ERRATAS.

Pag.	*Linh.*	*Errat.*	*Emend.*
14	18	*en*	*ſen*
82	4	12*MN*K	12*MNK.FG*
83	14	mnk	mnK
85	1 e 2	$-3y$	$-3x$
86	3	gravidaoe	gravidade
89	13	$\wedge$	γ
99	23	*AHB*K	*AHBP*
130	30	Adx	$-Adx$
138	1	ſobre fundo	ſobre o fundo
151	20	mais a agua	mais agua
156	12	Xdt	Xdx
160	12	213	313
163	7	$H =$	$= H$
170	11	Q^2	G^2
179	19	$D : D$	$D : D'$
185	11	OK.2FO	OQ.2FO
194	37	$\sqrt{2}, \sqrt{3}$	$\sqrt{1,889}$ e $\sqrt{2,778}$
222	30	xy	Xx
ibid.	30 e 34	yXY	xXR
256	21	RA	RH
298	14	$\frac{\cos m^2}{\cos p^2}$	$\frac{\cos m^3}{\cos p^2}$
302	17	$2 \cos q \,\text{ſen}\, q$	$2 \cos q \,\text{ſen}\, q^2$
307	10	dM	$dM =$

TRATADO
DE
HYDRODYNAMICA
POR
M. BOSSUT

DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS de París, Examinador dos Ingenheiros &c. &c.

TRADUZIDO E ABBREVIADO do Francez.

COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

1775

M.DCC.LXXV.

Por Ordem de Sua Mageſtade, e com Privilegio Real.

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem: Que Havendo eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade: E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abollir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres; pelos quais os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio; para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos: Por quanto pela ſobredita Abolliçaõ ficáraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade; e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta de Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco; naquella parte, que he reſpectiva aos Livros Mathematicos: Hey por bem transferir para ra a ſobredita Univerſidade de Coimbra o meſmo Privilegio excluſivo para a impreſſaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Claſſicos das Sciencias Mathematicas; aſſim, e da maneira que na ſobredita Doaçaõ Eu o havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo, a eſte fim a meſma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della ſo he comprehenſiva das impreſſoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de ſervir aos ſobreditos Eſtudos Mathematicos, e pelos quais ſe devaõ enſinar na meſma Univerſidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conſelho de Eſtado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Univerſidade de Coimbra; á Real Meſa Cenſoria; Meſa do Deſembargo do Paço; Regedor da Caſa da Supplicaçaõ; Conſelhos da Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultra-marinos; Meſa da Conſciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Caſa do Porto; Senado da Camara, e bem aſſim a todos os Deſembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Juſtiças, e mais Peſſoas deſtes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deſte Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guar-

dar-

dar ſem duvida, ou embargo algum; qualquer que elle ſeja, naõ obſtante a ſobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpetua de doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco, que tenho revogado ao ſobredito fim na parte, que ſó reſpeita ás ſobreditas impreſſoens; ficando para tudo o mais em ſeu vigor, e inteira validade. E eſte valerá como ſe paſſaſſe pela Chancellaria, poſto que por ella naõ ha de paſſar; e o ſeu effeito haja de durar hum, e muitos annos; naõ obſtantes as Ordenaçoens em contrario, as quais Hey por derogadas para eſte effeito ſómente. Dado no Palacio de Noſſa Senhora da Ajuda em deſeſeis de Dezembro de mil ſetecentos ſetenta e tres.

REY.

Marquez de Pombal.

Alvará, porque Voſſa Mageſtade pelos motivos nelle expreſſos: He ſervido transferir para a Univerſidade de Coimbra o Privilegio excluſivo para as impreſſoens dos Livros Claſſicos dos Eſtudos Mathematicos; havendo ceſſado

cessado o fim, com que antes fora Concedido, e Doado ao Collegio Real de Nobres; na fórma assima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

Joaõ Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Cumpra-se, e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Visitador.

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

Joaõ Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.

TABOA

Das materias que ſe contêm neſte Tratado.

HYDROSTATICA

CAPITULO I.

CAPITULO II.

Theo-

CAPITULO III.

HYDRAU-

HYDRAULICA.

CAPITULO I.

CAPITULO II.

CAPITULO III.

CAPITULO IV.

C A-

CAPITULO V.

CAPITULO VI.

CAPITULO VII.

CA-

CAPITULO VIII.

CAPITULO IX.

CAPITULO X.

TRATADO
DE
HYDRODYNAMICA.

DEFINIÇOENS, E NOÇOENS GERAIS.

1

A *HYDRODYNAMICA* em geral he a Sciencia, que tem por objecto as leis do Equilibrio, e do Movimento dos Fluidos. A parte della, que considera o equilibrio, chama-se *Hydrostatica*; e a que trata do movimento, *Hydraulica*.

2 *Fluido* he o corpo, que se compoem de moleculas tenuissimas, independentes humas das outras, e perfeitamente moveis em todo o sentido. Tal he o vinho, a agua, o mercurio, o ar, a chama &c.

3 Nesta definiçaõ suppomos os fluidos perfeitamente tais; mas physicamente fallando naõ ha nenhum que o seja. Sempre as partes de qualquer delles se unem entre si com certo gráo de adherencia, e tenacidade, que naõ he a mesma em todos, e que no mesmo fluido póde variar, em rasaõ do frio, do calor, e de outras causas physicas.

4 Alguns autores distinguem os liquidos dos fluidos, como a especie do genero. Chamaõ fluidos aquelles, cujas partes cedem facilmente ao tacto, e naõ saõ ligadas entre si, como a areia, a cinza &c. E por liquidos entendem somente aquelles, cujas partes tem taõ grande mobilidade, e se equilibraõ pelo seu pezo de tal maneira, que sendo em quantidade sufficiente se derramaõ, e formaõ sempre huma superficie horizontal. Neste tratado naõ fallaremos dos fluidos improprios, como he a areia, mas somente dos fluidos perfeitos, que indifferentemente chamaremos fluidos, ou liquidos.

5 Como havemos de fallar muitas vezes em *massa*, *volume*, *densidade* &c, em poucas palavras fixaremos aqui a idea, que se deve ter destas quantidades.

6 A *massa* de hum corpo, ou seja solido, ou fluido,

 he

he a quantidade de materia propria, de que elle se compoem. Esta se conhece pelo pezo; desorte que se hum corpo péza o dobro, triplo &c de outro, diremos que tem huma massa dupla, tripla &c.

Esta proporcionalidade dos pezos com as massas he demonstrada pela experiencia. Porque no vacuo todos os corpos descem com igual velocidade, e pelos principios da Mechanica se sabe, que quando as velocidades de dous moveis saõ iguais, as forças motrizes saõ necessariamente proporcionais ás massas.

7 O *volume* de hum corpo tanto solido, como fluido, he o espaço que elle occupa. Este se determina pelas regras que a Geometria estabelece para a mediçaõ dos corpos.

8 Se todos os corpos fossem perfeitamente massiços, ou se todos fossem igualmente porosos, era inutil distinguir a massa do volume. Mas todos saõ porosos, e cada hum de maneira differente. Duas barras, por exemplo, huma de ouro, outra de prata, ambas exactamente da mesma figura e volume, naõ pézaõ igualmente, mas saõ os seus pezos, e conseguintemente as massas proximamente como 19 para 10. Do mesmo modo hum pé cubico de mercurio, e outro de agua, tem massas muito desiguais, pois a primeira he 14 vezes maior que a segunda proximamente. Conforme pois contém hum corpo mais ou menos massa em hum volume dado, se chama mais ou menos *denso*.

9 Daqui resulta a noçaõ da *densidade*, que se deve considerar como a relaçaõ do numero das *medidas* da massa ao numero das *medidas* do volume, ou (que vem a ser o mesmo) como *a massa comprehendida na unidade do volume*.

As medidas da massa saõ *libras*, *onças* &c, e do volume *pés cubicos*, *pollegadas cubicas* &c. Em cada especie destas medidas deve tomar-se huma unidade fundamental, como a onça, por exemplo, para as massas, e a pollegada cubica para os volumes.

10 Logo se duas massas M, m, tiverem os volumes V, v, e as densidades D, d, será $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$, e conseguintemente $M : m :: VD : vd$. Donde se vê, que *as massas saõ na rasaõ composta dos volumes e das densidades*.

11 *Quando as massas saõ iguais, saõ as densidades na rasaõ inversa dos volumes*; porque entaõ temos $VD = vd$, e conseguintemente $D : d :: v : V$.

12 He

12 He fácil de ver, que a densidade he huma quantidade puramente relativa, e que hum corpo naõ se chama denso senaõ pela comparaçaõ expressa, ou subentendida, que delle se faz com outro corpo. Assim deve entender-se que estes enunciados commummente recebidos, *a densidade he igual ao quociente da massa dividida pelo volume*, e *a massa he igual ao volume multiplicado pela densidade* se reduzem ás proporções que havemos referido.

13 Quando se considera o pezo de hum corpo simplesmente, sem attençaõ alguma ao seu volume, chama-se pezo absoluto, ou gravidade absoluta do mesmo corpo.

14 Mas muitas vezes he necessario conhecer o pezo de huma materia comprehendida em hum volume dado. Este pezo he o que se chama *gravidade especifica*. Donde se vê em geral, que o pezo especifico de hum corpo he a relaçaõ entre o numero das medidas do pezo absoluto, e o numero das medidas do volume, ou (que vem a ser o mesmo) *o pezo comprehendido na unidade do volume*.

15 Sendo pois dous corpos, que tenhaõ os volumes V, v, os pezos absolutos P, p, e as gravidades especificas G, g, teremos $G : g :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$, e conseguintemente $P : p :: GV : gv$, isto he, *os pezos absolutos seraõ entre si na rasaõ composta dos volumes, e das gravidades especificas*.

16 *Se os pezos forem iguais, as gravidades especificas seraõ na rasaõ inversa dos volumes*; porque entaõ he $GV = gv$, e conseguintemente $G : g :: v : V$.

17 Daqui se entenderá o sentido de huma expressaõ, de que havemos de usar muitas vezes. Havendo de representar o pezo de hum corpo de volume conhecido, ou determinavel pelas condições de qualquer problema, reduziremos este volume a medidas conhecidas, por exemplo, a pés cubicos, e multiplicallo-hemos pelo pezo absoluto de hum pé cubico da mesma materia (pezo, que consideraremos como a sua gravidade especifica). Este producto dará evidentemente o pezo absoluto do corpo; e neste sentido diremos, que *o pezo absoluto he igual ao producto do volume multiplicado pela gravidade especifica*.

18 Como as massas saõ proporcionais aos pezos, está claro que as densidades saõ proporcionais ás gravidades especificas; porque as densidades saõ as massas comprehen-

 didas

didas em volumes iguais, e as gravidades especificas saõ os pezos comprehendidos tambem em volumes iguais.

19 Em tudo isto suppomos, que os dous corpos, que se compáraõ, estaõ na mesma latitude, ou ao menos no mesmo parallelo. Se a massa M estivesse no pólo, e m no equador, seria necessario fazer algumas mudanças nos resultados precedentes, reflectindo que a força centrifuga, que nasce da rotaçaõ do globo terrestre, faz os corpos $\frac{1}{288}$ menos pezados no equador do que nos pólos; e conseguintemente naõ será $M : m :: P : p$, mas $M : m :: P : p + \frac{p}{288}$ proximamente.

Do mesmo modo sendo D, d as densidades das massas M, m, e G, g as suas gravidades especificas tomadas huma no pólo e a outra no equador, isto he, os pezos respectivos de volumes iguais nos ditos lugares, teremos $D : d :: G : g + \frac{g}{288}$.

20 Daqui se entenderá a cautela, que deve haver em naõ confundir a inercia, isto he, a resistencia que os corpos oppoem á sua mudança de estado, ou seja de quietaçaõ, ou de movimento, com a força da gravidade. A força de inercia he huma propriedade essencial á materia, cujo effeito se naõ póde suspender, nem alterar por meio algum; e a força da gravidade póde variar como temos visto, e ainda destruir-se inteiramente o seu effeito. He verdade, que ambas saõ proporcionais ás massas; mas a proporcionalidade da inercia com a massa he necessariamente verdadeira, e independente do lugar onde os corpos estaõ situados, e a proporcionalidade do pezo com a massa he de huma verdade puramente experimental, que póde naõ ser a mesma em differentes lugares, e circunstancias.

Tais saõ as noções gerais, com que os nossos Leitores se devem familiarizar. Naõ referimos aqui muitas proposições gerais sobre o equilibrio, e movimento, das quais havemos de usar; porque as tomaremos da Mechanica, ou as demonstraremos em seu lugar, se for necessario.

PRI-

PRIMEIRA PARTE,
OU
ELEMENTOS
DE
HYDROSTATICA.

21 A *Hydrostatica*, como já dissemos, tem por objecto as leis do equilibrio dos fluidos. Este equilibrio he produzido pela mutua opposiçaõ, e destruiçaõ das forças, que obraõ ou sobre as partes mesmas dos fluidos, ou sobre as paredes dos vasos em que se contém, ou sobre os corpos solidos mergulhados nelles. O exame de todos estes casos será a materia desta Primeira Parte; e supporemos, que os fluidos saõ homogeneos, isto he, que saõ compostos, em toda a sua extensaõ, de partes elementares semelhantes, e igualmente pezadas.

22 Os fluidos, em geral, podem dividir-se em duas especies. A primeira he dos fluidos incompressiveis, como a agua, o vinho &c; e a segunda dos elasticos, como o ar, a chama, o vapor da agua &c.

Sem examinar, se as experiencias pelas quais se estabelece a incompressibilidade, ou elasticidade dos fluidos, saõ exactas ou naõ, observaremos que a natureza naõ poem limites perfeitamente determinados entre as differentes classes dos corpos. Ella naõ faz corpos perfeitamente duros, nem perfeitamente elasticos; mas he muito vantajoso estabelecer estas distinções, para descobrir com mais facilidade e clareza as propriedades, que dependem da incompressibilidade e elasticidade, as quais na pratica se applicaráõ, como approximações mais ou menos exactas, conforme os corpos se chegarem mais ou menos para qualquer destas classes.

PRIN-

PRINCIPIO FUNDAMENTAL

Do Equilibrio dos Fluidos.

23 *Quando huma maſſa fluida eſtá em equilibrio, quaiſquer que ſejaõ as forças que ſollicitaõ as moleculas de que ella ſe compoem, cada particula recebe huma preſſaõ igual de todas as partes.*

Porque ſendo todas as particulas independentes humas das outras, e perfeitamente moveis em todo o ſentido, eſtá claro, que ſe qualquer dellas foſſe menos comprimida de huma parte que da outra, deveria neceſſariamente moverſe para a parte da menor preſſaõ, e naõ haveria equilibrio no ſyſtema, contra a ſuppoſiçaõ.

Eſte principio he por outra parte demonſtrado pela experiencia; porque ſe em igual profundidade de hum fluido incluido em hum vaſo, ſe fizer nas paredes huma abertura, á qual ſe applique huma tampa que embarace a ſahida do fluido, a tampa ſerá impellida por elle com a meſma força, quer ſeja horizontal a abertura, quer inclinada de qualquer maneira ao horizonte.

Attendida a adherencia reciproca, ou tenacidade das particulas, póde ſucceder phyſicamente, que ſubſiſta o equilibrio, ainda que algumas dellas naõ ſejaõ carregadas igualmente de todas as partes. Mas eſta deſigualdade de preſſaõ naõ póde ſer, ſenaõ muito pequena; e o principio he rigoroſamente verdadeiro nos fluidos perfeitos, como nós os conſideramos aqui.

24 Reciprocamente eſtá claro, que *tendo cada particula igual preſſaõ de todas as partes, todo o ſyſtema deve eſtar em equilibrio.*

As leis particulares do equilibrio dos fluidos tanto incompreſſiveis, como elaſticos, dependem deſte principio geral, que acabamos de expôr. Podiamos deduzillas juntamente; mas para maior clareza conſideraremos primeiro o equilibrio dos fluidos incompreſſiveis, e depois o dos elaſticos.

CAPI-

CAPITULO I.

Do Equilibrio dos fluidos incompressiveis.

25 HE escusado definir em fórma os fluidos incompressiveis. Pela mesma palavra se entende, que huma quantidade determinada de hum fluido desta especie occupa sempre o mesmo espaço, naõ sendo susceptivel de contracçaõ, nem de expansaõ.

26 Os vasos, em que os licores se contém, podem ser solidos, ou flexiveis, isto he, podem ser tais que constantemente conservem a mesma figura pela firmeza e resistencia das paredes, ou indifferentes para tomarem a figura, que convem ao equilibrio das forças, que obraõ sobre o fluido. Quando dissermos *vaso*, sempre entenderemos solido, se expressamente naõ ajuntarmos *flexivel*, ou se pelo sentido do discurso naõ constar que tratamos de hum vaso dessa condiçaõ.

27 Se a todos os elementos iguais A, B, C &c (Fig. 1.) da superficie de huma massa fluida naõ pezada se applicarem perpendicularmente potencias iguais P, Q, R &c, he evidente que estas ficaráõ em equilibrio. Porque communicando todas livremente a sua acçaõ, e da mesma maneira a huma massa incompressivel, cujas partes saõ perfeitamente moveis para todas as partes, naõ ha rasaõ para que huma vença a outra.

28 O mesmo deve succeder, sendo os elementos A, B, C &c desiguais, mas respectivamente proporcionais ás potencias P, Q, R &c nelles applicadas. Porque sendo qualquer dos elementos B, C &c duplo, triplo, ou geralmente hum multiplo n do elemento A, poderemos considerar qualquer das potencias respectivas Q, R &c, como composta de duas, tres, ou geralmente de n potencias iguais a P, e applicadas cada huma a cada huma das partes dos elementos B, C &c iguais a A, e seremos reduzidos ao caso precedente.

29 Como a perfeita mobilidade das particulas communica livremente a acçaõ das potencias P, Q, R &c a todos os pontos da massa, está claro que huma molecula m, em qualquer lugar que esteja, sentirá a mesma pressaõ, como se estivesse na superficie, fazendo parte do elemento

to A. Confiderando-a pois tambem como huma pequena maſſa fluida, deve ter huma preſſaõ igual e perpendicular a cada hum dos pontos da ſua ſuperficie, para eſtar em equilibrio. Aſſim imaginando a ſua ſuperficie dividida em partes iguais, e ſuppondo que cada huma dellas he para o elemento A como q para r, ſerá a preſſaõ de qualquer deſtas partes repreſentada por $\frac{q}{r}P$.

30 Supponhamos qualquer licor naõ pezado, e metido em hum vaſo $ABCD$ fechado de todas as partes (Fig. 2.). Se lhe fizermos qualquer abertura X, e nella applicarmos a potencia P, eſtá claro que concebendo as paredes do vaſo divididas em certo numero de elementos, cada hum dos quais tenha com a abertura X huma raſaõ dada, a preſſaõ de cada hum eſtará com a potencia P na meſma raſaõ; porque as paredes do vaſo com a ſua reſiſtencia fazem as vezes das potencias Q, R, S &c (Fig. 1.).

31 Do meſmo modo, ſe no vaſo $ABCD$ (Fig. 3.) fizermos qualquer numero de aberturas X, M, N, ás quais ſe appliquem as potencias P, Q, R, de maneira que ſeja $P:Q:R::X:M:N$, eſtas potencias eſtaráõ em equilibrio (n. 28.). E ſe for $\frac{q}{r}$ a raſaõ de huma parte da ſuperficie de huma molecula m (Fig. 2, e 3.) comparada com a abertura X, a preſſaõ deſta parte ſerá repreſentada por $\frac{q}{r}P$ (n. 29.).

32 Examinemos agora, que ſuperficie deve tomar hum licor em equilibrio no vaſo $AMNE$ (Fig. 4.), ſendo deixado á acçaõ livre da gravidade. Supponhamos por hum momento, que he a ſuperficie curva $ABDE$, e tomemos nella qualquer particula B. Reſolvendo a ſua gravidade Bf em outras duas forças Bt, Bg na direcçaõ dos elementos contiguos da curva, ſerá neceſſario para haver equilibrio, que eſtas forças Bt, Bg ſejaõ iguais ás forças, que as particulas veſinhas exercitaõ contra a particula B, pelas direcções oppoſtas tB, gB. Por outra parte, naõ póde a particula B eſtar em equilibrio, ſem receber huma preſſaõ igual de todos os lados. Logo as forças Bt, Bg devem ſer iguais, e conſeguintemente o angulo tBg formado pelos

pelos dous elementos Bt, Bg da curva deve ser dividido em partes iguais pela direcçaõ da gravidade. E como isto deve ter lugar em todos os pontos da superficie, he necessario que esta seja horizontal, ou perpendicular á direcçaõ da gravidade. E em geral, *quaisquer que sejaõ as forças que sollicitaõ as partes de hum fluido, sempre a superficie delle deverá cortar perpendicularmente as direcções das forças, que immediatamente actuaõ sobre ella.*

33 Esta proposiçaõ he igualmente verdadeira, ainda que o licor se contenha em hum vaso flexivel; porque assim que elle houver tomado a figura, que requer o equilibrio das forças applicadas ao fluido, naõ ha cousa que embarace o considerallo como solido, e terá lugar a mesma demonstraçaõ.

34 Como as direcções da gravidade saõ sensivelmente parallelas, sendo tomadas em pouca distancia, está claro que a superficie de hum licor em hum vaso, em hum tanque &c, póde sem erro algum sensivel tomar-se como huma superficie plana. Se for porém de consideravel extensaõ, deverá tomar-se como parte de huma superficie esferica, ou esferoidica, conforme se considerar o globo terrestre como huma esfera, ou como hum esferoide.

35 Formando pois a superficie AE hum plano horizontal (Fig. 5.), supponhamos que qualquer porçaõ BCD do fluido se congela, ou endurece, sem mudar de lugar nem de volume. He evidente, que com isso naõ se altéra em nada o equilibrio do resto do fluido; e por conseguinte, que as superficies parciais AB, DE ficaráõ sempre no mesmo plano horizontal. Logo, se em hum tubo encurvado KMO (Fig. 6.) se lançar qualquer licor, depois de se pôr em equilibrio estaraõ sempre de livel as superficies AB, DE; porque naõ ha cousa que embarace o considerar o licor nelle contido, como a porçaõ do fluido $ABCDEM$ (Fig. 5.). E em geral, *Se dous quaisquer vasos se communicarem entre si de qualquer maneira, os licores da mesma especie, que nelles estiverem, se poraõ sempre ao livel.*

Daqui se entenderá a rasaõ, porque a agua dos poços, que se abrem ás margens de hum rio se poem ao livel delle; porque a agua filtra pela terra, e estabelece canais subterraneos de communicaçaõ entre o rio, e os poços.

36 He

36 He de advertir, que a propoſiçaõ precedente tem huma excepçaõ no eſtado phyſico dos fluidos. Quando hum de dous tubos communicantes tem hum diametro muito pequeno, ſendo o do outro muito mais conſideravel, naõ ſe poem os licores de livel. Mas a agua, o vinho, o azeite, e a maior parte delles ſobem a maior altura no tubo capillar do que no outro, e o azougue pelo contrario fica mais a baixo.

Eſte phenomeno ſingular tem dado muito que fazer aos Phyſicos; mas nenhum dos ſyſtemas, que ſe tem imaginado para dar a raſaõ, ſatisfaz perfeitamente. Naõ me detenho pois em os expôr, ſendo principalmente o meu objecto dar a Theorica Mathematica do equilibrio dos fluidos conſiderados no eſtado de fluideza perfeita, preſcindindo de todas as cauſas phyſicas e exteriores, que podem alterar as conſequencias, que reſultaõ deſta hypotheſe.

37 Sendo igualmente comprimida de todas as partes huma particula *m* (Fig. 7.) de hum fluido em equilibrio, ſujeito unicamente á acçaõ da gravidade, ſupponhamos que a maſſa inteira do fluido, ſe torna ſolida, exceptuando ſomente a columna *o m*. He manifeſto, que a particula *m* ficará ſempre no meſmo eſtado de compreſſaõ. Mas quando he ſomente fluida a columna *o m*, he evidente que a particula *m* ſuſtenta o pezo inteiro della; logo a medida da preſſaõ, que padece a meſma particula em todos os caſos, he o pezo abſoluto da columna *o m* que verticalmente inſiſte ſobre ella.

38 Imaginemos, que huma curva qualquer *FmQSH* (Fig. 8.) toca a particula *m* da banda da parede *AM*, e que ſe tornaõ ſolidas as porções do fluido *AFmQm*, *EHSN*, ſem mudar de lugar nem de volume; igualmente he manifeſto, que a particula *m* ficará no meſmo eſtado de compreſſaõ. Logo em qualquer vaſo *FQSH* (Fig. 9.) qualquer ponto *m* das ſuas paredes he comprimido pelo fluido com huma força igual ao pezo abſoluto do pequeno fio vertical *o m* terminado na ſuperficie do fluido, produzida ſe for neceſſario; porque póde o licor do vaſo *FQSH* (Fig. 9.) conſiderar-ſe como a porçaõ fluida *FQSH* (Fig. 8.), ſuppondo que as porções *AFmQM*, *EHSN* ambas ſe tornáraõ ſolidas.

39 Donde ſe ſegue, que a preſſaõ de qualquer parte infinitamente pequena *my* das paredes do vaſo *FGSH* (Fig.

(Fig. 9.) he na rasaõ composta do numero das moleculas que a cobrem e da altura vertical om, que póde suppor-se a mesma para todos os pontos do elemento my. Assim designando por p o pezo especifico do fluido, será a pressaõ do elemento my representada por $p \cdot om \cdot my$ (n. 17.).

40 Supponha-se agora (Fig. 10.) a superficie finita $fnr = S$, e qualquer altura $ft = y$; e teremos por formula da pressaõ $p\int y\, dS$. Porém, sendo G o centro de gravidade da superficie fr, consta da Statica que $\frac{\int y\, dS}{S} = GO$. Logo $p\int y\, dS = p \cdot S \cdot GO$. Logo *a pressaõ que padece qualquer parte da superficie de hum vaso em virtude da acçaõ de qualquer licor em equilibrio, e sujeito unicamente á força da gravidade, he igual ao pezo absoluto de huma colunna do mesmo fluido, que tenha por base a mesma parte do vaso convertida em superficie plana, se for necessario, e por altura a vertical conduzida do seu centro de gravidade para a superficie horizontal do fluido.*

41 Daqui se infere, que *as pressoens das bases planas de quaesquer vasos, cheios de hum mesmo liquido, saõ entre si na rasaõ composta das ditas bases e das alturas do liquido.* E por conseguinte, se quaisquer vasos (Fig. 11. 12. e 13.) tiverem os fundos iguais, e sustentarem colunnas igualmente altas do mesmo fluido, receberáõ nellas pressoens iguais.

42 Assim póde succeder, que a pressaõ do fundo de hum vaso, e o pezo do fluido nelle contido sejaõ muito differentes. No vaso cylindrico da Fig. 11, a pressaõ do fundo he igual ao pezo total do liquido; mas no vaso conico da Fig. 12, he menor; e no da Fig. 13, maior.

Quando se trata de levantar verticalmente hum vaso cheio de agua, ou de o sustentar em hum plano inclinado, naõ deve attender-se á pressaõ que o fluido faz contra as paredes delle, mas ao pezo total do vaso e do fluido nelle contido, como se tudo fosse huma massa solida. Por muito facil que seja esta reflexaõ, julguei necessario fazella aqui, porque o Autor de huma Obra muito espalhada se enganou grosseiramente neste ponto.

43 Seja por exemplo, AM a *adufa* ou *comporta* rectangular e vertical de hum *caneiro*, ou de hum *dique* (Fig.

(Fig. 14.), a qual ſuſtenta a preſſaõ da maſſa de aguas eſtagnadas AMO, cuja extenſaõ horizontal MO póde ſer grande ou pequena como ſe quizer, porque iſſo he abſolutamente indifferente em quanto ao effeito da preſſaõ. Seja G o meio, ou o centro de gravidade do rectangulo, e A o ſeu lado horizontal; e teremos a quantidade da preſſaõ que elle ſuſtenta $p.A.AM.GM = p.A.\frac{AM^2}{2}$.

Se $A = 3$ pés, e $AM = 12$ pés, teremos $\frac{1}{2}A.AM^2 = 216$ pés cubicos; e porque hum pé cubico de agua doce péza 70 libras proximamente, ſerá a preſſaõ, que buſcamos, $\frac{1}{2}p.A.AM^2 = 15120$ libras.

Com a meſma facilidade ſe determinaria a preſſaõ, no caſo de naõ ſer a adufa vertical, ou de ter qualquer outra figura que naõ foſſe a rectangular.

44 Se ſobre a ſuperficie horizontal AE de hum licor $AMNE$ (Fig. 15.), ſe puzer huma tampa movediça, carregada no meio com hum pezo Q, e ſe em qualquer lugar das paredes do vaſo ſe fizer huma abertura fr, á qual ſe applique huma pequena tampa, ou hum embolo, para ter maõ no fluido; eſtá claro 1°, que a preſſaõ do pezo Q ſe póde conſiderar como dividida em huma infinidade de potencias, que comprimem perpendicularmente a ſuperficie AE, e diſtribuem a ſua acçaõ a todos os pontos do fluido, donde reſultará na ſuperficie fr huma preſſaõ repreſentada por $\frac{fr}{AE}Q$ (n.28.). 2°, que em virtude da gravidade do fluido a ſuperficie fr ſerá além diſſo comprimida perpendicularmente com huma força igual ao pezo de huma colunna do meſmo fluido, que tenha fr por baſe, e por altura a diſtancia GE do centro de gravidade de fr até o livel do fluido (n. 40.). Aſſim deſignando eſta força por R, deverá ſer a potencia applicada ao embolo para ter maõ no licor $P = \frac{fr}{AE}Q + R$.

45 Supponhamos hum vaſo fechado de todas as partes $AMNE$ (Fig. 16.), cheio de hum licor pezado. Eſtando

do a tampa ſuperior horizontal, ſe nella fizermos as aberturas fr, gt, e lhes applicarmos os pezos P, Q, de maneira que ſeja $P:Q::fr:gt$, eſtes dous pezos eſtaraõ em equilibrio (n. 31.); porque obraõ do meſmo modo tanto na ſuperficie como no interior do fluido, ſem haver embaraço algum da parte da gravidade propria delle.

46 Agora em lugar de applicarmos os pezos P, Q ás aberturas fr, gt, ſupponhamos que eſtas ſervem de baſes a duas colunnas $fxyr$, $gzut$ de licores differentes (Fig. 17.), cujas gravidades eſpecificas ſejaõ P, p. Levantando dos centros de gravidade das baſes para o livel dos licores as verticais GO, TS, ſerá a preſſaõ do licor $fxyr$ ſobre a baſe fr repreſentada por $P.fr.GO$, e a do licor $gzut$ ſobre a baſe gt por $p.gt.TS$. Logo para haver equilibrio deverá ſer $P.fr.GO:p.gt.TS::fr:gt$, e conſeguintemente $P.GO=p.TS$. Donde concluiremos, que as *alturas de quaiſquer licores equilibrados em vaſos communicantes ſaõ na raſaõ inverſa das ſuas gravidades eſpecificas.*

Por exemplo, ſe a colunna $fxyr$ for de agua, e $gzut$ de mercurio, ſerá $GO:TS::14:1$. O mercurio he compreſſivel, e dilatavel pelo frio, e calor; mas aqui preſcindimos deſta qualidade, e tomamos a ſua gravidade eſpecifica que correſponde ao ar temperado, e que tem o meio entre as outras.

47 Para determinarmos agora as condiçoens gerais, que devem ter lugar, para que hum fluido ſe ponha em equilibrio pelo proprio pezo em hum vaſo flexivel, pezado, e inextenſivel, conſideremos huma ſecçaõ vertical $AMNOPB$ da figura, que o vaſo ha de tomar (Fig. 18.), e ſejaõ MN, NO, OP tres elementos da curva conſecutivos, e iguais entre ſi. Eſtando o fluido em equilibrio, e havendo tomado o vaſo a figura competente, podemos ſuppor os pontos M, P como fixos, e preſcindindo do reſto da curva conſiderar $MNOP$ como hum polygono funicular atado aos dous pontos fixos M, P, ſendo applicadas a cada hum dos angulos N, O duas forças, huma vertical NS, ou Os, que repreſenta o pezo do elemento MN, ou ON, e a outra NR, ou Or, que repreſenta a preſſaõ do fluido, a qual como he ſempre perpendicular á curva deve dividir em duas partes iguais o angulo MNO, ou NOP formado por dous elementos contiguos. Das duas forças

NS,

NS, NR applicadas ao angulo N resulta a força unica NQ, e combinando a força NQ com a tensaõ NV do cordaõ MN deverá resultar huma força NT na direcçaõ de ON. Do mesmo modo resultará das forças applicadas ao angulo O huma força unica Ot na direcçaõ de NO.

Isto posto, he evidente, que para haver equilibrio he necessario que as forças NT, Ot directamente oppostas, sejaõ iguaes. Assim naõ falta mais que achar as expressoens dellas, e igualallas entre si.

Tirando pois do ponto Q para NS a perpendicular QE, teremos $EQ = SQ\,sen\,ESQ = NR\,sen\,RNS$, $SE = NR.\cos RNS$, $NE = NS + NR.\cos RNS$, $sen\,ENQ = \frac{EQ}{NQ} = \frac{NR.\,sen\,RNS}{NQ}$, $\cos ENQ = \frac{NE}{NQ} = \frac{NS + NR.\cos RNS}{NQ}$, $sen\,TQN = sen\,(MNG + ENQ) = sen\,MNG.\cos ENQ + \cos MNG.\,sen\,ENQ = \frac{sen\,MNG\,(NS + NR.\cos RNS)}{NQ} + \frac{\cos MNG.NR.\,sen\,RNS}{NQ}$. Mas $TN = \frac{NQ.\,sen\,TQN}{sen\,MNT}$; logo pondo nesta equaçaõ o valor de $sen\,TQN$, teremos $TN = \frac{sen\,MNG\,(NS + NR.\cos RNS)}{sen\,MNT} + \frac{\cos MNG.NR.\,sen\,RNS}{sen\,MNT}$ $= \frac{NS.\,sen\,MNG + NR\,sen\,(MNG + RNS)}{sen\,MNT} =$ $\frac{NS.\,sen\,MNG + NR}{sen\,MNT}$, por ser $MNG + RNS = MNZ$ = a hum angulo recto. Do mesmo modo acharemos $Ot = \frac{Os.\,sen\,POI + Or}{sen\,POt}$. Logo teremos por condiçaõ do equilibrio a equaçaõ seguinte

$$\frac{NS.\,sen\,MNG + NR}{sen\,MNT} = \frac{Os.\,sen\,POI + Or}{sen\,POt};$$

48 Tomando pois o eixo horizontal AB, e conduzindo as ordenadas MH, NH', OH'', seja $AH = x$, AH' $= x'$

$= x'$, $AH'' = x''$, $HM = y$, $H'N = y'$, $H''O = y''$, o elemento $MN = ds$ (que he constante pela construcçaõ), o raio osculador no ponto $N = R$, e no ponto $O = R'$. Seja tambem a area da secçaõ perpendicular á corda considerada como cylindrica $= a^2$, a largura da superficie na qual se exercita a pressaõ do fluido $= b$, e a força da gravidade $= g$. Assim teremos $NR = g.by'ds$, $NS = g.a^2 ds$, $Or = g.by''ds$, $Os = g.a^2 ds$, $sen\, MNG = \frac{dx}{ds}$, $sen\, MNT = \frac{ds}{R}$, $sen\, POI = \frac{dx''}{ds}$, $sen\, POt = \frac{ds}{R'}$; e substituindo estes valores, a equaçaõ precedente se reduzirá á fórma seguinte

$$\frac{R(gby'ds + ga^2 dx)}{ds} = \frac{R'(gby''ds + ga^2 dx'')}{ds}:$$

Porém $dx'' = d(x' + dx') = d(x + 2dx + ddx) = dx + 2ddx + d^3x$, $y' = y + dy$, $y'' = y' + dy' = y + 2dy + ddy$, $R' = R + dR$. Logo omittindo os termos que se destroem, e desprezando os infinitamente pequenos da terceira ordem, teremos $2a^2 Rddx + a^2 dRdx + bRdyds + bydRds = 0$, ou $a^2 Rddx + a^2 dRdx + bRdyds + bydRds = -a^2 Rddx$, ou (metendo no segundo membro em lugar de R o seu valor $\frac{ds\,dy}{ddx}$), $a^2 Rddx + a^2 dRdx + bRdyds + bydRds = -a^2 dsdy$, cujo integral he $a^2 Rdx + byRds = Ads - a^2 yds$. Agora eliminando R, teremos $a^2 dxdyds + a^2 ydsddx = Adsddx - bydyds^2$, cujo integral he $a^2 ydxds = Bds^2 + Adxds - \frac{1}{2} by^2 ds^2$, donde finalmente se tira a equaçaõ differencial da curva

$$dx = \frac{(2B - by^2)dy}{\sqrt{[(2a^2 y - 2A)^2 - (2B - by^2)^2]}}.$$

Esta equaçaõ se integra em geral pelas quadraturas, e a integraçaõ introduzirá huma terceira constante C. Para a determinaçaõ dellas observaremos: 1°, que $y = 0$ dá, ou póde sempre dar $x = 0$, porque podemos suppor a origem da curva onde quizermos. 2°, que os pontos extremos

tremos A e B saõ dados de posiçaõ. 3°, que o comprimento da corda AMB he dado, ou que a curva faz em A com o eixo AB hum angulo dado, ou que satisfaz a outra qualquer condiçaõ equivalente.

49 Supponhamos que $A = o$, e $B = o$. Neste caso acharemos $x = C \pm \sqrt{\left(\frac{4a^4}{b^2} - yy\right)}$, equaçaõ que pertence ao circulo.

Sendo $a^2 = o$, ou suppondo que a curva AMB naõ tem pezo algum, será $x = C + \int \frac{(B - y^2)\,dy}{\sqrt{[4A^2 - (B - y^2)^2]}}$, que he a equaçaõ da *Lintearia* commua.

E sendo $b = o$, ou suppondo que o liquido naõ he pezado, será $x = C + \int \frac{B\,dy}{\sqrt{[(y - A)^2 - B^2]}}$, que he a equaçaõ da *Catenaria.*

50 Considerando agora huma secçaõ horizontal do vaso flexivel (Fig. 19.), he evidente que as forças NS, Os saõ nullas (Fig. 18.), e que y', y'' ou as alturas do fluido saõ todas iguais. Assim teremos $R' = R$, ou $dR = o$, e conseguintemente a figura de qualquer curva horizontal, comprimida lateralmente por hum fluido será sempre circular. Donde concluiremos, que enchendo-se de licor hum vaso prismatico vertical, cujas paredes sejaõ perfeitamente flexiveis, deverá tomar a figura de hum cylindro recto.

51 Na mesma secçaõ horizontal (Fig. 19.), está claro que a força NT exprime a tensaõ do elemento NO, e NR a pressaõ do fluido. Porém $NT = gby'R$, $NR = gby'ds$, e $\int NR = gby's$; logo $\int NR : NT :: s : R$, isto he, será a pressaõ total que o fluido exercita contra a circumferencia $AMNOP$ para a tensaõ della em qualquer dos seus pontos, como a mesma circumferencia para o raio CN.

52 Sejaõ $ABCD$, $abcd$ (Fig. 20. e 21.) dous cylindros rectos, ou inclinados, os quais porém tenhaõ as bases horizontais, cheios de dous licores differentes, cujas gravidades especificas sejaõ P, p, e as alturas dos licores AB, ab. As pressoens, que os fluidos faraõ contra as circumferencias das bases $BMNC$, $bmnc$ seraõ repre-

presentadas por $P.AB.BMNC$, e $p.ab.bmnc$ (n. 37). Logo, sendo F, f as tensoens das duas circumferencias, teremos $P.AB.BMNC : F :: BMNC : BH$, e $F = P.AB.BH$. Do mesmo modo no outro cylindro acharemos $f = p.ab.bb$; logo será $F : f :: P.AB.BH : p.ab.bb$, isto he, *as tensoens das duas circumferencias seraõ entre si na rasaõ composta das alturas dos licores, das suas gravidades especificas, e dos raios das mesmas circumferencias.*

53 Supponde que as duas curvas $BSERKM$, $bserkm$ (Fig. 22. e 23.) saõ os aneis elementares dos dous cylindros, imaginemos que elles se compoem de huma infinidade de filetes circulares $XYVZ$, $xyvz$. He evidente que as resistencias, que os tubos oppoem á ruptura, segundo as espessuras BS, bs, saõ na rasaõ composta do numero dos filetes, e da tenacidade da materia de que elles saõ formados. Assim chamando as resistencias R, r, as espessuras E, e, as tenacidades T, t, teremos $R : r :: ET : et$. Porém para haver equilibrio, devem as resistencias ser iguais ás forças F, f; logo, representando por H, h as alturas dos licores, e por D, d os diametros das bases dos dous cylindros, teremos $ET : et :: \frac{P.HD}{2} : \frac{p.hd}{2}$, e

conseguintemente $E : e :: \frac{P.HD}{T} : \frac{p.hd}{t}$, isto he, *seraõ as espessuras dos cylindros na rasaõ composta da directa das gravidades especificas dos licores, das suas alturas, dos diametros dos cylindros, e da inversa das tenacidades das materias de que forem feitos.*

54 Daqui se vê, que conhecendo as tenacidades das differentes materias, de que os tubos se fazem, e sabendo por huma experiencia immediata a espessura que deve ter hum tubo dado para resistir ao pezo de hum fluido dado, por huma simples proporçaõ se póde determinar a espessura de qualquer outro tubo. Ha muitos meios de examinar as tenacidades de qualquer materia. O mais simples he buscar o pezo que basta para quebrar hum fio dessa materia de grossura dada. M. Mariotte fez sobre este ponto algumas experiencias, que se podem ver no seu *Tratado do movimento das aguas.*

Exemplo I. *Determinar a espessura de hum tubo de chum-*

bo de 6 pollegadas de diametro, que ha de sustentar o esforço de huma columna de agoa de 100 pés de altura.

Conforme huma experiencia de *M.* Parent, hum tubo de chumbo de 12 pollegadas de diametro deve ter 6 linhas de espessura para sustentar verticalmente huma colunna de agua de 60 pés de altura, sem arrebentar. Assim chamando x a espessura procurada, teremos $60.12 : 100.6 :: 6^{\text{linh.}} : x = 5$ linhas.

Exemplo II. *Determinar a espessura, que deve ter hum tubo de cobre de 4 pollegadas de diametro, para sustentar huma columna de mercurio de 30 pés de altura.*

A tenacidade do chumbo he para a do cobre como 1 para 28 proximamente, e a gravidade especifica da agua para a do mercurio como 1 para 14. Assim, continuando a servirnos da experiencia de M. Parent, e chamando x a espessura procurada, teremos $\frac{1.12.60}{1} : \frac{14.4.30}{28} :: 6^{\text{linh.}} : x$

$= \frac{1}{2}$ linha.

Applicaçaõ dos principios do equilibrio dos fluidos á determinaçaõ da figura da Terra.

55 Até agora considerámos, que os fluidos incompressiveis eraõ por toda a parte da mesma densidade, e que estavaõ situados na superficie da terra, onde a gravidade se póde tomar como huma força constante, que obra por direcçoens sensivelmente parallelas entre si. Mas ha hum ramo de Hydrostatica muito amplo e importante, que tem por objecto a figura da terra, no qual se devem considerar as leis do equilibrio dos fluidos em hum ponto de vista mais geral. A gravidade, que obra sobre as partes de hum fluido, póde variar de quantidade, e de direcçaõ; e o fluido, posto que incompressivel, póde naõ ter em toda a parte a mesma densidade.

56 Os primeiros Geometras, que pela theorica procuráraõ determinar a figura da terra, considerando a extensaõ immensa dos mares, a sua profundidade e communicaçaõ universal, a pouca elevaçaõ das mais altas montanhas acima do livel do mar, em comparaçaõ do raio terrestre &c, natu-

naturalmente foraõ conduzidos a penſar, que a terra na ſua origem foi huma maſſa fluida, que depois ſe endureceu em parte, e que conſeguintemente devia tomar a figura, que requer o equilibrio dos fluidos. Do meſmo modo ſe diſcorreu a reſpeito dos outros planetas, e o problema geral da figura dos aſtros ſe reduzio a eſte: *Dada a lei da gravidade, que obra ſobre as partes de hum planeta fluido, achar a figura que elle deve tomar, para ſe pôr em equilibrio.*

57 Para o reſolver, M. Huyghens empregou o principio acima eſtabelecido e demonſtrado, que *eſtando huma maſſa em equilibrio, a ſua ſuperficie deve ſer por toda a parte perpendicular á direcçaõ da gravidade.* Porém Newton ſervio-ſe deſte outro principio, que *eſtando hum fluido em equilibrio, duas columnas quaiſquer conduzidas da ſuperficie ao centro fazem equilibrio entre ſi, independentemente do reſto da maſſa.* Eſtes principios ſaõ ambos igualmente verdadeiros; mas o primeiro eſtabelece o equilibrio ſómente na ſuperficie, e o ſegundo no interior da maſſa. Aſſim naõ baſtaõ ſeparadamente, para determinar a figura de hum planeta.

58 Procurando M. Bouguer por hum e outro (*Mem. de l'Acad.* 1734) a figura de hum meridiano terreſtre, e achando que em muitas hypotheſes de gravidade naõ davaõ a meſma curva, concluio que entaõ naõ havia equilibrio, e que hum planeta naõ podia tomar huma figura permanente, ſenaõ quando ambos os principios concordaſſem em dar huma meſma curva para o meridiano. Mas M. Clairaut demonſtra (*Fig. de la terre* p. 31) que ſe daõ caſos, em que ambos os principios concordaõ em dar a meſma curva, ſem haver equilibrio.

59 M. Maclaurin na ſua Obra *ſobre o fluxo e refluxo do mar*, que ganhou hum dos premios da Academia em 1740, tomou hum principio mais geral que o de Newton, o qual ſe deriva immediatamente da igualdade de preſſaõ dos fluidos, e vem a ſer, que *duas columnas conduzidas da ſuperficie para qualquer ponto do fluido fazem mutuamente equilibrio entre ſi.* Donde ſe ſegue em geral, como tem demonſtrado M. d'Alembert no ſeu *Enſayo ſobre a reſiſtencia dos fluidos*, que *eſtando huma maſſa fluida em equilibrio, qualquer canal curvilineo terminado de huma e outra parte na ſuperficie, ou tambem qualquer canal fechado, deve eſtar em equilibrio.*

60 Havendo M. Clairaut adoptado este principio no seu Tratado *da figura da terra*, em consequencia delle propoem o methodo seguinte, para se conhecer se o equilibrio he compativel com qualquer hypothese dada de gravidade.

Seja AQN (Fig. 24.) huma massa fluida em equilibrio, e OM hum canal fechado de qualquer figura. Tendo tomado hum eixo fixo CP, e conduzido a ordenada MP, todas as forças que sollicitaõ o ponto M se poderáõ reduzir sempre a duas, huma perpendicular, e outra parallela a CP. Supponhamos a primeira $= P$, a segunda $= Q$, $CP = x$, $PM = y$, e conduzindo mp infinitamente vezinha de MP, e mr perpendicular a MP, será facil de ver que a força P obra sobre o ponto M na direcçaõ do elemento Mm com hum esforço representado por $\frac{P.rM}{Mm}$, e conseguintemente a acçaõ sobre todos os pontos de Mm será $\frac{P.rM}{Mm} Mm = Pdy$. Do mesmo modo se achará, que a acçaõ da força Q sobre todos os pontos de Mm pela direcçaõ Mm he Qdx. Logo $Pdy + Qdx$ he a força total elementar, que obra sobre o elemento Mm, segundo a sua propria direcçaõ, e conseguintemente $\int(Pdy + Qdx)$ será o pezo do canal OM. E porque deve haver equilibrio, seja qual for a figura do canal, he necessario que o integral precedente se possa achar, sem conhecer a relaçaõ entre x e y; logo $Pdy + Qdx$ deve ser huma expressaõ differencial completa. *Assim*, concluio M. Clairaut, *quando a lei da gravidade for tal, que a expressaõ $Pdy + Qdx$ seja differencial completa, haverá necessariamente equilibrio no fluido.*

61 Mas nem esta condiçaõ he bastante, como M. d'Alembert tem mostrado no volume quinto dos seus *Opusculos Mathematicos*. Appliquemos o seu raciocinio a hum exemplo muito simples.

Seja OM hum canal circular descrito do centro C com o raio CO, e seja cada ponto M sollicitado por huma força Φ reciprocamente proporcional ao raio CM, pela direcçaõ MV perpendicular ao mesmo raio CM. Neste ca-

so

$$\text{ſo ſerá } P = \frac{CP}{CM}\varphi = \frac{CP}{CM^2} = \frac{x}{xx+yy}, \text{ e } Q = \frac{y}{xx+yy}.$$

Por conſeguinte ſerá $\frac{y\,dx - x\,dy}{xx+yy}$ o pezo elementar de OM

(pomos o final $-$, porque creſcendo x diminue y). Mas eſta differencial he completa, porque he a de hum angulo, cuja tangente he $\frac{x}{y}$; logo deveria haver equilibrio. He porém evidente, que as forças applicadas a todos os pontos M devem produzir huma corrente perpetua no canal; logo naõ he ſufficiente o theorema de M. Clairaut.

62 Ha muitos outros caſos ſemelhantes ao que acabamos de examinar. Donde concluiremos em geral, que para haver equilibrio em huma maſſa fluida he neceſſario naõ ſómente que $P\,dy + Q\,dx$ ſeja huma expreſſaõ differencial completa, mas tambem que chamando dz o elemento de qualquer canal fechado, e P' a força que obra na direcçaõ delle, ſeja $\int P'\,dz = 0$ quando o angulo que correſponde a z, e que tem o vertice dentro do canal, for de $360°$. He logo neceſſario, que o integral de $P\,dy + Q\,dx$ naõ dependa da rectificaçaõ, nem da quadratura de huma curva oval; porque de outra ſorte poderia ſucceder, que em qualquer canal fechado naõ houveſſe equilibrio, mas huma corrente perpetua. Veja-ſe M. d'Alembert *Opuſc. Math. Tom. V. pag.* 12.

63 Applicando immediatamente o principio da igualdade de preſſaõ ao problema da figura dos aſtros, he facil de achar a figura, que deve tomar hum planeta, para ſe pôr em equilibrio, quando a lei da gravidade ſe dá directamente. Agora moſtraremos a applicaçaõ deſte principio a hum caſo, que comprehende muitos outros.

Seja $ABDE$ (Fig. 25.) huma maſſa fluida homogenea, cujas partes ſaõ attrahidas para o centro C por huma lei dada, e que além diſſo gira ao redor do eixo AD; de maneira, que cada particula M além da força da gravidade experimenta tambem a da força centrifuga, que he proporcional, como ſe ſabe, á diſtancia MP do ponto M ao eixo AD. Primeiramente vemos, que a ſuperficie $ABDE$ deve ſer em todos os pontos perpendicular á direcçaõ da reſultante da força central e da força centrifuga; reſultante, te, que faz neste caso o officio da gravidade. Depois imaginando que o planeta se compoem de huma infinidade de camadas de livel, como $KHQT$, vemos tambem que o fluido total estará em equilibrio, quando cada huma das camadas o estiver, e que para estar cada huma dellas em equilibrio he necessario, que seja igualmente comprimida em todos os seus pontos.

Supponhamos pois $CP = x$, $PM = y$, a força central $= \Phi$, funçaõ de x e y, e a pressaõ no ponto $M = p$, funçaõ tambem de x e y. Supponhamos mais, que em huma distancia dada a he a força centrifuga $= f$. Assim teremos $dp = M\,dx + N\,dy$, sendo M e N funçoens de x e y, tais que dp seja huma differencial completa, porque de outra sorte naõ haveria equilibrio. E considerando a porçaõ de fluido que está em M, como hum pequeno rectangulo $Mmrn$, cuja base $Mn = dx$, e a altura $Mm = dy$, está claro que $M\,dx$ exprime o excesso da pressaõ em cada ponto de nr sobre a pressaõ em cada ponto de Mm, e que $N\,dy$ he o excesso da pressaõ em cada ponto de mr sobre a pressaõ em cada ponto de Mn. Logo a pressaõ total do elemento $Mmrn$ na direcçaõ nM será $M\,dx\,.\,dy$, e na direcçaõ mM será $N\,dy\,.\,dx$.

Resolvamos a força central Φ em outras duas, huma dirigida por Mn, e a outra por Mm; e observando que a massa do elemento he $dx\,dy$, será a sua força motriz absoluta pela direcçaõ Mn representada por $-\dfrac{\Phi x}{\sqrt{(xx+yy)}}\,.\,dxdy$, e pela direcçaõ Mm por $-\left(\dfrac{\Phi y}{\sqrt{(xx+yy)}} - \dfrac{fy}{a}\right)dxdy$.

Mas, para haver equilibrio, he necessario que estas duas forças sejaõ iguais, cada huma a cada huma das pressoens correspondentes. Logo teremos $M = -\dfrac{\Phi x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, e $N = -\dfrac{\Phi y}{\sqrt{(xx+yy)}} + \dfrac{fy}{a}$. E conseguintemente $dp =$

$$-\frac{\Phi(xdx+ydy)}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{fydy}{a}, \text{ e } p = A + \frac{fyy}{2a} -$$

$\int\Phi$

$\int \frac{\varphi(xdx+ydy)}{\sqrt{(xx+yy)}}$; quantidade, que deve ſer conſtante em toda a extenſaõ de huma camada.

64 Para applicarmos eſta ſoluçaõ a hum exemplo, ſupponhamos que a força φ he proporcional á diſtancia do centro, e que na diſtancia dada a he $= F$. Teremos entaõ $\varphi = \frac{F\sqrt{(xx+yy)}}{a}$, e conſeguintemente $p = A + \frac{fyy}{2a} - \frac{F(xx+yy)}{2a} =$ conſt. Eſta equaçaõ dará huma linha recta, huma ellipſe, ou huma hyperbola, conforme a raſaõ que houver entre F e f. Examinemos o caſo de $F > f$.

He evidente, que na primeira camada $ABDE$, a preſſaõ deve ſer nulla. Aſſim ſuppondo $CP' = x$, $P'M' = y$, a natureza da curva $ABDE$ ſerá repreſentada pela equaçaõ $A - \frac{F(xx+yy)}{2a} + \frac{fyy}{2a} = 0$.

Seja $CB = a$, e reflectindo que $x = 0$ deve dar $y = a$, teremos $A = \frac{(F-f)a}{2}$; e ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ precedente, ſerá a equaçaõ da curva $ABDE$

$$yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{aa(F-f)}{F} - xx\right),$$

a qual he a de huma ellipſe, que tem a ametade do eixo $CB = a$, e a ametade do outro eixo conjugado $CD = a\sqrt{\left[\frac{F-f}{F}\right]}$.

Para achar a equaçaõ da curva, que forma qualquer camada interior $KHQT$, ſupponhamos $CH = b$, $CP = x$, $PM = y$, e ſerá a preſſaõ do fluido em H repreſentada por $\frac{(F-f)a}{2} - \frac{(F-f)bb}{2a}$, como he evidente. Donde teremos $p = C - \frac{F(xx+yy)}{2a} + \frac{fyy}{2a} = \frac{(F-f)a}{2} - \frac{(F-f)bb}{2a}$;

e

e determinando a conſtante C pela condiçaõ que $x = 0$ dê $y = b$, ſerá

$$yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{bb(F-f)}{F} - xx\right),$$

que he a equaçaõ de huma ellipſe ſemelhante á primeira $ABDE$.

65 Examinemos, ſe eſtas equações ſaõ applicaveis á figura da terra. Sendo f a força centrifuga de hum movel, que deſcreve a circumferencia C que tem o raio R, T o tempo da ſua revoluçaõ, g a força da gravidade, e t o tempo que gaſtaria hum grave em cahir da altura R, conſta da Mechanica que $f = \frac{C^2}{T^2 R}$, e $g = \frac{2R}{t^2}$; logo $\frac{f}{g} = \frac{C^2 t^2}{2 R^2 T^2} = \frac{2 c^2 t^2}{T^2}$, chamando c a raſaõ que tem a circumferencia com o diametro. Aſſim, ſuppondo o gráo terreſtre $= 57000$ toeſas, o eſpaço corrido por hum grave no primeiro ſegundo de tempo $= 15$ pés, e $T = 24^h$, acharemos $\frac{2c^2 t^2}{T^2} = \frac{1}{289}$ proximamente, e por conſeguinte ſerá $F = 289 f$. Sendo pois $yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{aa(F-f)}{F} - xx\right)$ a equaçaõ do meridiano terreſtre $ABDE$, teremos $CB : CD :: \sqrt{289} : \sqrt{288} :: 425 : 424$ proximamente. Mas eſta raſaõ naõ he a que reſulta das obſervações, e por iſſo concluiremos que o caſo propoſto he huma mera hypotheſe.

Veja-ſe ſobre toda eſta materia huma excellente Memoria de M. Euler, que tem por titulo *Principios geraes do eſtado de equilibrio dos fluidos* (Mem. de l' Acad. de Berlin. 1755.).

66 No ſyſtema Newtoniano, a lei da gravidade naõ he dada directamente, como havemos ſuppoſto nos artigos precedentes; mas todas as particulas da maſſa de hum planeta ſe attrahem mutuamente, e a attracçaõ de duas quaiſquer dellas he na raſaõ compoſta da ſoma das ſuas maſſas, e do quadrado inverſo das ſuas diſtancias. A reſultante de todas eſtas attracções, que experimenta qualquer particula, he a ſua gravidade. Bem ſe vê, quanto era difficil achar a figura, que deve tomar a maſſa inteira,

ta, para que todas eſtas attracções combinadas com a força centrifuga de cada ponto ſe ponhaõ em equilibrio. O meſmo Newton, conſiderando que a terra em virtude da ſua rotaçaõ deve ſer hum esferoide pouco differente de huma esfera, ſuppoz, ſem o demonſtrar, que na hypotheſe da homogeneidade do fluido a figura da terra era hum ellipſoide, e que o diametro do equador era para o eixo de rotaçaõ como 230 para 229; ſuppoſiçaõ, que M. Maclaurin na obra já citada moſtrou que era com effeito legitima, e alem diſſo levou muito avante eſta indagaçaõ.

67 Mas ainda faltava moſtrar directamente, que a figura elliptica he a unica, que admitte equilibrio. M. d'Alembert no ſeu Tratado *da cauſa geral dos ventos* ſatisfez a eſte ponto, moſtrando que ſe huma maſſa fluida, originalmente esferica, girar ao redor do ſeu eixo com huma força centrifuga muito pequena em comparaçaõ da gravidade, depois de haver feito as oſcillações determinadas pelo Autor, deve acabar tomando a forma de hum esferoide elliptico. E recentemente acaba de generalizar mais eſta indagaçaõ no tomo quinto dos ſeus Opuſculos, que ſe póde conſultar pag. 25. e ſeg.

68 A verdadeira raſaõ dos eixos da terra naõ he com tudo a de 230 para 229, dada pela hypotheſe da homogeneidade das partes no ſyſtema Newtoniano, mas a de 178 para 177 proximamente, conforme as obſervações feitas em França, na Laponia, e no Perú. Donde concluiremos, que a terra naõ he homogenea. Suppondo ſempre a attracçaõ univerſal e reciproca das partes, he facil de achar huma lei entre as denſidades, que ſatisfaça ás obſervações; mas eſta indagaçaõ naõ póde ſer proſeguida com a extenſaõ que requer nos limites de hum Tratado elementar. Póde recorrer-ſe ás obras, que temos citado.

CAPITULO II.

Do Equilibrio dos Fluidos Elaſticos.

69 SEm entrar no exame das conjecturas phyſicas ſobre a cauſa da virtude elaſtica, ſuppomos como hum facto, que certos corpos ſe reduzem a menor volume

lume, quando ſaõ comprimidos por huma força exterior; e que em ceſſando a compreſſaõ, ſe reſtituem ao primeiro eſtado por huma virtude chamada elaſtica, que nelles reſide, e que exercita a ſua acçaõ com a meſma força para todas as partes.

70 Os fluidos elaſticos eſtaõ ſujeitos ás meſmas leis geraìs do equilibrio dos fluidos incompreſſiveis, que ſe derivaõ da propriedade primordial, commua a todos os liquidos, que qualquer particula de huma maſſa fluida em equilibrio he igualmente comprimida de todas as partes.

71 Aſſim demonſtraremos do meſmo modo, que *ſe a todos os pontos da ſuperficie de hum fluido elaſtico naõ pezado ſe applicarem perpendicularmente potencias iguais, eſtas faraõ equilibrio entre ſi*; e que *a ſuperficie perfeitamente livre de qualquer fluido elaſtico pezado, e em equilibrio em hum vaſo ſolido, ou flexivel, he horizontal*; propoſições, de que reſultaõ as meſmas conſequencias, que deduzimos a reſpeito dos fluidos incompreſſiveis.

72 Agora paſſando ao que em particular pertence aos fluidos elaſticos, do meſmo principio geral concluiremos, que *a força elaſtica em qualquer lugar de huma maſſa fluida, ſejaõ quais forem as potencias que actuarem ſobre ella, he igual e contraria á preſſaõ do fluido no meſmo lugar*; porque ſe eſtas duas forças naõ foſſem iguais e contrarias, a maior venceria a menor, e naõ haveria equilibrio, contra a ſuppoſiçaõ.

73 Donde ſe ſegue, que ſe hum fluido elaſtico, depois de ſer comprimido por huma cauſa exterior, ficar em liberdade, e empregar a ſua elaſticidade contra hum obſtaculo, actuará com hum esforço igual ao que o tinha comprimido.

74 Segue-ſe tambem, que comprimindo-ſe o fluido a ſi meſmo pelo proprio pezo (Fig. 26.), a força elaſtica de qualquer ſecçaõ $Mmba$ de huma eſpeſſura infinitamente pequena Ma, he igual ao pezo abſoluto da columna vertical $EKmM$; porque eſte pezo he a força comprimente da dita ſecçaõ (n. 37.).

75 Seja pois a area de qualquer ſecçaõ horizontal da columna $Mm = b^2$, a altura do liquido $MB = x$, a eſpeſſura do elemento $Ma = dx$, e a gravidade eſpecifica delle $= P$. Teremos o ſeu volume $= b^2 dx$, e o pezo abſoluto $= b^2 P dx$; e conſeguintemente o pezo abſoluto

to da colunna $B\,M\,m\,k = b^2 \int P\,d\,x$. Assim será necessario, para o determinar, conhecer P em x, isto he, saber a lei das gravidades especificas do fluido conforme as alturas verticais.

76 E porque a pressaõ, que padece qualquer elemento $f\,g$ (Fig. 27.) da superficie das paredes de hum vaso, he igual ao pezo absoluto da colunna vertical, que tem a base igual ao mesmo elemento (n. 39.); supposto $f\,g = d\,S$, teremos $d\,S \int P\,d\,x$ por expressaõ da força, que exercita o fluido contra o elemento $f\,g$; logo $\int d\,S \int P\,d\,x$ será a pressaõ total sobre qualquer parte finita da superficie $f\,r$.

77 Exemplo I. *Supposto, que as gravidades especificas do fluido saõ na rasaõ das alturas verticais, contadas desde a superficie, determinar a pressaõ do fundo horizontal $N\,Q$ do vaso $A\,N\,Q\,E$* (Fig. 28.).

Seja a area do fundo $N\,Q = b^2$, a altura do fluido $N\,t = a$, e a gravidade especifica delle na parte immediatamente applicada ao fundo $= p$. Logo será $a : p :: x :$ $P = \frac{p\,x}{a}$; e substituindo este valor na formula $b^2 \int P\,d\,x$, teremos a pressaõ sobre o fundo do vaso $= \frac{p b^2}{a} \int x\,d\,x$ $= \frac{p\,b^2\,x^2}{2\,a} = \frac{p\,b^2\,a}{2}$; ametade do que seria, se o fluido em toda a altura tivesse huma gravidade especifica igual á do fundo.

Se $b^2 = 1$ pé quadrado, $a = 100$ pés, $p = \frac{1}{800}$ da gravidade especifica da agua, isto he, $p = \frac{70}{800} = \frac{7}{80}$ libras, teremos $\frac{p\,b^2\,a}{2} = \frac{1\,.\,7\,.\,100}{2\,.\,80} = 4\,\frac{3}{8}$ libras.

78 Exemplo II. *Supposto a mesma lei das gravidades especificas, determinar a pressaõ que sofre a parte $f\,N$ da parede de hum vaso rectangular $A\,N\,Q\,E$* (Fig. 29.).

Seja $A\,N = b$, $A\,f = a$, a dimensaõ horizontal do rectangulo $A\,N = b$, a gravidade especifica no ponto $f = p$;

e teremos $P = \frac{px}{a}$, e $dS = b\,dx$. Logo ſubſtituindo eſtes valores na formula $\int dS \int P\,dx$, teremos a preſſaõ $= \int b\,dx \int \frac{px}{a}\,dx = \frac{bpx^3}{6a}$; tomando eſte integral entre os limites de $x = a$, e $x = b$, ſerá a preſſaõ contra a ſuperficie $fN = \frac{bp}{6a}(b^3 - a^3)$.

Se $b = 10$ pés, $b = 100$, $a = 50$, $p = \frac{7}{80}$ libras, teremos $\frac{bp}{6a}(b^3 - a^3) = \frac{10 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 125000}{6 \cdot 50 \cdot 80} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 2500}{6 \cdot 8}$ $= \frac{7 \cdot 7 \cdot 625}{12} = 2552\frac{1}{12}$ libras.

Se p foſſe a gravidade eſpecifica do fluido immediatamente ao fundo, achariamos a preſſaõ de toda a parede rectangular $AN = \frac{pbb^2}{6}$, que he hum terço do que reſultaria ſe o fluido tiveſſe a meſma gravidade eſpecifica em toda a altura.

79 Eſtes exemplos podem multiplicar-ſe infinitamente, naõ ſó na hypotheſe preſente, mas em quaiſquer outras. Porém eſtas determinações raras vezes podem applicar-ſe á pratica, attendida a incerteza das meſmas hypotheſes. O mais ſeguro he recorrer á experiencia; e tendo achado por ella a preſſaõ, que o fluido elaſtico faz contra huma ſuperficie horizontal dada, por huma ſimples proporçaõ concluiremos a preſſaõ, que ha de fazer em qualquer outra ſuperficie horizontal, vertical, ou inclinada, ſuppondo que a denſidade he a meſma, ou ſenſivelmente a meſma, em todos os caſos.

80 De qualquer modo que ſe determinem eſtas preſſões, deve notar-ſe que os effeitos dellas ſeguem a meſma lei dos fluidos incompreſſiveis. Aſſim podemos concluir, como acima (n. 45. 46.), que duas quaiſquer colunnas fluidas elaſticas, da meſma ou de differente eſpecie,

eſta-

estaraõ sempre em equilibrio, sejaõ quais forem as suas densidades, todas as vezes que as pressões, que exercitaõ sobre as suas bases, forem proporcionais ás mesmas bases.

81 Se hum fluido elastico, alem da acçaõ da gravidade propria, for comprimido por huma força externa, acharemos a pressaõ que resulta contra as paredes do vaso, considerando que a acçaõ da força externa se distribue igualmente a todos os pontos do fluido, e combinando-a com a que provém da gravidade, como temos mostrado a respeito dos fluidos incompressiveis.

Do Equilibrio do Ar.

82 DE todos os fluidos elasticos, o ar he o mais conhecido, o mais espalhado, e o mais util ás necessidades dos homens. Por isso merece, que examinemos particularmente as suas propriedades com alguma miudeza. Para o fazer em rigor geometrico, seria necessario conhecer exactamente a figura das moleculas deste fluido, e a lei precisa que observaõ quando se comprimem, ou dilataõ, pelo frio, pelo calor, ou por outras causas physicas, sobre o que naõ temos as noções sufficientes. Em falta dellas naõ abraçaremos hypotheses incertas, e precarias, mas recorreremos á experiencia.

83 *O ar he hum fluido pezado.* Esta verdade ignorada dos antigos foi demonstrada a primeira vez por Torricelli no anno de 1643, por meio da experiencia seguinte.

Tomou hum canudo de vidro *A B* (Fig. 30.) de quasi tres pés de comprimento, aberto em huma das extremidades *A*, e fechado exactamente na outra *B*; e havendo-o enchido de azougue, tapou com o dedo a extremidade *A*, e a mergulhou no vaso *MCDN* no qual tinha lançado previamente huma quantidade sufficiente de azougue. Posto assim o tubo em huma situaçaõ vertical, tirou o dedo, e deixou o azougue nelle incluido á acçaõ do seu pezo. O effeito foi, que o azougue depois de varias oscillações ficou elevado no tubo até a altura *A E* de quasi 28 pollegadas acima do livel *M N* do azougue que estava no vaso.

A' vista deste phenomeno concluio Torricelli, que a columna *A E* naõ podia ficar suspensa dentro do tubo,

senaõ

ſenaõ para fazer equilibrio com a preſſaõ do ar exterior ſobre a ſuperfice do azougue que eſtava no vaſo; preſſaõ, que naõ tinha lugar na colunna interior do tubo, por eſtar a extremidade ſuperior tapada hermeticamente. E com effeito, quebrando levemente a meſma extremidade, para dar entrada ao ar, immediatamente cahe a colunna, e ſe poem todo o liquido ao meſmo livel. Os *barometros* ordinarios naõ ſaõ outra couſa, ſenaõ o tubo de Torricelli em experiencia continua.

Adiante veremos, fallando mais particularmente do barometro, que a altura do mercurio neſte inſtrumento eſtá ſujeita a muitas variações locais, e phyſicas.

84 Sendo pois o pezo abſoluto de qualquer colunna de ar, que inſiſte ſobre a ſuperficie da terra, igual ao de huma colunna de mercurio, que tem a meſma baſe e huma altura conhecida, he facil de determinar o pezo de toda a maſſa do ar, que cérca o globo terreſtre. Para iſſo, ſuppondo o raio da terra $= R$, a altura do mercurio $= r$, a circumferencia do circulo que tem a unidade por diametro $= c$, a gravidade eſpecifica do mercurio $= p$, naõ ha mais que multiplicar por p a differença entre duas esferas, huma que tenha o raio R, e a outra o raio $R + r$. Aſſim teremos o pezo da atmoſfera $= \frac{4}{3} p c \left[(R + r)^3 - R^3 \right] = \frac{4}{3} p c (3 R^2 r + 3 R r^2 + r^3)$; e deſprezando os termos que contem r^2 e r^3, teremos $4 p c R^2 r$ por expreſſaõ geral e muito approximada do pezo total do ar.

Suppondo $r = 28$ pollegadas, $p = 960$ libr., e hum gráo de circulo maximo terreſtre $= 57000$ toeſas, acharemos o pezo total da atmosfera $= 11028854877090909091$ libras proximamente.

85 Como huma colunna de mercurio de 28 pollegadas de altura deve fazer equilibrio a huma de agua de 32 pés (n. 46.); ſegue-ſe, que ſendo a primeira ſuſtentada pela preſſaõ exterior da atmosfera, tambem o deverá ſer a ſegunda. Aſſim o confirma a experiencia ſeguinte.

Seja QH o cano de huma bomba vertical (Fig. 31.), mergulhado na agua $MCDN$ pela extremidade Q que he aberta. Fazendo ſubir o embolo K, que enche exactamente a capacidade do tubo, a agua ſubirá atraz delle até

a

á altura de 32 pés com pouca differença, e dahi para cima, ainda que ſe continue a levantar o embolo, naõ ſubirá mais. A raſaõ he, porque levantando o embolo fica atraz delle hum vazio, onde o ar exterior naõ póde entrar, mas a preſſaõ livre do meſmo ar ſobre a ſuperficie *M N* fórça a agua a entrar pela abertura *Q*, e a ſubir pelo tubo até a altura de 32 pés, onde faz equilibrio com a dita preſſaõ.

86 Supponhamos, que havendo chegado a agua á altura *A B* de 32 pés, ſe continûa a levantar o embolo, de maneira que entre a baſe delle e a ſuperficie da columna *B T* fique hum vazio, como *B P*. Entaõ, ſe na parede do tubo entre os pontos *A* e *B*, ſe fizer huma abertura lateral *E*, o ar exterior entrará impetuoſamente por ella, e dividirá a columna *A T* em duas partes *A F*, *E T*. A primeira das quais cahirá pelo ſeu pezo, porque o ar que entra por *E* eſtá em equilibrio com a preſſaõ que a fazia ſubir pela extremidade *Q*; mas a ſegunda parte *E T*, ſendo comprimida pelo meſmo ar, que igualmente actûa para cima, ſubirá neceſſariamente pelo eſpaço vazio *B P*.

Eſte phenomeno ſe vio a primeira vez em Sevilha no anno de 1766, onde hum funileiro emprendeu fazer ſubir a agua á altura de 50 pés por huma bomba aſpirante, e enfadado de que ella naõ ſubiſſe deu huma martellada no cano, com a qual ſuccedeu abrirlhe hum buraco de quaſi huma linha de diametro, a 10 pés de altura acima do livel da agua; e dando depois á bomba, ſahio a agua. Eſta experiencia foi logo repetida em muitas partes, e ſe achou que com pouca quebra dá a bomba a agua da columna *E T*; depois do que, he neceſſario tornar a dar á bomba, tapando o buraco *E*, e tornando-o a deſtapar quando a agua tiver ſubido pelo cano á altura de 32 pés. Aſſim fechando, e abrindo alternativamente o buraco *E*, ſe póde fazer huma eſpecie de bomba, que levante a agua a muita altura; mas terá o inconveniente de dar pouca agua, e com grandes intermittencias. Adiante moſtraremos o modo de determinar a altura, até onde o ar que entra pelo buraco *E* póde levantar a columna *E T* pelo eſpaço vazio *B P*.

87 Seja *A B O* (Fig. 32.) a *catimplora*, de que ſe uſa ordinariamente para treſpaſſar os licores de humas vaſilhas

lhas para outras. Este instrumento he hum canudo curvo de braços desiguais AB, BO. Mergulhando o mais curto AB em hum vaso $MCDN$, e extrahindo-lhe o ar pela outra extremidade O, sorbendo com a boca, ou de qualquer outra maneira, o licor subirá por elle, e sahirá continuamente pelo orificio O, até o vaso ser esgotado, com tanto que o ponto O esteja mais baixo que o fundo delle.

ft — Para declaraçaõ deste effeito, supponhamos que a extremidade O está mergulhada em outro vaso EF, que contém já alguma quantidade do mesmo licor. Bem se vê, que cada hum dos braços da catimplora AB, BO póde considerar-se, como hum tubo de Torricelli. Assim representando a pressaõ da atmosfera por KX, o pezo da columna fluida AB por KV, e o da columna BO por KZ, está claro que VX exprime a força que levanta o fluido pelo braço AB, e ZX a que tende a levantallo pelo braço OB; e como estas forças saõ contrarias, a menor será destruida, e restará a força ZV, que produzirá huma corrente do fluido por ABO.

Daqui se vê 1°, que sendo $KV = KZ$ naõ poderá haver movimento. 2°, que tambem o naõ haverá quando KV naõ for menor que KX. Outras relações podem ter estas tres forças, cujo exame he inutil neste lugar.

88 *O ar he hum fluido elastico.* A verdade desta proposiçaõ consta de infinitas experiencias. Basta introduzir o ar em huma bexiga, e ver que ella se contrahe, quando a comprimem; e que se torna a dilatar, quando a deixaõ.

89 Logo *a força elastica do ar comprimido he igual á força, que produzio a sua compressaõ.* He huma consequencia evidente do que acima mostramos (n. 73. e 74.), e prova-se com muitas experiencias, entre as quais a *fonte de Heron* he huma das mais sensiveis.

Esta maquina compoem-se de huma caixa $ABCD$ (Fig. 33.), fechada de todos os lados, e cheia de agua até EF hum pouco abaixo de AB; de outra caixa $GHKI$, tambem fechada de todos os lados, igual á primeira, e cheia de ar; de hum tubo OT soldado exactamente com as tampas AB, DC, GH, o qual sahe fóra pela extremidade O, e com a extremidade T chega muito perto do fundo IK da caixa inferior; de outro tubo XY solda-

ſoldado nas duas caixas, cuja extremidade ſuperior X eſtá perto da tampa AB; e finalmente do tubo QP, cuja extremidade inferior chega perto do fundo DC, e a ſuperior ſoldada na tampa AB he guarnecida pela parte exterior com hum bocal de eſguicho.

Iſto poſto, tapando o orifico Q com o dedo, e lançando hum pouco de agua pelo canudo OT, ella deſcerá para IK, e ſubirá por exemplo até SV. Entaõ naõ haverá mais communicaçaõ do ar exterior com o que eſtá nas duas caixas; e continuando a lançar a agua, o ar incluido nos eſpaços $GHSV$, $ABFE$, e XY ſe condenſará pouco a pouco até que a ſua força elaſtica eſteja em equilibrio com a preſſaõ da agua lançada por OT. Se a ſuperficie da agua na caixa $GHKI$ eſtiver em MN, o dito ar comprimirá cada parte della com huma força igual ao pezo de huma colunna de agua, que tenha por baſe a parte comprimida, e por altura LO. Com eſta meſma força he comprimida a ſuperficie EF da agua na caixa ſuperior, e tende a ſubir pelo canudo PQ: de maneira, que deſtapando o orificio, reſulta huma fonte de repuxo, que ſobe a huma altura $RZ = OL$. Donde ſe moſtra, que a elaſticidade do ar produz o meſmo effeito que produziria o pezo da colunna, pela qual foi comprimido.

Póde notar-ſe, que fazendo entrar por O a agua que cahe do repuxo, eſta paſſará para a caixa inferior, e a fonte continuará até que a agua comprehendida deſde o ponto P até EF tenha ſahido toda.

90 Sendo pois o ar pezado, e elaſtico, he manifeſto que ſe deve comprimir a ſi meſmo pelo proprio pezo, e que conſiderando a atmosfera dividida em camadas concentricas á terra, as inferiores que ſuſtentaõ o pezo das ſuperiores eſtaráõ cada vez mais comprimidas, ſendo as outras couſas iguais. Digo *ſendo as outras couſas iguais*, porque ha outras cauſas, como o frio e o calor, que concorrem a comprimir e dilatar o ar, e por iſſo a denſidade deſte fluido he muito variavel. Tem-ſe obſervado ſer eſta de oito até nove centas vezes menor, que a da agua, e a denſidade media nos noſſos climas póde exprimir-ſe ſenſivelmente por $\frac{1}{850}$, e a gravidade eſpecifica, ou o pezo

de hum pé cubico de ar junto á ſuperficie da terra por $\frac{7}{85}$ libr.

91 Se o ar comprimido pelo pezo da atmosfera, ficar em liberdade para empregar a acçaõ da ſua elaſticidade, produzirá o meſmo effeito, que pelo dito pezo feria produzido. He huma conſequencia do que acima moſtramos (n. 89.), e ſe confirma com a experiencia ſeguinte.

Tome-ſe hum vaſo cylindrico de vidro *ABCD* (Fig. 34.), com huma quantidade de mercurio *AEFD*; meta-ſe nelle hum tubo *K* de 29 até 30 pollegadas, aberto por ambas as extremidades, e mergulhado no mercurio; tape-ſe exactamente a boca do vaſo ao redor do tubo, de maneira que o ar contido no eſpaço *EBCF* naõ communique com o de fóra; e ponha-ſe no recipiente da maquina pneumatica *LIHM*. Entaõ evacuando o ar do recipiente ſe verá, que dilatando-ſe o ar *EBCF* faz abaixar a ſuperficie do mercurio até *NO*, obrigando-o a ſubir pelo tubo *K* a huma altura quaſi igual á que tiver o barometro no lugar onde ſe faz a experiencia. Digo *quaſi igual*, porque naõ he poſſivel evacuar perfeitamente o ar do recipiente da maquina pneumatica.

92 Se huma quantidade de ar ſe reduzir pela compreſſaõ a occupar differentes eſpaços, ou volumes, eſtes ſeraõ na raſaõ inverſa das forças comprimentes. Eſta propoſiçaõ ſe prova pela experiencia ſeguinte.

Prepare-ſe hum tubo, como ſe moſtra na Fig. 35., fechado hermeticamente em *C* e aberto em *A*, e diſponha-ſe de maneira que os braços *DA*, *EC* (que devem ſer perfeitamente cylindricos) ſejaõ verticais, e a parte *DE* horizontal. Lance-ſe por *A* hum pouco de mercurio para encher o canal *DE*, procurando que as duas ſuperficies *IE*, *DV* deſte fluido nos dous braços verticais eſtejaõ de livel, a fim de que o ar fechado no eſpaço *EC* eſteja no meſmo eſtado de compreſſaõ que o ar exterior. Aſſim o ſuppoремos comprimido pelo pezo de huma colunna de mercurio de 28 pollegadas de altura, e ſendo *EC* de 12 pollegadas, ſerá o volume do ar como 12, e a força comprimente como 28. Continuando a lançar mercurio, e achando-ſe as ſuperficies deſte fluido em *F*, *H*, tirando a horizontal *FG*, ſe *GH* for de 14 pollegadas ſerá *FC* de

8,

8, se *GH* for de 28, será *FC* de 6 &c, isto he, se a força comprimente for 14 + 28 será o volume 8, e se a força for 28 + 28 será o volume 6 &c. Donde se vê, que sendo as forças comprimentes como 28, 42, 56, os volumes correspondentes saõ como 12, 8, 6, isto he, na rasaõ inversa dellas.

93 He de advertir, que sem embargo de se achar por esta experiencia, que os volumes saõ exactamente na rasaõ inversa das forças comprimentes, naõ deve este resultado tomar-se como regra geral para quaisquer que sejaõ as forças. Nos casos extremos, quando ellas forem muito grandes, ou muito pequenas, a regra naõ poderá subsistir, porque a elasticidade do ar terá certos limites, alem dos quais se naõ possa comprimir, nem dilatar. Porém como na pratica se naõ chega jamais a estes casos, póde a regra considerar-se verdadeira, sem restricçaõ alguma, em quanto o ar que recebe as differentes compressões estiver no mesmo gráo de temperatura.

94 Como as densidades de huma mesma massa saõ na rasaõ inversa dos volumes a que ella se reduz (n. 11.), está claro que as densidades de huma quantidade de ar comprimida por differentes forças saõ proporcionais ás mesmas forças comprimentes, e conseguintemente ás elasticidades que ella tem nestes differentes estados (n.89.). O mesmo se entenda das gravidades especificas, que saõ proporcionais ás densidades (n. 18.).

95 Suppondo pois que huma colunna vertical da atmosfera está toda no mesmo gráo de temperatura, e imaginando-a composta de huma infinidade de camadas horizontais, e de massas iguais, a densidade de cada huma será proporcional ao pezo de que está carregada, o qual he a soma dos pezos das camadas superiores. Logo a densidade de cada camada he proporcional á soma das densidades das camadas superiores. Assim formaráõ as densidades de cima para baixo huma serie tal, que dous termos consecutivos seraõ entre si como as somas dos termos respectivamente precedentes, isto he, formaráõ as densidades huma progressaõ geometrica, e do mesmo modo as gravidades especificas.

No estado physico das cousas, naõ tem lugar geralmente esta progressaõ, como abaixo veremos pela experiencia. Quando o calor, ou o frio varia em differentes camadas , perde-se o equilibrio , resultaõ correntes , ou ventos por diversas direcções , e a densidade do fluido participa necessariamente destas variações.

96 Antes de acabarmos este artigo , examinemos as dilatações do ar na maquina pneumatica. He inutil descrever aqui por meudo este instrumento , que todo o mundo conhece. Observaremos somente , que as suas peças principais saõ o recipiente , o prato em que elle se assenta , a siringa , o embolo della , e hum registo feito de maneira , que virando-se de hum modo permitte communicaçaõ ao recipiente com o vaõ da siringa , sem a permittir com o ar exterior , e virando-se de outro modo permitte communicaçaõ ao ar exterior com o vaõ da siringa , sem lha permittir com o recipiente.

97 Isto posto, seja A a soma das capacidades do recipiente e da parte superior da siringa , que fica vazia quando o embolo está levantado , B a soma das capacidades do recipiente e do vaõ total da siringa, quando o embolo se tem abaixado , D a densidade do ar no estado natural , m a rasaõ que esta densidade tem com a do ar rarefeito no recipiente , n o numero das vezes que se tem movido o embolo. Primeiramente o ar do recipiente tem a mesma densidade D do ar exterior ; mas abaixando o embolo , o ar que estava no espaço A , se dilatará uniformemente no espaço B , e conseguintemente será a sua densidade $=$ $D\frac{A}{B}$ (n. 11.). Depois, quando segunda vez se torna a abaixar o embolo , o ar que estava no espaço A com a densidade $D\frac{A}{B}$ se dilatará do mesmo modo no espaço B , e ficará com a densidade $D\frac{A^2}{B^2}$; e em geral , quando o embolo se abaixar a vez n , ficará o ar do recipiente com a densidade $D\frac{A^n}{B^n}$. Logo teremos $D = mD\frac{A^n}{B^n}$, ou $B^n = mA^n$, e conseguintemente $n\,l\,B = l\,m + n\,l\,A$.

Donde se vê , que das quatro quantidades m, n, A, B, sendo dadas tres , a quarta se póde determinar com muita facilidade. Igualmente se vê , que naõ he possivel evacuar perfeitamente o recipiente ; porque ainda que a dilataçaõ do do ar naõ tivesse limite algum physico, naõ poderia reduzir-se a huma densidade nulla, senaõ depois de se andar infinitas vezes com o embolo.

Construcçaõ, e uso do Barometro.

98 O *Barometro* serve, como já dissemos (Fig. 30.), para mostrar o pezo do ar, ou os differentes estados da compressaõ da atmosfera. Há-os de muitas especies; mas aqui naõ fallamos senaõ do barometro simples, ao qual se reduzem todos os outros, e que naõ he outra cousa mais do que o tubo de Torricelli applicado a huma taboa vertical, a qual se divide em pollegadas, começando desde a superficie do mercurio exposta á pressaõ do ar, e na parte superior se subdivide em linhas, e meias linhas, para mostrar as variações que tem a columna do mercurio, conforme o estado da atmosfera.

99 Por quanto temos visto, que a elasticidade do ar he igual á força que o comprime; está claro, que tanto o pezo do ar, como a sua elasticidade devem sustentar o mercurio no barometro em a mesma altura. Daqui vem, que em huma camara bem fechada, e debaixo de huma manga de vidro posta sobre huma meza horizontal, o barometro mostra a mesma altura do mercurio, como no ar livre. Esta suspensaõ he produzida pelo elaterio do ar, que tinha sido comprimido pelo ar exterior antes de se interromper a sua communicaçaõ.

100 O tubo de hum barometro deve ter ao menos duas ou tres linhas de diametro interior, para que o mercurio nelle incluido seja pouco sensivel á impressaõ do calor, que tende a dilatallo. Sem embargo desta precauçaõ muitas vezes se vê, que os barometros em hum mesmo lugar naõ concordaõ exactamente por outras causas, como alguma pequena desigualdade nas gravidades especificas dos mercurios, a difficuldade de os purificar igualmente do ar, as differentes asperezas das paredes dos tubos, o vazio mais ou menos perfeito na parte superior delles &c.

101 Supppondo que por falta de precauçaõ, ou de qualquer maneira, se tem metido ar no espaço EB, será facil determinar a relaçaõ entre a pressaõ da atmosfera, a altura AB do tubo acima do livel MN, a altura do espaço

paço que o ar incluido em EB occuparia naturalmente; e a altura em que o mercurio ficará ſuſpenſo acima do livel MN.

Seja BH o eſpaço, que o ar incluſo occuparia no eſtado natural, ſe o tubo eſtiveſſe aberto em B, e elle communicaſſe com o ar exterior. He evidente, que eſte ar achando hum obſtaculo em B ſe dilatará para a parte inferior, e que impellindo de cima para baixo a columna do mercurio AE, eſta ficará ſomente em equilibrio, quando a ſoma da força elaſtica do ar dilatado em BE, e do pezo da meſma columna, for igual á preſſaõ da atmosfera, iſto he, ao pezo de huma columna de mercurio da altura b. E porque a força elaſtica do ar natural BH he repreſentada por b, ſerá a força do ar dilatado BE repreſentada por $\frac{b.BH}{BE}$; logo teremos $\frac{b.BH}{BE} + AE = b$, ou $\frac{b.BH}{AB - AE} + AE = b$. Aſſim das quatro linhas b, BH, AB, AE, ſendo dadas tres, a quarta ſe determinará facilmente por eſta equaçaõ.

102 Sendo pois o barometro conſtruido com toda a perfeiçaõ, he facil de ver que nos lugares mais baixos, onde a preſſaõ da atmosfera he maior, deve o mercurio ſuſtentar-ſe em maior altura; e aſſim o moſtra a experiencia, quando outras cauſas o naõ impedem. He couſa ſabida, que no meſmo lugar eſtá ſujeita a altura do mercurio a frequentes variações, conforme os differentes eſtados da atmosfera. Eiſaqui os factos geraes, que moſtra a experiencia, poſto que algumas vezes tenhaõ ſuas excepções.

I. Ordinariamente ſe ſuſtenta o mercurio em maior altura, quando o tempo he bom, fixo, ſeco, e ſereno.

II. Pelo contrario he menor a ſua altura, quando o tempo he mudavel, chuvoſo, tempeſtuoſo, ou quando o ar eſtá muito humido, e carregado de vapores.

III. As maiores variações do barometro tanto em ſubir, como em deſcer, ſuccedem ſempre no inverno; e eſtas variações ſaõ em geral mais ſenſiveis nos paizes frios do que nos quentes.

IV. Se eſtando bom tempo começa o mercurio a deſcer ſenſivelmente, quaſi ſempre he final de chuva, ou de vento.

V. E pelo contrario, quando em tempo chuvoſo ſobe conſtantemente o mercurio, he ſinal de haver proximamente mudança para bom tempo.

VI. Quando o tempo eſtá muito calmoſo, a deſcida do mercurio he frequentemente hum prognoſtico de trovoada.

VII. No tempo frio a ſubida do mercurio annuncia a congelaçaõ; e a deſcida em tempo de gelo prognoſtica a deſcongelaçaõ.

103 A explicaçaõ deſtes phenomenos tem dado que fazer aos Phyſicos. M. de Mairan attribue tudo aos ventos, ou geralmente ás agitações do ar produzidas pelo calor do Sol, ou do fogo central, que elle ſuppoem emanar continuamente das entranhas da terra, cuja acçaõ póde ſer modificada por muitas cauſas phyſicas, e locais.

M. Halley explica os meſmos phenomenos pela combinaçaõ dos ventos, que reinaõ actualmente, com a exhalaçaõ, e precipitaçaõ dos vapores, que andaõ fluctuando no ar, e que ſe achaõ em maior, ou menor quantidade em hum tempo que em outro.

104 Deixando muitas outras conjecturas a eſte reſpeito, que ſe podem ver nos livros de Phyſica, a explicaçaõ do Baraõ de Leibnitz me parece muito attendivel. Quando o tempo he chuvoſo, diz elle, deve o mercurio deſcer, porque vindo entaõ a cahir os vapores, que antes eraõ ſuſtentados pelo ar, eſte fica menos comprimido, e conſeguintemente mais leve; e em confirmaçaõ propoem a experiencia ſeguinte.

Em hum cylindro *A B* (Fig. 36.) cheio de agua ponha-ſe hum corpo *D* eſpecificamente mais pezado, mas oco, e com hum orificio tapado de ſorte que ſeja ſuſtentado na ſuperficie da agua. O todo ſe pendure do braço de huma balança, e ſe ponha em equilibrio com hum pezo *C*. Entaõ, deſtapando o orificio do corpo *D*, entrando nelle a agua, e começando a cahir, o equilibrio ſe rompe, e a balança ſe inclina para a parte do pezo *C*. Comparando pois o pezo *C* á colunna do mercurio do barometro, a agua do cylindro á colunna da atmosfera, e o pezo *D* ás gotas da chuva, he facil de entender, que em quanto o vapor dividido em partes tenuiſſimas he ſuſtentado pela atmosfera, ſaõ as colunnas della mais pezadas, e devem ſuſtentar o mercurio em maior altura; e que ajuntando-

y/.

tando-se em gotas maiores, que comecem a cahir fica a atmosfera mais leve, e conseguintemente deve o mercurio descer no barometro. E a descida precede a chuva actual, porque as gotas se formaõ, e cahem por intervallos, antes de chegarem á terra.

105 Esta explicaçaõ he muito simples, e natural: mas para lhe darmos toda a exactidaõ, consideremos hum corpo esferico descendo pela sua gravidade em hum fluido incluido em hum vaso immovel, e busquemos a pressaõ que deve causar sobre o fundo delle. Para isso reflectiremos, que a gravidade do corpo he igual ao excesso do seu pezo sobre o de hum igual volume do fluido, como se mostrará no Capitulo seguinte; e que a resistencia, que encontra da parte do mesmo fluido, communicando-se por elle até o fundo do vaso, he a pressaõ que nelle resulta do movimento do corpo na sua descida actual. Supporemos tambem que a resistencia, que encontra perpendicularmente huma superficie plana da parte de hum fluido, he proporcional ao producto da mesma superficie pelo quadrado da sua velocidade, e que a resistencia de huma esfera, como mostraremos na Segunda Parte, he ametade da que experimentaria perpendicularmente hum dos seus circulos maximos com a mesma velocidade.

Isto posto, seja o raio da esfera $= R$, o pezo absoluto della $= P$, o pezo de hum volume igual do fluido $= P'$, o espaço $= s$, a velocidade $= u$, a resistencia que experimenta huma superficie a^2 com a velocidade $V = F$, a resistencia que padece a esfera $= f$, e c a circumferencia que tem por diametro a unidade. He facil de ver, que deve ser $f = \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2}$, e que a força que sollicita o movel de cima para baixo he $P - P' - \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2}$. Assim, pelo principio ordinario das forças acceleratrizes, teremos a equaçaõ

$$P u d u = \left(P - P' - \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2}\right) d s.$$

Suppondo para maior simplicidade, que $P - P' = M$, e $\frac{c F R^2}{2 a^2 V^2} = n$, esta equaçaõ se reduzirá á fórma seguinte

Pu

$$P u d u + n u^2 d s = M d s.$$

Multipliquemos todos os termos por huma funçaõ ϕ de s, a qual se supponha que a faz integravel; e teremos primeiramente

$$\phi P u d u + \phi n u^2 d s = \phi M d s.$$

Depois supponhamos, que he $\frac{\phi P u^2}{2} = \int \phi M d s$; e daqui resultará esta nova equaçaõ differencial

$$\phi P u d u + \frac{P u^2 d \phi}{2} = \phi M d s.$$

Comparando-a com a precedente, termo por termo, será $\frac{P u^2 d \phi}{2} = \phi n u^2 d s$, ou $\frac{d \phi}{\phi} = \frac{2 n d s}{P}$. Logo $l \phi = \frac{2 n s}{P}$, e $\phi = e^{\frac{2 n s}{P}}$, sendo e o numero que tem por logarithmo hyperbolico a unidade. Substituindo pois este valor de ϕ na equaçaõ $\frac{\phi P u^2}{2} = \int \phi M d s$, teremos

$$\frac{P u^2 . e^{\frac{2 n s}{P}}}{2} = \int M d s . e^{\frac{2 n s}{P}} = \frac{M . P}{2 n} e^{\frac{2 n s}{P}} + C.$$ E porque $s = 0$ deve dar $u = 0$, será $C = - \frac{M . P}{2 n}$, e conseguintemente $u^2 = \frac{M}{n} \left[1 - e^{\frac{-2 n s}{P}} \right]$. Porém tinhamos $f = n u^2$; logo

$$f = M \left[1 - e^{\frac{-2 n s}{P}} \right]:$$

106 He facil de ver por esta formula, que f naõ póde ser maior que M, mas somente igual, quando s for infinito; e como M he menor que P, sempre f será menor que P. Mas P he a pressaõ causada pelo corpo em quanto sustentado pelo fluido, e f he a pressaõ que resulta, quando actualmente desce por elle. Logo a pressaõ

faõ da atmosfera fobre a fuperficie da terra he menor, quando as gotas da chuva defcem pelo ar, do que quando refolvidas em partes tenuiffimas faõ fuftentadas por elle. Efta he pois huma caufa demonftrada das variações do barometro, mas naõ deve entender-fe que feja unica, e exclufiva de outras. Dous ventos contrarios que ajuntaõ, e condenfaõ o ar para hum lugar, fallohaõ ahi mais pezado, e affim muitas outras caufas, que ignoramos, e que naõ podem fujeitar-fe ao calculo.

107 Hum dos ufos mais importantes, para que póde fervir o barometro, he a determinaçaõ da differença de livel de quaifquer pontos fituados em differentes elevações. Para fe dar huma foluçaõ geral, e completa defta queftaõ, era neceffario conhecer a lei que guardaõ entre fi as denfidades de todas as camadas da atmosfera, attendidas todas as caufas de que ellas dependem; mas diffo naõ ha efperanças. Confiderando porém a compreffaõ, que refulta do proprio pezo do ar, que he a caufa principal, e prefcindindo de tudo o mais, he facil de determinar a relaçaõ, que devem ter as differenças de livel com as alturas do mercurio no barometro.

108 Sendo pois o ar comprimido unicamente pelo feu proprio pezo, a gravidade efpecifica, ou denfidade delle fera proporcional ao pezo da colunna fuperior; e affim reprefentando por P a gravidade efpecifica em qualquer ponto, teremos nP por valor do pezo abfoluto da colunna, que o comprime neffe lugar, fendo n hum numero conftante. Logo ferá $nP = \int P dx$ (n. 75.), ou $nP = \int - P dx$, tomando x de baixo para cima. Differenciando efta equaçaõ, teremos $n\,dP = -P dx$, ou $\frac{n\,dP}{P} = -dx$, e integrando $n\,lP = C - x$. Para determinarmos a conftante C, fupponhamos que na origem de x he a gravidade efpecifica do ar $= p$, e teremos $C = n\,lp$. Logo $x = n\,lp - n\,lP = n\,l\frac{p}{P}$. Seja h a altura do mercurio no barometro no lugar onde a gravidade efpecifica he $= p$, e H onde he $= P$; e teremos $\frac{p}{P} = \frac{h}{H}$. Subftituindo

tuindo este valor na equaçaõ, será finalmente $x = n\,l\,\frac{b}{H}$..

109 Para usar desta formula, he necessario primeiramente determinar a quantidade n por duas observações do barometro, huma no lugar a respeito do qual se querem saber as differenças de livel, e outra em outro lugar cuja differença de livel seja conhecida immediatamente pela mediçaõ.

Exemplo I. Na montanha de *Chussai* no Reino do Peru observou M. Godin a altura do mercurio no barometro de 17 poll. e $10\frac{1}{2}$ linh., e M. Bouguer em *Caraburu* a observou de 21 poll. $2\frac{3}{4}$ linh.; pergunta-se a elevaçaõ da montanha a respeito de *Caraburu*.

Primeiramente sobre a montanha *Pitchincha* 1208 toesas mais elevada que *Caraburu* se observou a altura do mercurio de 15 poll. e 11. linh.; e assim teremos $x = 1208$, $b = \frac{1019}{4}$, $H = 191$, donde concluiremos $n = 9658$; e será para todos os mais lugares a respeito de *Caraburu* $x = 9658\,l\,\frac{b}{H}$..

Como pois em *Chussai* temos $H = \frac{429}{2}$, será $x = 9658\,l\,\frac{1019}{858} = 9658 . 0{,}0746869 = 721{,}3$ toesas; resultado, que concorda muito bem com o que se achou por huma medida geometrica.

Exemplo II. Na aldea *Alaussy* situada na raiz da montanha de *Chussai* se observou a altura do mercurio de 21 poll. $1\frac{1}{4}$ linh.; pergunta-se a sua posiçaõ a respeito de *Caraburu*.

Neste lugar temos $H = \frac{1013}{4}$, e conseguintemente será $x = 9658\,l\,\frac{1019}{1013} = 9658 . 0{,}0025648 = 24{,}78$ toesas.

Se

Se tirarmos este resultado do que achamos no exemplo precedente, ficará 696,5 toesas por differença de livel entre *Alaussy* e *Chussai*; resultado que naõ differe mais que meia toesa de 197 que M. Godin achou pela mediçaõ.

M. Bouguer se servio deste methodo com bom sucesso pelas eminencias das cordilheiras do Peru. E com effeito he facil de entender, que quanto maior for a altura, tanto mais se achará livre o ar das causas, que lhe alteraõ o equilibrio, e conseguintemente tanto melhor se conformará com a lei das densidades, que havemos supposto. Por esta rasaõ se achou, que naõ correspondia taõ bem este methodo nas partes inferiores das ditas cordilheiras, nem em outras montanhas de menor elevaçaõ na zona torrida, e muito menos nas de Europa. Assim naõ deveremos servirnos deste meio, quando procurarmos resultados exactos, senaõ com muita cautela, e precauçaõ.

110 Agora poderemos determinar a altura *E R* (Fig. 31.), em que o ar, que entra pelo orificio *E* na experiencia da bomba de Sevilha, ha de sustentar no vacuo a columna de agua *E F* (n. 86.). Está claro, que ella ha de subir pelo tubo, até estar em equilibrio com a pressaõ do ar, que lhe corresponder á sua base. Supponhamos pois, que a columna de agua *E F* he de 24 pés, equivalente a huma de mercurio de 21 pollegadas, e que no lugar da experiencia a pressaõ da atmosfera sustenta huma columna de agua de 32 pés, ou huma de mercurio de 28 pollegadas. Deste modo será reduzida a questaõ a buscar a altura x, onde o mercurio no barometro se deve sustentar em 21 pollegadas, e teremos $x = 9658\ l\,\frac{28}{21} = 1206$ toesas.

Esta he a altura, a que deveria subir a columna de agua, se a travez da sua massa naõ desse passagem a quantidade nenhuma de ar para a parte superior do tubo, e se naõ encontrasse resistencia nenhuma nas paredes delle.

Theorica das Bombas.

111 AS bombas saõ humas maquinas muito conhecidas, que servem para elevar a agua, nas quais a pressaõ da atmosfera he hum dos principais agentes.

tes. Em geral podem reduzir-se a tres especies ; a saber, bomba aspirante , bomba comprimente , e bomba aspirante e comprimente ao mesmo tempo.

112 A bomba *aspirante* (Fig. 37.) he composta de dous tubos verticais $AKBC$, $CBDQ$, unidos em CB; o primeiro, que está mergulhado na agua, chama-se *tubo de aspiraçaõ*, e o segundo *corpo da bomba*. No lugar da juntura delles se poem ordinariamente hum diaphragma cylindrico, que vulgarmente chamaõ *nabo*, furado pelo meio, e cuberto com huma valvula E, que abre de baixo para cima, á qual se dá o nome de *chapeleta*. No corpo da bomba sobe, e desce alternativamente hum embolo, que chamaõ *Zoncho*, ou *buxa da bomba*, cuja haste Z he movida por meio de huma alavanca, ou de qualquer outra maneira. A cabeça delle he furada tambem segundo a direcçaõ do eixo com hum buraco redondo t, que está cuberto com outra chapeleta F, que se abre de baixo para cima. Este embolo corre no seu jogo hum certo espaço IT, de maneira que a sua base inferior coincide com o plano horizontal IH, quando está abaixado, e com o plano horizontal TS quando está levantado.

113 He facil de entender o effeito desta maquina. Supponhamos que no primeiro instante a base do embolo se acha em IH, e que o ar interior da bomba está no mesmo gráo de compressaõ que o exterior, e conseguintemente que as duas chapeletas E, F estaõ fechadas em virtude do proprio pezo. Entaõ, levantando o embolo para TS, a chapeleta F ficará fechada pelo seu pezo, e pela pressaõ da atmosfera que carrega sobre ella ; o ar, que estava no espaço $ACIHBK$, se dilata, abre a valvula E, e occupa uniformemente o espaço $ACTSBK$; e a pressaõ da atmosfera sobre a superficie exterior da agua MN a faz subir pelo tubo de aspiraçaõ, onde se acha hum ar mais rarefeito, até huma certa altura Aa. Depois, abaixando outra vez o embolo até IH, a valvula F se abre pela compressaõ do ar inferior ; a valvula E se fecha pelo seu pezo, e pela compressaõ do ar seperior ; e o ar do espaço $CIHB$ adquire a mesma densidade do ar exterior. Levantando pois novamente o embolo, a valvula F se fecha : o ar do espaço $aCBk$ já rarefeito se dilata mais, abre a valvula E, e juntamente com o ar do espaço $CIHB$ occupa uniformemente o espaço $aCTSBk$;

e conſeguintemente a agua ſubirá mais no tubo de aſpiraçaõ huma quantidade aa', em virtude da preſſaõ exterior da atmosfera ſobre a ſuperficie *M N*. Continuando deſte modo o jogo do embolo, irá ſubindo a agua, chegará á baſe delle, paſſará pelo buraco *t*, e entaõ abaixo do embolo naõ haverá mais ar na bomba, mas o movimento das valvulas ſerá o meſmo que dantes, e a agua continuará a levantar-ſe pelo cano da bomba até ſahir pelo tubo lateral *O*.

114 Deve notar-ſe, que a altura *L M* da ſuperficie da agua *M N* até a baſe do embolo naõ póde ſer de mais que 32 pés (n. 85.); e na pratica, attendendo que nunca ſe póde evacuar perfeitamente o ar, e que o pezo da chapeleta inferior *E* he hum obſtaculo, que deve tambem ſer vencido pela preſſaõ da atmosfera, ſempre deve fazer-ſe *L M* menor que 32 pés. Aqui ſuppomos ſempre que a preſſaõ da atmosfera faz equilibrio a huma colunna de agua de 32 pés, ou que o mercurio do barometro no lugar aonde eſtá ſituada a bomba, ſe ſuſtenta na altura de 28 pollegadas. Mas, ſe o barometro moſtrar maior, ou menor altura, ſerá neceſſario rectificar a colunna de agua equivalente, conforme ao que acima diſſemos (n. 46.), e ſubſtituir o ſeu valor exacto em todas as partes aonde pomos 32 pés.

115 Suppondo que a maquina eſtá bem conſtruida, a evacuaçaõ mais, ou menos completa do ar interior, depende da poſiçaõ mais, ou menos ventajoſa da valvula *E*. Eſta ſe coſtuma pôr ou em *A* K hum pouco abaixo do livel *M N* da agua exterior, ou mais ordinariamente na junta dos dous tubos, como na Fig. 37 ſe repreſenta. Vejamos, qual he a melhor poſiçaõ; e pelo exame deſtes dous caſos ſe julgará das poſiçoes intermedias.

Em primeiro lugar ſupponhamos a valvula *E* em *A*K, e para maior ſimplicidade preſcindamos do ſeu pezo. Nos primeiros inſtantes, quando ſe levanta o embolo de *I* para *T*, a agua ſobe facilmente pelo tubo de aſpiraçaõ; mas depois, ſe a altura *L M*, poſto que menor que 32 pés, for algum tanto conſideravel, póde ſucceder que havendo chegado a agua a certa altura *A V*, e eſtando o embolo levantado em *T S*, ſeja a força elaſtica do ar incluido no eſpaço *V C T S B P*, juntamente com o pezo da colunna de agua *A P*, igual á preſſaõ da atmosfera; e entaõ,

taõ, por mais que ſe jogue com o embolo, a agua naõ paſſará da altura actual em que ſe acha. E com effeito quando o embolo eſtá em IH, o ar do eſpaço $VCIHBP$ ſe reduz ao eſtado do ar exterior; e quando ſe levanta para TS, eſte ar ſe eſpalha pelo eſpaço $VCTSBP$. Aſſim, ſendo b a altura de huma columna de agua equivalente á preſſaõ da atmosfera, ou á força elaſtica do ar natural (n. 89.), ſerá a força elaſtica do ar dilatado no eſpaço $VCTSBP$ equivalente ao pezo de huma columna de agua, que tenha por altura $\frac{VCIHBP}{VCTSBP}b$ (n. 92.). Ajuntando-lhe a altura AV da agua elevada no tubo, a ſoma deve ſer igual a b, para que a agua naõ poſſa ſubir de VP, e teremos por equaçaõ deſte equilibrio

$$b = AV + \frac{VCIHBP}{VCTSBP}b.$$

116 Seja o raio do tubo de aſpiraçaõ $= r$, do corpo da bomba $= R$, $AC = a$, $CI = n$, $IT = p$, $AV = x$, e a raſaõ da circumferencia ao diametro $= c$; e teremos o cylindro $VB = cr^2(a-x)$, $CH = cR^2n$, $CS = cR^2(p+n)$, e conſeguintemente o ſolido $VCIHBP = cr^2(a-x) + cR^2n$, e $VCTSBP = cr^2(a-x) + cR^2(p+n)$. Subſtituindo eſtes valores na equaçaõ precedente teremos

$$b = x + \frac{r^2(a-x) + R^2n}{r^2(a-x) + R^2(p+n)}b,$$

donde, fazendo $\frac{R^2}{r^2} = k$, ſe tirará

$$x = \frac{a + k(p+n) \pm \sqrt{[(a+k(p+n))^2 - 4kbp]}}{2}.$$

117 Todas as vezes pois que o valor de x for real, e menor que a, a agua deverá parar realmente no tubo de aſpiraçaõ; como havemos ſuppoſto no calculo. Logo naõ continuará a ſubir, ſenaõ quando for abſurdo o ſuppor que ella pára, iſto he, quando os valores de x ſahirem imaginarios. Logo he neceſſario, para a agua ſubir, que ſeja ſempre $4kbp > (a + k(p+n))^2$.

Seja, por exemplo, $b = 32$ pés, $a = 20$, $n = 2$, $p = 2$, e $k = 1$, iſto he, o diametro do tubo de aſpiraçaõ igual ao do corpo da bomba; e teremos $4.32.2$

$<(20+4)^2$. Logo a agua parará neſte caſo, na altura $AV = 3$ pés proximamente; e a bomba ſerá incapaz.

Seja $b = 32$ pés, $a = 25$, $n = 0$, $p = 2$, e $k = 4$; e teremos $4 \,.\, 32 \,.\, 4 \,.\, 2 < (25 + 8)^2$. Logo a agua parará tambem neſte caſo em huma altura $AV = 12\frac{1}{2}$ pés proximamente, e a bomba ſerá imperfeita. Porém, ficando todas as outras dimenſões, ſe fizeſſemos $k = 6$, a agua naõ pararia, e a bomba poderia ſer admittida.

Pelo meſmo methodo poderemos ſegurarnos, ſe no caſo de chegar a agua ao corpo da bomba deverá parar em alguma parte entre os pontos C e I. E para applicar a formula precedente a eſte caſo naõ he neceſſario mais que fazer $k = 1$.

118 Todos eſtes calculos moſtraõ, que ſendo a valvula E poſta em AK, a altura do embolo acima do livel da agua deve ſer muito menor que de 32 pés, no caſo de ſe naõ dar ao meſmo embolo hum jogo IT muito grande, ou de ſe naõ dar ao tubo de aſpiraçaõ hum diametro muito pequeno, em comparaçaõ do corpo da bomba. Eſtes dous remedios tem ſeus inconvenientes, e ſobre tudo o ultimo, que póde diminuir muito o producto da bomba, e conſumir inutilmente grande parte da velocidade do agente; porque eſta deve ſer regulada de tal modo, que ſuba preciſamente pelo tubo de aſpiraçaõ tanta agua, quanta o embolo levanta quando ſobe pelo corpo da bomba, de maneira que naõ fique jamais vazio algum entre a baſe delle, e a agua que a ſegue.

119 Supponhamos agora, que a valvula E eſtá na junta dos dous tubos, como ſe repreſenta na Fig. 37. Logo ſe vê, que eſta diſpoſiçaõ tem a ventagem de ſe evacuar o ar interior quaſi completamente. Porque fazendo deſcer o embolo o mais perto que he poſſivel de CB, naõ ficará ar ſenaõ no pequeno eſpaço $CIHB$, e na pequena cavidade t. Entaõ póde ſer a altura LM de pouco menos que 32 pés; mas iſto ſuppoem, que as valvulas ſejaõ fieis, perfeiçaõ que ſe naõ acha na pratica, porque os couros de que ſe fazem as chapeletas ſecaõ-ſe, e ajuſtaõ mal, quando a maquina eſtá por algum tempo em inacçaõ. Eſte inconveniente naõ teria lugar, eſtando a valvula E em AK, porque ſempre ficaria mergulhada

na

na agua ; mas fem embargo, confideradas todas as coufas, vale mais polla em CB do que em AK.

120 Tomadas pois as precauções convenientes, para que a bomba prefte o feu effeito, examinemos a força que he neceffaria para levantar o embolo. Supponhamos, que a agua tem já chegado á maior altura QD, e que o embolo eftá no termo mais baixo IH. He manifefto, que elle fuftenta a columna de agua $IHDQ$, e a preffaõ da atmosfera fobre QD, a qual fe póde fuppor igual á que carrega fobre MN. Affim, tomando as duas verticais XY, YM, cada huma de 32 pés, por alturas das columnas de agua equivalentes ás preffões da atmosfera fobre QD, e MN, fuftentará o embolo a preffaõ reprefentada por $IH \times XY$, e a columna de agua $ACIHBK$ forçará a bafe delle IH de baixo para cima com huma preffaõ reprefentada por $IH \times MY$ menos o pezo da mefma columna, ou $IH \times LM$, ifto he, com huma preffaõ reprefentada por $IH \times LY$. Tirando $IH \times LY$ de $IH \times XY$, ficará $IH \times LM$ por expreffaõ da força que fuftenta o embolo, á qual fe deve ajuntar o pezo da columna $IHDQ$. Por tudo, ferá pois carregado o embolo do pezo equivalente a huma columna de agua, que tenha IH por bafe, e por altura a elevaçaõ da agua QD acima do livel MN; e o mefmo fe entenderá a refpeito de qualquer outra pofiçaõ do embolo. Ajuntando a efta força o pezo do mefmo embolo, a foma dará a força que fe lhe deve applicar no eftado fimples do equilibrio; mas para produzir o movimento, e vencer a fricçaõ, ferá neceffario ajuntar-fe certa quantidade de força, que ordinariamente fe avalía em hum terço da que baftaria para o equilibrio; porem naõ he fufceptivel de determinaçaõ fixa, por fer muito variavel conforme a conftrucçaõ, e perfeiçaõ das maquinas, e conforme a velocidade que fe pertende dellas.

121 Suppondo, que a bomba tem chegado a hum movimento uniforme e permanente, he facil de calcular o producto de agua, que com ella fe póde tirar. Porque fendo e o efpaço, que anda o embolo em hum fegundo quando fobe, R o raio da fua bafe, ou do corpo da bomba, e c a rafaõ da circumferencia ao diametro, levantará o embolo, e confeguintemente dará a bomba em hum fegundo cR^2e pollegadas cubicas de agua.

 122 Mas

122 Mas deve notar-se, que sendo pequena a altura YL, e subindo conseguintemente a agua pelo corpo da bomba com pouca velocidade, he necessario regular de tal maneira a velocidade do embolo, que naõ se forme vazio entre a base delle, e a agua que a segue; porque de outra sorte haveria força perdida na manobra da bomba. Ordinariamente se pecca contra esta regra, e depois ficaõ em grande admiraçaõ de que huma bomba movida com grande velocidade naõ produza sensivelmente mais agua do que movida com menor velocidade. Por isso he necessario combinar de tal maneira as dimensões da bomba com o jogo do embolo, que se naõ consumaõ as forças sem utilidade. He facil de ver, que a agua em IH tende a subir com huma velocidade $= \frac{LY}{LM}$, e que outra tanta deve conseguintemente dar-se ao embolo, para se empregar utilmente a força motriz.

123 Na bomba *comprimente* (Fig. 38.), o cano principal $ACBK$ está mergulhado na agua MN, e o embolo entra por baixo, para levantar, ou comprimir a agua para cima, cuja haste Z está solidamente pregada na travessa bc do caixilho movel $abcd$, que alternativamente se faz subir e descer por meio de huma alavanca, ou de qualquer outra maneira. A cabeça do embolo he vazada, e tem o buraco cuberto com huma valvula F, que se abre de baixo para cima. Em VP, pouco abaixo do livel da agua exterior, se poem hum diaphragma fixo, igualmente vazado, e cuberto com huma valvula E, que se abre de baixo para cima. E ao corpo da bomba se une em CB o tubo conductor $CBOQ$, pelo qual se levanta a agua até o lugar do seu destino.

124 Para explicar o jogo desta bomba, supponhamos que o embolo no primeiro instante está no ponto mais baixo do espaço que descreve. Está claro, que a agua, em virtude do proprio pezo, deve levantar as valvulas F, E, e subir pelo corpo da bomba até o livel MN; e quando tiver chegado a elle, ou ao menos, quando estiver cheio de agua o espaço comprehendido entre as valvulas, estas se fecharáõ pelo pezo que lhes resta no fluido. Entaõ levantando o embolo, a valvula inferior F ficará fechada, a superior E se abrirá, e a agua comprehendida

entre

entre as duas valvulas ſerá forçada a levantar-ſe acima do livel *MN*. Abaixando outra vez o embolo , a valvula *E* ſe fechará , e embaraçará a deſcida da agua ſuperior , a valvula *F* ſe abrirá , e tornará a encher-ſe de agua o eſpaço comprehendido entre ellas. Eſta agua paſſará tambem para cima da valvula *E* , em ſe levantando o embolo ; e aſſim por diante.

125 Por meio deſta bomba póde a agua levantar-ſe a qualquer altura , applicando-ſe a força competente. Eſta ſe calcúla , como na bomba aſpirante ; e no eſtado do equilibrio ſuſtentará além do pezo do embolo , e da grade *abcd* , o pezo de huma colunna de agua que tem a baſe igual á do embolo , e a altura igual á da agua levantada acima do livel do manancial. O producto do embolo ſe determina , como na aſpirante , ſem reſtricçaõ alguma.

126 A bomba *aſpirante e comprimente* (Fig. 39.) he compoſta de hum tubo de aſpiraçaõ *ACBK* mergulhado na agua *MN* ; de hum corpo de bomba *CTSB* ; e de hum tubo conductor *HLOQ*. Em *CB* e *VP* eſtaõ duas valvulas *E*, *F* que ſe abrem de baixo para cima ; e o embolo naõ he vazado como nas outras , mas maciſſo , e joga no corpo da bomba ſem deſcer abaixo de *HY* , para naõ tapar a entrada *HL* do tubo conductor.

Bem ſe vè , que fazendo ſubir e deſcer o embolo alternativamente , a agua ſobe primeiramente pelo tubo de aſpiraçaõ , e corpo de bomba , como na bomba aſpirante ordinaria , ſendo os movimentos das valvulas *E*, *F* abſolutamente os meſmos em ambos os caſos. Depois que a agua chega á baſe do embolo , he comprimida por elle quando deſce , e obrigada a ſubir pelo tubo conductor. Tornando-ſe a levantar , aſpira nova agua ; e deſcendo a faz paſſar ao tubo conductor atraz da primeira ; e aſſim por diante.

127 He facil de achar a força motriz neſta bomba , para o ſimples eſtado do equilibrio. Primeiramente , ſuppondo que pela aſpiraçaõ ſobe a agua até *ts* , he evidente que eſtando entaõ fechada a valvula *F* , a potencia applicada ao embolo ſuſtenta além do pezo delle huma parte do pezo da atmosfera , igual ao pezo de huma colunna de agua que tem a baſe igual á do meſmo embolo , e a altura igual á diſtancia vertical de *ts* ao livel *MN* da agua exterior. Em ſegundo lugar , quando deſce e comprime

prime a agua, eſtando fechada a valvula *E*, ſuſtenta o pezo de huma columna de agua que tem a meſma baſe que elle, e por altura a diſtancia da dita baſe ao plano horizontal que paſſa pelo ponto *O*, onde a agua tem chegado. Neſte caſo o pezo do embolo ajuda a potencia.

128 Algumas vezes ſe diſpoem eſta bomba de maneira, que o embolo em lugar de aſpirar quando ſobe, e comprimir quando deſce, como na Fig. 39, comprime quando ſobe, e aſpira quando deſce, como na Fig. 40. Mas a força motriz ſe calcúla do meſmo modo em ambos os caſos.

129 Tais ſaõ as tres eſpecies primordiais de bombas, ás quais ſe reduziráõ ſempre todas as que ſe podem imaginar, e conſtruir. Por iſſo naõ podem aperfeiçoar-ſe realmente eſtas maquinas, ſenaõ procurando diminuir a fricçaõ quanto he poſſivel, empregando embolos bem feitos, valvulas muito fieis &c; no que ainda reſta hum campo dilatado á induſtria dos Artiſtas. As miudezas da conſtrucçaõ, e a eſcolha das materias proprias para formar as peças de huma bomba, naõ pertencem ao meu objecto. Póde ſobre iſſo conſultar-ſe a *Architectura Hydraulica* de Belidor, havendo cautela com a theorica que elle dá do mechaniſmo das bombas, porque he ſummamente defeituoſa.

130 Em qualquer das tres bombas, que havemos declarado, a ſahida da agua naõ he continua, mas intermittente. Para remediar eſte defeito, ha muitos annos que ſe coſtuma guarnecer o tubo conductor de huma caixa *R*K (Fig. 41.), que communica com o tubo interrompido em *G* e *H*, ſendo fechada exteriormente de todos os lados. Eſta caixa eſtá primeiramente cheia de ar na ſua denſidade natural. Depois, quando ſe anda com o embolo, a agua que ſobe pelo braço *CBDQ* ſe derrama em parte na caixa *R*K, e condenſa o ar nella incluido, cortando-lhe a communicaçaõ com o ar externo, e reduzindo-o a ocupar ſómente o eſpaço *kryx*. Entaõ abaixando o embolo, o ar aſſim condenſado ſe dilata, forçando a agua a deſcer de *kr* até K*R*, e conſeguintemente a ſubir pelo braço *GHQD*. Continuando o meſmo jogo, ſubirá a meſma agua ſem interrupçaõ pelo referido braço, e a bomba deſaguará por conſeguinte com hum fluxo continuo, ao menos ſenſivelmente.

131 Alguns

131 Alguns conſtructores imaginaõ erradamente, que a *caixa do ar* dobra o effeito deſta maquina. Devem reparar, que a bomba naõ póde dar mais agua do que levanta o embolo quando ſobe ; e que a força motriz , ſendo a velocidade conſtante , emprega ſempre a meſma acçaõ , quer levante a dita agua directamente até o lugar do ſeu deſtino , quer introduza parte della na caixa do ar , para dahi ſer levantada pela elaſticidade delle. Porque no ſegundo caſo he neceſſario comprimir o ar da caixa KR ; e eſta força com a que ſe emprega em levantar a outra parte da agua pelo braço *GHQD* abſorbe a acçaõ inteira da força motriz , como no primeiro caſo. Donde ſe vê , que ſe por huma parte he o fluxo continuo quando ha caixa de ar, por outra he dobrada a velocidade com que a agua ſahe , quando o fluxo he intermittente ; e o producto he o meſmo em ambos os caſos , ſendo as outras couſas iguais. He pois inutil a caixa do ar nas bombas , que tem ſimpleſmente por objecto levantar a agua ; mas ſerá proveitoſa nas bombas, que ſervem para extinguir os incendios , porque hum fluxo continuo de agua apaga mais facilmente o fogo , do que ſendo interrompido , ainda que ſeja entaõ maior a ſua velocidade.

132 Mas ſem recorrer á caixa de ar , póde fazer-ſe huma bomba de fluxo continuo , ſegundo a idea de M. de la Hire (*Mem. de l'Acad.* 1716.), que com ſucceſſo tem ſido executada por Thilaye e Quentin, Meſtres bombeiros de Ruaõ , os quais appreſentáraõ á Academia , cada hum ſua bomba conſtruida ſegundo o principio de M. de la Hire. A de Quentin conſta de hum corpo de bomba *CF* (Fig. 42.) , de dous tubos de aſpiraçaõ *H* , K , e de dous conductores *Nu* , *fgb* que a certa altura ſe unem em hum ſó. O corpo da bomba *CF* , e o tubo conductor *fgb* ſaõ diſpoſtos , como na bomba aſpirante e comprimente da Fig. 39. As quatro valvulas *de concha* S, s, S', s' ſe abrem e fechaõ alternativamente duas a duas. Em *yz* e *mn* eſtaõ duas aberturas , pelas quais o corpo da bomba communica com os conductores. A haſte *z* do embolo paſſa por huma chapa de cobre *CB* ; e nella deve mover-ſe de maneira , que o ar exterior naõ poſſa entrar de modo algum no corpo da bomba *CF*.

O effeito deſta maquina he facil de comprehender. Supponhamos , que o embolo no primeiro inſtante eſtá no ponto

ponto mais baixo *F*. Entaõ, levantando-se até *m*, deixa atraz de si hum vazio; o ar inferior abre a valvula *S* em virtude da sua dilataçaõ; a pressaõ da atmosfera obriga a agua a subir; e ao mesmo tempo o ar comprehendido entre a chapa *CB* e a base superior do embolo levanta a valvula *s*, e sahe por ella. Abaixando o embolo, fechaõ-se as valvulas *S* e *s*, e abrem-se as outras *S'* e *s'*, huma pela compressaõ da agua que o embolo faz entrar pela abertura *yz* no tubo *fgb*, e a outra pela dilataçaõ do ar que está no tubo *H*, no espaço *Nm*, e no espaço comprehendido entre a cabeça do embolo e a chapa *CB*; e assim por diante. Assim que o corpo da bomba está todo cheio de agua, o embolo aspira e comprime ao mesmo tempo, e o fluxo da agua deve ser necessariamente continuo, ao menos sensivelmente. Na bomba de Quentin, para maior segurança da continuidade, se ajunta ao tubo *fgb* huma caixa de ar *AE*, que M. de la Hire naõ havia empregado. Os commissarios nomeados pela Academia acháraõ, que esta bomba produzia muito bem o seu effeito.

133 Os tubos das bombas sofrem algumas vezes forças muito consideraveis. Quando saõ feitos de materias flexiveis, como de chumbo, de cobre, e ainda de ferro, achar-se-ha a espessura que devem ter, para naõ arrebentarem, por meio da theorica que demos no Cap. I. (n. 53.).

134 Para dar movimento ás bombas, usa-se de toda a especie de agentes, como de homens, cavallos, correntes de aguas &c, conforme as circunstancias. Quando he necessario elevar grande quantidade de agua, á proporçaõ se aumenta a força motriz; e para que ella exercite continuamente o mesmo esforço, formaõ-se muitas ordens de bombas de maneira, que suba huma parte dos embolos, quando desce a outra.

Na Fig. 43, *MNB* he huma manivella vertical, movida ao redor do seu eixo pela potencia *P*, que por meio das duas cadeias *V* e *T* faz jogar alternativamente ao redor dos seus eixos *C* e *E* os dous quartos de circulo verticais *ACO*, e *GEF*, aos quais saõ applicadas as cadeias *S* e *H* dos embolos de duas bombas, que se levantaráõ e abaixaráõ alternativamente, guardando sempre a mesma posiçaõ vertical.

Na

Na Fig. 44 ſe repreſenta huma manivella horizontal, deſtinada a mover os embolos de duas bombas. As cadeias S, e H vaõ paſſar por duas roldanas fixas A, O que mantém os embolos em huma direcçaõ ſempre vertical; e a manivella he movida por huma roda, que a corrente da meſma agua faz andar.

135 Huma das invençoens mais ingenhoſas neſta parte, foi a applicaçaõ que no principio deſte ſeculo ſe começou a fazer do vapor da agua, para dar movimento ás bombas. Por experiencias continuas ſe ſabe, que a agua expoſta á acçaõ do fogo ſe dilata, e lança de ſi em fórma de vapor hum fluido muito ſutil e elaſtico, capaz de vencer grandes obſtaculos. Fazendo pois ferver a agua em huma caldeira $AMNE$ (Fig 45.) debaixo do cylindro vazio $ACDE$, guarnecido de hum embolo movel P, o vapor della paſſando pela abertura mn obrigará o embolo a ſubir, vencendo a preſſaõ da atmosfera que carrega ſobre elle; e para ſer o movimento mais vivo ſe ajuda com hum pezo B applicado á extremidade H da alavanca HO apoyada em T. Havendo chegado o embolo á altura dezejada, ſe o vapor ſe condenſar ſubitamente pela injecçaõ de agua fria, introduzida pelo regiſto R, ou de qualquer outra maneira, far-ſe-ha hum vazio no eſpaço que era occupado pelo meſmo vapor. Entaõ a preſſaõ da atmosfera, que ſupponho maior que o pezo B, carregando ſobre o embolo o fará deſcer; e aſſim por diante.

136 O pezo B deve ſer regulado de maneira, que o embolo ſuba e deſça com igual velocidade. Supponhamos pois $OT = A$, $HT = a$, a baſe do embolo $= b^2$, a altura da columna de agua que tendo a baſe b^2 equivale á preſſaõ do vapor contra a baſe do embolo $= H$, e a altura de outra columna de agua da meſma baſe equivalente á preſſaõ da atmosfera ſobre o embolo $= b$. Eſtá claro, que o movimento ſerá uniforme, quando tivermos a equaçaõ

$$A(Hb^2 - bb^2) + Ba = Abb^2 - Ba$$

e por conſeguinte $B = \dfrac{Ab^2(2b - H)}{2a}$.

Seja por exemplo $A = a$, $H = b$; e acharemos $B = 16 b^2$, iſto he, deverá o pezo B ſer igual ao de huma columna de agua, que tem por baſe b^2, e por altura 16 pés.

137 Aſ-

137 Assim consiste todo o mechanismo deste movimento na dobrada acçaõ do vapor da agua, e da pressaõ da atmosfera; e para se fazer de huma maneira continua, he necessario que o mesmo movimento da maquina abra o registo da injecçaõ a seu tempo, como se póde executar de muitas maneiras. A descripçaõ da Maquina que em Fresne serve de esgotar a agua das minas de carvaõ póde ver-se no tomo 1° do nosso Original desde a pag. 125 até 139.

CAPITULO III.

Do equilibrio dos fluidos com os solidos.

138 A Superficie de hum solido mergulhado em qualquer fluido he comprimida por elle em todos os seus pontos da mesma maneira, e pela mesma rasaõ que saõ comprimidas as paredes dos vasos, em que os mesmos fluidos se contém. De todas estas pressoens resulta huma força, que tende a levantar o corpo, a qual naõ póde ser destruida, senaõ pelo pezo delle, ou por hum agente exterior, ou pelo concurso de huma e outra causa. Para examinarmos as condiçoens deste equilibrio, he necessario trazer á lembrança a proposiçaõ seguinte.

139 *Se no meio de cada hum dos lados E A, A B, B C, C D, D E de hum polygono inflexivel* (Fig.46.) *se applicarem perpendicularmente as potencias P, Q, R, S, T proporcionais aos mesmos lados, e dirigidas todas de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, no plano do polygono, estas potencias estaraõ em equilibrio.*

Porque, como duas forças concurrentes em hum ponto, e a sua resultante que passa necessariamente pelo mesmo ponto, podem ser representadas pelos lados de hum triangulo perpendiculares cada hum a cada huma das ditas forças, está claro que tirando as diagonais *B E*, *B D*, e sendo as duas forças *P*, *Q* perpendiculares e proporcionais aos lados *E A*, *A B* do triangulo *E A B*, deve a resultante dellas, que chamaremos *X*, ser perpendicular e proporcional ao lado *B E* do mesmo triangulo. E porque esta força *X* deve passar pelo ponto de concurso *a* das componentes *P*, *Q*, que he evidentemente o centro do circulo circumscrito ao triangulo *E A B*, deve a mesma

força

força X ſer perpendicular ao meio da corda BE. Do meſmo modo ſe moſtra, que as duas forças T, X daõ huma reſultante Y proporcional a BD, e perpendicular ao meio de BD; e que as duas forças R, S daõ huma reſultante Z proporcional a BD, e juntamente perpendicular ao meio de BD. Logo as duas reſultantes finais ſaõ iguais entre ſi; e porque ſuppomos que todas as forças obraõ de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, as meſmas reſultantes ſeraõ directamente contrarias. Logo ſeraõ mutuamente deſtruidas; e por conſeguinte o ſyſtema de todas as forças eſtará em equilibrio.

140 A demonſtraçaõ ſerá ſempre a meſma, qualquer que ſeja a poſiçaõ e o numero dos lados do polygono. Donde ſe ſegue em geral, que *ſe a cada hum dos elementos do perimetro inflexivel de huma figura rectilinea, curvilinea, ou mixtilinea, forem applicadas perpendicularmente, e no meſmo plano da figura, forças proporcionais aos meſmos elementos, e todas dirigidas de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, eſtas forças eſtaraõ em equilibrio.*

141 Iſto ſuppoſto, imaginemos que a parte do corpo mergulhada na agua ſe divide em huma infinidade de ſecçoens por planos horizontais, e que a ſuperficie convexa de cada huma das ſecçoens ſe divide em infinitos trapezios por planos verticais, e perpendiculares aos meſmos trapezios. Seja $MNYZ$ (Fig. 47.) a baſe de huma deſtas ſecçoens, e Ma a baſe de hum dos trapezios de que ſe compoem a ſuperficie convexa della, o qual trapezio chamaremos X. Pelo ponto M (Fig. 48.) conduza-ſe o plano $AMDB$ vertical, e perpendicular ao trapezio X, cuja interſecçaõ com o plano horizontal $MNYZ$ ſerá a recta MY perpendicular ao elemento Ma; pelo ponto m infinitamente perto de M conſidere-ſe hum plano horizontal my, que repreſenta a baſe ſuperior da ſecçaõ propoſta; e do ponto M levante-ſe a vertical MP até a ſuperficie do fluido AB.

Tomando pois a gravidade eſpecifica do fluido por unidade, já ſabemos que o trapezio X que tem Ma por baſe, e Mm por altura, ſerá comprimido perpendicularmente por huma força $MF = Ma.Mm.MP$ (n. 39.). Reſolvendo-a em duas, huma horizontal ME, e outra vertical MG, os triangulos ſemelhantes MHm, MEF, nos

daraõ

daraõ $ME = MF \frac{MH}{Mm}$, e EF, ou $MG = MF \frac{Hm}{Mm}$; e ſubſtituindo o valor de MF, teremos $ME = Ma.MP.MH$, e $MG = Ma.MP.Hm$. Pelo que reſpeita pois ás forças horizontais, como $MP.MH$ he conſtante para cada ſecçaõ, eſtá claro que ſaõ proporcionais aos elementos Ma, e conſeguintemente eſtaraõ em equilibrio (n. 140.), iſto he, teremos $\int Ma.MP.MH = 0$. E pelo que reſpeita ás forças verticais, he evidente que $\int Ma.Hm.MP$ repreſenta o volume do fluido, cujo lugar he occupado pelo corpo. Logo,

1.º A ſoma, ou a reſultante das forças verticais, com que o fluido tende a levantar o corpo, he igual á ſoma dos pequenos pezos elementares, de que ſe compoem o pezo total do fluido deslocado pelo meſmo corpo.

2.º As direcçoens deſtas duas forças coincidem em huma meſma linha vertical; porque as direcçoens das ſuas forças elementares correſpondentes eſtaõ em huma meſma vertical. Donde concluiremos, que o esforço, com que o fluido tende a levantar o corpo, paſſa pelo centro de gravidade do volume do fluido deslocado, ou pelo centro de gravidade da parte do corpo mergulhada nelle, e conſiderada como homogenea.

142 Logo, ſe hum corpo deixado á acçaõ da gravidade, eſtiver ſuſtentado em equilibrio ſobre hum fluido, deveráõ neceſſariamente ter lugar ao meſmo tempo as duas condiçoens ſeguintes.

I. *O pezo do corpo deve ſer igual ao pezo do fluido, cujo lugar occupa*; porque para haver equilibrio he neceſſario, que o pezo do corpo ſeja igual á força, que tende a levantallo verticalmente.

II. *O centro de gravidade do corpo, e o da parte mergulhada no fluido, conſiderada como homogenea, devem eſtar em huma meſma linha vertical*; porque para haver equilibrio he neceſſario que as forças naõ ſómente ſejaõ iguais, mas tambem directamente oppoſtas.

143 Donde ſe ſegue, que *toda a figura plana homogenea, dividida em duas partes iguais e ſemelhantes por hum eixo ſuppoſto vertical; e todo o ſolido de revoluçaõ homogeneo ſituado verticalmente, naõ ſendo de maior gravidade eſpecifica que o fluido, ſe ſuſtentaráõ em equilibrio neſta poſiçaõ.* Porque eſtá claro, que neſtes termos o pezo da figura

gura, ou do corpo, he ſuſtentado verticalmente pela força vertical do fluido, e que o centro de gravidade da figura, ou do ſolido, e o da parte mergulhada eſtaõ ambos na meſma linha vertical.

He de advertir, que a inverſa deſta propoſiçaõ naõ he verdadeira geralmente; iſto he, ſe hum corpo homogeneo, dividido em partes ſymmetricas pelo ſeu eixo, eſtiver em equilibrio ſobre hum fluido, naõ ſe ſegue que o eixo eſteja vertical; porque como adiante veremos, o meſmo corpo póde ter outras ſituaçoens de equilibrio.

144 Segue-ſe tambem, que *todo o corpo priſmatico homogeneo, que tem o eixo horizontal, eſtará em equilibrio ſobre hum fluido, quando o centro de gravidade da ſecçaõ feita pelo meio delle parallelamente ás baſes, eſtiver na meſma vertical com o centro de gravidade da parte mergulhada da meſma ſecçaõ.* Porque os centros de gravidade do priſma, e da parte mergulhada coincidem manifeſtamente com os centros da referida ſecçaõ.

145 Seja M o volume de hum corpo, N a parte delle mergulhada no fluido, P a ſua gravidade eſpecifica, e p a do fluido. Pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $PM = pN$. Donde ſe ſegue,

1.º Que ſe a gravidade eſpecifica do corpo for igual á do fluido, o corpo ſe mergulhará todo, e ficará indifferente para eſtar em equilibrio em qualquer profundidade; porque entaõ temos $M = N$.

2.º Que ſe a gravidade eſpecifica do fluido for maior que a do corpo, eſte ſerá ſuſtentado por aquelle; porque entaõ he $N < M$.

3.º Que ſe a gravidade eſpecifica do corpo for maior que a do fluido, o corpo naõ ſerá ſuſtentado, mas deſcerá por elle; porque entaõ temos $PM > pN$.

146 Suppondo, que o corpo he ſuſtentado pelo fluido, a equaçaõ $PM = pN$ nos dará $P : p :: N : M$, iſto he, *a gravidade eſpecifica do corpo he para a do fluido, como o volume da parte mergulhada para o volume total do corpo.*

147 Pela meſma equaçaõ ſe vê, que conhecendo ſimpleſmente o pezo abſoluto do corpo, e a gravidade eſpecifica do fluido, ſe póde calcular a parte mergulhada. Supponhamos que o corpo peza 20 libr., que eſtá ſuſtentado em equilibrio ſobre a agua, e que hum pé cubico de agua peza 70 libr. Pela hypotheſe ſerá $PM = 20$ libr.,

e cone conſeguintemente $N = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$ de hum pé cubico $= 493 \frac{5}{7}$ pollegadas cubicas.

148 Se aumentarmos, ou diminuirmos huma quantidade ao volume N mergulhado no fluido, será neceſſario para conſervar o equilibrio, que ajuntemos ou tiremos ao pezo total do corpo hum pezo q de maneira, que tenhamos $PM \pm q = pN \pm pn$, ou $q = pn$. Donde ſe vê, que o pezo additivo, ou ſubtractivo deve ſer igual ao pezo do volume n do fluido, que o corpo ha de deslocar de mais ou de menos, do que no primeiro eſtado.

149 Eſta força, com que os fluidos ſuſtém os corpos boyantes, he hum meio de grande utilidade para tirar grandes pezos do fundo dos rios, e do mar. Toma-ſe hum batel de grande volume, que ſe faz mergulhar, carregando-o quanto he poſſivel. Neſte eſtado ſe prende fortemente ao pezo, que ſe quer levantar; e entaõ ſendo deſcarregado, o esforço vertical do fluido o faz ſubir, e com elle o pezo pertendido, com huma força que no primeiro inſtante he igual ao pezo de que o batel houver ſido deſcarregado.

150 Suppondo agora, que o corpo M he eſpecificamente mais grave que o fluido, e ſendo Q o pezo que he neceſſario applicar ao braço de huma balança para o ſuſtentar, depois de ſer inteiramente mergulhado no fluido; eſtá claro, que reſtando-lhe entaõ o pezo $PM - pM$, devemos ter $Q = PM - pM$, ou $PM - Q = pM$, ou $P(PM - Q) = PpM$, donde ſe tira $P : p :: PM : PM - Q$. Logo *a gravidade eſpecifica do corpo he para a do fluido, como o pezo abſoluto do corpo para o pezo que perde dentro do fluido.*

Aſſim, conhecendo a gravidade eſpecifica do corpo, he facil de conhecer a do fluido, e reciprocamente. Mas deve notar-ſe, que pezando hum corpo no ar contra outro mergulhado em hum fluido, o primeiro parece mais leve do que he na realidade, porque tambem perde no ar alguma parte do ſeu pezo. Eſta he muito pequena, e ordinariamente ſe póde deſprezar ſem erro ſenſivel. Querendo porem toda a exacçaõ poſſivel, far-ſe-ha a operaçaõ tação no recipiente da maquina pneumatica, ou calcular-se-ha o pezo de hum volume de ar igual ao do corpo, e se ajuntará ao pezo observado do mesmo corpo.

151 Quando he dada a gravidade especifica do fluido, immediatamente se pode conhecer o volume do solido pela equação $pM = PM - Q$, que dá $M = \frac{PM - Q}{p}$. Se o pezo do corpo he, por exemplo, de 20 libr. e na agua de 10 libr. teremos $PM = 20$, $Q = 10$, e $M = \frac{20 - 10}{70}$ $= \frac{1}{7}$ de hum pé cubico. Conhecido o volume do corpo, e o seu pezo absoluto, facilmente se deduzirá a sua gravidade especifica, supposondo sempre que he homogeneo, e que não tem cavidades interiores.

152 Se o mesmo solido M se mergulhar totalmente em outro fluido, que tenha a gravidade especifica p', e se para o sustentar for necessario o pezo Q', teremos as duas equações $Q = PM - pM$, $Q' = PM - p'M$, as quais dão $p(PM - Q') = p'(PM - Q)$, e conseguintemente $p : p' :: PM - Q : PM - Q'$. Logo *as gravidades especificas de dous fluidos são entre si, como os pezos que nelles perde hum mesmo corpo especificamente mais grave que qualquer delles.*

153 Se no mesmo fluido, cuja gravidade especifica he p, se mergulharem dous solidos que tenhão os volumes M, M', e as gravidades especificas P, P', e se inteiramente mergulhados conservarem os pezos Q, Q'; teremos $Q = PM - pM$, e $Q' = P'M' - pM'$. Donde se tira $M : M' :: PM - Q : P'M' - Q'$, isto he, *os volumes dos corpos são na razão dos pezos que perdem no mesmo fluido.*

154 Daqui se póde resolver o problema, que o Rey Hieron propoz a Archimedes, sobre a coroa de ouro, em que havia suspeitas de ter o Ourives metido huma quantidade de prata. Seja C o pezo absoluto da coroa, e K o pezo que perde na agua, x a quantidade de prata que contém, e conseguintemente $C - x$ a quantidade de ouro. Supponhamos que hum volume dado M de ouro perde na agua o pezo P, e que hum volume dado de prata m perde o pezo p; e acharemos que o volume

me de ouro $C - x$ deverá perder o pezo $\frac{P(C-x)}{M}$, e o volume de prata x o pezo $\frac{px}{m}$ (n. 153.). Logo teremos $\frac{P(C-x)}{M} + \frac{px}{m} = K$, e conseguintemente será

$$x = \frac{m(MK - PC)}{Mp - mP}.$$

155 Ainda que as analogias, que havemos mostrado (n. 150. e 152.), saõ os meios mais exactos para achar as gravidades especificas dos fluidos, com tudo na pratica se usa muitas vezes de hum instrumento, que chamaõ *areometro*, ou *péza-licor*, por ser a operaçaõ mais simples. A forma deste instrumento he arbitraria; com tanto que divida facilmente o fluido quando se mergulha nelle, e que se mantenha em huma situaçaõ vertical. O de Fahrenheit tem estas propriedades.

He este composto de hum tubo cylindrico comprido CD (Fig. 49.), e de duas bolas ocas A, B; na mais baixa e mais pequena B se lança mercurio, ou qualquer materia pezada, que sirva de *lastro* ao instrumento, e lhe dê estabilidade; e a outra maior A, sempre metida no fluido, serve de levantar o centro de gravidade da parte do areometro mergulhada no fluido, e desse modo lhe augmenta a estabilidade. Este instrumento póde mostrar as gravidades especificas dos fluidos, ou fazendo-o sempre mergulhar a huma mesma profundidade, por meio de pezos com que se carréga; ou conservando-o sempre com o mesmo pezo, e deixando-o mergulhar livremente a differentes profundidades. Examinemos brevemente ambos os casos.

Supponhamos, que o areometro se mergulha até o ponto M em dous fluidos differentes. Sejaõ P, e $P \pm q$ os pezos absolutos que para isso deve ter, p e p' as gravidades especificas dos fluidos, e M o volume da parte constante do areometro $MABN$; e teremos $P = pM$, e $P \pm q = p'M$ (n. 145.). Logo $p' = \frac{p(P \pm q)}{P}$.

Querendo porém que o areometro conserve sempre o mesmo pezo, sejaõ K e M os pontos até onde elle se mergu-

mergulha, e reprefentando o feu pezo conftante por P, os volumes $KABH$ e $MABN$ por M e M', e as gravidades efpecificas dos fluidos por p e p'; teremos $P = pM$, e $P = p'M'$. Logo $p' = \frac{pM}{M'}$.

Sendo o areometro de huma figura regular, e conhecida, podem determinar-fe os volumes M e M' pelas regras da Geometria; mas a forma do inftrumento naõ permitte ufar-fe defte meio com exactidaõ. O melhor he graduallo experimentalmente, mettendo-o com differentes pezos confecutivos em hum fluido de gravidade efpecifica conhecida, e determinando affim os volumes correfpondentes, que elle mergulha no fluido (n. 147.).

Agora paffemos ao exame particular da fituaçaõ, que deve tomar huma figura boyante fobre hum fluido, para fatisfazer ás condições do equilibrio; objecto util em muitas occafiões, e fobre tudo na Architectura naval.

156 Probl. I. *Achar a fituaçaõ de equilibrio de hum triangulo homogeneo ESG fobre o fluido MN, fuppondo que naõ tem mais que hum angulo* S *mergulhado nelle* (Fig. 50.).

Tirem-fe as rectas SP, SQ do angulo S para os pontos P e Q no meio das bafes EG, MN dos dous triangulos ESG, MSN, e nellas tomem-fe as partes $SR = \frac{2}{3}SP$, e $SO = \frac{2}{3}SQ$, que determinaõ os centros de gravidade dos dous triangulos. Conduzaõ-fe as rectas RO, PQ, que feraõ parallelas entre fi, e perpendiculares a MN, porque RO deve fer vertical. Do ponto P tiremfe PA, PD perpendiculares aos lados SE, SG produzidos fe for neceffario, e conduzaõ-fe as rectas PM, PN que feraõ iguaes, por fer $QM = QN$, e PQ perpendicular a MN.

Ifto pofto, feja $SE = a$, $SG = b$, $SP = c$, o angulo $PSE = m$, $PSG = n$, $SM = x$, $SN = y$, a gravidade efpecifica do triangulo $= p$, e a do fluido $= p'$. Porque os dous triangulos ESG, MSN, que tem o angulo commum S, faõ entre fi como os productos $SE \times SG$, $SM \times SN$, pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $pab = p'xy$.

E

E porque os triangulos rectangulos PAS, PDS daõ $PA = c\,sen\,m$, $SA = c\,cos\,m$, $PD = c\,sen\,n$, $SD = c\,cos\,n$, e por conseguinte $AM = c\,cos\,m - x$, $DN = c\,cos\,n - y$, teremos $PM^2 = (c\,sen\,m)^2 + (c\,cos\,m - x)^2$, e $PN^2 = (c\,sen\,n)^2 + (c\,cos\,n - y)^2$. Logo pela segunda condiçaõ do equilibrio teremos $(c\,sen\,m)^2 + (c\,cos\,m - x)^2 = (c\,sen\,n)^2 + (c\,cos\,n - y)^2$, ou $xx - 2cx\,cos\,m = yy - 2cy\,cos\,n$. E substituindo o valor de $y = \frac{pab}{p'x}$, resultará a equaçaõ

4.

$$x^4 - 2cx^3\,cos\,m + \frac{2cpabx\,cos\,n}{p'} - \frac{p^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

cujas raizes combinadas com a equaçaõ $y = \frac{pab}{p'x}$ daráõ a conhecer as differentes posições do triangulo, que admittem equilibrio.

157 Pela regra de Descartes se sabe, que em huma equaçaõ, cujas raizes saõ reais, ha tantas positivas quantas saõ as mudanças dos sinais + e −, e tantas negativas quantas vezes se achaõ consecutivos dous sinais +, ou dous sinais −. Por quanto pois falta na nossa equaçaõ o termo que deveria ter x^2, he facil de ver que se todas as suas raizes saõ reais, deveráõ ser necessariamente tres positivas, e huma negativa. A negativa naõ póde servir, porque naõ suppomos que MS seja produzida alem do ponto S. As positivas mostraõ tres posições reais de equilibrio, com tanto que seja $x < a$, e $y < b$.

158 Para darmos huma applicaçaõ mais simples da nossa equaçaõ geral, supponhamos que he isosceles o triangulo ESG. Neste caso temos $a = b$, $n = m$, e a equaçaõ será

$$x^4 - 2cx^3\,cos\,m + \frac{2cpa^2x\,cos\,m}{p'} - \frac{p^2a^4}{p'^2} = 0,$$

a qual se resolve em duas do segundo gráo

$$x^2 - \frac{a^2p}{p'} = 0,$$

$$x^2 - 2cx\,cos\,m + \frac{a^2p}{p'} = 0.$$

A

A primeira destas dá $x = \pm a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, ou simplesmente $x = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, porque a raiz negativa he inutil. E porque temos neste caso $y = \frac{pa^2}{p'x}$, será tambem $y = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$; logo $y = x$, e conseguintemente he tambem isosceles o triangulo MSN, ou (que vem a ser o mesmo) a base do triangulo proposto he parallela á superficie do fluido em huma das situações de equilibrio.

A segunda dá $x = c\cos m \pm \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2p}{p'}\right]}$; e substituindo este valor na equação $y = \frac{pa^2}{p'x}$, teremos

$$y = \frac{pa^2}{p'\left(c\cos m \pm \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2p}{p'}\right]}\right)} =$$

$c\cos m \mp \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2p}{p'}\right]}$; e este segundo caso dará as duas combinações seguintes

$$\begin{cases} x = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2p}{p'}\right]} \\ y = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2p}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2p}{p'}\right]} \\ y = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2p}{p'}\right]}, \end{cases}$$

as quais mostraõ duas situações novas de equilibrio, quando os valores de x e y saõ reais, e cada hum delles menor que a. Para que estas duas condições tenhaõ lugar, he necessario 1°, que seja $\frac{a^2p}{p'} < (c\cos m)^2$, ou $\frac{p}{p'} <$

$\frac{(c\cos m)^2}{a^2}$. 2°, que ſeja $a > c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$, ou $\frac{p}{p'} > \frac{2ac\cos m - aa}{aa}$.

Se o triangulo propoſto for por exemplo equilateral, teremos $c\cos m = \frac{3}{4}a$; e o triangulo, além da ſituaçaõ de equilibrio indicada pela primeira equaçaõ, poderá ter outras duas, com tanto que ſeja $\frac{p}{p'} < \frac{9}{16}$, e $\frac{p}{p'} > \frac{8}{16}$, iſto he, com tanto que o valor de $\frac{p}{p'}$ ſeja comprehendido entre os limites das fracções $\frac{9}{16}$ e $\frac{8}{16}$.

159 Probl. II. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio de hum triangulo homogeneo SEG ſobre o fluido MN, ſuppondo que os dous angulos E, G eſtaõ metidos nelle* (Fig. 51.).

A ſoluçaõ do problema precedente póde accommodar-ſe a eſte, imaginando a Fig. 50 virada de baixo para cima; mas para maior clareza, daremos a ſoluçaõ directamente. Para iſſo advertiremos, que os tres centros de gravidade do triangulo SEG, do trapezio $MNGE$, e do triangulo SMN eſtaõ ſempre na meſma linha recta: mas para haver equilibrio he neceſſario que o centro de gravidade do triangulo SEG e o da parte mergulhada $MNGE$ eſtejaõ em huma meſma vertical; logo os centros de gravidade dos dous triangulos SEG, SMN eſtaráõ tambem na meſma vertical.

Feita pois a conſtrucçaõ, como no Problema antecedente, igualmente teremos $PM = PN$, e fazendo $SE = a$, $SG = b$, $SP = c$, $PSE = m$, $PSG = n$, $SM = x$, $SN = y$, a gravidade eſpecifica do triangulo $= p$, e a do fluido $= p'$; teremos $SEG : SMN : SE \times SG : SM \times SN$, e conſeguintemente $SEG - SMN$, ou $EMNG : SEG :: SE \times SG - SM \times SN : SE \times SG$; donde ſe tira $EMNG$

$$= \frac{SEG(SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG} = \frac{SEG(ab - xy)}{ab}.$$

Logo, pela primeira condiçaõ do equilibrio, teremos $pab = p'(ab - xy)$.

Pela

Pela ſegunda, acharemos juſtamente como no problema antecedente $xx - 2cx\,cos\,m = yy - 2cy\,cos\,n$; e eliminando y por meio da equaçaõ precedente, teremos finalmente

$$x^4 - 2cx^3\,cos\,m + \frac{2c(p'-p)\,abx\,cos\,n}{p'} - \frac{(p'-p)^2\,a^2\,b^2}{p'^2} = 0,$$

ſobre cujas raizes faremos as meſmas reflexões; e combinando-as com a equaçaõ $pab = p'(ab - xy)$, determinaremos as differentes ſituações, em que he poſſivel o equilibrio.

160 Se o triangulo for iſoſceles, a equaçaõ precedente ſe reſolverá em duas do ſegundo gráo, a ſaber

$$x^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p} = 0$$

$$x^2 - 2cx\,cos\,m + \frac{a^2(p'-p)}{p'} = 0,$$

a primeira das quais dá $x = a\sqrt{\frac{p'-p}{p'}}$, e $y = a\sqrt{\frac{p'-p}{p'}}$; moſtrando que o triangulo tem huma ſituaçaõ de equilibrio, quando a baſe EG eſtá horizontal. E a ſegunda dá eſtas duas combinações

$$\begin{cases} x = c\,cos\,m + \sqrt{\left[(c\,cos\,m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c\,cos\,m - \sqrt{\left[(c\,cos\,m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\,cos\,m - \sqrt{\left[(c\,cos\,m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c\,cos\,m + \sqrt{\left[(c\,cos\,m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]}, \end{cases}$$

as quais repreſentaõ outras duas poſições de equilibrio, com tanto que ſeja $\frac{p}{p'} > \frac{a^2 - (c\,cos\,m)^2}{a^2}$, e $\frac{p}{p'} < \frac{2a^2 - 2\,ac\,cos\,m}{a^2}$. Por exemplo, ſe o triangulo for equilatero, e conſeguintemente $c\,cos\,m = \frac{3}{4}a$; haverá tres ſituações de equili-

 brio,

brio, todas as vezes que o valor de $\frac{p}{p'}$ ſe achar entre os limites de $\frac{7}{16}$ e $\frac{8}{16}$.

161 Probl. III. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio de hum rectangulo homogeneo BHSK, ſuppondo que naõ tem mais que hum angulo S mergulhado no fluido* (Fig. 52.).

Conduzindo do ponto S para o meio de MN a recta SQ, e tomando $SO = \frac{2}{3} SQ$, ſerá O o centro de gravidade do triangulo MSN. E porque o centro de gravidade do rectangulo eſtá na interſecçaõ R das diagonais BS, HK, a recta RO deverá ſer vertical, ou perpendicular a MN. Tome-ſe $RP = \frac{1}{2} SR$, e conduza-ſe PQ que ſerá parallela a RO, e conſeguintemente perpendicular ao meio de MN, donde ſe ſegue que ſaõ iguais as rectas PM, PN. Em fim do ponto P tirem-ſe as rectas PA, PD perpendiculares a SH, SK reſpectivamente.

Iſto poſto, ſeja $SH = a$, $SK = b$, $SM = x$, $SN = y$, o pezo eſpecifico do rectangulo $= p$, o do fluido $= p'$; e pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $pab = \frac{p'xy}{2}$.

E porque $SP = \frac{3}{4} SB$, teremos $PA = \frac{3}{4} b$, $SA = \frac{3}{4} a$, $PD = \frac{3}{4} a$, $SD = \frac{3}{4} b$, $PM^2 = \frac{9b^2}{16} + \left(\frac{3}{4} a - x\right)^2$, e $PN^2 = \frac{9a^2}{16} + \left(\frac{3}{4} b - y\right)^2$. Logo, pela ſegunda condiçaõ do equilibrio, teremos $xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}$. Comparando eſta equaçaõ com a precedente, e eliminando y, acharemos finalmente a equaçaõ

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pab^2x}{p'} - \frac{4p^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

por meio da qual ſe determinaráõ as differentes ſituações

ções de equilibrio do rectangulo proposto.

162 Se o rectangulo for hum quadrado, teremos $a = b$, e a equaçaõ precedente se resolverá nas duas seguintes

$$x^2 - \frac{2pa^2}{p'} = 0,$$

$$x^2 - \frac{3ax}{2} + \frac{2pa^2}{p'} = 0,$$

a primeira das quais dá $x = a\sqrt{\frac{2p}{p'}}$, e conseguintemente $y = a\sqrt{\frac{2p}{p'}}$, por onde se mostra que o quadrado tem huma posiçaõ de equilibrio, quando a sua diagonal HK está horizontal, como he evidente por si mesmo; e a segunda dá

$$x = \frac{1}{4}a\left[3 \pm \sqrt{\frac{9p' - 32p}{p'}}\right]$$

$$y = \frac{1}{4}a\left[3 \mp \sqrt{\frac{9p' - 32p}{p'}}\right],$$

donde resultaõ outras duas posições de equilibrio, quando o valor de $\frac{p}{p'}$ se achar entre os limites de $\frac{9}{32}$ e $\frac{8}{32}$.

163 Pelo mesmo methodo se achará a situaçaõ de equilibrio de hum rectangulo, que tiver tres angulos mergulhados no fluido. Para isso naõ he necessario mais que imaginar a Fig. 52 virada com o de baixo para cima, de maneira que os tres angulos B, H, K sejaõ os que estaõ mergulhados, e que o triangulo MSN seja a parte que sahe fóra da superficie do fluido MN. Assim, conservando as mesmas denominações, teremos evidentemente, para resolver o problema, estas duas equações

$$pab = p'\left(ab - \frac{xy}{2}\right)$$

$$xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}.$$

164 PROBL. IV. *Achar a situaçaõ de equilibrio de hum rectangulo homogeneo BHSK no caso de ter dous angulos H, S mergulhados no fluido* (Fig. 53.).

Produzaõ-se as rectas SH, NM até concorrerem em Z; de de Z para o meio de SN tire-se a recta ZL, que passará necessariamente pelos centros de gravidade dos triangulos ZSN, ZHM, e do trapezio $MHSN$. Seja G o centro de gravidade do triangulo ZSN, e F o do triangulo ZHM; e conduzaõ-se as rectas GT, FK parallelas a SN, HM, e as rectas GV, FI perpendiculares a ZN. Ora, como he necessario para haver equilibrio, que o centro de gravidade do rectangulo $BHSK$ e o do trapezio $MHSN$ estejaõ na mesma vertical, se pelo ponto R meio da diagonal HK, e centro de gravidade do rectangulo, se tirar RO perpendicular á superficie do fluido MN, nesta perpendicular se achará o centro de gravidade do trapezio $MHSN$.

Seja $SH = a$, $SK = b$, $HM = x$, $SN = y$, $ZN = z$, o pezo especifico do rectangulo $= p$, e o do fluido $= p'$. Está claro, que he o trapezio $MHSN = \frac{a(x+y)}{2}$, e que pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos a equaçaõ $pab = \frac{p'(x+y)a}{2}$.

Agora conduzindo pelo ponto Z o eixo vertical ZY, e considerando os momentos dos triangulos ZSN, ZHM, e do trapezio $MHSN$ a respeito delle, teremos $MHSN.ZO = ZSN.ZV - ZHM.ZI$. Porém os triangulos semelhantes ZSN, ZHM daõ $ZS = \frac{ay}{y-x}$, $ZH = \frac{ax}{y-x}$, e conseguintemente $ZSN = \frac{ay^2}{2(y-x)}$, e $ZHM = \frac{ax^2}{2(y-x)}$; e além disto temos $ZM = ZN \frac{HM}{SN} = \frac{zx}{y}$, e as propriedades dos centros de gravidade daõ $ZT = \frac{2}{3} ZN = \frac{2z}{3}$, $ZK = \frac{2}{3} ZM = \frac{2zx}{3y}$, $GT = \frac{1}{3} NS = \frac{y}{3}$, $FK = \frac{1}{3} MH = \frac{x}{3}$. Logo nos triangulos semelhantes ZSN, GVT, FIK, teremos VT =

$= \frac{GT.SN}{ZN} = \frac{yy}{3z}$, $IK = \frac{FK.SN}{ZN} = \frac{xy}{3z}$, e conseguintemente $ZV = ZT - VT = \frac{2zz - yy}{3z}$, $ZI = ZK - IK = \frac{(2zz - yy)x}{3yz}$. E substituindo todos estes valores na equaçaõ $MHSN.ZO = ZSN.ZV - ZHM.ZI$, acharemos $\frac{a(x+y)}{2} ZO = \frac{(2zz - yy)a(y^3 - x^3)}{6yz(y-x)}$ $= \frac{(2zz - yy)a(yy + xy + xx)}{6yz}$.

Conduzindo agora pelo ponto R a recta RX parallela a MH ou a SN, e produzindo OR até E, os triangulos semelhantes ZSN, RXE daraõ $XE = \frac{SN.RX}{ZS} = \frac{b(y-x)}{2a}$, e conseguintemente $ZE = ZH + HX + XE$ $= \frac{ax}{y-x} + \frac{a}{2} + \frac{b(y-x)}{2a} = \frac{a(y+x)}{2(y-x)} + \frac{b(y-x)}{2a}$; e os triangulos semelhantes ZSN, ZOE daráõ $ZO = \frac{ZE.ZS}{ZN} = \frac{a^2y(y+x)}{2z(y-x)^2} + \frac{by}{2z}$; donde em fim resulta $MHSN.ZO = \frac{a^3y(y+x)^2}{4z(y-x)^2} + \frac{aby(y+x)}{4z}$. Comparando este segundo valor de $MHSN.ZO$ com o primeiro, e observando que $zz = yy + \frac{a^2y^2}{(y-x)^2}$, feitas todas as reducçoens, resultará a equaçaõ $2y^4 + 2x^4 - 2xy^3 - 2yx^3 - 2a^2xy + a^2y^2 + a^2x^2 - 3by^3 + 3bxy^2 + 3byx^2 - 3bx^3 = 0$, a qual se resolve nas duas seguintes

$$yy - 2xy + xx = 0$$

$$2yy + 2xy + 2x^2 + a^2 - 3by - 3bx = 0.$$

Vejamos as consequencias particulares, que dellas resultaõ.

A

A primeira dá $y = x$. Donde se segue, que o rectangulo estará em equilibrio quando o lado mergulhado no fluido for horizontal, como he evidente por si mesmo, o que se applica igualmente a cada hum dos lados do rectangulo.

Substituindo na segunda em lugar de y o seu valor $\frac{2pb - p'x}{p'}$, teremos

$$x^2 - \frac{2pbx}{p'} + \frac{4p^2b^2}{p'^2} - \frac{3pb^2}{p'} + \frac{a^2}{2} = 0,$$

donde se tira

$$x = \frac{pb}{p'} \pm \frac{1}{p'}\sqrt{\left[3b^2(pp' - p^2) - \frac{a^2p'^2}{2}\right]};$$

e por conseguinte

$$y = \frac{pb}{p'} \mp \frac{1}{p'}\sqrt{\left[3b^2(pp' - p^2) - \frac{a^2p'}{2}\right]}:$$

Assim póde ter o rectangulo mais duas situaçoens de equilibrio, com tanto que os valores de x e de y sejaõ reais, positivos, e cada hum delles menor que b.

165 Supponhamos que $b = a$, isto he, que o rectangulo se reduz a hum quadrado. Primeiramente estará em equilibrio, quando o lado metido no fluido for horizontal. E além disso teremos estas equaçoens

$$\begin{cases} x = \frac{ap}{p'} + \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \\ y = \frac{ap}{p'} - \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{ap}{p'} - \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \\ y = \frac{ap}{p'} + \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]}, \end{cases}$$

que daõ outras duas situaçoens de equilibrio, quando o valor de $\frac{p}{p'}$ se achar entre os limites $\frac{3}{4}$ e $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

166 Probl. V. *Achar a posiçaõ que deve tomar sobre hum fluido a parabola homogenea A B C, supponde que os pontos* B, *C estaõ fóra delle* (Fig. 54.).

He

He evidente, que a parabola tem huma ſituaçaõ de equilibrio, quando o ſeu eixo he vertical, ſuppondo ſempre que ella he eſpecificamente mais leve que o fluido. Mas aqui trata-ſe de ſaber em geral, ſe ella póde tambem pôr-ſe em equilibrio, quando o eixo eſtiver inclinado.

Seja AD o eixo, e BD ou DC a ultima ordenada. Pelo ponto H meio de MN tire-ſe o diametro HF, parallelo a DA, e pelo ponto F a ordenada FG, a recta FX para o fóco X, e a tangente FT que encontra o eixo produzido em T, e que pela propriedade da parabola he parallela a MN. Do ponto M tire-ſe MY perpendicular a FH produzida, e ajuntem-ſe os centros de gravidade K, I da parabola, e da parte mergulhada com a recta KI, que em virtude do equilibrio deve ſer vertical, ou perpendicular a MN.

Iſto poſto, ſeja $AD = a, BD = b$, o parametro do eixo $AD = \frac{bb}{a} = c, FH = x, MH = y, FG = z$, a gravidade eſpecifica da parabola $= p$, e a do fluido $= p'$. Pela propriedade deſta curva temos $AK = \frac{3}{5}a, FI = \frac{3}{5}x, GT = \frac{2zz}{c}, FT = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c}$, e os triangulos ſemelhantes FGT, MYH daõ $FT : FG :: MH : MY$ ~~ ~~ fl. $= \frac{cy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$. Porém a area parabolica $ABC = \frac{4}{3} BD . DA$, e a area $FMN = \frac{4}{3} MY . FH$. Logo, pela primeira condiçaõ do equilibrio, teremos $pab = \frac{p'cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}$.

Como a ſegunda condiçaõ ſe enche evidentemente, quando o eixo he vertical, e conſeguintemente $z = 0$, neſte caſo particular ſerá $pab = p'yx = p'x\sqrt{cx}$, donde reſulta $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. Mas tornemos ao problema geral, em que o ponto F naõ cahe ſobre o ponto A.

A propriedade da parabola dá $FX = \frac{cc+4zz}{4c}$, yy

$= x . 4$

$= x . 4 FX = \frac{x(cc + 4zz)}{c}$, e $y = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{(cc + 4zz)}}{\sqrt{c}}$.

Substituindo este valor na equaçaõ geral $pab = \frac{p'cxy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$, acharemos igualmente $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. Donde se vê, que o valor de x he sempre o mesmo, qualquer que seja a posiçaõ da parabola sobre o fluido.

Os dous triangulos semelhantes FGT, ILH daõ $FT : GT :: IH : HL = \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$, e conseguintemente $LO = HO - HL = FT - HL = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c} - \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$, e os triangulos semelhantes FGT, KLO daõ tambem $GT : FT :: LO : OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$. Mas por outra parte temos $OK = KA - OA = KA - (OT - AT) = \frac{3}{5}a - x + \frac{z^2}{c}$. Logo igualando os dous valores de OK, e reduzindo, acharemos $zz = \frac{6ac - 5cc - 6cx}{10}$, ou metendo em lugar de x o seu valor acima achado

$$zz = \frac{6ac - 5cc}{10} - \frac{6ac}{10}\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}};$$

equaçaõ, que determinará outras duas situaçoens de equilibrio, com tanto que seja $6a > 5c + 6a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$, ou $\frac{p}{p'} < \left(\frac{6a-5c}{6a}\right)^{\frac{3}{2}}$, quantidade supposta real, e positiva.

167 Probl. VI. *Achar a situaçaõ de equilibrio da mesma parabola, suppondo que o seu centro de gravidade naõ he o mesmo que o da figura, ou por naõ ser homogenea em toda*

toda a ſua extenſaõ, ou por eſtar carregada de algum pezo applicado a qualquer ponto della, que naõ ſeja o centro de gravidade da figura (Fig. 54.).

Seja K' o centro de gravidade do ſyſtema de todos os pezos applicados á parabola, que eſtaõ em equilibrio com a preſſaõ vertical do fluido. Sendo dado de poſiçaõ o ponto K', ſe delle conduzirmos $K'V$ perpendicular ao eixo AD, ſeraõ tambem dadas as rectas $K'V$, AV. Seja FMN o eſpaço parabolico mergulhado no fluido; e pelo centro de gravidade delle I, conſiderado como homogeneo, e pelo ponto K' tire-ſe a recta $K'I$, que vai encontrar o eixo no ponto K, e que deve ſer vertical por cauſa do equilibrio.

Acabando a conſtrucçaõ, como no problema precedente, conſervando as meſmas denominaçoens, fazendo mais $K'V = k$, $AV = b$, e obſervando que p ſignifica aqui a gravidade eſpecifica de hum corpo homogeneo de pezo e volume igual ao da parabola ABC, teremos pela primeira condiçaõ do equilibrio $pab = \frac{p'cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}$, donde reſultará $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$.

Os tres triangulos ſemelhantes FGT, ILH, KLO daraõ como acima $OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$, e os triangulos ſemelhantes FGT, KVK' daraõ $GT : FG :: VK' : VK = \frac{ck}{2z}$; logo $OV = OK - VK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5} - \frac{ck}{2z}$: mas temos por outra parte $OV = VT - OT = AV + AT - HF = b + \frac{z^2}{c} - x$; logo igualando entre ſi os dous valores de OV, teremos

$$10z^3 - (10cb - 6cx - 5c^2)z - 5c^2k = 0,$$

cujas raizes (depois de haver ſubſtituido em lugar de x o ſeu valor achado) determinaráõ as ſituaçoens de equilibrio da parabola propoſta; e ſuppondo $k = 0$, e $b = \frac{3}{5}a$, cahiremos

mos na soluçaõ do problema precedente, como deve ser.

Estes exemplos bastaõ para mostrar, como se deve proceder em outros casos, ou sejaõ homogeneos os corpos sustentados pelos fluidos, ou naõ.

Da Estabilidade dos corpos fluctuantes.

168 AS situações theoricas do equilibrio naõ saõ todas uteis na pratica. Porque existindo muitas causas, como as agitações do ar, e do fluido, que tendem a desordenar o equilibrio, requer-se que este tenha certa *estabilidade*, isto he, que em virtude do pezo do solido e da pressaõ vertical do fluido se restitua ao primeiro estado, no caso de haver sido alterado por alguma causa; e para isso naõ somente he necessario, que os centros de gravidade do solido e da parte mergulhada estejaõ na mesma vertical, mas tambem que tenhaõ entre si a posiçaõ e distancia competente. Isto he o que agora examinaremos, trazendo primeiro á lembrança algumas proposições de Mechanica, de que nos havemos de servir.

169 Seja CBE hum corpo de qualquer figura (Fig. 55.), que em virtude da gravidade oscilla livremente ao redor do ponto, ou eixo fixo C. Tirando para o centro de gravidade delle a recta CG, e as verticais CN, GL, represente GL o pezo do corpo $= P$, e resolvendo esta força em duas, huma GK na direcçaõ de CG, que será destruida pela resistencia do ponto C; e a outra GF perpendicular a CG, que produzirá o movimento de rotaçaõ; teremos $GF = P . sen\, GCN$, e o seu momento a respeito do eixo $C = P . CG . sen\, GCN$. Seja mn o arco descrito em hum instante pela particula m, e QR hum arco semelhante descrito com hum raio dado CQ. O momento da particula m em ordem ao mesmo eixo será $m . mn . Cm = m . Cm^2 \frac{QR}{CQ}$; e como $\frac{QR}{CQ}$ he constante para todas as moleculas, e a soma de todos os productos $m . Cm^2$ he o momento de inercia relativo ao eixo C, fazendo este momento $= S$, teremos $S \frac{QR}{CQ}$ por expres-

expreſſaõ do momento de rotaçaõ da maſſa inteira, o qual ſendo igualado ao da força GF, que o produz, dará

$$P.CG.\mathit{fen}GCN = S\frac{QR}{CQ},\ \text{e}\ \frac{QR}{CQ} = \frac{P.CG.\mathit{fen}GCN}{S}.$$

170 Suppondo outro corpo, que oſcille ao redor do eixo c (Fig. 56.), e deſignando por p, cg, gcn, s, qr, cq as quantidades analogas a P, CG, GCN, S, QR, CQ, teremos $\frac{qr}{cq} = \frac{p.cg.\mathit{fen}\,gcn}{s}$. Logo, ſe for $gcn = GCN, cq = CQ$, e $\frac{P.CG}{S} = \frac{p.cg}{s}$, teremos $qr = QR$. Donde ſe vê, que os corpos deſcreveráõ eſpaços iguais em tempos iguais; e por conſeguinte, que faraõ oſcillações iſochronas, qualquer que ſeja a grandeza do angulo inicial GCN, ou gcn.

Se alem diſſo for taõ pequeno o pezo p, que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ conſiderar no centro de gravidade g, teremos $s = p.cg^2$, e a equaçaõ $\frac{P.CG}{S} = \frac{p.cg}{s}$ dará $cg = \frac{S}{P.CG}$, expreſſaõ do comprimento de hum pendulo ſimples (Fig. 56.), que faz as oſcillações no meſmo tempo que o outro pendulo compoſto (Fig. 55.).

171 Se o pendulo ſimples (Fig. 56.) deſcrever hum arco total muito pequeno gt, que ſe confunda com a ordenada gn; teremos $\mathit{fen}\,gcn = \frac{gn}{cg} = \frac{gt}{cg}$, e $\frac{qr}{cq} = \frac{gx}{cg}$; e a equaçaõ $\frac{qr}{cq} = \frac{p.cg.\mathit{fen}\,gcn}{s}$ ſe mudará em $gx = \frac{gt}{cg}$. Do meſmo modo ſuppondo que o arco total he yt, e que em hum inſtante deſcreve o arco yz, teremos $yz = \frac{yt}{cg}$. Logo $gx : yz :: \frac{gt}{cg} : \frac{yt}{cg} :: \frac{p.gt}{cg} : \frac{p.yt}{cg}$ Mas $\frac{p.gt}{cg}$ e $\frac{p.yt}{cg}$ ſaõ evidentemente as for-

ças

ças, que fazem correr á mesma massa p os espaços gx, yz; logo, sendo estes proporcionais ás mesmas forças, seraõ descritos em tempos iguais. O mesmo se demonstra de todos os outros elementos correspondentes dos arcos totais; logo as oscillações de hum mesmo pendulo saõ isochronas, quaisquer que sejaõ os arcos totais, com tanto que sejaõ muito pequenos.

172 Se a qualquer corpo perfeitamente livre se applicar huma força F, cuja direcçaõ FH naõ passe pelo centro de gravidade delle G (Fig. 57.), he demonstrado na Dynamica que o centro de gravidade se moverá parallelamente a FH, como se a força lhe fosse immediatamente applicada. E se por FH se conduzir o plano $ABDE$, que passe pelo centro de gravidade G, e do ponto G se tirar GH perpendicular a FH, e GO perpendicular ao plano $ABDE$, tambem he demonstrado que o corpo tomará hum movimento de rotaçaõ ao redor do eixo GO, como se este fosse fixo, com tanto que o plano $ABDE$ divida o corpo em duas partes iguais, e semelhantes. Faltando esta condiçaõ, o movimento rotatorio naõ se fará simplesmente ao redor do eixo GO, mas em differentes sentidos ao redor do ponto G. Mais abaixo determinaremos em geral as oscillações dos corpos fluctuantes. Aqui suppomos a referida condiçaõ, ao menos sensivelmente, e consideramos somente as oscillações, que se fazem ao redor do eixo GO, suppondo que este he immovel, ou que passa sempre pelos mesmos pontos do corpo.

173 Sendo pois a velocidade do centro de gravidade parallelamente a $FH = V$, e o pezo do corpo $= P$, teremos $V = \frac{F}{P}$. E se do ponto G com o raio dado GQ se descrever o arco QR, medida do angulo de rotaçaõ, e se fizer o momento de inercia relativo ao eixo $GO = S$, teremos $\frac{QR}{GQ} = \frac{F.GH}{S}$ (n. 169.).

Agora suppondo, que alem da força F obra sobre o corpo a força da gravidade; que a força F he dirigida verticalmente de baixo para cima; e que o plano $ABDE$ he vertical, e conseguintemente horizontal o eixo GO; está

eſtá claro, que em lugar da equaçaõ $V = \frac{F}{P}$ teremos $V = \frac{F - P}{P}$. A outra equaçaõ $\frac{QR}{GQ} = \frac{F.GH}{S}$ ficará ſempre a meſma; porque paſſando a força P pelo centro de gravidade, naõ póde reſultar della movimento algum de rotaçaõ.

174 A applicaçaõ deſtes principios ao noſſo caſo he evidente. A força F repreſenta a preſſaõ vertical do fluido que tende a levantar o corpo, ao meſmo tempo que o pezo delle P tende a fazello deſcer; e pela equaçaõ $V = \frac{F - P}{P}$ ſe vê, que para o corpo naõ ter movimento vertical, he neceſſario que ſeja $F = P$. A ſegunda equaçaõ $\frac{QR}{GQ} = \frac{F.GH}{S}$ moſtra tambem, que naõ eſtando na meſma vertical os dous centros de gravidade do corpo, e da parte mergulhada, conſiderada como homogenea, haverá neceſſariamente movimento de rotaçaõ ao redor do eixo GO, tanto maior quanto for maior o momento $F.GH$, por ſer S conſtante. Eſta velocidade angular póde chegar, ou apartar da vertical, que paſſa pelo centro de gravidade do corpo, o centro de gravidade da parte mergulhada. No primeiro caſo haverá eſtabilidade na ſituaçaõ do equilibrio, e no ſegundo naõ a haverá; mas qualquer leve agitaçaõ baſtará para virar o corpo. Expliquemos eſta theorica geral com alguns exemplos.

175 Probl. I. *Determinar as condiçoẽs da eſtabilidade de huma figura plana ABK ſuſtentada ſobre hum fluido MN* (Fig. 58.).

Póde ſucceder, ou que o centro de gravidade da figura inteira eſteja mais alto que o da parte mergulhada, conſiderada como homogenea, ou tambem que o primeiro eſteja mais baixo que o ſegundo, por naõ ſer homogenea a figura, ou por eſtar carregada de algum pezo eſtranho na parte inferior. Examinemos ſeparadamente ambos os caſos, para maior clareza.

176 Sejaõ G, F os centros de gravidade da figura ABK, e da parte MNK, os quais devem eſtar na meſma vertical GZ em quanto ſubſiſte o equilibrio. Supponhamos,