consideremos, que $t = \frac{aq}{u}$. Além disso, supponhamos que no instante em que a primeira penna Ee entra no fluido, a penna Kk está situada na vertical; o que dá $m = (n+1)q$. Entaõ dividindo o primeiro membro da equaçaõ (B) por t, e o segundo por $\frac{aq}{u}$, e pondo m em lugar de $(n+1)q$, teremos a equaçaõ seguinte

$$(C) \ldots\, Q'c = \frac{N}{q} \Big[\Big(\frac{1}{4} - \frac{\cos m^2}{2} \Big) q + \frac{\mathrm{sen}\,2q}{8}$$

$$+ \frac{2k\cos m^3}{3} \Big(\frac{\mathrm{sen}\,m}{\cos m} - \frac{\mathrm{sen}\,(m-q)}{\cos(m-q)} \Big) - \frac{2k\,\mathrm{sen}\,m}{3} +$$

$$\frac{2k}{3} (\cos q^3 - 3\,\mathrm{sen}\,q^2 \cos q)(\mathrm{sen}\,(m-q) + \frac{2k}{3} (3\,\mathrm{sen}\,q \cos q^2$$

$$- \mathrm{sen}\,q^3)(\cos(m-q) - 1) - \frac{2k\,\mathrm{sen}\,q^3 (1 - \cos(m-q))}{3\cos(m-q)}$$

$$+ 2k\,\mathrm{sen}\,q^2 \cos q \,.\, l \Big(\frac{1 + \mathrm{sen}\,(m-q)}{\cos(m-q)} \Big) + \frac{k^2 q}{4} \Big(n + 1$$

$$- \mathrm{sen}\,q^4 - \cos q^4 + 6\cos q^2\,\mathrm{sen}\,q^2 \Big) - \frac{k^2 \cos m^4}{4} \Big(\frac{\mathrm{sen}\,m}{\cos m} +$$

$$\frac{\mathrm{sen}\,m^3}{3\cos m^3} - \frac{\mathrm{sen}\,(m-q)}{\cos(m-q)} - \frac{\mathrm{sen}\,(m-q)^3}{3\cos(m-q)^3} \Big) - k^2 (\cos q^3\,\mathrm{sen}\,q$$

$$- \cos q\,\mathrm{sen}\,q^3)\, l \cos(m-q) - \frac{k^2}{4} (6\cos q^2\,\mathrm{sen}\,q^2 -$$

$$\mathrm{sen}\,q^4) \Big(\frac{\mathrm{sen}\,(m-q)}{\cos(m-q)} \Big) + \frac{k^2 \cos q\,\mathrm{sen}\,q^3\,\mathrm{sen}\,(m-q)^2}{2\cos(m-q)^2}$$

$$- \frac{k^2\,\mathrm{sen}\,q^4\,\mathrm{sen}\,(m-q)^3}{12\cos(m-q)^3} \Big] ;$$

formu-

formula, na qual Q' reprefenta o pezo que em cada inftante fe póde julgar em equilibrio com a impulfaõ do fluido.

607 Para moftrarmos huma applicaçaõ muito fimples defta formula, fupponhamos que a roda anda com huma velocidade, que fe póde confiderar infinitamente pequena em comparaçaõ da velocidade do fluido. Em confequencia teremos $k = 0$, e a equaçaõ (C) dará fimplefmente

$$Q'c = N\left(\frac{1}{4} - \frac{cof\,m^2}{2}\right) + \frac{N\,fen\,2\,q}{8\,q}.$$

Logo, fe quizermos que o momento de impulfaõ feja hum *maximo*, fazendo variar q fomente, teremos $2\,q\,d\,q\,cof\,2\,q - d\,q\,fen\,2\,q = 0$, e confeguintemente $q = 0$. Donde fe fegue, que entaõ deveria fer o numero das pennas infinito; refultado conforme ao que achamos (n. 549.), e fobre o qual fe faraõ as mefmas reflexões.

Aqui obfervaremos mais, que conftruindo a curva, cuja equaçaõ he $y = \frac{fen\,2\,q}{q}$, acharemos que apartando-fe da origem dos q, onde correfponde a maior ordenada $= 2$, a curva naõ cortará o eixo de huma e outra parte da mefma origem, fenaõ a diftancias infinitas. Donde refulta que tendo aumentado o numero das pennas até hum certo ponto, naõ fe ganharia quafi nada em aumentallo mais. Póde cada hum fegurar-fe defta conclufaõ por applicações numericas da mefma formula. A experiencia fe acha de concerto com a theorica a efte refpeito.

608 Naõ he facil de achar directamente pela noffa formula geral o numero mais ventajofo de pennas para huma roda, que anda com huma velocidade finita, e comparavel com a do fluido, porque a equaçaõ do *maximo* he extremamente compofta, e quafi intratavel. Mas podemos confeguillo de hum modo indirecto, que confifte em bufcar pela mefma formula os momentos de impulfaõ para differentes numeros confecutivos de pennas, e efcolher entre elles o que dá momento maior. Pela analogia das coufas, e pela lei de continuidade, facilmente fe entende, que á medida que a roda andar mais de vagar deverá ter maior numero de pennas.

609 Na pratica, antes de fixar o numero das pennas, he

he neceſſario fazer huma obſervaçaõ eſſencial. Ás pennas Kk, Oo, Pp, &c, que eſtaõ adiante da vertical CI tendem a impellir o fluido, o qual pela percuſſaõ tem perdido huma parte conſideravel da ſua velocidade. Por conſeguinte, ſe lhe naõ reſta velocidade ſufficiente para ſubtrahir-ſe da percuſſaõ das pennas, reſultará huma perda de movimento na maquina. O momento de impulſaõ das meſmas pennas contra o fluido he repreſentado por huma quantidade analoga á dos n.os 605 e 606. Neſte caſo pois os meſmos meios, que aumentaõ o momento de impulſaõ do fluido anterior á roda, aumentaõ tambem a reſiſtencia do poſterior; e entaõ naõ convem multiplicar muito o numero das pennas. He o que ſe practíca com raſaõ nas rodas que ſe aſſentaõ ſobre os rios; antes a precauçaõ he exceſſiva neſta parte (n. 570.). As rodas que ſe movem em calhes eſtreitas requerem mais pennas, principalmente havendo a attençaõ (como ſe practíca de ordinario) de dar hum pouco adiante da vertical CI maior quéda á agua, para lhe facilitar a ſahida de maneira que naõ faça reſiſtencia ao movimento da roda.

610 Supponhamos agora que he dado o numero das pennas, e vejamos qual deve ſer a velocidade da roda, para que o effeito ſeja hum *maximo*. Havendo multiplicado o primeiro membro da equaçaõ (C) por v velocidade do pezo levantado Q', e o ſegundo por $\frac{cu}{a}$ quantidade igual a v, e pondo em lugar de k o ſeu valor $\frac{u}{V}$; teremos huma equaçaõ deſta fórma

$$Q'v = Au + Bu^2 + Cu^3,$$

ſendo A, B, C coefficientes conſtantes e dados. Logo, para que o effeito da maquina ſeja hum maximo, he neceſſario que tenhamos $Adu + 2Budu + 3Cu^2du = 0$; e conſeguintemente

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 3A.C)}}{3C}.$$

611 Já indicámos (n. 552.) o modo de comparar os effeitos de duas aberturas rectangulares $MNOP, EFGH$ (Fig. 160.), relativamente aos momentos de impulſaõ contra as pennas de huma roda. Eiſaqui o modo geometrico de

de achar directamente a abertura mais ventajoſa.

Seja $SMPR$ a ametade da abertura, e $Smpr$ a ametade da penna ſuppoſta em quietação. Conſervando as meſmas denominações das letras b, b, c, d, e, t (n.553.), ſupponhamos que ſe toma ſobre TR hum ponto indeterminado L; e façamos $TL = y$, a gravidade $= g$, o momento elementar da impulſaõ da agua contra o pequeno rectangulo $Lldc = dM$, o raio Cr da roda $= R$. Eſtá claro, que a velocidade do fluido ao ſahir do pequeno orificio $Lldc$ ſerá repreſentada por $\sqrt{2gy}$, e que teremos $dM = 2gbydy \cdot CL = 2gbydy(CT + TL) = 2gbydy(R - b - c + y)$. Logo $M = gby^2(R - b - c) + \frac{2gby^3}{3}$.

Eſte integral deve deſvanecer quando $y = TS = b$, e tomar-ſe quando $y = Tr = b + c$. Logo ſerá $M = gb[(b + c)^2(R - b - c) + \frac{2}{3}(b + c)^3 - b^2(R - b - c) - \frac{2}{3}b^3]$.

Como pois a abertura mais ventajoſa he a que dá o maior M que he poſſivel, igualaremos a quantidade precedente a hum maximo, fazendo variar b, b, c; e aſſim teremos huma equaçaõ entre b, b, c, e as ſuas differenças. E porque a ſuperficie da penna $Smpr$ he dada, teremos tambem $bc = const.$ Em fim, como a quantidade de agua que fornece a abertura $SMPR$ he dada, teremos $\frac{4}{3}t(b + d)\left((b + c + e)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{a} = const.$ Por meio deſtas tres equações chegaremos a conhecer as tres indeterminadas b, b, c.

Todos eſtes calculos ſaõ longos em geral; mas podem abbreviar-ſe, conſiderando que as quantidades d, e ſaõ muito pequenas em comparaçaõ das outras.

612 Eiſaqui tudo o que pertence á theorica das rodas, quando ellas ſaõ verticais, e as pennas ſaõ dirigidas ao centro. As meſmas formulas ſe pódem applicar igualmente a toda a ſorte de rodas, verticais, ou horizontais, ſendo ou naõ ſendo as pennas dirigidas ao centro, perpendiculares ou inclinadas ao plano das meſmas rodas. Somente

 mente

mente os coefficientes do angulo q, do ſeu ſeno e coſeno, e dos ſenos e coſenos dos ſeus multiplos, ſeráõ differentes conforme os differentes caſos. Eſtes coefficientes dependem em parte do angulo que a penna faz com o raio, ou com o plano da roda; e eſta conſideraçaõ naõ introduz difficuldade alguma de novo no calculo. Deixamos ao Leitor o cuidado de fazer por ſi meſmo eſtas applicaçǒes.

ꝑ.

CAPITULO IX.

Do movimento de oſcillaçaõ, e undulaçaõ dos fluidos.

613 HE demonſtrado (n. 171.) que ſe hum pendulo P (Fig. 175.) ſuſpendido pelo fio *O P* deſcrever pequenos arcos de circulo *P p*, *Q q* oſcillando ao redor do ponto fixo *O*, todas as ſuas oſcillaçoens ſeráõ iſochronas, ou da meſma duraçaõ, aindaque os arcos corridos *P p*, *Q q* ſejaõ deſiguais. Eſte iſochroniſmo he fundado em que os eſpaços corridos *P p*, *Q q* ſaõ proporcionais ás forças que os fazem correr.

Tambem he demonſtrado (n. 207.), que ſe dous pendulos de comprimentos deſiguais deſcreverem pequenos arcos de circulo, os tempos das ſuas oſcillaçǒes ſeráõ entre ſi como as raizes quadradas dos ſeus comprimentos.

614 Iſto poſto, ſeja *K L N M* (Fig. 176.) hum tubo de groſſura uniforme, compoſto de dous braços verticais, e hum horizontal. Havendo lançado nelle certa quantidade de licor, as duas ſuperficies *A B*, *C D* eſtaráõ de livel no caſo do equilibrio. Supponhamos que ſe faz ſubir o licor até *E F* no braço *K L*, e conſeguintemente deſcer até *G H* no braço *M N*, e que depois ſe deixa á acçaõ livre da gravidade. Eſtá claro, que o fluido ſubirá e deſcerá alternativamente.

Supponhamos pois hum pendulo P (Fig. 175.), cujo comprimento *O P* ſeja ametade do comprimento *x y z* da columna fluida, e que deſcreva até o ponto mais baixo *I* arcos *P I* iguais aos eſpaços *A E*. A força que faz oſcillar o fluido he o exceſſo do pezo da agua contida em hum dos braços do tubo ſobre o pezo da agua contida no outro. Aſſim, quando a agua ſobe até *E F* e deſce até *G H*, eſta

esta força he o pezo da colunna $ESTF$, ou o dobro do pezo da colunna $EABF$; e conseguintemente he para o pezo de toda a a agua como $2AE$ para xyz, ou como AE para OP.

Donde concluiremos 1º que sendo o comprimento xyz constante, a força que faz oscillar a agua he sempre proporcional ao espaço que lhe faz correr; e por conseguinte, que as oscillações da agua saõ isochronas entre si.

2º Que estas oscillações saõ da mesma duraçaõ que as do pendulo P; porque a força que faz descrever ao pendulo P o arco PI he para o pezo do mesmo pendulo, como PI para OP, ou como AE para OP; e sendo a agua animada da mesma força que o pendulo, deverá fazer as suas oscillações no mesmo tempo que elle.

615 Por quanto as oscillações da agua seguem as mesmas leis que as dos pendulos, se aumentarmos ou diminuirmos o comprimento da colunna da agua, tambem se aumentará ou diminuirá o tempo das suas oscillações, e seguirá a rasaõ subduplicada do dito comprimento.

616 Esta theorica das oscillações dos fluidos se applica ao movimento das ondas. Seja $ABCDEF$ (Fig. 177.) huma massa de agua estagnante, cuja superficie se levanta e abaixa por ondas successivas, sendo A, C, E as eminencias dellas, e B, D, F as cavidades intermedias. Por quanto a força, que faz descer as partes mais altas, e subir alternativamente as mais baixas, he sempre o pezo da agua elevada, está claro que as oscillações das ondas saõ da mesma especie que as da agua no tubo $KLNM$. Tomando pois hum pendulo, cujo comprimento seja ametade das distancias entre os lugares mais altos A, C, E e os mais baixos B, D, F, as partes mais altas A, C, E viráõ a ser as mais baixas no tempo de huma oscillaçaõ deste pendulo, e no tempo de outra oscillaçaõ tornaráõ a ser as mais altas. Logo fará o pendulo duas oscillaçoens em quanto as ondas fazem huma, isto he, em quanto cada huma dellas corre a sua largura. E como hum pendulo que tivesse o comprimento quadruplo do precedente faria huma oscillaçaõ em quanto elle faz duas, seguese que as ondas fazem as suas oscillações no mesmo tempo que hum pendulo, que tiver por comprimento a largura das mesmas ondas.

617 Logo a velocidade das maiores ou das menores ondas

das

das aumentará ou diminuirá na rasaõ subduplicada da sua largura. As ondas, que tem 3 pés e $8\frac{1}{2}$ linhas de largura, correm-na em hum segundo, e conseguintemente 183 pés 6 pollegadas e 6 linhas em 1 minuto.

Tudo isto naõ deve tomar-se como verdadeiro em rigor, mas proximamente; porque havemos supposto que nas undulaçoens todas as partes da agua sobem e descem em linhas rectas, o que naõ succede na realidade, sendo o dito movimento mais chegado a circular que a rectilineo.

Determinaçaõ geral das oscillações de hum fluido em hum tubo de qualquer figura.

618 SEja *ABFDEG* (Fig. 178.) hum tubo de qualquer figura, no qual se contém huma porçaõ de fluido, que em virtude de huma causa exterior se levanta a certa altura no braço *ABFG*, e se abaixa conseguintemente no outro *DEGF*, e depois se deixa á acçaõ livre da gravidade. Para determinar as suas oscillações, he necessario conhecer a direcçaõ que tomaõ as particulas no seu movimento.

Sobre isto podem propor-se duas hypotheses. A primeira, que as particulas sobem e descem verticalmente, isto he, que supposto-se o fluido dividido em camadas horizontais, estas conservaõ sempre o seu parallelismo; a segunda, que as particulas se movem parallelamente á curva *Mxyz* considerada como eixo do tubo, ou de outra sorte, que supposto-se o fluido dividido em camadas perpendiculares á curva *xyz*, estas camadas conservaõ o seu parallelismo de humas a outras. O problema resolve-se simplesmente na primeira hypothese, pelo methodo que já havemos practicado (n. 236. 334.). Aqui o resolveremos na segunda, a qual tem sido abraçada por grandes Geometras.

619 Supponhamos, que o fluido no tempo *t* tem chegado á posiçaõ indeterminada *ABFDEG*, e consideremo-lo composto de huma infinidade de camadas *OLlo* iguais entre si, e perpendiculares em cada ponto á curva *Mxyz*. A força da gravidade, que obra verticalmente sobre cada camada, se resolverá em duas, huma perpendicular á

curva

curva que ferá deftruida, e a outra pela direcçaõ della, que produzirá o movimento.

Seja pois a gravidade $= g$; as fecçoens $AB = K$, $DE = G$, $OL = y$; o arco xy da curva $= x$, a velocidade da fuperficie $AB = u$, da fecçaõ $OL = v$, o feno total $= 1$, o cofeno do angulo variavel myn que faz em y a vertical com a curva $= f$, a altura devida á velocidade $u = r$. Ifto pofto, a parte da gravidade que obra na direcçaõ yn ferá gf; e fe as camadas naõ obraffem entre fi, a velocidade v no fim do inftante dt feria $v + gfdt$; e porque ella fe faz realmente $v + dv$, he manifefto que as differentes camadas animadas da velocidade $gfdt - dv$ deveriaõ fazer equilibrio entre fi. Logo teremos $\int dx(gfdt - dv) = 0$; donde fe tira (pondo por dt o feu valor $\frac{dx}{v}$, e por v o feu valor $\frac{Ku}{y}$)

$$\frac{gydx}{Ku}\int fdx - Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydx\int\frac{dy}{y^3} = 0.$$

Os integrais indicados devem tomar-fe para a curva xyz. Sendo pois entaõ $\int fdx = F$, $\int\frac{dx}{y} = N$, e reflectindo que $\int\frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2K^2} - \frac{1}{2G^2}$, a equaçaõ fe reduzirá á fórma feguinte

$$(A) \ldots F.G^2ydx - K^2G^2Ndr + rydx(G^2 - K^2) = 0.$$

620 Supponhamos, que o fluido no primeiro inftante occupa o efpaço $VZFHRG$; e reprefentemos por z o arco Mx corrido pela fuperficie AB. Eftá claro, que fendo dada a natureza da curva $Mxyz$, e fendo os dous efpaços $VZFHRG$, $ABFDEG$ occupados fucceffivamente pelo fluido iguais entre fi, as quantidades F, G, K, N, ydx, podem fer reprefentadas em funçoens de z, dz, e conftantes. Logo a velocidade u da fuperficie AB ferá tambem huma funçaõ de z; e por fer $dt = \frac{dz}{u}$, do mefmo modo teremos t em funçaõ de z.

621 Para moftrarmos a applicaçaõ defta theorica a alguns exemplos, fupponhamos que o tubo he cylindrico, e que a curva $MxyzT$ he a femicircumferencia de hum

circulo

circulo, cujo diametro MT eſtá horizontal. Neſte caſo teremos $G = K = y$, e cada huma deſtas quantidades ſerá conſtante, e dada. Seja o raio $CM = 1$, o arco $Mx = z$, o arco indeterminado $Mxy = q$, a ſemicircumferencia $MxyzT = c$, o arco xyz occupado pelo fluido $= nc$, ſendo n hum numero conſtante menor que a unidade. Aſſim teremos $F = \int f dx = \int dq \cos q = \operatorname{sen} q$; integral, que deve deſvanecer quando $q = z + nc$, e começar quando $q = z$, porque na extremidade z do arco zyz ceſſa a gravidade de obrar ſobre o fluido, e o ponto x he a origem do meſmo fluido. Logo $F = \operatorname{sen} z - \operatorname{sen}(z + nc)$. Além diſto $N = \frac{nc}{G}$, e $dx = dz$. Logo a equaçaõ geral (A) ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$dz(\operatorname{sen} z - \operatorname{sen}(z + nc)) - nc\,dr = 0,$$

donde ſe tira (ſuppondo que o fluido parte do ponto M, e conſeguintemente que $r = 0$ quando $z = 0$)

$$r = \frac{1 - \cos nc - \cos z + \cos(z + nc)}{nc},$$

expreſſaõ geral da altura devida á velocidade da ſuperficie AB.

Se fizermos $z = c - nc$, iſto he, ſe ſuppuſermos que a ſuperficie anterior DE chega a T, acharemos igualmente $r = 0$. Donde ſe ſegue, que o fluido haverá perdido toda a ſua velocidade, e tornará a deſcer de T para M, e aſſim por diante.

O tempo de cada huma das oſcillações ſe achará pela equaçaõ $t = \int \frac{dz}{u} = \int \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$; e ſubſtituindo o valor de r,

$$t = \sqrt{\frac{cn}{2g}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - \cos nc - \cos z + \cos(z + nc))}}.$$

612 Por ſegundo exemplo, ſupponhamos que o tubo propoſto ſe compoem de tres rectilineos $GFKH$, MFG, NKH (Fig. 179.) de diametros iguais, eſtando o primeiro delles horizontal, e os outros inclinados. Levantando as verticais FI, KS, ſeja a ſecçaõ conſtante e perpendicular de cada tubo $= K$, o coſeno do angulo $BFI = p$, o do angulo $DKS = q$, o comprimento dado $xytz$ do eſpaço occupado pelo fluido $= l$, o eſpaço dado My comprehendido

dido entre hum ponto fixo M tomado a arbitrio e o ponto $y = b$, o comprimento dado do tubo horizontal $= c$, o espaço Mx corrido no tempo t pela superficie do fluido $AB = z$.

Isto posto, como se naõ observa a lei de continuidade na passagem de hum tubo para outro, applicaremos a cada hum delles os raciocinios do nº 619; e acharemos, que para o tubo $ABFG$ he a quantidade $\int f dx = p\,(b - z)$, e para o tubo $EDKH$ será $\int f dx = q \,.\, tz = q\,(z + l - b - c)$. Tirando a segunda quantidade da primeira, o resto $p\,(b - z) - q\,(z + l - b - c)$ será o valor de F para o tubo total. Tambem teremos aqui $\int \frac{dx}{y}$, ou $N = \frac{l}{K}$; e observando, que $y = K$, $dx = dz$, $G = K$, a equaçaõ geral (A) se reduzirá á fórma seguinte

$$dz\,(p\,(b - z) - q\,(z + l - b - c)) - l\,dr = 0;$$

donde se tira

$$r = \frac{p+q}{2l}\left(\frac{2\,(pb + qb + qc - ql)\,z}{p+q} - zz\right).$$

E porque $dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$, teremos tambem

$$t = \sqrt{\frac{l}{g\,(p+q)}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2\,(pb + qb + qc - ql)\,z}{p+q} - zz\right)}};$$

integral, que depende em geral da quadratura do circulo.

623 Representemos, por abbreviar, o coefficiente de z por $2A$; e seja B o quarto da circumferencia descrita com o raio A, e T o tempo empregado em correr o espaço A. Assim teremos $t = \frac{\sqrt{l}}{A\sqrt{g\,(p+q)}} \int \frac{A\,dz}{\sqrt{(2Az - zz)}}$, e $T = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g\,(p+q)}} \cdot \frac{B}{A}$; porém $\frac{B}{A}$ he huma quantidade constante, qualquer que seja o raio A; logo T he huma quantidade constante, e conseguintemente as oscillaçoens inteiras do fluido saõ isochronas entre si, quaisquer que sejaõ as suas amplitudes.

624 Seja L o comprimento de hum pendulo que descreve pequenos arcos de circulo, C a distancia inicial delle á vertical, D o quarto da circumferencia para o raio C,

z o eſpaço que o pendulo deſcreve circularmente no tempo t com a velocidede v, T' o tempo que gaſta em chegar á vertical; e teremos $v\,dv = \frac{g(C-z)\,dz}{L}$, e conſeguintemente $vv = \frac{g(2Cz-zz)}{L}$. Logo $t = \int \frac{dz}{v} = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(2Cz-zz)}}$, e $T' = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{D}{C}$. Igualando eſte valor de T' ao de T, e reflectindo que $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$; teremos $L = \frac{l}{p+q}$, expreſſaõ do comprimento do pendulo, que faz as ſuas oſcillaçoens no meſmo tempo que as do fluido. Eſte reſultado concorda com o que foi dado por M. Bernoulli ſem demonſtraeçaõ (*Oper. tom. III. pag.* 125.).

625 Quando os tubos $ABFG$, $EDKH$ ſaõ verticais, temos $p = 1$, $q = 1$; e a equaçaõ $L = \frac{l}{p+q}$ ſe reduz a $L = \frac{1}{2} l$, iſto he, que o comprimento do pendulo que faz as ſuas oſcillaçoens no meſmo tempo que as do fluido he a ametade do comprimento da columna fluida, como já moſtrámos de outro modo (n. 614.).

CAPITULO X.

Do movimento dos fluidos elaſticos.

626 NAõ he da minha intençaõ tratar muito por extenſo do movimento dos fluidos elaſticos, porque a theorica delles ſe acha ainda imperfeita nos ſeus elementos eſſenciais. O frio, e o calor produzem na virtude elaſtica variaçoens continuas, cuja lei ſe naõ ſabe com a exactidaõ que convinha, para fundar huma theorica ſegura. Sem me entregar pois a generalidades hypotheticas, e embaraçadas pela prolixidade dos calculos, examinarei ſómente o movimento do ar, e neſſe meſmo naõ tocarei mais que os problemas que podem ſer de mais uſo na practica.

627 Seja

627 Seja *ABCD* (Fig. 180.) hum cylindro fechado de todos os lados, que contém hum ar homogeneo, e igualmente denſo em toda a ſua extenſaõ. Eſte ar eſtá comprimido, e aſſim que ſe lhe der alguma ſahida, ou ſe lhe facilitar a dilataçaõ, dilatar-ſe-ha uniformemente, e a ſua elaſticidade ſe diminuirá. A força elaſtica em cada eſtado de compreſſaõ he ſempre igual á força que tem produzido eſſa compreſſaõ (n. 73. 89.). Aſſim, por exemplo, ſe o ar *ABCD* he ſemelhante ao exterior, e conſeguintemente foi comprimido pelo pezo da atmosfera, ou por huma força equivalente, ſuſtentará pela ſua elaſticidade o pezo de huma colunna de agua de 32 pés de altura; iſto he, ſe a tampa ſuperior *AE* ſe conſiderar livremente movel ao longo das paredes laterais, e ſe imaginar carregada em toda a ſua ſuperficie de huma colunna de agua de 32 pés de altura, haverá equilibrio entre o pezo da agua, e a força elaſtica do ar; e a tampa naõ poderá ſubir, nem deſcer. Suppomos, que o ar ſe conſerva ſempre no meſmo gráo de calor; porque ſe eſte vieſſe a aumentar ou diminuir, tambem a elaſticidade aumentaria, ou diminuiria. Do meſmo modo, quando compararmos entre ſi as elaſticidades de differentes maſſas de ar, ſupporemos ſempre que todas eſtaõ no meſmo gráo de temperatura.

628 Conſta pela experiencia (n. 92.94.), que ſe a meſma quantidade de ar ſe reduzir a occupar ſucceſſivamente differentes volumes, as forças que a comprimem, e conſeguintemente as ſuas forças elaſticas ſaõ na raſaõ inverſa dos volumes, ou na direcța das denſidades. Porém reduzir huma meſma maſſa de ar a occupar differentes volumes, he o meſmo que fazer entrar em hum meſmo volume differentes quantidades de ar, cujas denſidades ſejaõ as meſmas reſpectivamente que as da maſſa propoſta nos differentes eſtados. Logo, ſe differentes quantidades de ar occuparem ſucceſſivamente o meſmo volume, as elaſticidades ſeraõ proporcionais ás meſmas quantidades, porque eſtas, ſendo o volume conſtante, ſaõ na raſaõ das denſidades.

629 Daqui ſe ſegue, que abrindo em *C* hum pequeno orificio, pelo qual o ar tenha a liberdade de ſahir para o vacuo, continuamente ſahirá com a meſma velocidade que tiver no primeiro inſtante; porque a denſida-

de

de do fluido, e a força elaſtica que produz a fluxaõ pela abertura C, diminuem na meſma raſaõ; e quando a maſſa movida, e a força movente conſervaõ entre ſi a meſma raſaõ, a velocidade he conſtante. Se iſto naõ parece claro, eiſaqui huma prova mais ſenſivel.

Seja no primeiro inſtante a força elaſtica $= P$, a denſidade do fluido $= Q$, a ſua velocidade $= V$, e no fim de hum tempo t ſeja a denſidade $= q$, e a velocidade $= u$. Eſtá claro, que a força elaſtica no fim do tempo t ſerá $\frac{Pq}{Q}$; e como as forças motrizes ſaõ proporcionais ás quantidades de movimento, repreſentando por M, m as maſſas de ar que nos dous caſos ſahem pelo orificio em inſtantes iguais, teremos $P : \frac{Pq}{Q} :: MV : mu$. Porém as maſſas M, m ſaõ na raſaõ compoſta dos ſeus volumes e denſidades, e os volumes ſaõ na raſaõ das velocidades, por ſer o orificio conſtante. Logo $M : m :: QV : qu$, e conſeguintemente $P : \frac{Pq}{Q} :: QVV : quu$; donde ſe tira $u = V$.

630 Sendo pois a força elaſtica primitiva P igual ao pezo de huma colunna de agua de 32 pés de altura, he facil de ver que o ar ſahirá continuamente pelo orificio C com a meſma velocidade, com que a agua ſahiria de huma reſerva debaixo de 32.850 ou de 27200 pés de altura.

631 Seja H a altura devida á velocidade conſtante do fluido V no orificio C, A o volume do cylindro, C a area do orificio, a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo. No inſtante dt ſahirá pelo orificio hum pequeno volume de ar repreſentado por $2 C dt \sqrt{aH}$ (n. 233.), e conſeguintemente huma pequena maſſa repreſentada por $2 C q dt \sqrt{aH}$. Mas por outra parte he evidente, que depois do tempo t a maſſa de ar contida no cylindro he $AQ - Aq$. Logo teremos $2 C q dt \sqrt{aH} = d(AQ - Aq)$, ou $dt = -\frac{dq}{q} \cdot \frac{A}{2 C \sqrt{aH}}$. E integrando de maneira, que $q = Q$ dê $t = 0$, acharemos

$t =$

$$t = \frac{A}{2C\sqrt{aH}} \cdot l\,\frac{Q}{q}.$$

Por esta expressaõ do tempo se vê, que o vaso naõ poderá evacuar-se de todo, senaõ em hum tempo infinito.

632 Supponhamos agora, que o ar naõ sahe do vaso *ABCD* para hum espaço vazio, mas para hum espaço cheio de ar mais raro, de huma extensaõ infinita, como se póde suppor a da atmosfera em comparaçaõ do vaso. Guardando as denominações do n.° 629, e fazendo a densidade do ar exterior $= D$, he evidente que a resistencia constante que elle oppoem á sahida do interior, he $\frac{PD}{Q}$. Assim será a força expulsiva do ar interior no primeiro instante $P - \frac{PD}{Q}$, e depois do tempo t será $\frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q}$. Logo teremos $P - \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q} :: MV : mu :: QVV : quu$. Donde se tira

$$u = V\sqrt{\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}};$$

equaçaõ, que dá a cada instante a relaçaõ entre u e q; — r.
porque todas as mais quantidades saõ constantes. Por ella se vê, que o ar cessará de correr quando for $q = D$, e que naõ haverá movimento, se for $Q = D$.

633 Sendo H a altura devida á velocidade V, he evidente que a altura devida á velocidade u haverá de ser $\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}H$. Por tanto sahirá no instante dt a pequena massa de ar $2Cqdt\sqrt{\frac{aHQ(q-D)}{q(Q-D)}} = d(AQ - Aq)$; donde se tira $dt = -\frac{dq}{\sqrt{(qq-Dq)}} \cdot \frac{A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}}$. E integrando de maneira que $q = Q$ dê $t = 0$, acharemos

$$t = \frac{A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \cdot l\left(\frac{Q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(Q^2 - DQ)}}{q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(qq - Dq)}}\right);$$

E por quanto temos visto que o ar cessa de correr; quando

quando $q = D$, substituindo este valor de q na equaçaõ precedente, teremos o tempo total do movimento pela equaçaõ seguinte

$$t = \frac{A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \cdot l\left(\frac{Q-\frac{1}{2}D+\sqrt{(Q^2-DQ)}}{\frac{1}{2}D}\right).$$

634 Supponhamos agora pelo contrario, que o cylindro $ABCD$ está vazio no primeiro instante, e que o ar exterior (sempre infinito em extensaõ) entra nelle pelo orificio C. Sendo a força elastica constante do ar externo $= F$, a sua densidade $= D$, a velocidade com que entra no primeiro instante $= V$, e depois de qualquer tempo $t = u$, a densidade do ar no cylindro no fim do mesmo tempo $= q$; está claro, que a força impulsiva do ar externo será no primeiro instante $= F$, e depois do tempo $t = F - \frac{Fq}{D}$. Assim teremos $F : F - \frac{Fq}{D} :: DVV : Duu :: VV : uu$, e conseguintemente

$$u = V\sqrt{\left(1 - \frac{q}{D}\right)}.$$

635 Se na mesma hypothese houvesse no primeiro instante alguma quantidade de ar no cylindro, cuja densidade fosse $= Q$, teriamos $F - \frac{FQ}{D} : F - \frac{Fq}{D} :: VV : uu$, e conseguintemente

p. —

$$u = V\sqrt{\frac{D-q}{D-Q}}.$$

Donde se vê que em ambos os casos cessará o movimento do fluido, quando $D = q$.

636 A equaçaõ entre o tempo t e a densidade q, fazendo que $q = Q$ dê $t = 0$, se achará

$$t = \frac{A\sqrt{(D-Q)}}{CD\sqrt{aH}}\left(\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}\right);$$

e fazendo $q = D$, a duraçaõ total do movimento será determinada pela equaçaõ

$$t = \frac{A(D-Q)}{CD\sqrt{aH}}.$$

637 Sejaõ em fim dous cylindros $ABCD$, $CFGH$ (Fig.

(Fig. 181.) fechados de todos os lados, cheios de ar differentemente condensado. Abrindo-se em C hum orificio de communicaçaõ, o ar mais denso do vaso $ABCD$ correrá para o outro $CFGH$. Seja no primeiro instante a força elastica do ar $ABCD = P$, a sua densidade $= Q$, a sua velocidade $= V$, e a densidade do ar $CFGH = D$; e depois do tempo t, seja a densidade do ar $ABCD = q$, a sua velocidade $= u$, e a densidade do ar $CFGH = \delta$. Assim teremos $P \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{P\delta}{Q} :: QVV : quu$.
Donde resulta

$$u = V \sqrt{\frac{Q(q-\delta)}{q(Q-D)}};$$

e por conseguinte, o movimento cessará, quando for $\delta = q$.

Como a massa total do ar incluido nos dous cylindros he constante, fazendo a capacidade de $ABCD = A$, e de $CFGH = B$, teremos $AQ + BD = Aq + B\delta$; donde se tira $\delta = \frac{A(Q-q)+BD}{B}$. E substituindo este valor na equaçaõ precedente, acharemos

$$u = V \sqrt{\frac{Q(B(q-D)-A(Q-q))}{Bq(Q-D)}};$$

equaçaõ, que dá a velocidade u correspondente a cada densidade q.

638 Fazendo, para abbreviar, $Q(B+A) = M$, $BQD + BQ^2 = N$, $BQ - BD = R$, $\frac{N}{M} = m$, acharemos do mesmo modo $2Cqdt \sqrt{\left(\frac{aH(Mq-N)}{Rq}\right)} = d(AQ - Aq)$, ou $dt = \frac{A\sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}} \cdot \frac{dq}{\sqrt{(qq-mq)}}$.
E integrando de maneira, que $q = Q$ dê $t = 0$, acharemos

$$t = \frac{A\sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}} \cdot l\left(\frac{Q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(Q^2 - mQ)}}{q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(q^2 - mq)}}\right);$$

E porque o movimento cessa quando $\delta = q$, e nesse caso ſo a equaçaõ $AQ+BD=Aq+BS$ dá $q=\frac{AQ+BD}{A+B}$, repreſentando eſta quantidade por G, e ſubſtituindo-a na equaçaõ precedente, teremos

$$t=\frac{A\sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}}\cdot l\left(\frac{Q-\frac{1}{2}m+\sqrt{(Q^2-mQ)}}{G-\frac{1}{2}m+\sqrt{(G^2-mG)}}\right)$$

por expreſſaõ do tempo total do movimento.

639 Se ás forças da elaſticidade ſe ajuntaſſe a acçaõ de hum embolo, que movendo-ſe uniformemente contribuiſſe para o movimento do fluido, os problemas precedentes naõ ſeriaõ por iſſo mais difficeis. Naõ ſeria neceſſario mais que ajuntar ás velocidades acima determinadas a velocidade produzida pela acçaõ do embolo na paſſagem do orificio. Por exemplo, ſe no caſo do nº *629* ſe conſiderar AD como huma tampa movel, que deſce uniformemente com huma velocidade k em virtude de qualquer força, repreſentando por n a raſaõ da area AD para a area do orificio, o fluido terá por eſta cauſa na paſſagem do meſmo orificio a velocidade nk. Ajuntando-a pois á velocidade V produzida pela força elaſtica, a ſoma $V+nk$ ſerá a velocidade total; e do meſmo modo ſe diſcorrerá nos outros caſos.

640 Se o fluido tiveſſe huma altura conſideravel, de maneira que foſſe neceſſario attender ao ſeu pezo, naõ ſe comprimiria, nem dilataria uniformemente nos ſeus differentes eſtados; e a determinaçaõ do movimento ſeria mais difficultoſa. Naõ diremos nada deſte caſo, que poucas vezes póde occorrer na practica; por quanto a applicaçaõ principal de toda eſta theorica ſe reduz á determinaçaõ do movimento do ar na maquina pneumatica, e nas bombas, onde naõ he neceſſario attender á referida circunſtancia.

FIM.

 Fig. I.

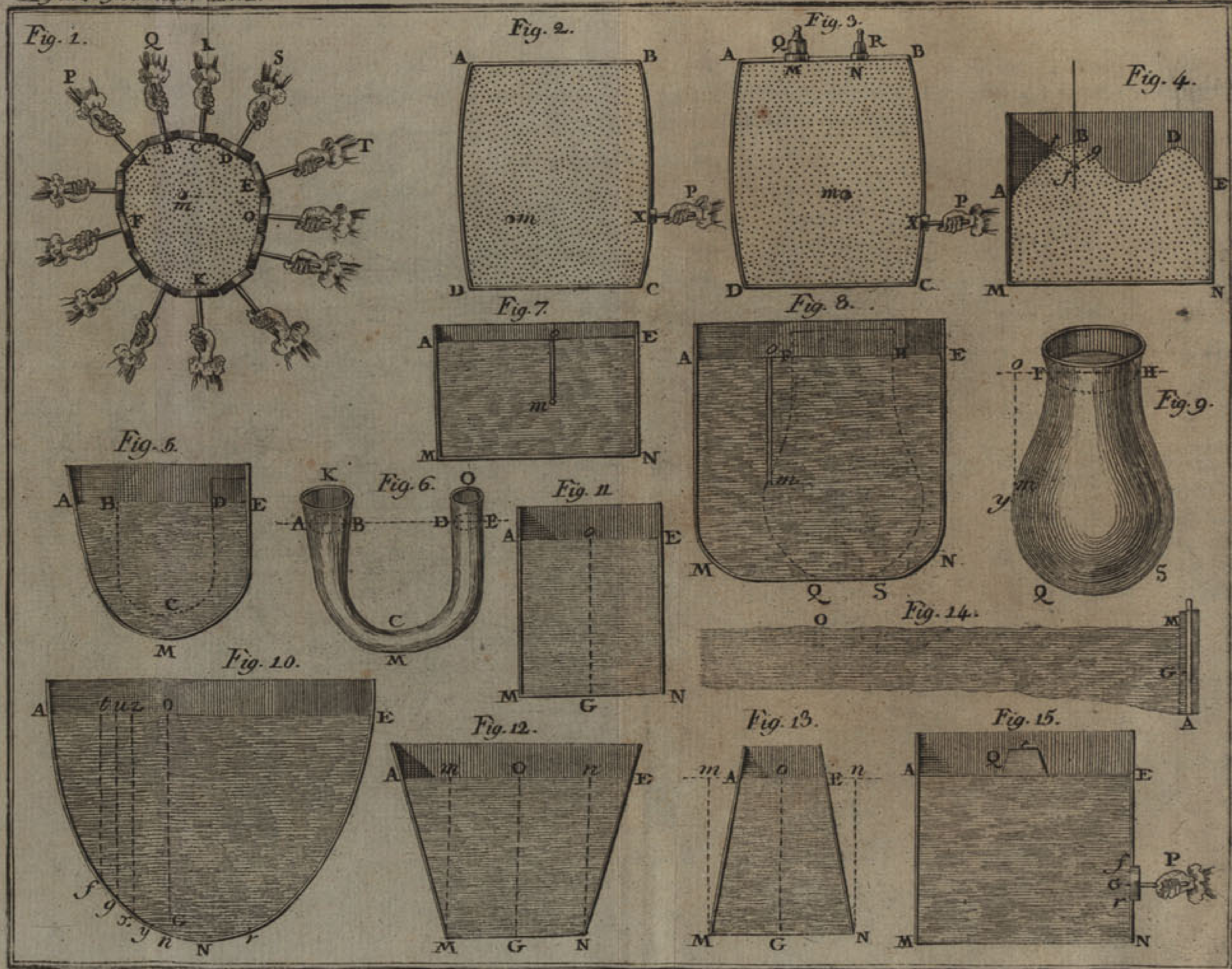
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

Fig. 15

Hydrodynamica Est. II. Fig. 16.

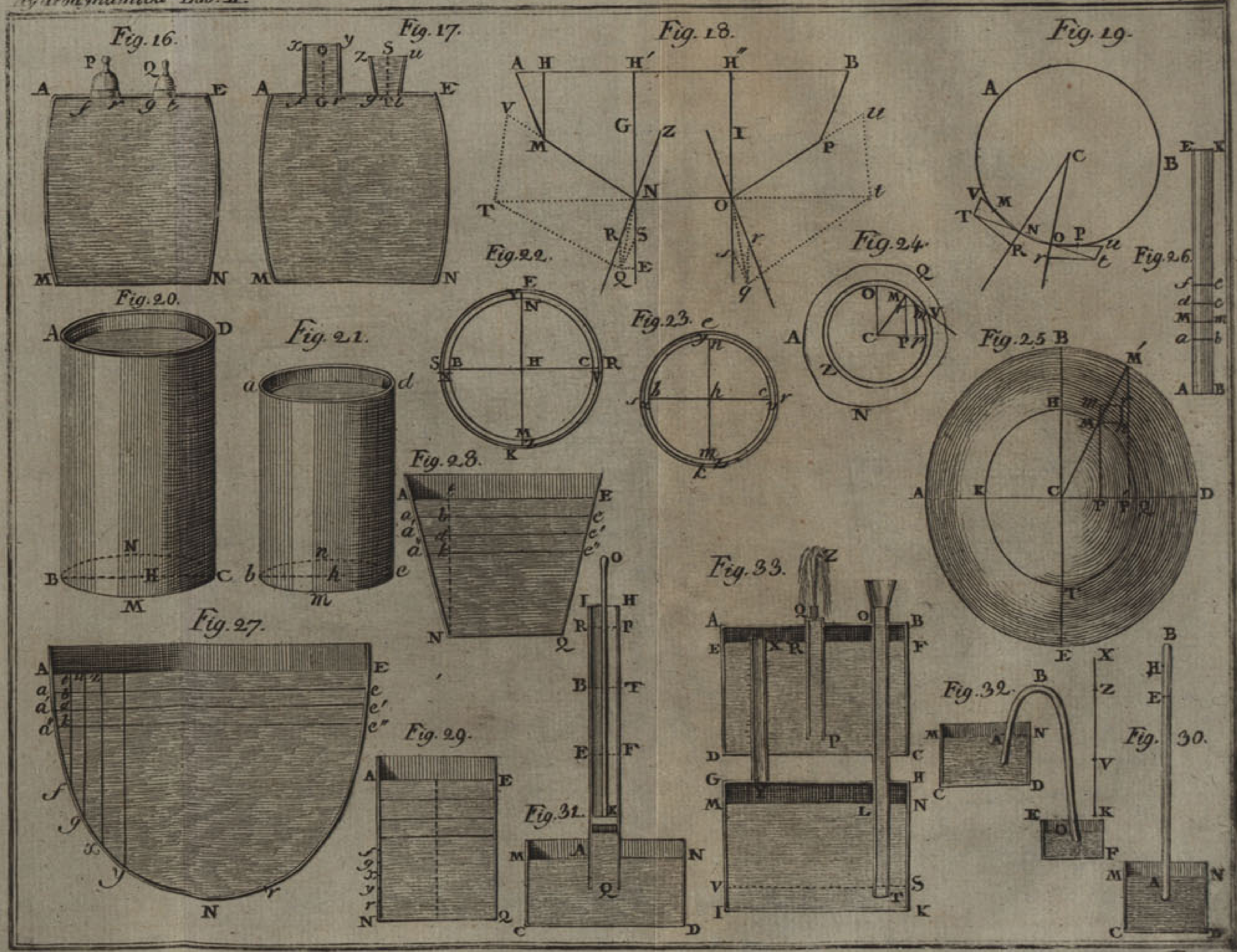

Fig. 33.

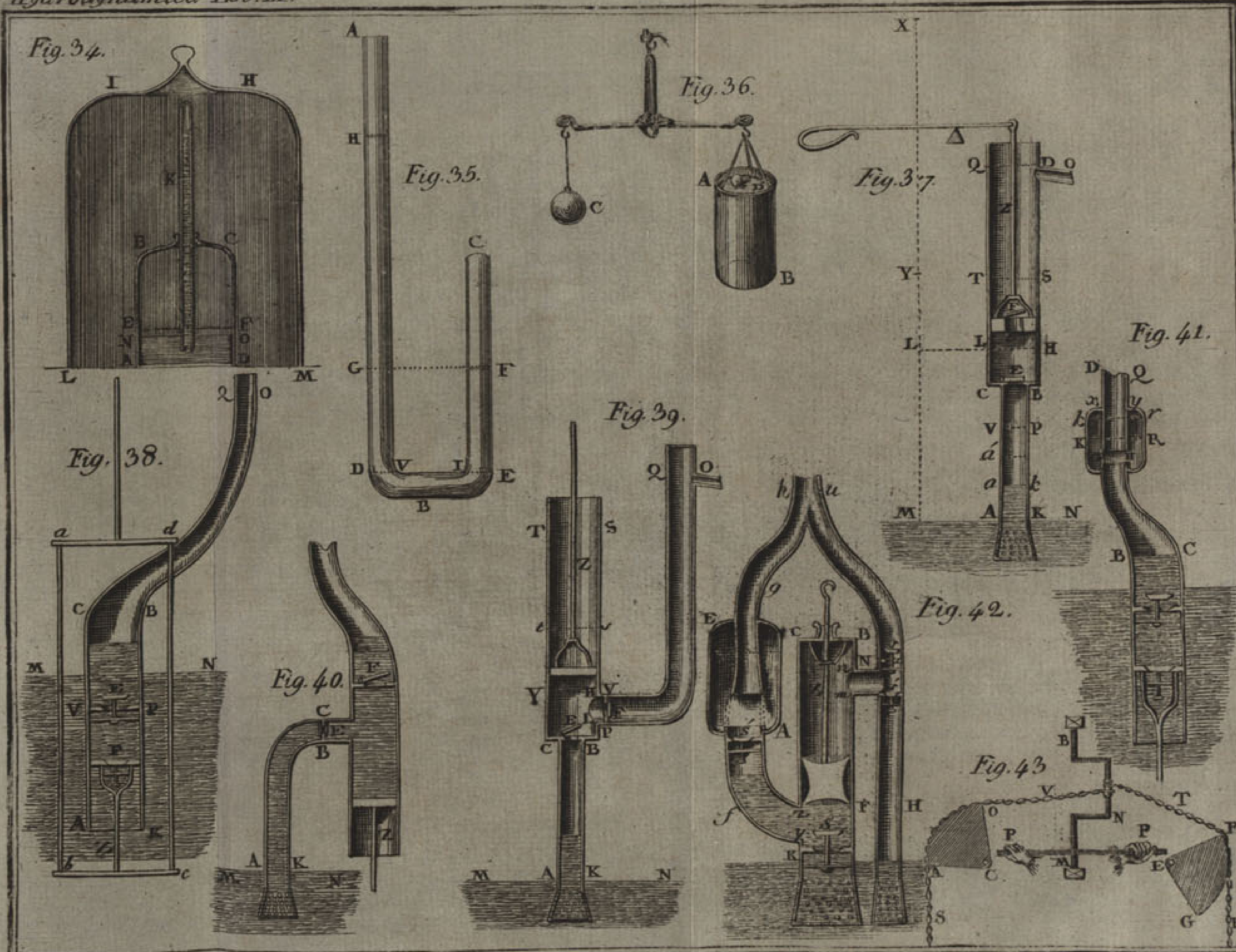
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.

Fig. 44.

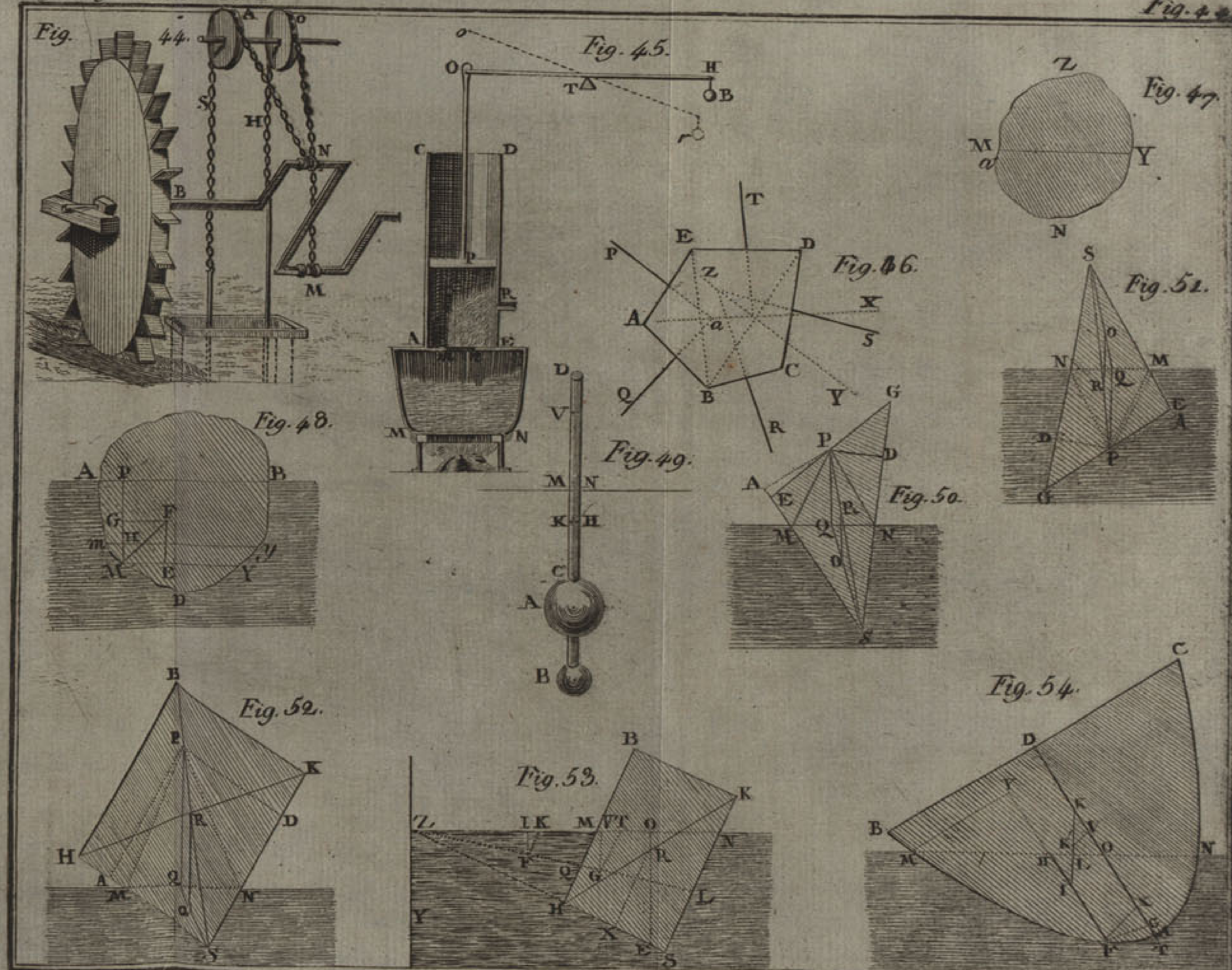
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.

Fig. 54.

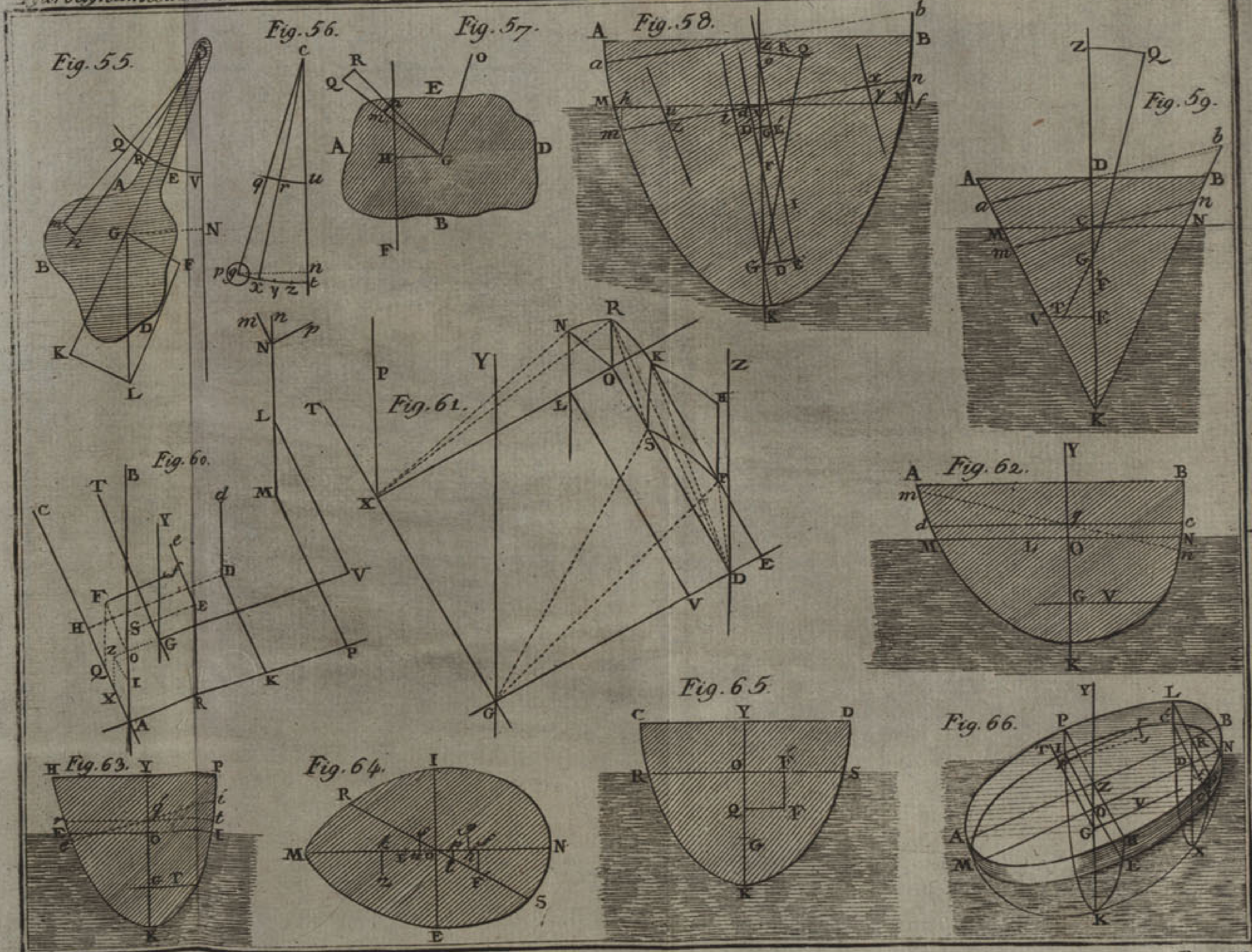
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.

Hydrodynamica Est. VI.

Fig. 67.

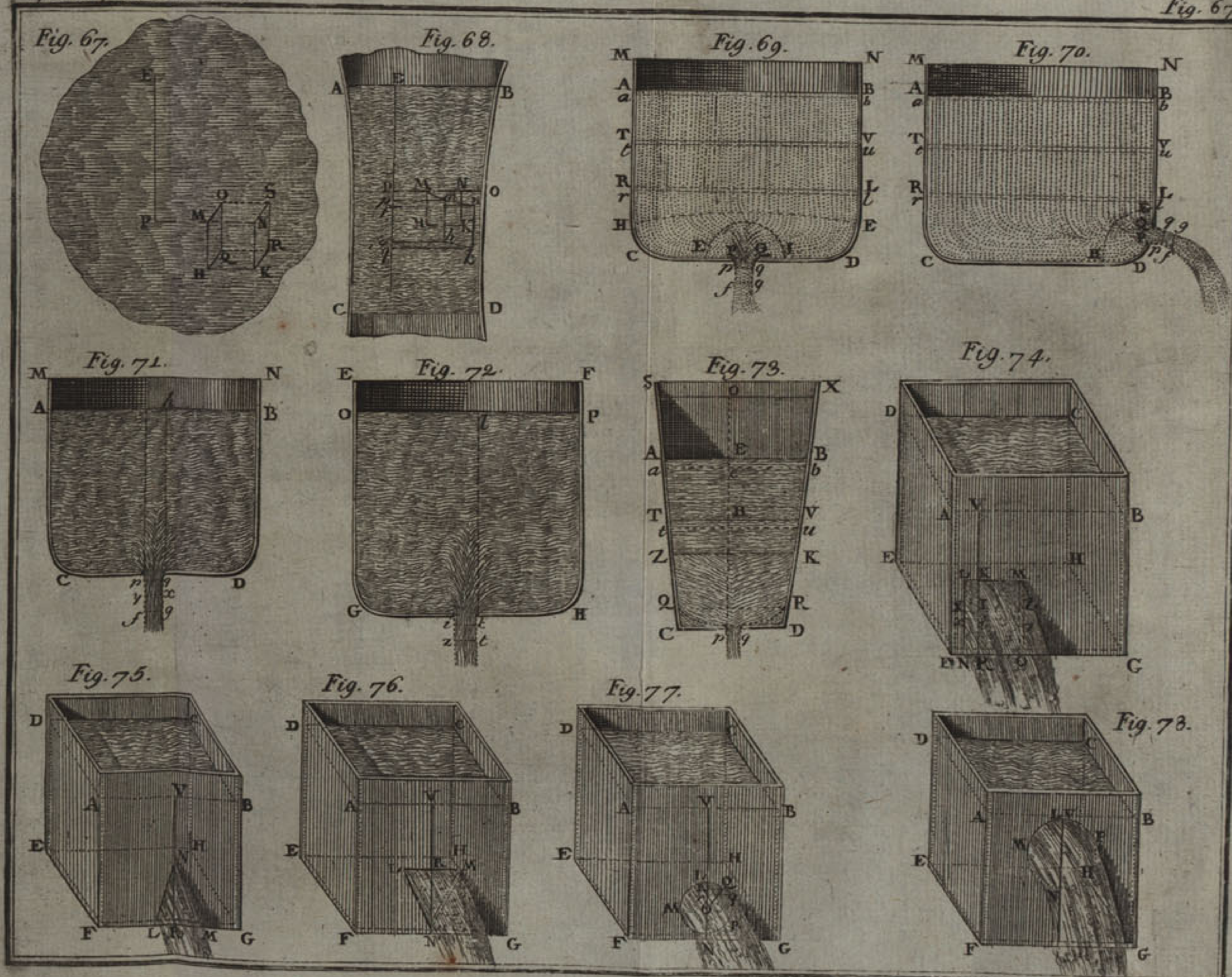

Fig. 78.

Fig. 79.

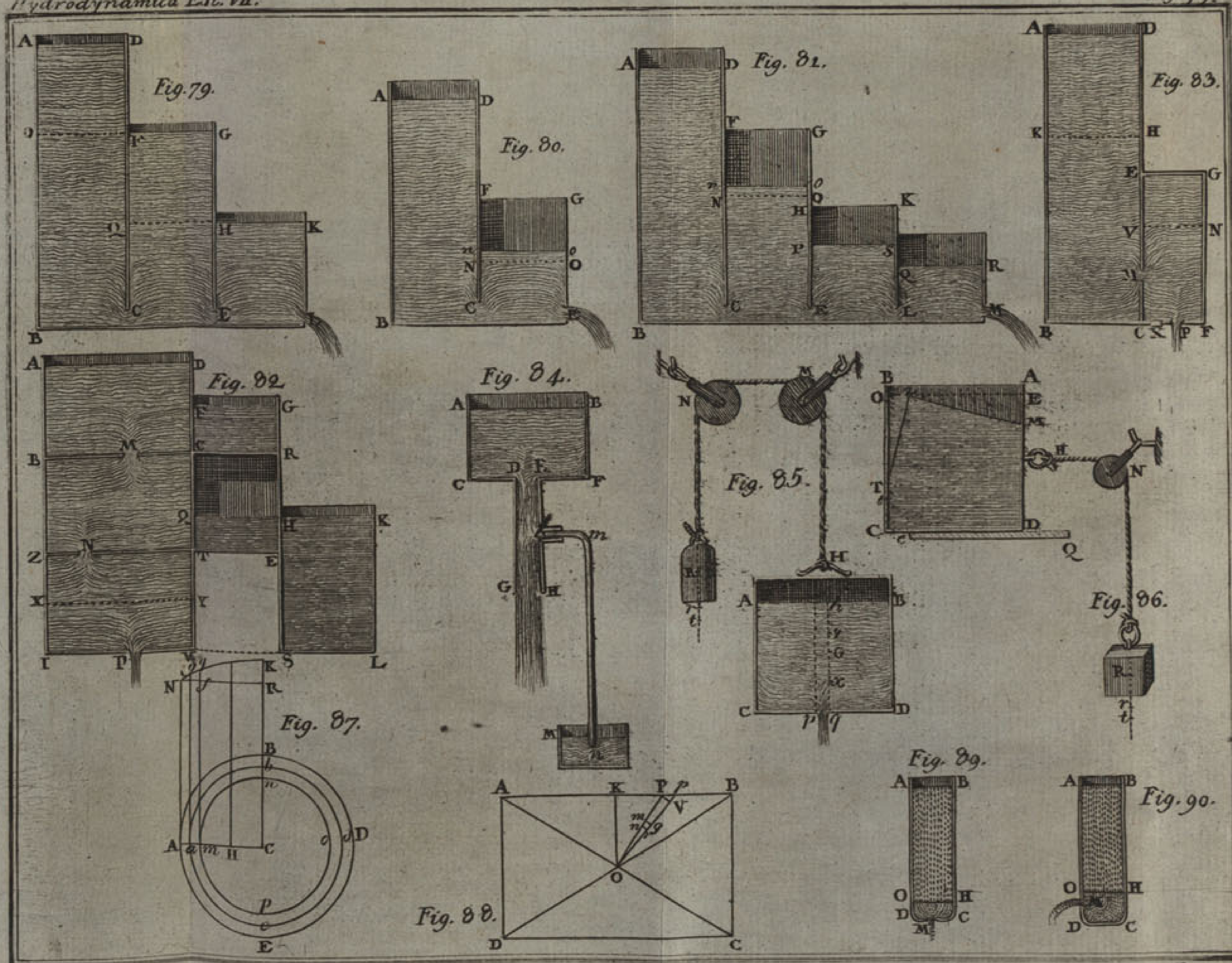
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 83.
Fig. 82.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.

Fig. 90

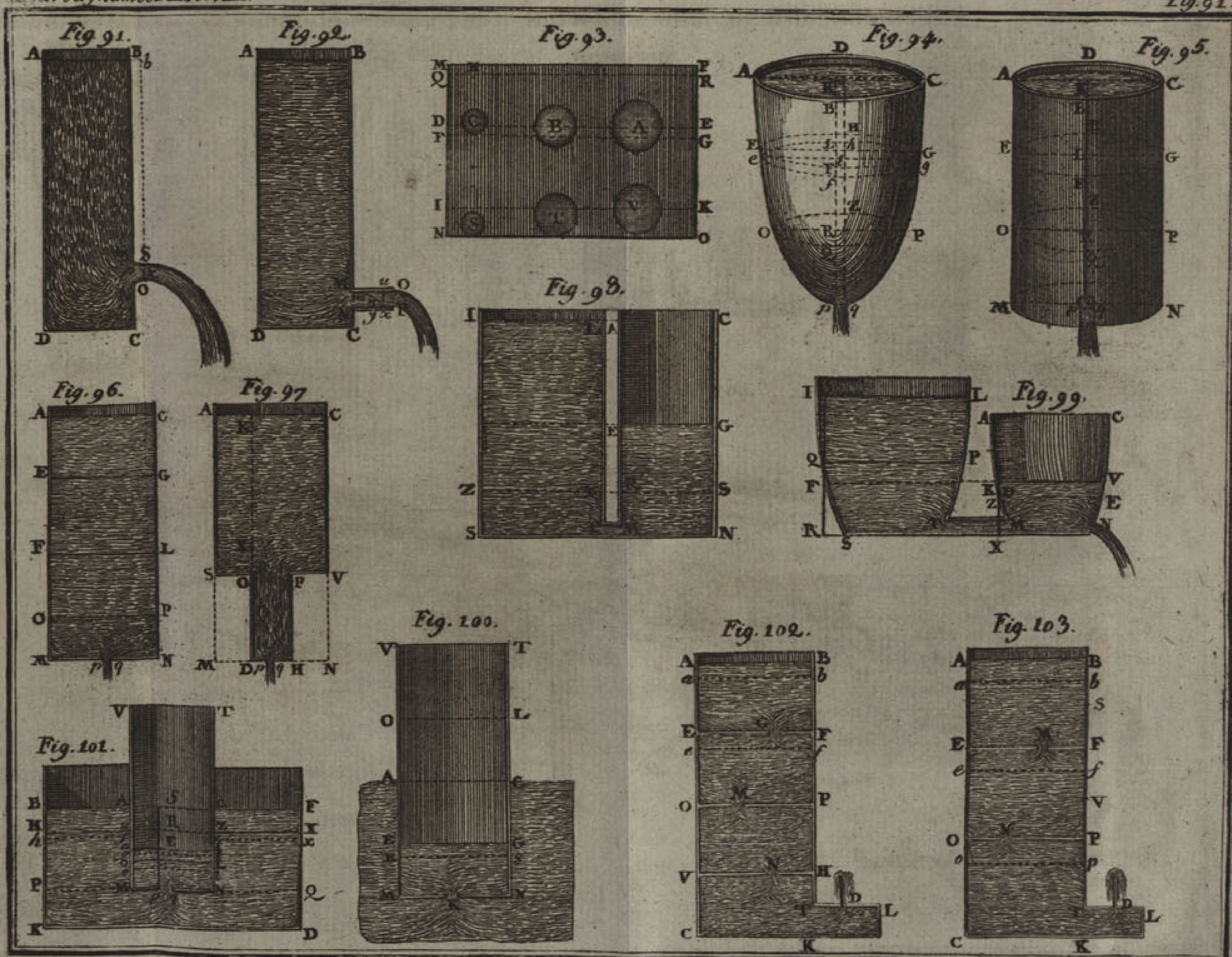
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.

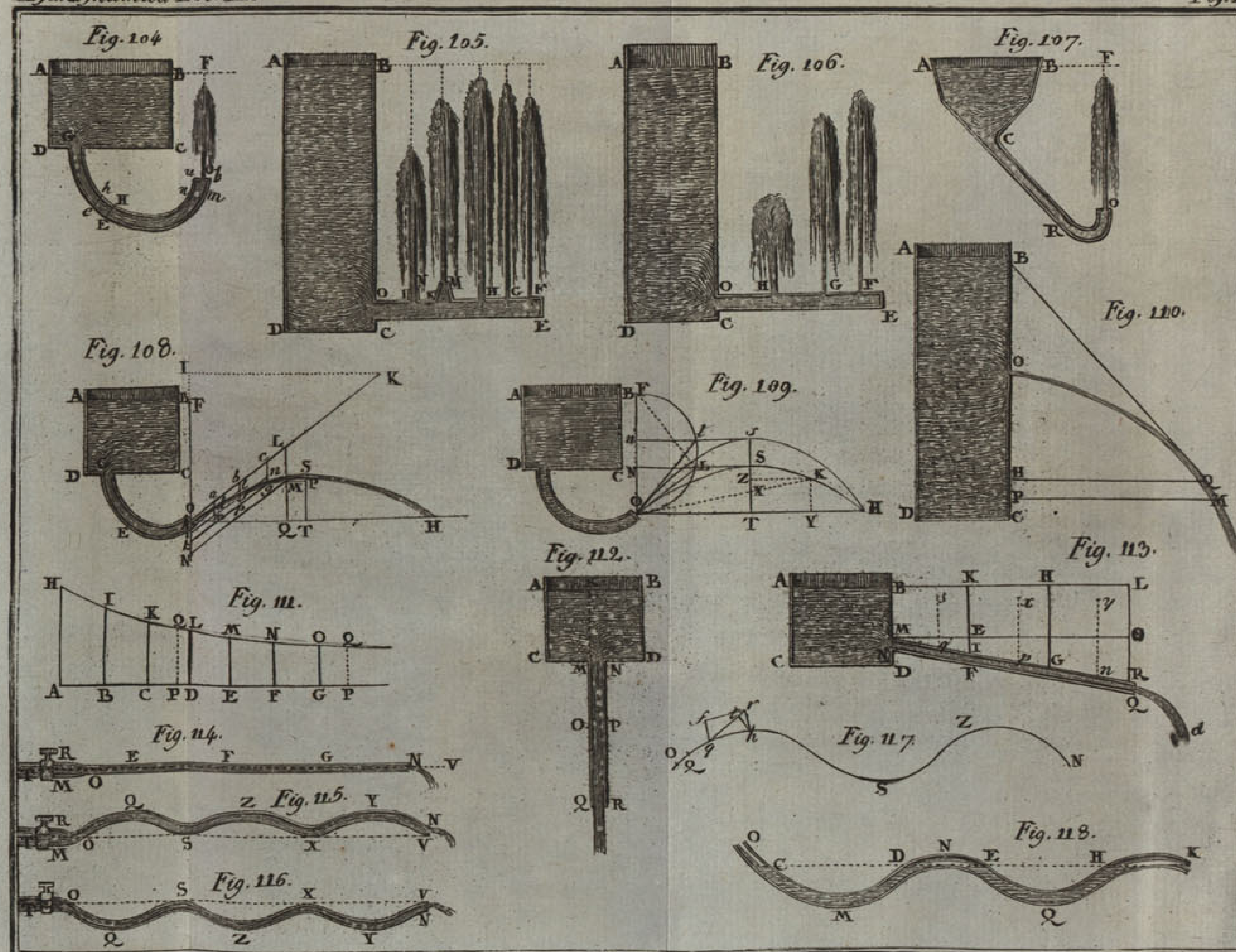
Fig. 104
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.

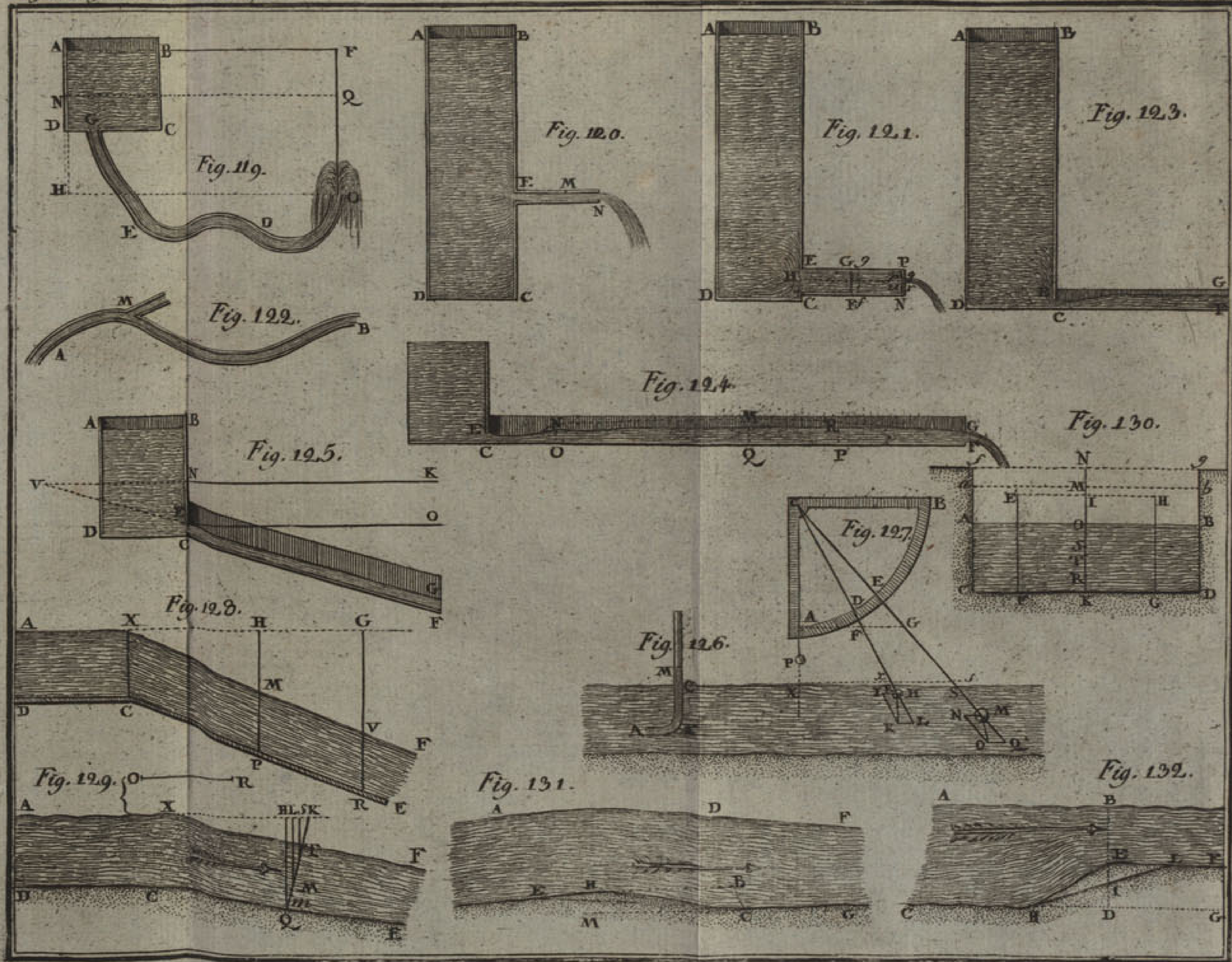
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.

Fig. 132.

Hydrodynamica Est. XI. Fig. 133.

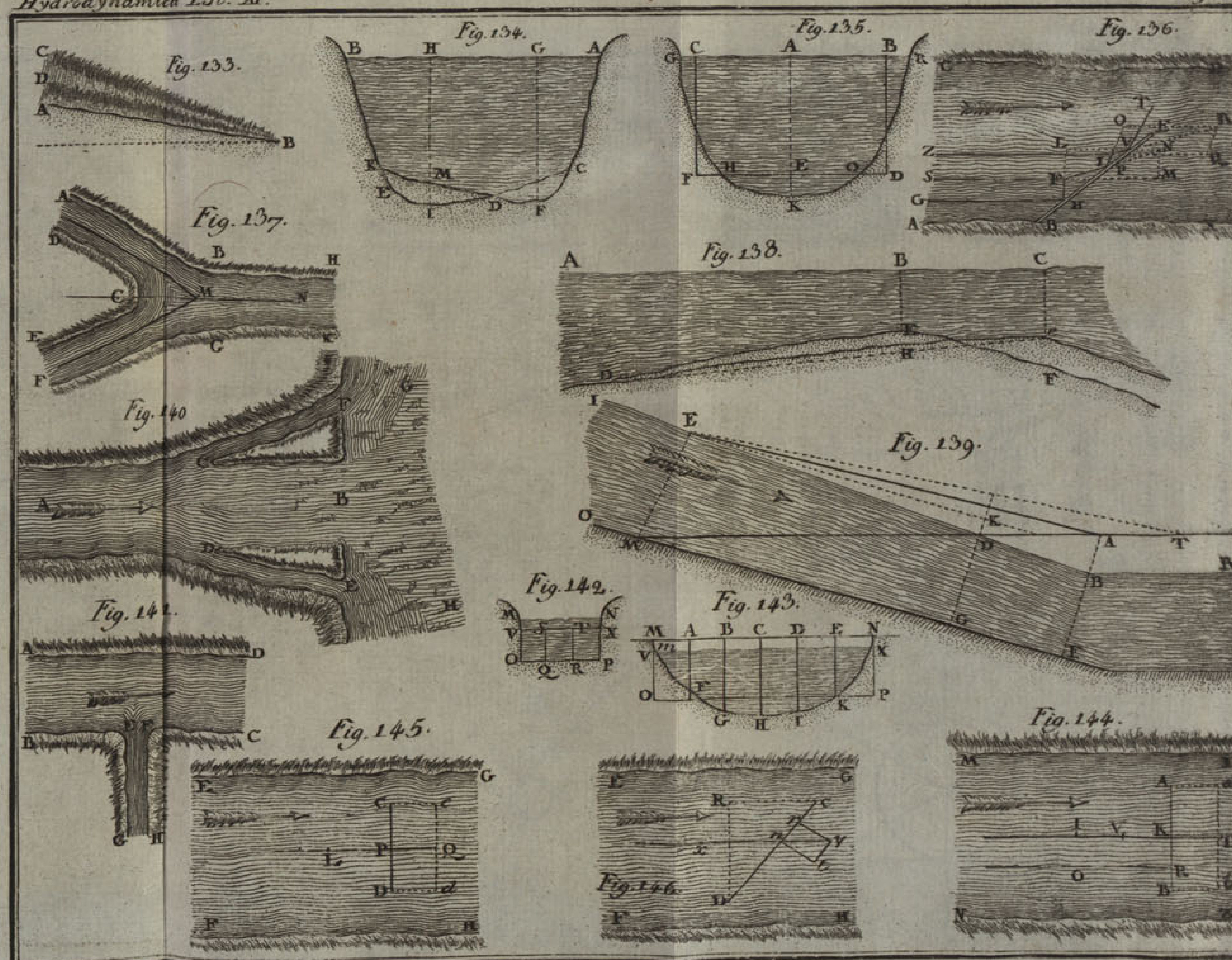

Fig. 146

Fig. 147.

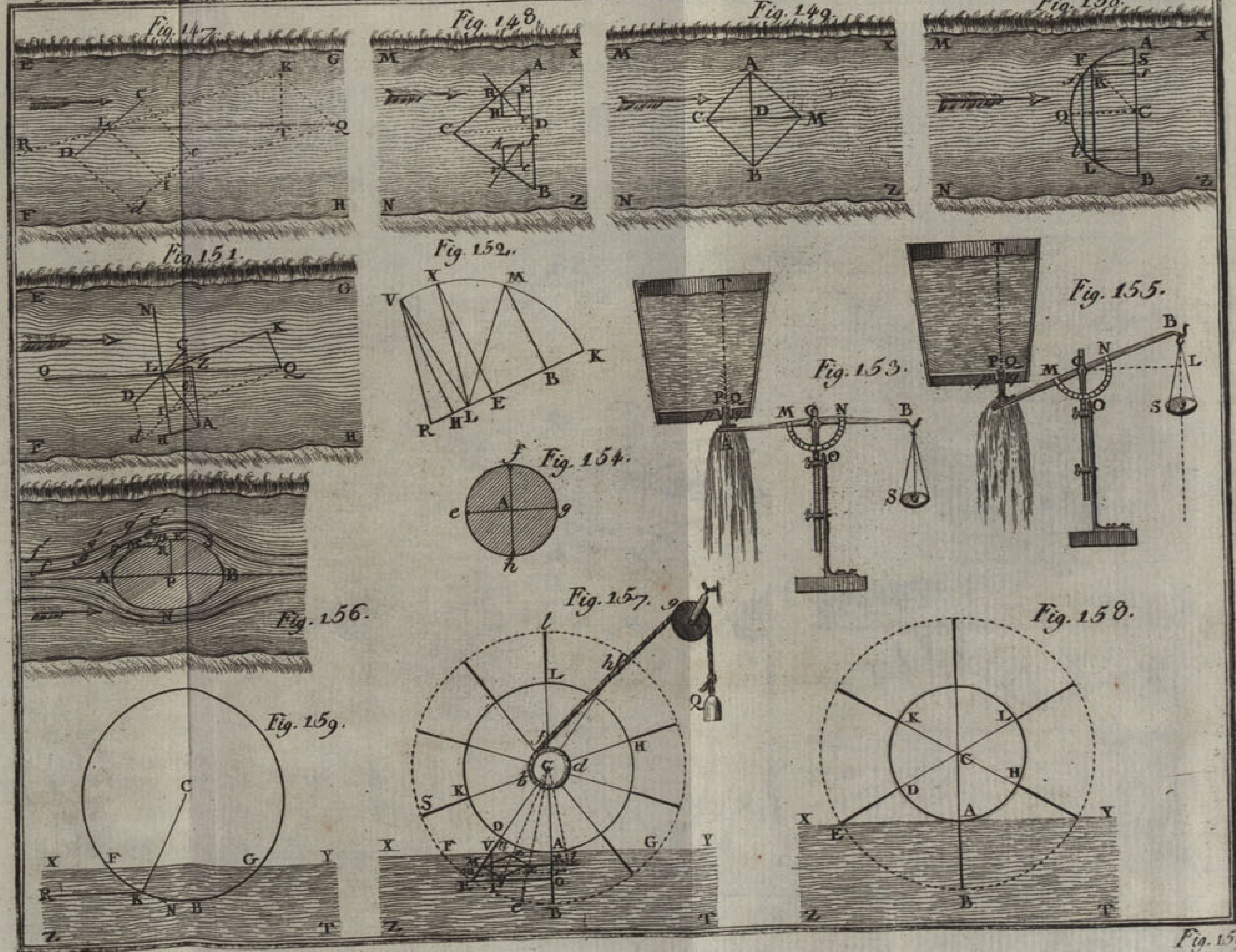

Fig. 159.

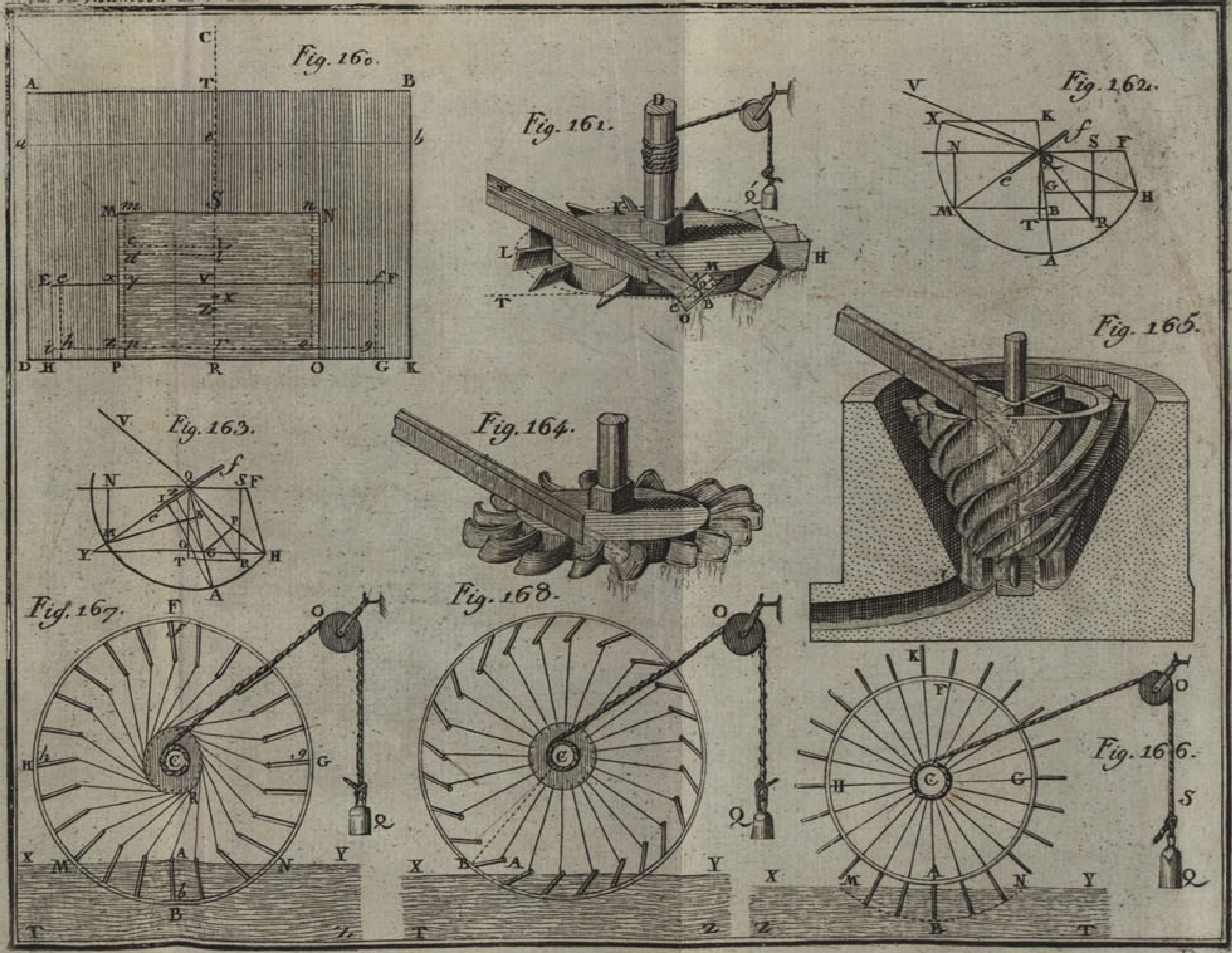

Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.

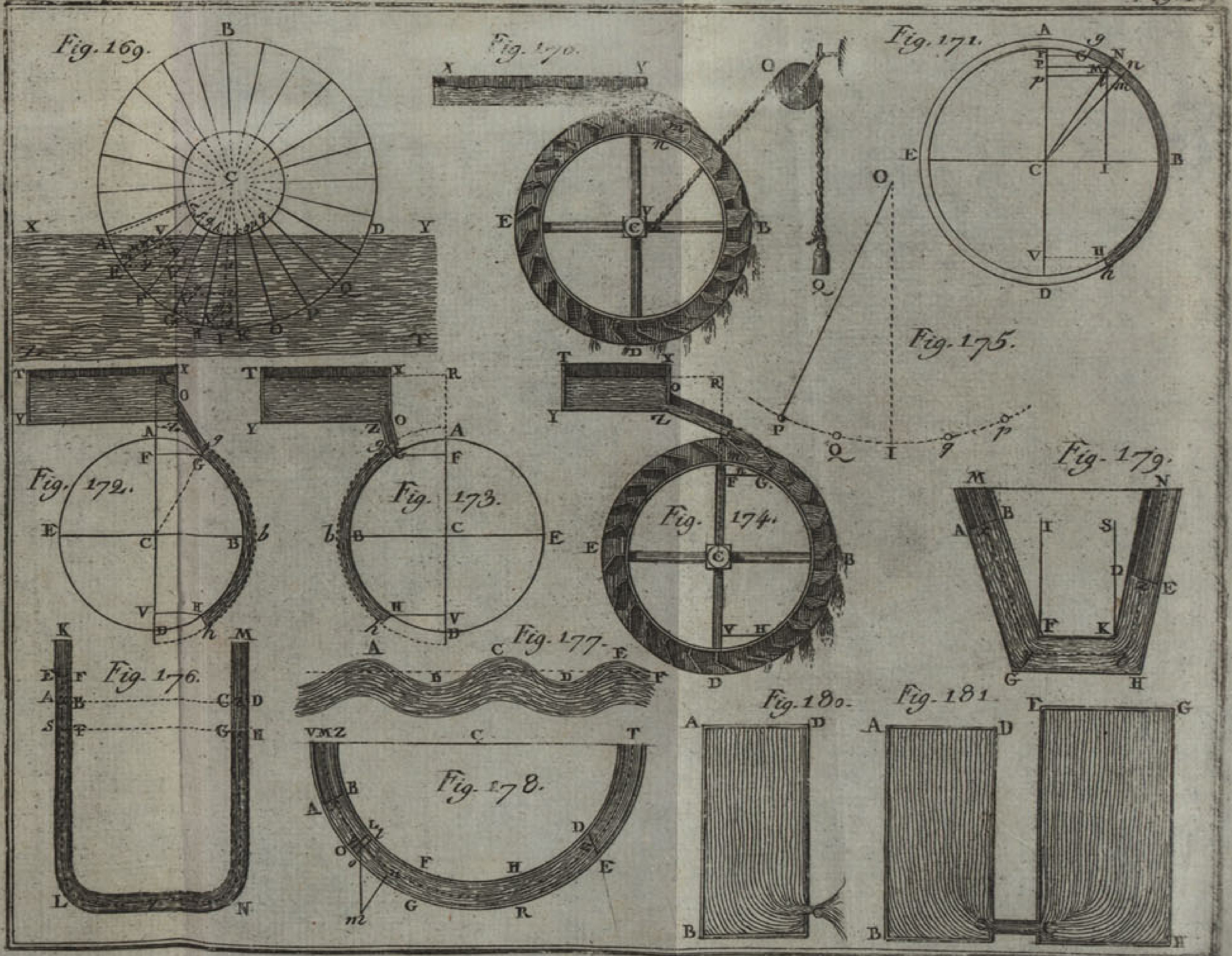
Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 171.
Fig. 172.
Fig. 173.
Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.