ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
M. BEZOUT

DA ACADEMIA REAL
DAS SCIENCIAS DE PARIS &c. &c.

TRADUZIDOS DO FRANCEZ.
QUINTA EDIÇAÕ.

COIMBRA:
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

M. DCC. LXXXXV.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

INDICE

Das materias que se contém nestes Elementos.

Me-

Das

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

NOÇÕES PRELIMINARES
Sobre a natureza dos Numeros, e ſuas differentes eſpecies.

1

DAMOS o nome de *Quantidade*, em geral, a tudo aquillo que he capaz de augmento, ou diminuiçaõ; como he, por exemplo, a *extenſaõ*, *duraçaõ*, *pezo &c.* Tudo o que he quantidade pertence ao objecto das *Sciencias Mathematicas*. Mas a *Arithmetica*, que he a primeira parte dellas, e ſerve de porta para todas as outras, trata ſómente da quantidade *diſcreta*, que he a que ſe exprime por numeros.

2 A Arithmetica pois he a *Sciencia de contar*: ella conſidera a natureza, e propriedades dos numeros, e tem por fim enſinar os meios mais faceis, tanto para os repreſentar, como para os compôr, e reſolver, que he o que ſe chama *calcular*.

3 Para ſe formar huma idéa exacta dos nume-

ros he neceſſario ſaber primeiro o que entendemos por *unidade.*

4 A *Unidade* he huma quantidade, que ſe toma (as mais das vezes arbitrariamente) para ſervir de termo de comparaçaõ a todas as outras quantidades da meſma eſpecie. Aſſim, quando dizemos que hum corpo péza *ſinco* libras, a *libra* he a unidade, iſto he, a quantidade, com a qual ſe compara, e pela qual ſe faz idéa do pezo delle. Podiamos igualmente tomar a *onça* para unidade, e entaõ o pezo do meſmo corpo ſeria *oitenta* onças.

5 O *Numero* ſerve pois para exprimir de quantas unidades, ou partes da unidade ſe compõe qualquer quantidade.

Se a quantidade ſe compõe taõ ſómente de unidades, o numero que a exprime ſe chama *inteiro*: porém ſendo compoſta de unidades, e juntamente de partes da unidade, ou ſimplesmente de partes da unidade, entaõ chamamos o numero *quebrado*, ou *fracçaõ*: aſſim, *tres e meio* fazem hum numero quebrado, ou fraccionario; e *tres quartas*, huma fracçaõ.

6 O numero, de que nos ſervimos, ſem determinar a eſpecie das unidades, como quando dizemos ſimplesmente *tres*, ou *tres vezes*, *quatro*, ou *quatro vezes*, chama-ſe numero *abſtracto*; porém quando declaramos ao meſmo tempo a eſpecie das unidades, como quando dizemos *quatro libras*, *cem tonelladas*, chama-ſe numero *concreto.*

Ha muitas outras eſpecies de numeros, dos quaes daremos a definiçaõ ao meſmo tempo que delles houvermos de tratar.

Da

Da Numeraçaõ ordinaria, e da Dizima.

7 A *Numeraçaõ* he a arte de exprimir todos os numeros por huma quantidade limitada de nomes, ou de caracteres. Estes caracteres, que saõ as letras da escritura numerica, chamaõ-se *algarismos*. Naõ he necessario dizer aqui os nomes dos numeros, por ser conhecimento familiar a toda a sorte de pessoas. Quanto ao modo de os representar por algarismos, naõ podemos deixar de explicar com toda a exactidaõ os seus principios.

8 Os caracteres, de que usamos na *Numeraçaõ* actual, e os nomes dos numeros, que elles representaõ, saõ estes: (*)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cifra	*hum*	*dous*	*tres*	*quatro*	*sinco*	*seis*	*sete*	*oito*	*nove*

Para exprimir todos os outros numeros com estes mesmos caracteres, se assentou: Que de dez unidades se fizesse huma só, a qual se chamasse *dezena*, e que se contasse por dezenas da mesma sorte, que se conta por unidades, isto he, que se contassem *duas* dezenas, *tres* dezenas &c. até *nove*; e que para representar estas novas unidades se usasse dos mesmos algarismos com que se repre-

A 2 sen-

(*) Na Arithmetica vulgar usamos tambem de huma figura, que chamamos *Cifraõ*, a qual se escreve pela maior parte como o *Phi* Grego, e algumas vezes desta fórma U. O seu lugar he entre os *milhares*, e as *centenas*, e serve para ler com mais facilidade os numeros, distinguindo-se á primeira vista a casa dos *milhares*, como em 425U372. Tambem serve de abbreviatura, quando os tres ultimos algarismos saõ cifras. Assim 725U he o mesmo, que 725000.

ſentaõ as unidades primitivas, diſtinguindo-as ſómente pelo lugar, que ſe lhes aſſinallou á eſquerda dellas.

Aſſim, para repreſentar *ſincoenta e quatro*, que contém *ſinco* dezenas, e *quatro* unidades, eſcreveremos 54. Para repreſentar *ſeſſenta*, que contém hum numero exacto de dezenas, e nenhuma unidade, eſcreveremos 60; pondo huma cifra na caſa das unidades, para moſtrar que as naõ ha neſte numero, e juntamente determinar a letra 6 a ſignificar dezenas. Deſte modo podemos contar até *noventa e nove* incluſivamente.

9 Pelo que, antes de paſſarmos adiante, notemos eſta propriedade da Numeraçaõ actual, a ſaber: *Que huma letra poſta á eſquerda da outra, ou ſeguida de huma cifra, repreſenta hum numero dez vezes maior, do que havia de repreſentar, ſe eſtiveſſe ſó.*

10 Por huma convençaõ ſemelhante contaremos de 99 até *novecentos e noventa e nove*. Porque de dez dezenas faremos huma unidade, a qual chamaremos *centena*, porque dez vezes dez fazem cem; e contaremos as centenas deſde *huma* até *nove*, eſcrevendo-as com os meſmos algariſmos, ſómente com a differença de as pôrmos á eſquerda das dezenas.

Aſſim, para exprimir *oitocentos e ſincoenta e nove*, que contém *oito* centenas, *ſinco* dezenas, e *nove* unidades, eſcreveremos 859. Se foſſem *oitocentos e nove*, que contém *oito* centenas, e *nove* unidades, ſem dezena alguma, ſeria neceſſario eſcrever 809; pondo huma cifra na caſa das dezenas, que faltaõ. E ſe tambem faltaſſem as unidades, deveriamos pôr duas cifras; de ſorte que para aſſentar *oitocentos*, eſcreveremos 800. 11

11 Pelo que notaremos tambem: *Que em virtude da mesma convençaõ, qualquer letra seguida de outras duas, ou de duas cifras, mostra hum numero cem vezes maior, de que mostraria estando só.*

12 Com o mesmo artificio contaremos de 999 até *nove mil novecentos e noventa e nove*; formando de dez centenas huma unidade, que se chama *milhar*, porque dez vezes cem fazem mil; contando estas unidades pelo modo, que já dissemos, e representando-as com as mesmas letras, situadas porém á esquerda das centenas.

Assim para assentar *sete mil oitocentos e sincoenta e nove*, escreveremos 7859; para assentar *sete mil e nove*, escreveremos 7009; e para assentar *sete mil*, escreveremos 7000. Donde se vê: *Que huma letra sendo seguida de outras tres, ou de tres cifras, mostra hum numero mil vezes maior, do que mostraria estando só.*

13 Continuando por diante do mesmo modo, fazendo sempre de dez unidades de qualquer ordem huma só unidade, e escrevendo as novas unidades, que se vaõ formando, nas casas consecutivas, caminhando sempre para a esquerda, chegamos a exprimir, e assentar de hum modo uniforme, com os dez algarismos propostos, todos os numeros inteiros, que se podem imaginar.

14 Para lermos com facilidade, ou dizermos o valor de qualquer numero, que conste de quantos algarismos quizermos, dividillo-hemos em classes de tres letras cada huma, exceptuando a ultima da parte esquerda, que conforme a quantidade das letras, de que o numero constar, poderá ser tambem de huma, ou de duas letras. A' primeira, terceira, e todas as mais classes impares, prin-

principiando da direita para a esquerda, daremos por sua ordem os nomes seguintes, *unidades*, *milhoens*, *billioens*, *trillioens*, *quatrillioens*, *quintillioens*, *sextillioens* &c.; e á segunda, quarta, e todas as mais classes pares, o nome de *milhares*. Feito isto, advertiremos que a primeira letra de cada classe (principiando sempre da parte direita) mostra as unidades proprias da sua classe, conforme os nomes que lhes temos dado, e que a segunda mostra as dezenas, e a terceira as centenas das mesmas unidades respectivas.

Entaõ, principiando da parte esquerda, leremos cada huma das classes, como se estivesse só, applicando-lhe no fim a denominaçaõ respectiva das suas unidades. Assim, por exemplo, para declararmos o valor do numero seguinte:

23^1	456^1	789^1	234^1	565^1	456
milhares	*billioens*	*milhares*	*milhoens*	*milhares*	*unidades*

Diremos: vinte e tres *mil*, quatrocentos e sincoenta e seis *billioens*; setecentos e oitenta e nove *mil*, duzentos e trinta e quatro *milhoens*; quinhentas e sessenta e sinco *mil*, quatrocentas e sincoenta e seis *unidades*. (*)

15 Da *Numeraçaõ*, que temos explicado, e que he de pura convençaõ, se segue manifestamente:

(*) Nas Contas pecuniarias usamos do termo *conto* em lugar de *milhaõ*; de *conto de contos* em lugar de *milhaõ de milhoens*, ou de hum *billiaõ*. Naõ dizemos *hum milhaõ de reis*, mas *hum conto de reis*, ou simplesmente *hum conto*. Dizemos igualmente *hum conto de ouro*, ou *hum milhaõ de cruzados*. Em tudo o mais naõ contamos senaõ por *milhoens*, pois naõ dizemos hum *conto*, mas hum *milhaõ* de moedas, de arrobas &c.

te: Que á medida que ſe vaõ ſeguindo os algariſmos de hum numero da direita para a eſquerda, repreſentaõ unidades conſecutivamente maiores, ſendo ſempre cada huma dellas dez vezes maior que a precedente; e por conſeguinte: Que para fazer hum numero dez, cem, mil vezes maior &c. baſta pôr depois do algariſmo das unidades, huma, duas, tres cifras &c. Pela razaõ contraria, quando em hum numero ſe caminha da eſquerda para a direita, os algariſmos conſecutivos moſtraõ unidades cada vez menores, ſendo ſempre cada huma dellas dez vezes menor que a precedente.

16 Tal he o artificio da *Numeraçaõ* actual: ella ſerve de baſe a todos os outros modos de contar, aindaque em muitas artes naõ ſe guarde ſempre a regra de contar unicamente por dezenas, dezenas de dezenas &c.

17 Para aſſentar o valor das quantidades mais pequenas do que a unidade, que ſe tem eſcolhido, divide-ſe eſta em outras unidades mais pequenas. O numero dellas he arbitrario, com tanto que por ellas ſe poſſaõ medir as quantidades, que queremos moſtrar. Porém o que mais ſe deve procurar neſta ſorte de diviſões, he que ſe façaõ de maneira, que dem aos calculos a facilidade maior que he poſſivel. Por eſta razaõ, em lugar de dividir logo a unidade em hum grande numero de partes, que ſejaõ ſufficientes para a avaliaçaõ das mais pequenas quantidades, ſe divide primeiro em hum moderado numero de partes, cada huma das quaes ſe divide em outras, e eſtas em outras &c. E eſta he a razaõ, porque nas moédas ſe divide a *libra* em 20 partes, que ſe chamaõ *ſoldos*, e o *ſoldo* em 12 partes, que ſe chamaõ *dinheiros*. Do meſ-

mesmo modo nos pezos divide-se a *libra* em 2 *marcos*, o marco em 8 *onças*, e a onça em 8 *oitavas*; de sorte, que no primeiro caso se faz a divisaõ por *vintenas*, e por *duzias*; e no segundo, por *meios*, e *oitavas* &c.

18 O numero composto de partes, que se reportaõ do modo sobredito a differente especie de unidades, chama-se *Complexo*, *Denominado*, ou *Heterogeneo*; e ao contrario chama-se *Incomplexo* todo aquelle, que involve huma só especie de unidades. Assim 8^{lb}, ou 8 *libras*, he numero incomplexo; e 8^{lb} 17^{s} 8^{d}, ou 8 *libras*, 17 *soldos*, e 8 *dinheiros*, numero complexo.

19 Cada arte tem o seu modo particular de dividir a unidade principal, de que se serve. As divisões da *toesa* naõ saõ as mesmas que as da *libra*; as da *libra* saõ differentes das do *dia*, e da *hora*; e estas differem tambem das do *marco*, e assim as mais. De todas ellas mostraremos o valor, quando tratarmos dos numeros complexos.

20 Porém de todas as divisões, e subdivisões, que se podem fazer da unidade, a que mais contribue sem duvida alguma para a facilidade dos calculos, he a *divisaõ decimal*, na qual se suppõe a unidade dividida em dez partes, cada huma destas em outras dez, e assim por diante. Della se faz hum uso continuo na practica das Sciencias Mathematicas; e tem a vantagem de que a sua numeraçaõ, e o seu calculo he do mesmo modo, que o dos numeros ordinarios e inteiros, como agora se verá.

21 Para assentar pois em *partes decimais* as quantidades mais pequenas que a unidade, imagina-se a mesma unidade, qualquer que ella seja,

ja,

ja, v. g. *libra*, *toesa* &c., composta de dez partes iguaes, assim como se imagina a *dezena* composta de dez *unidades*, ou a *libra* composta de vinte *soldos*. A estas novas unidades, em contraposição das *dezenas*, damos o nome de *decimas*; representamo-las com os mesmos algarismos; e porque são dez vezes menores que as unidades principais, dar-lhes-hemos lugar á direira dellas.

Para tirar porém o equivoco que podia haver, tomando-se as *decimas* por unidades simples, assentou-se ao mesmo tempo fixar por huma vez a casa das unidades principais, a que o numero todo se reporta, por meio de hum sinal particular. Para isso se usa de huma virgula (ou de hum ponto, ou de huma risca), a qual se póe ao lado direito das unidades, ou entre as unidades e as decimas, que vem a ser o mesmo. Assim, para assentarmos *vinte e quatro unidades* e *tres decimas* partes da unidade, escreveremos deste modo 24,3.

22 Da mesma sorte podemos actualmente considerar as *decimas*, como unidades formadas de outras dez, cada huma dez vezes mais pequena do que ellas; e pela mesma razaõ de analogia, as assentaremos á direita das mesmas *decimas*. Estas novas unidades dez vezes mais pequenas que as decimas, vem a ser cem vezes mais pequenas que as unidades principais, e por isso se chamaõ *centesimas*. Assim, para notar *vinte e quatro unidades*, *tres decimas*, *e sinco centesimas*, escreveremos deste modo 24,35.

23 Igualmente podemos conceber as *centesimas* como formadas de dez partes. Estas seraõ mil vezes mais pequenas que a unidade principal, e por conseguinte se chamaráõ *millesimas*; e por se-

rem

rem dez vezes mais pequenas que as *centesimas*, se assentaráõ á direita dellas. Continuando por diante a dividir do mesmo modo na razaõ decupla, formaremos novas unidades consecutivas, ás quaes daremos os nomes de *decimas-millesimas*, *centesimas-millesimas*, *millionesimas*, *decimas-millionesimas*, *centesimas-millionesimas*, *bimillionesimas* &c., e as assentaremos por sua ordem nas casas seguintes, caminhando sempre para a direita.

24 As partes da unidade, que acabamos de explicar, saõ as *fracções decimais*, a que os nossos Auctores daõ commumente o nome de *Dizima*.

25 O modo de ler, ou dizer o valor dos algarismos pertencentes á *Dizima*, he como nos outros numeros. Depois de se haverem lido as letras que estaõ á esquerda da virgula, lem-se as letras decimais da mesma sorte, applicando-lhes no fim o nome das unidades respectivas, que competem á sua ultima casa. Assim, para declarar o valor deste numero 34,572 diremos, trinta e quatro unidades, e quinhentas e setenta e duas *millesimas*: se, por exemplo, se tratasse de *toesas*, diriamos, trinta e quatro *toesas*, e quinhentas e setenta e duas *millesimas partes* de huma *toesa*.

A razaõ disto he facil de perceber, em se advertindo que no numero 34,572 a letra 5 se póde tomar indifferentemente por sinco *decimas*, ou por quinhentas *millesimas*; porque valendo a *decima* 10 *centesimas* (n. 22), e a *centesima* 10 *millesimas* (n. 23), cada *decima* valerá dez vezes dez *millesimas*, ou 100 *millesimas*; e assim as 5 *decimas* valeráõ 500 *millesimas*. Pela mesma razaõ, a letra 7 mostrará 70 *millesimas*, porque cada *centesima* vale 10 *millesimas* (n. 23).

26

26 Quanto á denominaçaõ das unidades reſpectivas da ultima caſa dos algariſmos decimais, ſerá ſempre facil de achar, contando ſobre cada huma das letras por ſua ordem, da virgula para a direita, os nomes ſeguintes: *decimas*, *centeſimas*, *milleſimas*, *decimas-milleſimas*, *centeſimas-milleſimas*, *millioneſimas* &c.

27 No caſo de naõ haver unidades, mas taõ ſómente partes decimais da unidade, para evitar toda a equivocaçaõ aſſentaremos huma cifra na caſa das unidades. Aſſim para declarar 125 *milleſimas*, eſcreveremos deſte modo 0, 125. Se quizeſſemos moſtrar 25 *milleſimas*, eſcreveriamos 0,025, aſſentando huma cifra na caſa das *decimas*, naõ ſómente para moſtrar que as naõ ha no dito numero, mas tambem para ficarem os algariſmos ſeguintes no ſeu devido lugar. Pela meſma razaõ, querendo declarar 6 *decimas-milleſimas*, eſcreveremos 0,0006, &c.

28 Suppoſta a intelligencia dos principios precedentes, examinemos as mudanças, que reſultaõ no valor de hum numero, quando a virgula ſe muda do ſeu lugar.

Como a virgula ſerve para marcar a caſa das unidades, e como o valor de cada hum dos algariſmos depende da ſua diſtancia local, e reſpectiva á meſma caſa das unidades, fica evidente, que mudando-ſe a virgula huma, duas, tres caſas &c. para a eſquerda, o numero ſe fará dez, cem, mil vezes &c. mais pequeno; e ao contrario dez, cem, mil vezes &c. maior, ſe a virgula ſe adiantar huma, duas, tres caſas &c. para a direita.

E com effeito, ſe tomarmos o numero 4327,5264, e mudarmos a virgula para a caſa ſeguinte á eſquerquerda, de ſorte que fique 432,75264, he manifeſto, que os *milhares* do primeiro numero paſſaõ no ſegundo para *centenas*, as *centenas* para *dezenas*, as *dezenas* para *unidades*, as *unidades* para *decimas*, as *decimas* para *centeſimas*, e aſſim por diante. Logo cada parte do primeiro numero, e por conſeguinte todo elle, ſe tornou dez vezes menor em virtude da mudança da virgula. Pelo contrario, ſe mudaſſemos a virgula huma caſa para a direita, e eſcreveſſemos 43275,264, os *milhares* do primeiro numero ſe converteriaõ em *dezenas de milhares*, as *centenas* em *milhares*, as *dezenas* em *centenas*, as *unidades* em *dezenas*, as *decimas* em *unidades*, as *centeſimas* em *decimas*, e aſſim por diante; mudança, de que manifeſtamente reſulta hum numero dez vezes maior que o primeiro.

29 Diſcorrendo do meſmo modo acharemos, que mudando a virgula duas, ou tres caſas para a eſquerda, reſulta hum numero cem, ou mil vezes menor; e pelo contrario, cem, ou mil vezes maior, ſe a virgula ſe mudar duas, ou tres caſas para a direita.

30 A ultima obſervaçaõ que faremos ſobre a *Dizima*, he que naõ ſe altera o valor de hum numero, aſſentando depois da ultima letra decimal quantas cifras quizermos. Aſſim 43,25 he o meſmo que 43,250, ou 43,2500, ou 43,25000 &c.

Porque valendo cada *centeſima* o meſmo que 10 *milleſimas*, ou 100 *decimas-milleſimas* &c., ás 25 *centeſimas* valeraõ 250 *milleſimas*, ou 2500 *decimas-milleſimas* &c. Em huma palavra: He o meſmo, como ſe em lugar de 25 moedas de deſaſeis toſtões (25 *piſtoles*) diſſeſſemos 250 *libras de França*;

ſa; ou em lugar de 25 *quintais*, diſſeſſemos 2500 *arrateis*. (*)

Das Operações da Arithmetica.

31 S*Omar*, *Diminuir*, *Multiplicar*, *e Repartir*, ſaõ as quatro operações fundamentaes da Arithmetica, a que os noſſos Eſcritores daõ o nome de *Eſpecies*. Todas as queſtões, que ſe podem propôr ſobre os numeros, ſe reduzem finalmente a praticar alguma deſtas Eſpecies, ou todas ellas. E por iſſo convém muito adquirir o habito de as executar com promptidaõ, e facilidade, procurando alcançar a razaõ em que ellas ſe fundaõ.

32 O fim da Arithmetica, como já diſſemos, he enſinar os meios de calcular facilmente os numeros. Eſtes meios conſiſtem em reduzir o calculo dos numeros compoſtos ao dos numeros ſimples, que ſe exprimem pelo menor numero de letras que he poſſivel, fazendo por partes todas as operações, como logo moſtraremos.

Da eſpecie de Somar, tanto em numeros inteiros, como em decimais.

33 S*Omar* naõ he outra couſa mais, do que moſtrar o valor total de muitos numeros por meio de hum ſó, que ſeja igual a todos juntos. Eſte numero, que ſe buſca por meio da operaçaõ, chamaſe

(*) O *quintal* de França tem 100 arrateis. Entre nós o *quintal* commum tem 128 arrateis, e o *quintal* da caſa da India 112.

ſe *Soma* ; e os numeros que ſe ajuntaõ , (os quaiſ devem ſignificar todos a meſma eſpecie de unidades) chamaõ-ſe *Addições* , ou *Parcellas*.

Quando os numeros , que ſe haõ de ſomar , ſaõ *digitos* , iſto he , quando naõ ſe eſcrevem com mais do que huma letra , naõ ha neceſſidade de regra alguma para achar a ſua ſoma. Quando porém forem numeros compoſtos , iſto he , quando ſe eſcrevem com muitas letras , uſaremos da regra ſeguinte.

Eſcreveremos as *addições* humas debaixo das outras , de ſorte que fiquem unidades debaixo de unidades , dezenas debaixo de dezenas &c. , e por baixo de todas paſſaremos huma riſca , que as ſepare , e diſtinga da ſoma.

Entaõ ſomaremos primeiramente todos os algariſmos , que eſtaõ na columna das unidades ; ſe a ſoma naõ paſſar de 9 , eſcrevella-hemos por baixo ; ſe paſſar de 9 , como entaõ comprehende dezenas , ſó poremos por baixo o que excede do numero das dezenas , e contaremos eſtas dezenas por outras tantas unidades , e ſomallas-hemos juntamente com os algariſmos da colunna ſeguinte. Nella obſervaremos a meſma regra , como na primeira ; e aſſim por diante de colunna em colunna , até chegar á ultima , debaixo da qual eſcreveremos a ſua ſoma inteira , ou conſte de hum , ou de mais algariſmos. Eſta regra ſe entenderá melhor por meio dos exemplos ſeguintes.

Exem-

Exemplo I.

SE nos derem para ſomar eſtas duas addições 54925 . . . e 2023, eſcrevellas-hemos do modo que aqui ſe vê:

54925	
2023	
56948	Soma

E tendo paſſado huma riſca por baixo dellas, começaremos pelas unidades, dizendo: 5 e 3 fazem 8, e eſcreveremos 8 debaixo deſta meſma columna. Paſſando ás dezenas, diremos: 2 e 2 fazem 4, e eſcreveremos 4 por baixo. Nas centenas diremos, 9 e o fazem 9, e eſcreveremos 9 por baixo. Nos milhares diremos: 4 e 2 saõ 6, e eſcreveremos 6 por baixo da riſca. E na columna ſeguinte diremos finalmente, 5 e o fazem 5, e eſcreveremos 5 na meſma columna.

He evidente, que o numero achado 56948 he a ſoma dos dous numeros propoſtos, pois que elle contém as unidades, dezenas, centenas, milhares, e dezenas de milhares de ambos elles, as quais ajuntámos por partes na meſma operaçaõ.

Exem-

Exemplo II.

SE nos perguntarem a ſoma dos quatro numeros ſeguintes 6903 . . . 7854 . . . 953 . . . 7327, aſſentallos-hemos do modo que aqui ſe moſtra:

6903	
7854	
953	
7327	
23037	Soma

E começando, como no exemplo precedente, pela colunna das unidades, diremos: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17; e como neſta ſoma parcial a letra 7 pertence á caſa das unidades onde eſtamos, e a letra 1 á caſa das dezenas, eſcreveremos 7 debaixo da riſca na colunna das unidades, e guardaremos 1 para o ſomar com os algariſmos da colunna ſeguinte, que he das dezenas.

Paſſando a ella, diremos: 1, que vem da colunna precedente, e 5 (porque naõ he neceſſario ter conta da cifra) fazem 6, e 5 fazem 11, e 2 fazem 13. Pela meſma razaõ eſcreveremos 3 debaixo deſta colunna, e levaremos 1 para a ſeguinte, dizendo: 1 e 9 ſaõ 10, e 8, ſaõ 18, e 9 ſaõ 27, e 3 ſaõ 30. Aſſim poremos o em direito deſta colunna, e levaremos 3 para diante, dizendo do meſmo modo: 3 e 6 ſaõ 9, e 7 ſaõ 16, e 7 ſaõ 23. Deſte numero 23 aſſentaremos a letra 3 debaixo da colunna que temos ſomado; e porque naõ ha mais colunna para onde levemos a letra 2, a eſcreveremos no lugar ſeguinte para a eſquerda;

e concluida a operaçaõ, diremos que ſomaõ as addições propoſtas 23037.

34 Se as addições forem acompanhadas de *Dizima*, como neſta ſe procede do meſmo modo que nos numeros ordinarios, contando ſempre por *dezenas* de caſa em caſa da direita para a eſquerda, a regra para as ſomar he abſolutamente a meſma, tendo ſempre a attençaõ de ajuſtar em huma meſma colunna as unidades da meſma ordem, o que ſe conſeguirá, ficando as virgulas em direitura de alto abaixo.

Exemplo III.

SE quizermos ſomar os tres numeros ſeguintes 72,957 . . . 12,8 . . . 124,03, aſſentallos-hemos como aqui ſe moſtra:

$$\begin{array}{rl} 72{,}957 & \\ 12{,}8 & \\ 124{,}03 & \\ \hline 209{,}787 & \text{Soma} \end{array}$$

E praticando a regra, como nos exemplos precedentes, acharemos que ſomaõ 209,787.

Da eſpecie de Diminuir, tanto em numeros inteiros, como em decimais.

35 D*Iminuir* he huma operaçaõ, pela qual ſe tira hum numero de outro numero. O que della reſulta chama-ſe *reſto*, *exceſſo*, ou *differença*.

Para fazer eſta operaçaõ, aſſentaremos o numero, que queremos tirar, por baixo do outro (que ſempre deve ſer o maior) do meſmo modo que aſſentamos as addições na regra de ſomar. E paſſando huma riſca por baixo delles , iremos tirando da direita para a eſquerda cada numero inferior do ſuperior , que lhe ficar correſpondente , a ſaber , as unidades das unidades , as dezenas das dezenas &c. , e eſcreveremos cada reſto debaixo da riſca pela meſma ordem , pondo cifra todas as vezes que naõ reſtar nada.

Quando o algariſmo debaixo ſe achar maior que o de ſima , eſte ſe augmentará com dez unidades , tomando para iſſo mentalmente empreſtada huma das unidades do algariſmo vizinho da parte eſquerda , o qual por eſta razaõ ſe deve tratar como diminuido de huma unidade na operaçaõ ſeguinte.

Exemplo I.

QUerendo diminuir 5432 de 8954 , aſſentaremos ambos os numeros deſta maneira :

8954	
5432	
3522	Reſto.

E principiando pela caſa das unidades , diremos : quem de 4 tira 2 , ficaõ 2 , que aſſentaremos debaixo da riſca na meſma caſa das unidades. Depois paſſando ás dezenas , diremos : quem de 5 tira 3 , ficaõ 2 , que aſſentaremos debaixo dellas. Na terceira colunna : quem de 9 tira 4 , ficaõ 5 , que poremos em direitura della. E na quarta finalmente : quem de 8 tira 5 , ficaõ 3 , que eſcre-

eſcreveremos debaixo do 5; e feita a conta, achámos que tirando 5432 de 8954 fica o reſto 3522.

Exemplo II.

QUerendo tirar 7987 de 27646, aſſentaremos os numeros deſta maneira:

27646	
7987	
19659	Reſto.

E como de 6 naõ ſe podem tirar 7, ajuntaremos a 6 dez unidades, que ſe formaráõ de huma unidade tirada na caſa ſeguinte ao algariſmo 4, e diremos: tirando 7 de 16, ficaõ 9, que eſcreveremos debaixo do 7. Paſſando ás dezenas, naõ diremos tirando 8 de 4; mas tirando 8 de 3 ſómente, porque do 4 já tiramos 1 na operaçaõ precedente; e porque tambem de 3 naõ ſe podem tirar 8, ajuntaremos da meſma ſorte a 3 dez unidades, tomando para iſſo 1 á letra 6 da eſquerda, e diremos: tirando 8 de 13, ficaõ 5, que aſſentaremos debaixo do 8. Paſſando á terceira colunna, diremos do meſmo modo: tirando 9 de 5 naõ póde ſer; mas tirando 9 de 15 (tomada huma unidade do algariſmo 7, como nas operaçóes precedentes) ficaõ 6, que eſcreveremos debaixo do 9. Na quarta colunna: tirando 7 de 6, naõ póde ſer, mas tirando 7 de 16, ficaõ 9, que poremos debaixo do 7. E como naõ ha nada, que tirar na quinta colunna, eſcreveremos debaixo della, naõ 2, porque delle já tirámos 1 para a operaçaõ precedente, mas ſómente 1, que lhe ficou; e aſſim o reſto total ſerá 19659.

36 Eſtando cifra na caſa, donde havemos de tomar a unidade de empreſtimo, naõ a tomaremos della, mas do primeiro algariſmo ſignificativo, que depois della ſe ſeguir. Neſte caſo, aindaque realmente ſe pedem 100, ou 1000, ou 10000 &c., conforme houver huma, duas, ou tres cifras conſecutivas &c.: comtudo obraremos ſempre, como no exemplo precedente, ajuntando ſómente 10, ou 1 da caſa vizinha, ao algariſmo neceſſitado. E porque eſtes 10 ſaõ huma parte dos 100, ou 1000 &c., tomados do primeiro algariſmo ſignificativo, para empregarmos os 90, ou 990 &c., que reſtaõ, tomaremos as cifras ſeguintes, como ſe cada huma foſſe hum nove. Iſto ſe entenderá melhor por meio do exemplo ſeguinte:

Exemplo III.

	99
SE de - - - - -	20064
quizermos tirar - -	17489
	2575 Reſto.

Primeiramente, tirando 9 de 14, ficaõ 5. Depois, como de 5 (porque do 6 já tomámos 1) naõ ſe podem tirar 8, e como naõ podemos tomar 1 da letra ſeguinte que he 0, tomallo-hemos do 2, e valerá 1000 a reſpeito da caſa, onde fazemos a operaçaõ. Deſtes 1000 naõ tomaremos ſenaõ 10 para ajuntarmos a 5, e diremos, de 15 tirando 8, ficaõ 7.

E porque dos 1000 que pedimos ſó temos uſado do de 10, ou de 100 ſó temos uſado de 1, uſaremos do reſto 99, para delle tirarmos os dous algariſmos ſeguintes, que vem a ſer o meſmo que tomar cada huma das cifras, como ſe foſſe hum 9. Aſſim diremos: quem de 9 tira 4, ficaõ 5; quem de 9 tira 7, ficaõ 2; e finalmente, quem de 1 tira 1, fica 0, que naõ he neceſſario aſſentar-ſe, por ſer no ultimo lugar.

37 Se houver *Dizima* nos numeros, ſeguiremos abſolutamente a meſma regra. Porém, para evitar todo o embaraço na applicaçaõ della, faremos com que ambos tenhaõ igual numero de letras decimais, ajuntando as cifras, que forem neceſſarias, ao que menos tiver; preparaçaõ, que lhe naõ altera o valor (n. 30.)

Exemplo IV.

De - - - - - - - 5403, 25
Querendo tirar - - - - 385, 6532

Primeiramente ajuntaremos duas cifras á *Dizima* do numero ſuperior. Depois obraremos ſobre os numeros aſſim preparados conforme a regra dos numeros inteiros.

5403, 2500
385, 6532

5017, 5968 Reſto.

E feita a operaçaõ, acharemos o reſto 5017, 5968.

Pró-

Próva do Somar, e Diminuir.

38 A *Próva* de huma operaçaõ arithmetica he huma nova operaçaõ, pela qual nos certificamos do resultado da primeira.

Para provar a conta de *Somar*, somar-se-haõ de novo todas as colunnas, mudada porém a ordem, isto he, começando da esquerda para a direita. O que somar a primeira colunna diminuir-se-ha do membro que lhe corresponde na Soma total, e se assentará o resto por baixo, se o houver: este como em lugar de dezena se tomará com a letra seguinte da mesma soma para fazer hum novo membro, do qual se ha-de diminuir o que somar a segunda colunna; e assim por diante até a ultima, onde feita a diminuiçaõ, naõ deve ficar resto algum.

Assim, tendo achado assima que estes quatro numeros - - - - - - 6903

	7854
	953
	7327
Somaõ - - -	23037
	03110
	000

Para verificar este resultado, somaremos os mesmos numeros, principiando pela esquerda, deste modo: 6 e 7 saõ 13, e 7 saõ 20, os quaes tirados de 23, ficaõ 3, que com a cifra, que na soma se segue, fazem 30. Na segunda colunna:

9

9 e 8 ſaõ 17, e 9 ſaõ 26, e 3 ſaõ 29, e tirados de 30, fica 1, que com a letra ſeguinte 3 fazem 13. Na terceira columna: 5 e 5 ſaõ 10, e 2 ſaõ 12, e tirados de 13, fica 1, que com a letra ſeguinte 7 faz 17. E na ultima columna: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17, e tirados de 17, naõ fica nada: donde entenderemos, que a primeira operaçaõ he exacta.

A razaõ que temos para concluir que a primeira operaçaõ tem ſido bem feita todas as vezes que depois deſta próva naõ reſta nada, he porque tendo tirado ſucceſſivamente todos os milhares, centenas, dezenas, e unidades, de que ella deve conſtar, he neceſſario, que naõ reſte couſa alguma.

39 Para provar a conta de Diminuir, ſoma-ſe o reſto achado por meio da operaçaõ com o numero que ſe diminuio; e ſe a operaçaõ foi bem feita, ha-de vir na ſoma o meſmo numero, do qual ſe fez a diminuiçaõ. Aſſim vemos, que no terceiro exemplo aſſima poſto a operaçaõ foi exacta; porque ſomando 17489 (que he o numero que ſe diminuio) com o reſto 2565, ſe acha reproduzido na ſoma o numero 20054, do qual aquelle ſe diminuio.

$$\begin{array}{r} 20054 \\ 17489 \\ \hline 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

¶¶ A próva vulgar de ambas as operaçóes precedentes coſtuma fazer-ſe pela regra dos *no-*

ves

ves fóra, a qual tem o partido de ſer muito expedita na practica.

Tiraõ-ſe os *noves* de qualquer numero com ſumma facilidade, ſomando os ſeus algariſmos ſucceſſivamente; e chegando a ſoma a 9, lança-ſe fóra, paſſando de nove, ſomaõ-ſe tambem mentalmente as ſuas letras, e com o que fica ſe continúa por diante. Deſte modo, para tirar os *noves* do numero 86097546 diremos, 8 e 6, 14, nove fóra, 5, e 7 (porque naõ he neceſſario fallar com a o, nem com o 9) ſaõ 12, nove fóra, 3; e 5 ſaõ 8, e 4 ſaõ 12, nove fóra, 3; e 6 ſaõ 9, nove fóra, o.

A razaõ diſto ſerá facil de entender a quem reflectir ſobre os principios da *Numeraçaõ*. Porque v. gr. no numero 6745, a letra 6 vale *mil vezes* 6, iſto he, *novecentas e noventa e nove vezes*, e mais *huma vez* 6; porém novecentas e noventa e nove vezes 6 ſaõ *noves* juſtos; logo ſendo lançados fóra, fica *huma vez* 6. Do meſmo modo a letra 7 moſtra *cem vezes* 7, iſto he, *noventa e nove vezes*, e mais *huma vez* 7; e por conſeguinte, lançando fóra *noventa e nove vezes* 7, fica *huma vez* 7. E como tambem a letra 4 vale *nove vezes* e mais *huma vez* 4, lançando fóra *nove vezes* 4, fica *huma vez* 4. Logo ſomando-ſe todas as letras, como ſe todas eſtiveſſem na caſa das unidades, a ſoma 22 ſerá o reſto que fica depois de lançados fóra os *noves*, que ſe contém nas dezenas, centenas, e milhares do numero propoſto. E porque eſte reſto ainda comprehende *noves*, pela meſma razaõ ſe ſomaráõ as ſuas letras, e ſerá 4 o reſto final, que ficará tirados todos os *noves* do numero 6745.

Iſto ſuppoſto: para próva da conta de *Somar*, ti-

tiraõ-se os *noves* a todas as addições consecutivamente, como se ellas formassem hum só numero, e assenta-se o resto á margem dellas; e o mesmo se faz na soma. Se o resto naõ for o mesmo de ambas as partes, he prova infallivel, que a conta está errada (supondo sempre que o erro naõ esteja na operaçaõ da mesma próva); pois naõ he possivel, que a soma seja igual ás addições, quando tirando de ambas as partes os *noves* ficaõ restos desiguais. Porém se ficarem de ambas as partes restos iguais, naõ he próva infallivel de que a conta está certa, mas muito provavel: convém a saber, estará certa a conta, salvo se a soma tiver de erro *nove*, ou algum dos multiplos de *nove*; e a razaõ he, porque na operaçaõ lançamos fóra os *noves*, sem haver respeito se lançamos igual numero delles de ambas as partes; e por isso naõ he inteiramente segura esta próva. Como porém o erro dos multiplos de *nove* naõ succede quasi nunca na practica, senaõ se errar de proposito dessa maneira, por essa razaõ se dá a conta por certa, quando na próva se achaõ restos iguais. Assim no exemplo assima, tirando os *noves* das addições 6903 - - 7854 - - 953 - - 7327, fica de resto 6; e como se acha o mesmo na soma 23037, julga-se com muita probabilidade, mas naõ com certeza, que a conta está bem feita. E he de advertir, que nem o primeiro methodo assim dado, o qual se chama *próva real*, tem certeza absoluta, e infallivel; pois he possivel, e ainda factivel, que ao tirar da próva se commetta na soma de huma colunna hum erro igual e semelhante ao que se commetteo na primeira operaçaõ; e nesse caso sahirá na próva a conta certa, estando errada.

Na

Na conta de *Diminuir* tiraõ-ſe os *noves* ao numero de quem ſe diminuio, e depois aos outros dous numeros juntos. E conforme ficarem de ambas as partes reſtos iguaes, ou deſiguaes, faz-ſe o meſmo juizo, que indicamos a reſpeito do *Somar*. Deſte modo no exemplo aſſima poſto, tirando os *noves* ao numero 20054, fica o reſto 2: e como ſe acha o meſmo nos outros dous numeros 17489 e 2565 tomados juntamente, tem-ſe a conta por certa.

Da eſpecie de Multiplicar, tanto em numeros inteiros, como em decimais.

40 MUltiplicar hum numero por outro he tomar o primeiro tantas vezes, quantas ſaõ as unidades do ſegundo. Aſſim, por exemplo, multiplicar 4 por 3 naõ he outra couſa, ſenaõ tomar *tres* vezes o numero 4.

41 O numero, que ſe ha-de multiplicar, chama-ſe *multiplicando*; o numero, pelo qual ſe ha-de multiplicar, chama-ſe *multiplicador*; e o numero, que reſulta da operaçaõ, chama-ſe *producto*. Os noſſos Arithmeticos antigos daõ ao multiplicando o nome de *multiplicaçaõ*. Mas hoje uſamos deſte termo para ſignificar a meſma operaçaõ do multiplicar.

42 O termo *producto* tem commumente hum ſentido muito mais amplo, e geral. Porém neſte tratado ſómente uſaremos delle para ſignificar o reſultado da multiplicaçaõ.

43 O multiplicador, e o multiplicando chamaõ-ſe tambem *factores* do producto. Aſſim 3

e

e 4 saõ factores de 12, porque 3 vezes 4 saõ 12.

43 Pela idêa que temos dado da multiplicaçaõ se vê, que ella se póde absolutamente fazer escrevendo o multiplicando tantas vezes, quantas saõ as unidades do multiplicador, e somando ao depois. Assim, por exemplo, para multiplicar 7 por 3 podiamos escrever deste modo:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

E a soma 21, que resulta das tres addições, seria o producto.

Como porém este modo de multiplicar seria tanto mais longo e trabalhoso, quanto maior fosse o multiplicador, a regra particular da multiplicaçaõ ensina o methodo de chegar ao mesmo resultado por hum caminho mais breve.

44 Em quanto os numeros se consideraõ *abstractamente*, sem attender ás unidades que elles representaõ, he indifferente o tomar qualquer delles para multiplicando, ou para multiplicador. Por exemplo, querendo multiplicar 4 por 3, tanto faz multiplicar 4 por 3, como 3 por 4; porque o producto sempre será 12. E com effeito 3 vezes 4 mostra o triplo de 1 vez 4; e 4 vezes 3, o triplo de 4 vezes 1: e he evidente, que tanto faz 1 vez 4, como 4 vezes 1. O mesmo raciocinio se póde applicar a quaesquer outros numeros.

45 Sendo porém os numeros *concretos*, he preciso

ciſo diſtinguir o multiplicando do multiplicador; principalmente na multiplicaçaõ dos numeros *complexos*, dos quais adiante trataremos.

Eſta diſtinçaõ naõ tem difficuldade. Porque a meſma queſtaõ moſtra ſempre, qual he a quantidade que temos intento de repetir, e qual he a que declara as vezes que queremos fazer a repetiçaõ; e a primeira ſerá o *multiplicando*, a ſegunda o *multiplicador*.

46 Como o multiplicador ſerve de marcar as vezes que ſe ha de repetir o multiplicando, ſerá ſempre hum numero *abſtracto*. Perguntando-ſe v. gr. quanto haõ de cuſtar 52 *toeſas* de obra de carpinteiro, a razaõ de 36 *libras* a *toeſa*: facilmente ſe vê, que o *multiplicando* he 36 *libras*, que ſe haõ de tomar 52 *vezes*; preſcindindo de que o numero 52 ſignifique *toeſas* na queſtaõ, ou qualquer outra couſa.

47 Donde ſe ſegue, que ſendo o *producto* formado da addiçaõ repetida do *multiplicando*, deve moſtrar ſempre unidades da meſma natureza que elle. (*)

Tendo feito eſta reflexaõ ſobre as unidades do *producto* e ſeus *factores*, paſſemos ao methodo de o achar.

48 As regras da multiplicaçaõ dos numeros compoſtos reduzem-ſe á multiplicaçaõ dos numeros ſimples, que conſtaõ de hum ſó algariſmo. Por iſſo he neceſſario ſaber primeiro o producto del-

(*) Deſta regra naõ exceptuamos a multiplicaçaõ geometrica, na qual tambem as unidades do *multiplicador* ſe devem tomar como *abſtractas*; e o *multiplicando* e *producto* devem moſtrar unidades da meſma eſpecie, como havemos de declarar na Geometria.

delles, o qual ſe acha facilmente ajuntando cada numero de 1 até 9 nove vezes conſecutivas a ſi meſmo. Tambem ſe póde uſar da *Taboada* ſeguinte, cuja invençaõ ſe attribue a *Pythagoras*.

Taboada de Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

A primeira colunna deſta *Taboada*, tanto vertical, como tranſverſal, fórma-ſe da addiçaõ ſucceſſiva da unidade 1; a ſegunda do numero 2; a terceira do numero 3; e aſſim por diante.

49 Para achar nella o *producto* de dous numeros ſimples, buſca-ſe hum delles, v. gr. o *multiplican-*

cando, no alto da *Taboada*, e delle ſe deſce pela columna vertical até chegar á caſa fronteira ao multiplicador, que ſe buſca na primeira colunna vertical da parte eſquerda; e o numero que na dita caſa ſe achar ſerá o *producto*. Querendo v. gr. ſaber o producto de 9 por 6, ou quanto he 6 vezes 9, buſcaremos o 9 no alto da *Taboada*, e deſcendo até á caſa fronteira ao 6, nelle acharemos 54, que he o producto delles.

Eis-aqui quanto ſe requer para entrar na multiplicaçaõ dos numeros compoſtos.

Multiplicaçaõ de hum numero compoſto por hum numero ſimples.

50 EScreva-ſe o *multiplicador*, que aqui ſuppomos ſer de hum ſó algariſmo, debaixo do *multiplicando*. O lugar delle he arbitrario; mas para fixar as idéas coſtuma aſſentar-ſe na caſa das unidades.

E paſſando por baixo delles huma riſca, que diſtingua os *factores* do *producto*, multipliquem-ſe as unidades do multiplicando pelo multiplicador; e ſe o producto conſtar ſómente de unidades, eſcreva-ſe na caſa das unidades, debaixo da riſca; ſe conſtar porém de unidades e dezenas, eſcrevaõ-ſe ſómente as unidades, e guardem-ſe mentalmente as dezenas para ſe ajuntarem ao producto da operaçaõ ſeguinte.

Depois multipliquem-ſe as dezenas do multiplicando pelo meſmo multiplicador; ajuntem-ſe ao producto as dezenas que ficáraõ da operaçaõ precedente, ſe as houver; e eſcreva-ſe a ſoma na caſa das dezenas, podendo ſer com huma ſó letra; quando naõ, eſcrevaõ-ſe ſómente as unidades, e guardem-ſe as dezenas (que ſaõ realmente centenas) para ſe ajuntarem ao producto ſeguinte, o qual tambem ha de conſtar de centenas.

Continuando deſte modo a operaçaõ, até fallar o multiplicador com todos os algariſmos do multiplicando, o numero que tivermos eſcrito ſerá o producto total.

Exemplo.

PErgunta-ſe quantos *pés* fazem 2864 *toeſas*. (Cada *toeſa* tem 6 *pés*). A queſtaõ ſe reduz a tomar 6 *pés* 2864 vezes, ou (que vem a ſer o meſmo) a tomar 6 vezes 2864 *pés* (n. 44.)

Eſcreveremos pois -	2864	Multiplicando.
	6	Multiplicador.
	17184	- - Producto.

E principiando pelas unidades, diremos: 6 vezes 4, ſaõ 24; e eſcrevendo 4, levaremos 2 para a operaçaõ ſeguinte: 2.° 6 vezes 6 ſaõ 36, e 2 que vem ſaõ 38; aſſentemos 8, e vaõ 3: 3.° 6 vezes 8 ſaõ 48, 3 que vem ſaõ 51; aſſentemos 1, e vaõ 5: 4.° 6 vezes 2 ſaõ 12, e 5 que vem ſaõ 17; que eſcreveremos por inteiro, porque naõ ha mais nada que multiplicar.

O numero 17184 he o producto que ſe pede, ou o numero de *pés*, de que conſtaõ 2864 *toeſas*. Porque nelle ſe contém 6 vezes 4 unidades, 6 vezes 6 dezenas, 6 vezes 8 centenas, e 6 vezes 2 mil;

mil; e por conſeguinte, 6 vezes todo o numero 2864.

Multiplicaçaõ de hum numero compoſto por outro compoſto.

51 QUando o multiplicador conſtar de muitos algariſmos, por cada hum delles ſe praticará huma operaçaõ, como no primeiro caſo, principiando da direita para a eſquerda.

Primeiramente pois ſe multiplicará todo o multiplicando pelas unidades do multiplicador, e depois pelas dezenas. Eſte producto ſe eſcreverá por baixo do primeiro; e porque deve moſtrar dezenas, pois por ellas ſe fez a multiplicaçaõ, a ſua primeira letra ſe aſſentará em direitura das dezenas do primeiro, e as outras nas caſas ſeguintes para a eſquerda.

Pela meſma razaõ o terceiro producto, que ſe fizer multiplicando pelas centenas, ſe porá da meſma ſorte debaixo do ſegundo, adiantando-ſe mais huma caſa para a eſquerda; e o meſmo ſe fará com os outros.

Feitas todas eſtas multiplicações, ſomar-ſe-haõ os productos parciais que ellas deraõ, e a ſoma ſerá o producto total que ſe buſca.

Exem-

Exemplo I.

Querendo multiplicar - 65487
por - - - - - - 6958

523896
327435
589383
392922

455658546 Producto.

Primeiramente multiplico 65487 pelo algarismo 8, que está na casa das unidades do multiplicador, e assento o producto 523896 debaixo da risca, procedendo conforme a regra dada para o primeiro caso (n. 50.)

Depois multiplico o mesmo numero 65487 pela segunda letra 5 do multiplicador, e escrevo o producto 327435 debaixo do precedente, porem de sorte que a primeira letra 5 fique correspondente ás dezenas delle.

Do mesmo modo, multiplicando 65487 pela terceira letra 9 do multiplicador, assento o producto 589383 debaixo do precedente, ficando a letra 3 correspondendo á casa das centenas, porque a letra do multiplicador representa centenas.

Multiplicando finalmente o mesmo numero 65487 pela ultima letra 6 do multiplicador, assento o producto 392922 debaixo do precedente, adiantando-o mais huma casa para a esquerda, para que a sua primeira letra 2 fique na casa dos *milhares*, em que está a letra do multiplicador.

Em fim, de todos estes productos faço a soma 455658546, que ſerá o producto de 65487 multiplicados por 6958, ou o valor do numero 65487 tomado 6958 vezes; pois que com effeito ſe tomou 8 vezes na primeira operaçaõ, 50 vezes na ſegunda, 900 vezes na terceira, 6000 na quarta; e por conſeguinte 6958 vezes em todas quatro.

52 Se o multiplicando, ou o multiplicador, ou ambos acabarem em cifras, abbrevia-ſe a operaçaõ, multiplicando ſem fazer caſo dellas, e ajuntando-as depois todas ao producto.

Exemplo II.

Havendo de multiplicar 6500
por - - - - - 350

	325
	195
	2275000 Producto.

Deixando as cifras, multiplico 65 por 35, e ao producto 2275 ajunto as tres cifras, que ſe achaõ em ambos os factores.

A razaõ he, porque o multiplicando 6500 repreſenta 65 centenas; e por iſſo quando ſe multica 65, o producto ſe entende ſer de centenas. Do meſmo modo o multiplicador 350 moſtra 35 dezenas, e por eſſa razaõ quando ſe multiplica por 35, o producto deve ſignificar dezenas. Logo multiplicando-ſe 65 por 35, o producto moſtrará dezenas de centenas, ou milhares; e por conſeguinte deve acabar em tres cifras, quantas ſaõ as dos

fa-

factores ; e o mesmo raciocinio se applicará a todos os outros casos.

53 Quando se encontraõ cifras entre os algarismos do multiplicador, como a multiplicaçaõ dellas dá hum producto todo de cifras, he escusado assenta-lo. Immediatamente se passa ao primeiro algarismo significativo, tendo advertencia de assentar sempre a primeira letra do producto na casa correspondente á letra do multiplicador, que falla com o multiplicando nessa mesma operaçaõ.

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - - 42052
por - - - - 3006

```
       252312
    126156
    ---------
    126408312 Producto.
```

Tendo feito a multiplicaçaõ por 6, e assentado o producto 252312 no seu lugar competente, passaremos logo a multiplicar por 3, mas assentaremos o producto 126156 de sorte que represente milhares, como a letra do multiplicador, o que se consegue ficando a primeira letra 6 na mesma casa della.

Multiplicaçaõ das partes decimais.

54 NA multiplicaçaõ da *Dizima* obſervar-ſe-há a meſma regra dos numeros inteiros, ſem fazer caſo da virgula; e depois de achar o producto, delle ſe cortaráõ por meio da virgula tantas letras de *Dizima* para a direita, quantas ſaõ as que tem os factores ambos juntos.

Exemplo I.

QUerendo multiplicar - - -	54,23
por - - - - - - -	8,3
	16269
	43384
	450,109

Multiplicaremos 5423 por 83, e acharemos o producto 450109; e porque no multiplicando há duas letras de dizima, e no multiplicador huma, cortaremos tres letras para a direita com a virgula no dito producto, e ficará 450,109, qual deve ſer.

A razaõ deſta regra he facil de entender, obſervando que ſe o multiplicador foſſe 83, o producto ſeria de *centeſimas*, pois ſe teria repetido 83 vezes o numero 54,23, que moſtra *centeſimas*. Como porém o multiplicador he 8,3, iſto he, hum numero dez vezes menor (n. 28) que 83, o producto moſtrará unidades dez vezes menores que as *centeſimas*; logo a ſua ultima letra moſtrará *milleſimas* (n. 23); e por conſeguinte deverá ter tres algarifmos de dizima, quantos fe achaõ em ambos os factores juntamente.

E o mefmo raciocinio fe póde applicar a qualquer outro cafo.

Exemplo II.

SE tiveffemos de multiplicar - 0,1 2
por - - - - - - 0,3

0,036

Multiplicar-fe-hia, como no exemplo precedente, 12 por 3, e fahirá o producto 36. Como porém a regra nefte cafo ordena, que fe feparem com a virgula tres letras para a dizima, ficaria hum principiante embaraçado, vendo que o producto naõ tem mais do que duas. Mas applicando a efte cafo o raciocinio que fizemos no exemplo precedente, he facil de ver, que fe deve meter huma cifra entre a virgula e 36. Com effeito, he evidente que fe multiplicaffemos 0,12 por 3, o producto devia fer 0,36; logo multiplicando por 0,3, o que he dez vezes menor que 3, o producto ferá dez vezes menor que 0,36; e por confeguinte (n. 27, 28) ferá 0,036 fupprindo-fe o lugar com huma cifra, para haver tantas cafas de dizima no producto, como em ambos os factores juntamente.

55 Como na *Dizima* fe intenta ordinariamente a facilidade das operações, fubftituindo em lugar de hum calculo rigorofo huma *approximaçaõ* fufficiente, e de menos trabalho; naõ ferá fóra de propofito, que expliquemos aqui hum meio de abre-

breviar a multiplicaçaõ, quando nos baſtar ſaber o producto até hum grão determinado de exactidaõ.

Supponhamos v. gr. que havemos de multiplicar o numero 45,625957 por 28,635, e que nos baſta hum producto exacto até a caſa das milleſimas. Primeiramente aſſentaremos os numeros, como aqui abaixo ſe moſtra; iſto he, inverteremos a ordem dos algariſmos de hum delles, e o aſſentaremos debaixo do outro, de ſorte que o algariſmo que era das unidades fique correſpondendo ao algariſmo do numero ſuperior, que eſtiuer duas caſas mais para a direita do que aquella, até onde queremos o producto exacto. Entaõ faremos a multiplicaçaõ, advertindo que cada letra do multiplicador naõ há de fallar com as letras do multiplicando que ficaõ para a direita da colunna em que eſtá, e que os productos, que ſe forem achando, ſe haõ de aſſentar de maneira, que as primeiras letras de todos da parte direita fiquem em huma colunna vertical. Na ſoma deſtes productos riſcaremos as ultimas duas letras á direita, com a advertencia de ajuntar huma unidade á ultima que ficar, ſe as duas, que ſe riſcaõ, paſſarem de 50. E feito iſto, aſſentaremos a virgula no lugar que pedem os algariſmos da dizima, que queremos no producto.

Exem-

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar 45,625957
por - - - - - 28,635

E ſe for baſtante achar o producto exacto até a caſa das milleſimas; eſcreveremos os numeros deſta maneira

45,625957
53682
91251914
36500760
2737554
136875
22810
1306499(13

E ſerá o producto - 1306,499

Se fizeſſemos a operaçaõ por extenſo, achariamos o producto 1306,499278695, com o qual ſe ajuſta o precedente até a caſa das milleſimas, como ſe intentava.

Se o multiplicando naõ tiver tantas letras de dizima, quantas ſaõ preciſas para que a letra das unidades do multiplicador correſponda á caſa que deve, conforme a regra, ſupprir-ſe-há ajuntando ao multiplicando as cifras neceſſarias.

Exem-

Exemplo IV.

HAvendo de multiplicar 54,236
por - - - - - 532,27

e querendo o producto exacto até a caſa das centeſimas, aſſentaremos os numeros deſte modo:

$$
\begin{array}{r}
54,236000 \\
72235 \\
\hline
271180000 \\
16270800 \\
1084720 \\
108472 \\
37961 \\
\hline
2886819|53
\end{array}
$$

E o producto ſerá . . . . 28868,20 . . . ajuntando huma unidade á ultima letra 9, porque as duas ſupprimidas 53 excedem 50.

Exemplo V.

QUerendo multiplicar 0,227538917
por - - - - 0,5664178

de ſorte, que o producto venha exacto até o ſetimo algariſmo da dizima, aſſentaremos os numeros do modo ſeguinte:

0,227538917

$$
\begin{array}{r}
0{,}227538917 \\
87146650 \\
\hline
\ldots\ldots 0 \\
113769455 \\
13652334 \\
1365228 \\
91012 \\
2275 \\
1589 \\
176 \\
\hline
12888206(69
\end{array}
$$

E o producto ferá - - 0,1288821

55 Para qüem naõ eftá exercitado na *Taboada* há hum methodo de *multiplicar* por meio unicamente do *fomar*, o qual ajuntaremos aqui, e he da maneira feguinte.

Forme-fe á parte huma colunna, na qual primeiramente fe affentará o *multiplicando* defronte da unidade; depois fomar-fe-há comfigo mefmo, tomando cada algarifmo duas vezes, e a foma fe efcreverá por baixo defronte do numero 2; efta foma fe ajuntará outra vez com o mefmo multiplicando, e a nova foma fe affentará por baixo da precedente defronte do numero 3, e affim por diante até 10: e fe defronte de 10 vier huma foma, que feja o mefmo multiplicando augmentado de huma cifra, fervirá de prova que todas as fomas da colunna eftaõ certas. Pela conftrucçaõ defta colunna fe ve, que nella fe tem formado os productos do multiplicando por todos os numeros fimples de 1 até 9.

Pre-

Preparada deſte modo a columna, paſſar-ſe-há á multiplicaçaõ, e por cada huma das letras do *multiplicador* ſe tomará o producto que na dita columna lhe correſponde, o qual ſe aſſentará de fórma que a primeira letra á direita fique na caſa que compete á letra do meſmo multiplicador; e a ſoma de todos eſtes productos dará o producto total que ſe buſca. O exemplo ſeguinte moſtrará claramente a fórma da operaçaõ.

Se quizermos multiplicar o numero 79856345 pelo numero 9605843, aſſenta-los-hemos ao modo ordinario, como aqui ſe moſtra.

Pode ser.

79856345	1	79856345
9605843	2	159712690
	3	239569035
239569035	4	319425380
319425380	5	399281725
638850760	6	479138070
399281725	7	558994415
479138070	8	638850760
718707105	9	718707105
767087512623835	10	79856345(0

Depois, transferindo o multiplicando para o lado direito defronte de 1, o ſomaremos comſigo meſmo, e aſſentaremos a ſoma por baixo defronte do 2; do meſmo modo ajuntaremos eſta ſoma com o multiplicando, e eſcreveremos a nova ſoma por baixo defronte do 3; e aſſim por diante.

Fei-

Feita a columna como ſe vê no exemplo, paſſaremos á multiplicaçaõ. E porque a primeira letra do multiplicador he 3, tomaremos da columna o numero que lhe correſponde, e o aſſentaremos no ſeu lugar. O meſmo faremos a reſpeito das letras ſeguintes 4, 8, 5, 6, e 9; e fazendo a ſoma acharemos o producto 7670875126 23835.

Eſte methodo he indirecto, e mais longo que o ordinario; mas na multiplicaçaõ dos numeros grandes tem a vantagem de que naõ requer taõ grande attençaõ, nem he taõ ſujeito ao erro. Quando porem tivermos, como ſuccede muitas vezes, de multiplicar ſucceſſivamente hum meſmo numero por muitos outros, como entaõ feita huma vez a columna ſerve para todas as operaçóes, he eſte methodo naõ ſomente o mais expedito, e ſeguro, mas tambem o mais abbreviado de todos. JJ

Uſo da Multiplicaçaõ.

56 NAõ he noſſa tençaõ moſtrar aqui todos os uſos que ſe pódem fazer da multiplicaçaõ. Sómente indicaremos alguns, que ſerviráõ de encaminhar para todos os mais.

Serve a Multiplicaçaõ, em geral, para achar o valor total de muitas unidades, quando ſe conhece o valor de cada huma. Se v. gr. nos perguntarem 1.º *Quanto devem cuſtar* 5842 *toeſas de obra, a razaõ de* 54^{lb} *a toeſa?* Multiplicaremos 54^{lb} por 5842, ou (n. 44.) 5842^{lb} por 54; e teremos 315468^{lb} pelo preço total que ſe pede. 2.º *Quanto* *to pezaõ* 5954 *pês cubicos* (*) *de agua; ſuppondo que cada pé tem* 72 *libras?* Multiplicaremos 72^{lb} por 5954, ou 5954^{lb} por 72; e teremos 428688 libr. pelo peſo total que ſe pergunta.

57 Serve tambem a multiplicaçaõ para converter as unidades de qualquer eſpecie em unidades de outra eſpecie menor; como, por exemplo, para reduzir as *libras* em *ſoldos*, e éſtes em *dinheiros*; as *toeſas em pês*, eſtes em *pollegadas*, e eſtas em *linhas*; os *dias* em *horas*, eſtas em *minutos*, e eſtes em *ſegundos* &c. Muitas vezes há neceſſidade deſta ſorte de reducções; e por iſſo as moſtraremos praticadas em alguns exemplos.

Se quizermos converter em *dinheiros* a quantia de 8^{lb} $17^{ſ}$ 7^{d}; como a *libra* vale $20^{ſ}$, multiplicaremos as 8^{lb} por 20 (n. 52) e teremos $160^{ſ}$, aos quais ajuntando os $17^{ſ}$ teremos $177^{ſ}$; depois multiplicaremos eſtes por 12 (porque cada *ſoldo* vale 12 *dinheiros*), e teremos 2124^{d}, aos quais ajuntando os 7^{d}, teremos 2131^{d} pelo valor total da quantia 8^{lb} $17^{ſ}$ 7^{d} reduzida a *dinheiros*.

Se nos perguntarem quantos minutos tem o anno commum, a ſaber 365^{d} 5^{h} 48^{m}, ou 365 dias, 5 horas, e 48 minutos; como o dia he de 24 horas, multiplicaremos 24^{h} por 365, e ao producto 8760^{h} ajuntaremos 5^{h}; depois multiplicaremos (n. 52) o total 8765 por 60 (porque a hora tem 60 minutos), ao producto 525900^{m} ajuntaremos os 48^{m}, e o total 525948^{m} ſerá o nume-

ro-

(*) O *pé cubico* he huma medida que tem hum *pé* de comprido, de largo, e de fundo, pela qual ſe avalia a capacidade dos corpos, como ſe verá na Geometria.

ro de minutos, que no annno commum ſe contém.

58 O multiplicar abbreviado, que aſſima explicámos (n. 52), póde ſervir para reduzir prontamente em *libras* qualquer numero de *tonnelladas*. Como a *tonnellada* peza 2000 *libras*, ſe tivermos v. gr. 854 *tonnelladas* para reduzir, naõ he neceſſario mais do que duplicar 854, e pôr tres cifras adiante do producto; e teremos 1708000 pelo numero de *libras* que pezaõ 854 *tonnelladas*. Obſervem os principiantes que *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar* &c. he o meſmo que multiplicar por por 2, 3, 4, &c.

Da eſpecie de Repartir, tanto em numeros inteiros, como em decimais.

59. REpartir ou *Dividir* hum numero por outro, naõ he outra couſa mais do que buſcar *quantas vezes* o primeiro delles contêm o ſegundo; e a operaçaõ, com que ſe buſca chama-ſe *Repartiçaõ*, ou *Diviſaõ*. Aſſim, repartir 12 por 4 he o meſmo que buſcar em 12 quantas vezes ha 4; que ſaõ 3 vezes.

O numero, que ſe toma para ſe dividir, chama-ſe *Dividendo*, e vulgarmente *Partiçaõ*; o numero, pelo qual ſe divide, chama-ſe *Diviſor*, ou *Partidor*; e o numero, que moſtra as vezes que o dividendo contém o diviſor, chama-ſe *Quociente*.

A Diviſaõ naõ ſe faz ſempre com a tençaõ de ſaber quantas vezes hum numero contém outro, mas

mas a operaçaõ procede em todos os caſos, como ſe unicamente ſe dirigiſſe a eſſe fim; e por eſta razaõ he, que ella ſe póde conſiderar em geral, como huma operaçaõ pela qual ſe acha quantas vezes o dividendo contém o diviſor (*).

§§ Pela noçaõ precedente da *Diviſaõ* ſe entenderá facilmente, que ella ſe póde fazer por meio da *Subtracçaõ*, tirando ſucceſſivamente o diviſor do dividendo; pois he evidente, que quantas vezes delle ſe poder tirar, tantas nelle ſe contem. Aſſim para dividir 21 por 7 podemos obrar deſte modo:

$$\begin{array}{rl} 21 & \\ \underline{7} & \\ 14 & \text{- - 1.º reſto.} \\ \underline{7} & \\ 7 & \text{- - 2.º reſto.} \\ \underline{7} & \\ 0 & \text{- - 3.º reſto.} \end{array}$$

E tendo achado, que tirando-ſe 3 vezes conſecutivas o diviſor 7 do dividendo 21, naõ ſobrou nada, conheceremos que 7 ſe contem *tres vezes* exactamente em 21, e por conſeguinte, que o quociente he 3.

Po-

(*) Na prática vulgar conſidera-ſe o dividendo como huma quantia, que ſe ha-de repartir em partes iguais por tantos *companheiros*, quantas ſaõ as unidades do partidor, ás quais ſe coſtuma dar o meſmo nome de *companheiros*; e no quociente ſe procura ſaber quanto cabe a cada hum delles.

Porém como este methodo seria tanto mais longo e trabalhoso, quanto maior fosse o quociente, pela regra particular da *Divisaõ*, como por hum *Diminuir abbreviado*, chegamos com maior prontidaõ, e facilidade a alcançar o mesmo resultado. ¶¶

Da mesma noçaõ se segue evidentemente; *Que multiplicando-se o divisor pelo quociente deve vir no producto o dividendo*; porque nisso se naõ faz outra cousa mais do que tomar o divisor tantas vezes, quantas elle se contém no mesmo dividendo; e isto he geral, quer seja o quociente numero inteiro, quer fraccionario.

Quanto á especie das unidades que o *quociente* deve mostrar, he de advertir que naõ póde determinar-se nem pela especie das unidades do dividendo, nem do divisor, nem de ambos juntos. Porque ficando o dividendo, e o divisor sempre os mesmos, o quociente, que será tambem sempre o mesmo numericamente, póde ser muito differente em quanto á especie das suas unidades, conforme a nutureza da questaõ o determinar.

Por exemplo: Se procurarmos saber quantas vezes 8^{lb} contém a 4^{lb}, o quociente será hum numero *abstracto*, que mostrará 2 *vezes*. Porém se quizermos saber quanta obra se ha de fazer por 8^{lb}, a razaõ de 4^{lb} a *toesa*, o quociente será hum numero *concreto*, que mostrará 2 *toesas*, cuja especie naõ diz respeito algum ás unidades do dividendo, nem do divisor. Por onde se vê, que sómente a questaõ, que conduz á divisaõ actual de que se trata, he a que decide a natureza das unidades, que deve mostrar o quociente.

Di-

Divisaõ de hum numero composto por hum numero simples.

60 A Operaçaõ, que agora entramos a mostrar, suppõe que cada hum sabe achar por si mesmo quantas vezes se contém hum numero simples em outro simples, ou composto taõ somente de dois algarismos. Este conhecimento se adquire ao mesmo tempo que se apprendem os productos dos numeros simples; faltando o qual, póde fazer-se uso da *Taboada*, que assima temos proposto (n. 48.) Se v. gr. quizermos saber em 74 quantas vezes há 9, buscaremos o divisor 9 no alto da *Taboada*, e pela sua colunna vertical desceremos até encontrar ou o numero dado 74, ou o que for proximamente menor, como neste caso he o numero 72; e á casa delle corresponderá na primeira colunna vertical á esquerda o quociente, que he neste exemplo o numero 8.

Isto supposto, eis-aqui o methodo de executar a *Divisaõ* de hum numero composto por hum numero simples, á qual se dá vulgarmente o nome de *meio partir*.

Assenta-se o divisor ao lado direito do dividendo, separando-os por meio de huma risca perpendicular. Por baixo do divisor se passe tambem huma risca, debaixo da qual se escreveráõ os algarismos do quociente á medida que se forem achando.

Entaõ tomar-se-há o primeiro algarismo á esquerda do dividendo, ou os primeiros dous, quando o primeiro só for menor que o divisor; e fazendo delles hum dividendo parcial, buscar-se-ha quan-

quantas vezes o divisor nelle se contém, e o numero das vezes se assentará no lugar do quociente. O quociente achado se multiplicará pelo divisor, e o producto se assentatá debaixo do respectivo dividendo, do qual se diminuirá; e ao resto se ajuntará a letra seguinte do dividendo principal, e se formará outro dividendo parcial.

Neste se praticará a mesma operaçaõ. A letra, que se achar para o quociente, se assentará á direita da primeira; depois se multiplicará pelo divisor, e o producto se escreverá debaixo do respectivo dividendo parcial, do qual se diminuirá; e ao resto se ajuntará a letra seguinte do dividendo principal, e se formará de novo outro dividendo parcial, com o qual se praticará a mesma operaçaõ; e assim por diante, até se acabarem as letras do dividendo.

Esta Regra se entenderá mais claramente por meio dos exemplos seguintes.

Exemplo I.

SE quizermos repartir 8769 por 7, aſſentaremos eſtes dous numeros como aqui ſe moſtra:

Pode ſer

Dividendo	Diviſor
8769	7
7	1252 $\frac{5}{7}$ Quociente.
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

E começando pela eſquerda do dividendo, deveriamos dizer em 8 *mil* quantas vezes ha 7; mas baſta que digamos em 8 quantas vezes ha 7? ha 1; e aſſentaremos 1 no quociente. Eſte 1 he realmente *mil*; mas naõ he neceſſario attender ao ſeu valor local, pois que elle ſerá determinado pelas letras ſeguintes do quociente, que havemos de achar. Agora multiplicaremos o quociente 1 pelo diviſor 7, e aſſentaremos o producto 7 debaixo do dividendo parcial 8; e feita a diminuiçaõ, fica 1. Eſte reſto 1 he a parte de 8 que naõ foi dividida, e vale por huma *dezena* a reſpeito da letra 7 que ſe ſegue no dividendo, a qual abaixaremos para junto do dito reſto, e teremos outro dividendo parcial 17.

Pode.

En-

Entaõ diremos do meſmo modo; em 17 que vezes ha 7? ha 2; e eſcreveremos 2 no quociente á direita da outra letra 1, que achámos pela primeira operaçaõ. Depois multiplicaremos o novo quociente 2 pelo diviſor 7, e eſcreveremos o producto 14 debaixo do membro dividendo 17; e feita a diminuiçaõ, teremos o reſto 3, que he a parte do dividendo que naõ foi repartida: pelo que lhe ajuntaremos a letra ſeguinte 6, e teremos o novo dividendo parcial 36.

Continuando a meſma operaçaõ, diremos: em 36 que vezes ha 7? ha 5; e aſſentaremos 5 no quociente. Depois multiplicando 5 pelo diviſor 7 tiraremos o producto 35 do dividendo 36, e ficará o reſto 1, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he a ultima 9, e teremos ainda para partir 19. Pelo que diremos: em 19 que vezes ha 7? ha 2; e eſcreveremos 2 no quociente.

Depois multiplicaremos o meſmo 2 pelo diviſor 7, e diminuindo o producto 14 do dividendo 19, ficará por ultimo o reſto 5.

Aſſim achamos pois, que 8769 contém a 7 tantas vezes, quantas moſtra o quociente, iſto he, 1252 vezes, e que além diſſo ainda reſtaõ 5.

Pelo que reſpeita a eſte reſto, baſtará por ora dizer, que ſe aſſenta á direita do quociente, aſſim como ſe vê no exemplo; iſto he, que ſe eſcreve em ſima de huma riſca, ficando-lhe o diviſor por baixo; expreſſaõ, que quer dizer *ſinco ſetimas* partes da unidade, como adiante moſtraremos, quando tratarmos dos *quebrados*.

61 Se no decurſo da operaçaõ ſe achar algum dividendo parcial menor que o diviſor, o qual por conſeguinte o naõ chegará a conter 1 vez, pôr-ſe-

ha cifra no quociente, e deixando a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial, com o qual ſe continuará a operaçaõ.

Exemplo III.

SUpponhamos que havemos de repartir 14464 por 8.

$$\begin{array}{r|l}
14464 & 8 \\
8 & \overline{1808} \\
\hline
64 & \\
64 & \\
\hline
064 & \\
64 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Neſte exemplo faremos o primeiro dividendo parcial das duas letras 14, porque a primeira 1 he menor que o diviſor.

Entaõ partindo 14 por 8, cabe ſómente 1, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, fica o reſto 6, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 4, e teremos para partir 64.

Partindo pois 64 por 8, cabem 8, que aſſentaremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica nada de reſto; pelo que eſcreveremos cifra, e para junto della traremos a letra ſeguinte do dividendo 6. Agora como temos o dividendo parcial 6, e eſte he menor que o divisor, assentaremos o no quociente, e abaixaremos immediatamente a letra seguinte do dividendo 4, com a qual se formará o novo dividendo parcial 64. Então partindo 64 por 8, cabem 8, que escreveremos no quociente, e fazendo a multiplicação e subtracção, não fica resto algum. E por isso entenderemos, que 8 se contém em 14464 exactamente 1808 vezes.

Divisão de hum numero composto por outro composto.

62 QUando o divisor constar de muitos algarismos, que he o caso a que vulgarmente se dá o nome de *partir por inteiro*, praticar-se-ha a Divisão desta maneira.

Tomem-se da parte esquerda do dividendo tantas letras, quantas bastarem para fazer hum dividendo parcial, que não seja menor que o divisor. E porque seria muito difficultoso buscar, quantas vezes o dito dividendo contém o divisor inteiro, como no primeiro caso; bastará achar quantas vezes a primeira letra do divisor á esquerda se contém na parte superior do mesmo dividendo, que lhe corresponde; e o quociente assim achado se assentará no seu lugar.

Então multiplicar-se-ha o mesmo quociente por todo o divisor; e conforme se forem achando as letras do producto, se irão assentando debaixo do dividendo parcial da direita para a esquerda. Depois tirar-se-ha este producto do mesmo dividendo respectivo, e ao resto se ajuntará a letra seguinte do dividendo principal, com a qual se formar-

ma-

mará outro dividendo parcial, que ſe repartirá da meſma maneira; e aſſim por diante.

Paſſemos a illuſtrar eſta regra com alguns exemplos, e a prevenir juntamente os caſos, em que póde haver algum embaraço.

Exemplo I.

QUerendo repartir 75347 por 53.

75347	53
53	$1421\frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Faremos o noſſo primeiro dividendo parcial dos dous algariſmos 75, porque eſtes baſtaõ para elle naõ ſer menor que o diviſor; e em lugar de dizermos em 75 que vezes ha 53, diremos ſómente em 7 que vezes ha 5? ha 1, que eſcreveremos no quociente.

Depois multiplicaremos o quociente 1 por todo o diviſor 53, e aſſentaremos o producto debaixo do dividendo reſpectivo 75; do qual o diminuiremos, e ficará o reſto 22, que com a letra ſeguinguinte do dividendo 3 formará outro dividendo parcial 223. Neſte tambem, em lugar de dizer em 223 que vezes ha 53, diremos ſómente, em 22 que vezes ha 5? ha 4, que aſſentaremos no quociente; e multiplicando 4 pelo diviſor, eſcreveremos o producto 212 debaixo do dividendo reſpectivo 223, do qual o diminuiremos, e ao reſto 11 ajuntaremos a letra ſeguinte 4 do dividendo principal, e teremos para repartir de novo 114. Partindo pois 11 por 5, cabem 2, que aſſentaremos no quociente; depois multiplicaremos pelo diviſor; tiraremos o producto 106 do dividendo reſpectivo 114; ao reſto 8 ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 7; e teremos o novo dividendo parcial 87. E fazendo nelle finalmente a meſma operaçaõ, acharemos 1 para o quociente; e feita a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, ficará o reſto 34, que aſſentaremos á direita do quociente, do modo que aſſima indicámos (n. 60.)

63 Na operaçaõ precedente devia, em rigor, buſcar-ſe quantas vezes cada hum dos dividendos parciais continha o diviſor inteiro. Porém como eſta indagaçaõ pediria grande força de attençaõ, contentamo-nos, do modo que ſe tem viſto, com buſcar quantas vezes a parte maior do dividendo contém a maior parte do diviſor. He verdade, que deſte modo naõ acertamos ſempre com o verdadeiro algariſmo, que deve aſſentar-ſe no quociente, pois procedemos meramente por huma tentativa. Mas, além de que eſta tentativa conduz pela maior parte ao conhecimento do verdadeiro quociente, e quando naõ, ſempre nos indica hum algariſmo pouco diſtante delle, a multiplicaçaõ, que immediatamente ſe faz, logo moſtra o defeito que

ſe

ſe tem commettido, e ſerve para o corrigir.

E com effeito, ſe o dividendo contiveſſe realmente o diviſor *tres vezes*, e nós, julgando pelas primeiras letras de ambos elles, entendeſſe-mos que o continha *quatro*; he facil de ver, que multiplicando o diviſor por 4, achariamos hum producto maior que o dividendo, por quanto ſe tomaria o diviſor mais vezes do que realmente ſe continha no meſmo dividendo, e por conſeguinte naõ poderia fazer-ſe a ſubtracçaõ. Neſte caſo ſe diminuirá o quociente ſuppoſto de huma, duas unidades &c., até que venha hum producto que poſſa diminuir-ſe do reſpectivo dividendo. Ao contrario, ſe no meſmo caſo figurado puzeſſemos 2 no quociente, poderia ſim diminuir-ſe o producto do dividendo, mas ficaria hum reſto maior do que o diviſor, por onde ſe conheceria que elle ſe continha no dividendo mais vezes, do que ſe tinha julgado; e por conſeguinte, que o quociente 2 ſe tinha tomado menor, do que devia ſer. Com o exercicio ſe adquire em pouco tempo o habito de prever quanto ſe deve augmentar, ou diminuir o algariſmo achado pela primeira próva, no caſo de ſe achar defeituoſo.

Exem-

Exemplo II.

HAvendo de repartir 189492 por 375?

189492	375
1875	
1992	$505\frac{117}{375}$
1875	
117	

Em primeiro lugar: Tomaremos as primeiras quatro letras do numero propoſto para fazermos dellas o noſſo primeiro dividendo parcial, porque as tres primeiras fazem hum dividendo menor que o diviſor.

Depois, diremos: em 18 quantas vezes ha 3? ha 6 realmente, naõ havendo reſpeito ás letras ſeguintes; como porém multiplicando o diviſor por 6, ſahe hum producto maior que o dividendo reſpectivo, aſſentaremos ſómente 5 no quociente, e feita a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, ficará o reſto 19, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo principal 9, e teremos de novo para repartir 199.

E como em 1 naõ ha vez alguma 3, aſſentaremos huma cifra no quociente, e teremos a letra ſeguinte do dividendo principal 2, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 1992. Repetindo nelle a meſma operaçaõ, acharemos que 3 ſe contém em 19 realmente 6 vezes; mas pela razaõ já declarada eſcreveremos ſómente 5 no quociente; e acabando a operaçaõ, ſobraráõ 117.

64 Eis-aqui huma reflexaõ, que em muitos caſos nos póde livrar de fazermos tentativas inuteis. Como pela maior parte ſe erra no juizo que ſe faz do quociente, quando a ſegunda letra do diviſor paſſa muito de 5; neſſe caſo accreſcentaremos mentalmente 1 á primeira letra do meſmo diviſor, e veremos quantas vezes aſſim augmentada ſe contém na parte correſpondente do dividendo. Porque deſte modo faremos hum juizo mais ſeguro do algariſmo, que devemos aſſentar no quociente.

Exemplo III.

SUpponhamos, que nos daõ para repartir 1832 por 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ 1728 & \overline{} \\ \hline 104 & 6\frac{104}{288} \end{array}$$

Neſte caſo em lugar de dizer em 18 que vezes ha 2, diremos: em 18 que vezes ha 3. Porque o diviſor 288 ſe chega muito mais para 300 do que para 200. Aſſim acharemos que ha 6, e com effeito eſte he o verdadeiro quociente; e da outra ſorte achariamos 9, e por conſeguinte fariamos tres tentativas inuteis, paſſando de 9 a 8, de 8 a 7, e de 7 a 6.

Modo de abbreviar a Diviſaõ.

65 PAra que melhor ſe entendeſſe o methodo da operaçaõ antecedente, mandámos até agora eſcre-

escrever sempre os productos, que resultavaõ da multiplicaçaõ do divisor pelos algarismos do quociente que se hiaõ achando, debaixo dos dividendos respectivos, dos quais se haviaõ de diminuir. Porém como na Arithmetica se deve attender muito a reduzir, e abbreviar as operações, quanto he possivel; devemos notar, que podemos deixar de escrever os ditos productos, fazendo a subtracçaõ juntamente com a multiplicaçaõ. O exemplo seguinte bastará para mostrar como isto se executa.

Exemplo.

QUerendo repartir 756984 por 932.

$$\begin{array}{r|l} 756984 & 932 \\ 1138 & \overline{} \\ 2064 & 812\frac{200}{932} \\ 200 & \end{array}$$

Tomaremos as quatro primeiras letras do dividendo, porque as tres fazem hum membro menor que o divisor; e partindo 75 por 9, acharemos que cabem 8, os quais assentaremos no quociente. Entaõ em lugar de multiplicar 8 por 932, e escrever o producto debaixo do membro 7569, para delle ser diminuido, faremos tudo junto, dizendo: 8 vezes 2 saõ 16, que tirados de 9, naõ póde ser, mas tirados de 19, ficaõ 3, que escreveremos debaixo do 9.

Para descontar a dezena, que tomámos da letra 6, a fim de que o 9 valesse 19, em lugar de tratarmos a mesma letra 6 como diminuida de huma unidade, da maneira que praticámos na conta

de

de *Diminuir*, guardaremos essa unidade para a juntarmos ao producto seguinte. Assim continuando a operaçaõ, diremos: 8 vezes 3 saõ 24, e 1 que guardámos saõ 25, que tirados de 6, naõ póde ser, mas tirados de 26, fica 1, que assentaremos debaixo do 6. Deste modo fica descontada a unidade, que tinhamos pedido ao 6, porque lhe tirámos huma de mais na diminuiçaõ que acabamos de fazer; e do mesmo modo descontaremos os 2, que agora tomámos do 5, para que o 6 valesse 26. Assim diremos: 8 vezes 9 saõ 72, e 2 que vem (porque na operaçaõ antecedente diminuimos de 26) saõ 74, que tirados de 75, fica 1, que escreveremos debaixo do 5.

Ao resto 113 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo 8, e continuaremos do mesmo modo, dizendo: em 11 que vezes ha 9? ha 1, que assentaremos no quociente; depois, 1 vez 2 he 2, que tirados de 8 ficaõ 6, que assentaremos debaixo do 8; 1 vez 3 he 3, que tirados de 3 naõ fica nada, e por isso poremos cifra debaixo do 3; 1 vez 9 he 9, que tirados de 11, ficaõ 2, que assentaremos por baixo. Ao resto 206 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo que he 4, e diremos: em 20 quantas vezes ha 9? ha 2, que assentaremos no quociente; e fazendo a multiplicaçaõ, diremos: 2 vezes 2 saõ 4, que tirados de 4, fica 0; 2 vezes 3 saõ 6, que tirados de 6, fica 0; e em fim 2 vezes 9 saõ 18, que tirados de 20, ficaõ 2.

66 Póde succeder no decurso das divisões parciais, de que consta esta operaçaõ, que o dividendo contenha o divisor mais de 9 vezes. Neste caso entenderemos, que na operaçaõ precedente se tomou para o quociente huma letra menor do que de-

devia ser, pois que a ella certamente pertencerá a dezena, que se achar involvida no quociente actual.

67 Se o dividendo e o divisor acabarem ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ podem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. Por exemplo, para repartir 8000 por 400, dividiremos sómente 80 por 4; porque he evidente, que 80 centenas contém a 4 centenas tantas vezes, quantas 80 unidades contém a 4 unidades.

Divisaõ das partes decimais.

68 PAra que nos naõ demoremos com distinções escusadas, reduziremos a divisaõ dos numeros acompanhados de *dizima* a huma só regra, que he desta maneira:

Preparem-se os numeros propostos de sorte que tenhaõ ambos igual numero de algarismos decimais, ajuntando as cifras necessarias ao que menos tiver, o qual por isso naõ muda de valor (n. 30); supprima-se a virgula, e pratique-se a divisaõ como se os numeros fossem inteiros: e o quociente será o que se busca, sem haver nelle algarismos decimais.

Exem-

Exemplo I.

SE houvermos de repartir 12, 52 por 4, 3;

1252	430
392	$2\frac{392}{430}$

Primeiramente reduziremos os numeros dados a igual numero de decimais, ajuntando huma cifra ao diviſor, que ficará 4, 30. Depois ſupprimindo a virgula partiremos 1252 por 430, e acharemos o quociente 2, e o reſto 392; e por conſeguinte o quociente total $2\frac{392}{430}$.

Porém, como uſamos da *dizima* com o fim principal de evitarmos as fracções ordinarias, em lugar de aſſentarmos o reſto em fórma de fracçaõ, como fizemos no exemplo dado, continuaremos a operaçaõ para acharmos a *dizima* do quociente, como ſe moſtra no exemplo ſeguinte.

Exemplo II.

1252	430
3920	
500	2,9116 &c.
700	
2700	
120	

Tendo achado o quociente inteiro 2, como no primeiro exemplo, ao reſto 392 ajuntaremos hu-

ma

ma cifra, que realmente o tornará dez vezes maior, e teremos para partir 3920. Feita a operaçaõ, acharemos a letra 9 para o quociente, a qual assentaremos, tendo primeiro marcado o lugar das unidades por meio da virgula, que poremos junto ao 2. Deste modo o 9 mostrará sómente *decimos*, e desfará o que se tinha supposto no dividendo, fazendo-se dez vezes maior, pois he manifesto, que, se partindo 3920 por 430 vem ao quociente 9, partindo 392 por 430 deve ser o quociente dez vezes menor, isto he 0,9. Agora fazendo a multiplicaçaõ, e subtracçaõ, teremos o resto 50, ao qual ajuntaremos tambem outra cifra, que vem a ser o mesmo, como se ao principio tivessemos ajuntado duas ao dividendo. Mas porque a letra 1, que havemos de achar para o quociente, se ha-de assentar á direita do 9 na casa das *centesimas*, com isso desfaremos a supposiçaõ, que tinhamos feito, de hum dividendo cem vezes maior.

Deste modo continuaremos a operaçaõ até onde quizermos, havendo sempre respeito á natureza da questaõ, a qual mostrará quantos algarismos de *dizima* saõ bastantes. Bem entendido: que se pararmos em dous, naõ poderá chegar o defeito do quociente a huma *centesima* parte da unidade; nem a huma *millesima*, se pararmos no terceiro algarismo decimal; e assim por diante: pois he manifesto, que naõ póde accrescentar-se, nem diminuir-se huma unidade ao ultimo algarismo achado, sem que o quociente se faça maior, ou menor, do que deve ser.

Da mesma maneira se podem converter em dizima todos os restos da Divisaõ, quando ella se pratica em numeros inteiros.

Resta

Resta mostrar a razaõ porque supprimindo a virgula tanto no dividendo, como no divisor, naõ se altéra nada o quociente, no caso de haver igual numero de letras decimais em ambos elles. Isto será facil de entender, advertindo que no exemplo assima o dividendo 12,52 vale o mesmo que 1252 *centesimas*, e o divisor 4,30 o mesmo que 430 *centesimas*, porque as unidades principais contém cem *centesimas* (n. 22); e he claro, que 1252 *centesimas* contém 430 *centesimas* tantas vezes, quantas 1252 unidades contém a 430 unidades: logo he escusado attender á virgula, todas as vezes que ambos os numeros acabaõ na mesma casa decimal.

69 Algumas vezes, conforme a natureza da questaõ, basta achar o quociente até hum gráo determinado de exactidaõ. Nestes casos podemos abbreviar muito a operaçaõ, usando do methodo, que agora mostraremos.

Primeiramente supponhamos, que nos he bastante o quociente exacto até a casa das unidades (porque depois mostraremos como se deve applicar o mesmo methodo a outros casos). Eis-aqui a regra.

Supprimaõ-se no dividendo tantas letras, menos huma, da parte direita, quantas saõ as do divisor; e depois pratique-se a divisaõ ao modo ordinario. Se naõ ficar resto, ajuntem-se ao quociente tantas cifras, quantas saõ as letras supprimidas no dividendo, e teremos o quociente pedido. Porém ficando algum resto, este se partirá pelo divisor, no qual para isso se supprimirá o ultimo algarismo á direita. Feita esta divisaõ, o resto que ficar se tornará a partir pelo divisor da operaçaõ pre-

precedente, ſupprimindo-lhe o ultimo algariſmo á direita; e aſſim por diante. A praxe deſta regra ſe facilitará por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

QUerendo repartir 8789236487 por 64423, e baſtando ſaber o quociente exacto até á caſa das unidades, deixaremos os quatro ultimos algariſmos do dividendo, porque o diviſor tem ſinco, e partiremos 878923 por 64423.

878923	64423
234693	136430
41424 . .	6442
2772 . .	644
196 . .	64
4 . .	6

E tendo achado pela regra ordinaria o quociente 13, e o reſto 41424; dividiremos eſte por 6442, ſupprimindo o ultimo algariſmo á direita no diviſor primitivo; e acharemos a letra 6 para o quociente, a qual aſſentaremos á direita das duas 13 antecedentemente achadas; e ficará o reſto 2772. Do meſmo modo partiremos eſte por 644, ſupprimindo mais huma letra no diviſor primitivo, e virá ao quociente 4, ficando o reſto 196. Partindo eſte por 64, caberá ao quociente 3, e ficará o reſto 4; e finalmente partindo eſte por 6, tocará cifra ao quociente, a qual nelle aſſentaremos. Aſſim repartindo 8789236487 por 64423, teremos o quociente 136430 exacto até á caſa das unidades. E com effeito ſe fizeſſemos a diviſaõ por extenſo achariamos $136430 \frac{6597}{64423}$.

Naõ he neceſſario eſcrever os novos diviſores defronte dos reſtos, que por elles ſe haõ de repartir, como aqui fazemos a fim de que melhor ſe entenda o modo da operaçaõ. Mas baſta, que ſe vaõ marcando com hum ponto, ou com huma riſca, as letras do diviſor primitivo, conforme ſe forem ſupprimindo no decurſo da operaçaõ.

70 Se o reſto da primeira diviſaõ ſe achar menor que o diviſor que lhe compete, aſſentar-ſe-há cifra no quociente; ficará o meſmo reſto; e no diviſor ſe ſupprimirá outra letra. Se o meſmo reſto ainda for menor que o novo diviſor, aſſentar-ſe-há outra cifra no quociente; e aſſim por diante.

Exemplo II.

HAvendo de repartir 55106054 por 643, e baſtando ſaber o quociente exacto até á caſa das unidades, deixaremos as duas ultimas letras do dividendo, e partiremos ao modo ordinario 551060 por 643.

$$\begin{array}{r|l} 551060 & \underline{643} \\ 3666 & 85701 \\ 4510 & \\ 009 & ..64 \\ 9 & ..6 \\ 3 & \end{array}$$

Feita a operaçaõ ordinaria, acharemos o quociente 857, e o reſto 9, o qual conforme a regra pre-

presente devia repartir-se por 64. Porem como se acha o dito resto menor que o seu competente divisor, assentaremos cifra no quociente, e conservaremos o mesmo resto 9, o qual dividiremos pelo novo divisor 6, e assim teremos o quociente 85701 exacto até á casa das unidades, conforme se buscava.

71 Quando no principio da operaçaõ se suppimem no dividendo as letras que a regra ordena, se as que ficarem naõ forem bastantes para constituirem hum numero maior, ou ao menos igual ao divisor; entaõ cortar-se-haõ neste tantas letras á direita, quantas forem precisas, para que as restantes possaõ caber ao menos huma vez no dividendo.

Exemplo III.

HAvendo de repartir 1611527 por 64524, e requerendo-se o quociente exacto até á casa das unidades.

Primeiramente devemos supprimir no dividendo as quatro ultimas letras 1527. Depois, como o resto 161 faz hum numero menor que o divisor primitivo 64524, nelle tambem supprimiremos as tres ultimas letras 524, que saõ as que bastaõ para que o resto 64 possa caber em 161. Entaõ, fazendo a operaçaõ como nos exemplos precedentes, partiremos 161 por 64;

161	64
	25
33 . .	6
3	

e acharemos que da repartiçaõ de 1611527 por 64524 resulta o quociente 25, sem defeito de huma só unidade. E na verdade o quociente exacto he 24 $\frac{62951}{64524}$, o qual se chega muito mais para 25 do que para 24.

72 A' medida que se vaõ supprimindo as letras do divisor, para maior exactidaõ, convem ajuntar huma unidade á ultima das que ficaõ, se a letra supprimida for 5, ou maior que 5. E do mesmo modo se ajuntará huma unidade á ultima letra que ficar no dividendo, quando as letras nelle supprimidas passarem de 5, ou 50, ou 500 &c., conforme se supprimir huma, duas, tres &c.

Exemplo IV.

Upponhamos que se pede o quociente do numero 8657627 repartido por 1987, com a condiçaõ de ter a mesma exactidaõ, que se tem procurado nos exemplos precedentes.

Conforme a reflexaõ ultima que temos feito, tomaremos pois para repartir 8658 por 1987, como aqui se mostra:

8658	1987
	4357
710 . .	199
113 . .	20
13 . .	2

Onde, em lugar de partir o resto 710 por 1987 partiremos por 199, por quanto a letra 7 supprimida no divisor he maior que 5. Do mesmo modo do na operaçaõ ſeguinte em lugar de 19 tomaremos 20 para diviſor, porque ſe ſupprime hum 9. E finalmente na operaçaõ ſeguinte, como o diviſor 2 he hum pouco maior do que devia ſer, e eſte ſe contém 6 vezes e $\frac{1}{2}$ no reſto 13, aſſentaremos antes 7 no quociente, do que 6; e acabada a operaçaõ diremos que o quociente pedido he 4357.

73 Agora ſerá facil de entender o que ſe deve praticar, quando ſe requer o quociente com maior exactidaõ do que até á caſa das unidades.

Por exemplo: Se quizermos o quociente exacto até á caſa das *decimas-milleſimas*, naõ he neceſſario mais do que ajuntar ao dividendo tantas cifras quantas ſaõ as caſas da dizima que pertendemos, v. gr. quatro no exemplo propoſto. Entaõ ſe fará a diviſaõ ſegundo o methodo preſente; e tendo achado o quociente exacto até á caſa das unidades, nelle ſe cortaráõ para a dizima por meio da virgula tantas letras, quantas ſe determinaráõ achar no principio da operaçaõ.

Exemplo V.

PEde-ſe o quociente do numero 6927 dividido por 4532 com a condiçaõ de ſer exacto até a caſa das *decimas-milleſimas*.

Como as *decimas-milleſimas* pertencem á quarta caſa da dizima, ajuntaremos quatro cifras ao dividendo; e a queſtaõ ſerá reduzida a buſcar o quociente do numero 69270000 dividido por 4532, exacto até á caſa das unidades, como nos exemplos precedentes. Aſſim fazendo a applicaçaõ do me-

methodo actual, teremos para repartir 69270 por 4532, da maneira ſeguinte:

```
69270 | 4532
      |------
      | 15285
23950
 1290 . . 453
  384 . . 45
   24 . . 5
```

E achando o quociente 15285, nelle cortaremos para a dizima quatro letras, pois tantas cifras ajuntámos ao dividendo; e ſerá o quociente pedido 1,5285.

Havendo dizima no dividendo, no diviſor, ou em ambos, deveráõ primeiro repartir-ſe de ſorte, que ſe poſſa deſprezar a virgula, como aſſima fica declarado (n. 68), e depois ſe procederá á operaçaõ como neſte ultimo exemplo.

Pelo methodo preſente póde reduzir-ſe facilmente á dizima qualquer *fracçaõ* ordinaria, havendo reſpeito ao que aſſima diſſemos (n. 71).

Querendo v. gr. reduzir á dizima a fracçaõ $\frac{4253}{9678}$ de ſorte que ſe repreſente o ſeu valor exactamente até á caſa das milleſimas, devemos partir (n. 73) o numero 4253000 por 9678; que vem a ſer o meſmo que dividir (n. 69) o numero 4253 por 9678, ou (n. 71) o numero 4253 por 968, conforme o methodo até agora declarado. Feita a operaçaõ, virá ao quociente 439: e teremos 0,439 pelo valor da fracçaõ propoſta, com a exactidaõ que ſe intentava.

55 O methodo que assima ajuntámos no fim da *Multiplicaçaõ*, para se fazer esta operaçaõ por meio unicamente do *Somar*, tambem se póde applicar á *Divisaõ*, de sorte que alem do *Somar* naõ se careça de outra cousa mais que do *Diminuir*. A sua praxe he desta maneira.

Primeiramente forma-se huma colunna da addiçaõ successiva do *divisor*, do mesmo modo que para multiplicar a formámos da addiçaõ do *multiplicando* (pag. 37).

Depois toma-se no dividendo á esquerda hum membro de tantas letras, quantas bastarem para que na colunna se ache hum numero igual, ou proximamente menor. O algarismo, que este tiver defronte, se assenta no quociente, e o numero debaixo do dividendo parcial, do qual se diminue, e ao resto se ajunta a letra seguinte do dividendo principal; e assim resulta outro dividendo parcial, o qual se busca na colunna, e na sua falta o numero proximamente menor; e assim por diante. Quando na colunna se naõ achar o dividendo parcial, nem algum numero proximamente menor, assentar-se-há cifra no quociente, e se ajuntará ao dito dividendo a letra seguinte do dividendo total para se continuar a operaçaõ.

Se quizermos v. gr. repartir 220188745725 por 236743, primeiramente assentaremos estes numeros do modo ordinario, como aqui se mostra.

220188745725

220188745725	236743	1 . . 236743
2130687		2 . . 473486
	930075	3 . . 710229
712004		4 . . 946972
710229		5 . . 1183715
		6 . . 1420458
1775572		7 . . 1657201
1657201		8 . . 1893944
		9 . . 2130687
1183715		
1183715		10 . . 2367430
0000000		

Depois faremos a colunna ſubſidiaria por meio da addicçaõ ſucceſſiva do diviſor, como ſe vê no exemplo; e com ella entraremos a executar a diviſaõ, que naõ involve mais difficuldade alguma.

Tomando pois para o primeiro dividendo parcial as primeiras ſete letras 2201887, porque ſeis fariaõ hum dividendo menor que o diviſor, acharemos que na colunna lhe toca o numero proximamente menor 2130687 defronte da letra 9. Pelo que aſſentaremos 9 no quociente, e o dito numero debaixo do dividendo reſpectivo, do qual o diminuiremos, e ao reſto ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he 4, e teremos para partir 712004. Naõ achando eſte numero na colunna, tomaremos o que ſe acha proximamente menor, defronte da letra 3, a qual ſe aſſentará no quociente, e o dito numero ſe diminuirá do dividendo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte 5, de ſorte que ficará para partir 17755.

Co-

Como porem eſte numero ſe naõ acha na columna, nem outro que ſeja proximamente menor, poremos cifra no quociente, e ajuntando a letra ſeguinte 7 teremos para dividir 177557. E como eſte numero ainda he menor que os da columna, poremos outra cifra no quociente, e ajuntando outra letra teremos para repartir 1775572. Entaõ acharemos na columna o numero proximamente menor 1657201 defronte da letra 7, a qual paſſaremos ao quociente, e diminuiremos o numero do dividendo reſpectivo, ajuntando ao reſta a letra ſeguinte do dividendo principal, que he a ultima 5, e teremos para repartir 1183715. Eſte numero ſe acha na columna defronte da letra 5, a qual aſſentaremos no quociente; e por que feita a diminuiçaõ naõ ſobra nada, ſerá o quociente exacto 930075.

Sobre o uſo deſte methodo deve aqui entender-ſe o meſmo, que já declaramos a reſpeito da multiplicaçaõ (pag. 49) 55

Prova da Multiplicaçaõ, e Diviſaõ.

74 DA meſma definiçaõ, que temos dado deſtas duas operações, ſe póde conhecer a *prova* dellas, que vulgarmente ſe chama *real*.

Como na Multiplicaçaõ ſe toma o multiplicando tantas vezes quantas ſaõ as unidades do multiplicador, he evidente, que ſe procurarmos quantas vezes o producto contém o multiplicando, iſto he, (n. 59), ſe dividirmos o producto pelo multiplicando, deve ſahir o multiplicador no quociente. E como he indifferente tomar o multitiplicando para multiplicador, e reciprocamente (n. 44), ſegue-ſe em geral: *Que dividindo o producto de qualquer multiplicaçaõ por hum dos factores deve ſahir o outro no quociente.*

Por exemplo, tendo achado aſſima (n. 50) que o numero 2864 multiplicado por 6 dá o producto 17184; ſe dividirmos eſte por 2864, teremos no quociente 6; e ſe o dividirmos por 6, teremos no quociente 2864.

Do meſmo modo: Por quanto o quociente de qualquer diviſaõ denota quantas vezes o diviſor ſe contem no dividendo, manifeſtamente ſe ſegue, que ſe o diviſor ſe tomar tantas vezes quantas denota o quociente, iſto he (n. 40) ſe o diviſor ſe multiplicar pelo quociente, deve ſahir no producto o dividendo, no caſo de ter ſido feita a diviſaõ ſem ficar reſto algum; e que tendo havido reſto, ſe o diviſor ſe multiplicar pelo quociente, e ao producto ſe ajuntar o reſto, deve reſultar o meſmo dividendo.

Por exemplo: Temos achado aſſima (n. 63), que o numero 189492 repartido por 375 dá o quociente 505, e o reſto 117. E multiplicando 375 por 505, teremos o producto 189375, ao qual ajuntando-ſe o reſto 117, reſultará o meſmo dividendo 189492.

Donde ſe ve, que a *prova real* da Diviſaõ ſe faz pela Multiplicaçaõ, e da Multiplicaçaõ pela Diviſaõ.

Porém eſtas operações pódem verificar-ſe por hum meio muito mais facil e expedito, que agora moſtraremos; advertindo que naõ devem por iſſo deſprezar-ſe as reflexões que acabamos de fazer, por quanto ſerviraõ para muitas outras couſas.

Pro-

Prova pela regra dos noves.

75 PAra moſtrarmos o uſo deſta regra por meio de hum exemplo, ſupponhamos que tendo multiplicado 65498 por 454, e achado o producto 29736092, queremos verificar eſte reſultado. Eis-aqui a operaçaõ.

Somaremos as letras do multiplicando 6,5,4,9,8, ſem attender ao ſeu valor local, como ſe todas eſtiveſſem na caſa das unidades, e lançaremos fóra *nove*, á medida que elle ſe achar na ſoma. Por fim teremos hum reſto, que neſte exemplo he 5, o qual aſſentaremos ao lado do meſmo multiplicando.

Do meſmo modo ſomaremos todas as letras do multiplicador 4, 5, 4, lançando fora os *noves*, e teremos o reſto 4, que aſſentaremos ao lado do meſmo multiplicador.

Entaõ multiplicaremos os dous reſtos hum pelo outro, e do producto, que neſte exemplo he 20, lançaremos fora os *noves* que elle tiver; e ficará hum reſto, que no caſo preſente he 2.

Ora ſe o producto aſſima dito he exacto, he neceſſario que ſomando do meſmo modo todas as letras delle 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, e lançando fóra os *noves*, naõ fique tambem ſenaõ 2, como ſe acha com effeito.

Eſta regra ſuppõe que para haver o reſto da ſubtracçaõ de todos os *noves*, que em qualquer numero ſe contém, naõ he neceſſario mais do que ſomar todas as ſuas letras, e lançar fóra na ſoma dellas os *noves* que ſe acharem, como ſe demonſtra facilmente reflectindo ſobre os principios da Numemeraçaõ (n. 39 §§). Isto supposto eis-aqui a razaõ da prova na Multiplicaçaõ.

Como o multiplicando 65498 he composto de hum certo numero de *noves* e do resto 5, e como o multiplicador 454 he tambem composto de hum certo numero de *noves* e do resto 4, he manifesto que sómente pelo producto de 4 por 5 ou por 20, hade deixar o producto total de ser divisivel por 9; ou (tirando os *noves* de 20) que sómente por 2 hade deixar de ser divisivel por 9. Logo estando o dito producto exacto deve ficar nelle o mesmo numero, que fica no producto dos dous restos, depois de serem lançados fóra os *noves* que elle contém.

A prova da Multiplicaçaõ se applica facilmente á Divisaõ. Como o producto do divisor pelo quociente com o resto, quando o houver, he igual ao dividendo (n. 74), naõ he necessario mais do que tirar os noves ao divisor, e ao quociente; multiplicar os dous restos; do producto lançar fóra os noves, se os tiver; somar o resto com o que ficar depois de tirados os noves ao resto da divisaõ; e da soma lançar fóra os noves, se os tiver; e o resto será o que se deve achar tambem no dividendo, depois de lançados fóra os noves.

Por exemplo; Tendo achado o quociente 812, e o resto 200, da repartiçaõ de 756984 por 932, tiraremos os noves ao divisor 932, e ficará o resto 5, depois ao quociente 812, e ficará 2. Entaõ multiplicaremos os dous restos, e do producto 10 lançando fora 9, fica 1; e tirando tambem os noves ao resto da divisaõ 200, ficaõ 2, que somados com o resto precedente 1 fazem 3; isto he o que deve restar no dividendo depois de se tirarem os

no-

noves eſtando a operaçaõ exacta, como ſe acha com effeito.

Tomando a couſa em rigor, eſta verificaçaõ naõ he infallivel. Porque ſe na multiplicaçaõ, por exemplo, nos enganaſſemos de ſorte, que fizeſſemos qualquer algariſmo do producto maior huma, duas, ou mais unidades, e depois puzeſſemos outras tantas de menos em qualquer outro: como iſto naõ influiria ſobre o reſto que fica depois de lançados fóra os noves, he claro que hum erro ſemelhante naõ ſerà deſcuberto pela prova. Porem como para iſſo ſaõ neceſſarios dous erros, e dous erros iguais, e contrarios, que mutuamente ſe deſtruaõ, que vem a ſer o meſmo que commetter o erro de 9, ou dos multiplos de 9, he facil de ver que os caſos, em que a prova póde faltar, haõ de ſer rariſſimos na pratica.

55 A prova, que ſe faz por meio dos *noves*, igualmente podia fazer-ſe por meio de qualquer outro numero: mas eſcolheo-ſe o nove, por ſer mais facil de lançar fóra. Como porem temos notado, que os *onzes* ſe pódem tirar de qualquer numero quaſi com a meſma facilidade, e como iſto moſtra huma propriedade notavel da Numeraçaõ actual, que por outra parte póde ſervir de utilidade, ſerá conveniente que a ajuntemos neſte lugar, e he da maneira ſeguinte.

Se o primeiro algariſmo de qualquer numero, o terceiro, e os mais pelas caſas impares da direita para a eſquerda ſe ajuntarem, lançando fóra da ſoma o numero onze quando nella vier, e notando o reſto final que reſultar; e ſe depois ſe ajuntar do meſmo modo o ſegundo algariſmo, o quarto, e os mais pelas caſas pares; e ſe o reſto

ſe

ſe tirar do primeiro (ao qual ſendo neceſſario ſe ajuntará para iſſo o numero onze), o que ficar ſerá o reſto que ſobra do numero propoſto, lançados fóra todos os *onzes*.

Aſſim, por exemplo, para tirarmos os *onzes* do numero 7543945, diremos: 5 e 9 ſaõ 14, menos onze ſaõ 3, e 4 ſaõ 7, e 7 ſaõ 14, memos onze, ficaõ 3; depois, 4 e 3 ſaõ 7, e 5 ſaõ 12, menos onze, fica 1; tirando eſte ſegundo reſto 1 do primeiro 3, ficaõ 2, que he o reſto que ſobra tirados os onzes do numero 7543945. E para os tirarmos do numero 527381, diremos: 1 e 3 ſaõ 4, e 2 ſaõ 6, primeiro reſto; depois 8 e 7 ſaõ 15, menos onze, ſaõ 4, e 5 ſaõ 9, ſegundo reſto; e porque eſte naõ póde diminuir-ſe do primeiro 6, ajuntar-lhe-hemos 11, e ſerá 17; do qual tirando 9, ficaõ 8: e eſte he o reſto que fica tirados os *onzes* do numero 527381.

Eſta notavel propriedade com igual razaõ póde ſervir de prova ás quatro operações de Arithmetica; prova que ſómente faltará, quando o erro commettido na operaçaõ for onze, ou algum dos multiplos de onze. E ſe eſta prova ſe ajuntaſſe com a dos noves, muito mais provavel ſeria o juizo que ſe fizeſſe da certeza da operaçaõ, pois que entaõ ſómente eſcaparia o erro de 99, ou dos multiplos de 99. ʃʃ

Uſo da Diviſaõ.

76 A Diviſaõ ſerve naõ ſómente para achar quantas vezes hum numero contém outro, mas tambem para partir qualquer numero em partes iguais. Tomar a ametade, a terça, a quarta, a

a quinta, vigesima, trigesima parte &c. de hum numero, he o mesmo que dividi-lo por 2, 3, 4, 5, 20, 30 &c., ou parti-lo em 2, 3, 4, 5, 20, 30 partes iguais &c., para tomar huma dellas.

A Divisaõ serve tambem para converter as unidades de qualquer especie em outras de especie superior; como, por exemplo, para reduzir hum certo numero de *dinheiros* a *soldos*, e estes a *libras*. Para reduzir 5864 *dinheiros* a *soldos*, notaremos que como saõ necessarios 12 *dinheiros* para fazer hum *soldo*, quantas vezes houver 12^d em 5864^d, tantos *soldos* haverá na dita quantia. He necessario pois dividir 5864 por 12, e acharemos no quociente 488ʃ, e 8^d de resto. Para reduzir a *libras* os 488ʃ, dividiremos 488 por 20, porque saõ necessarios 20ʃ para fazer 1 *libra*, e teremos no quociente 24^{lb}, e de resto 8ʃ; e assim a quantia proposta será reduzida a 24 *libras*, 8 *soldos*, e 8 *dinheiros*.

Por occasiaõ desta repartiçaõ por 20, notaremos que havendo de dividir qualquer numero por outro que acaba em cifras, podemos abbreviar a operaçaõ, separando no dividendo da parte direita tantas letras quantas saõ as cifras do divisor, e dividindo as que ficarem a esquerda pelas letras significativas do mesmo divisor; se houver algum resto, á direita delle se ajuntaráõ as letras separadas no dividendo, para ter o resto total da divisaõ; e naõ havendo resto, as mesmas letras separadas seraõ o unico resto da operaçaõ.

Por exemplo: havendo de dividir 5834 por 20, separaremos a ultima letra do dividendo 4, e repartiremos por 2 a parte que fica 583. Feita a operaçaõ, teremos o quociente 291, e o resto 1, ao qual ajuntaremos a letra ſeparada 4, e ſerá o reſto total 14, de ſorte que o quociente completo ſerá 291 $\frac{14}{20}$.

Eſta abbreviaçaõ póde applicar-ſe á reducçaõ da carga de hum navio a *tonelladas*. Sabendo v. gr. que a carga he de 2584954 *libras*, para a reduzir em *tonelladas*, iſto he, para a dividir por 2000, deveremos ſeparar as tres ultimas letras á direita, e tomar a ametade das que ficarem; e aſſim teremos 1292 *tonelladas*, e 954 *libras*.

O meſmo ſe applicará a muitos outros caſos, conforme a natureza da queſtaõ o permittir.

Dos Quebrados.

77 DAmos na Arithmetica o nome de *Quebrados*, ou *Fracções*, aos numeros, pelos quais ſe exprimem as quantidades menores que a unidade.

78 Para ſe formar huma idea clara delles, he neceſſario conceber a meſma quantidade, que ſe tem eſcolhido para unidade, como compoſta de outras unidades mais pequenas; aſſim como ſe concebe, por exemplo, a *libra* compoſta de 20 partes, ou unidades, que ſe chamaõ *ſoldos*.

Huma, ou muitas deſtas partes, nas quais ſe divide a unidade, ou das quais ſe entende compoſta, formaõ o que ſe chama *quebrado*, ou *fracçaõ* da unidade. E o meſmo nome ſe dá aos numeros, com que ellas ſe repreſentaõ.

79 Ha duas differenças na expreſſaõ dos quebrados, e ambas ellas recebidas na pratica.

A primeira conſiſte em repreſentar as partes

da

da unidade á maneira dos numeros inteiros, tomando-as como unidades de outra especie, e dando-lhes hum nome particular.

Assim, para mostrar *sete* partes, das quais entraõ vinte em huma *libra*, damos primeiramente ás ditas partes o nome de *soldos*; e prescindindo da *libra*, ou da unidade principal, as declaramos como unidades absolutas com a letra 7, á qual ajuntamos a letra inicial das unidades que significa, deste modo 7*s*; expressaõ que em si mesma he inteira e absoluta, mas a respeito da *libra* he huma fracçaõ.

Esta differença de quebrados tem lugar nos numeros complexos, dos quais adiante fallaremos.

80 Como porem naõ he possivel dar nomes em particular a todas as divisões que se pódem fazer da unidade, faz-se necessaria a segunda differença de quebrados, em cuja expressaõ se usa de dous numeros, o primeiro dos quais se assenta em sima de huma risca, e mostra as partes da unidade de que se compõe a quantidade, que queremos significar; e o segundo debaixo da risca, para denotar quantas dessas partes formaõ a unidade. Assim, para pôr em figura as *sete* partes da *libra*, de que ha pouco fallamos, deveremos assentar os dous numeros desta maneira $\frac{7}{20}$.

81 Para dizer o valor de hum quebrado, primeiramente se lê o numero que está em sima da risca, o qual se chama *Numerador*, e depois o que está por baixo, o qual se chama *Denominador*; e a este se ajunta a addiçaõ *avos* (*). Assim para de-

F cla-

(*) Esta addiçaõ *avos* naõ significa cousa alguma per si mesma

Ho.

clarar o valor de $\frac{7}{20}$, diremos *sete vinte-avos*, e de $\frac{11}{100}$, diremos *onze cem-avos* &c.; advertindo, que *onzes cem-avos* quer dizer *onze* partes tais, que dellas sejaõ necessarias *cem* para formar a unidade.

Sendo o denominador de 2 até 8 naõ se usa da addiçaõ *avos*, mas dos nomes, *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *setimos*, e *oitavos*; ou *ametades*, *terças*, *quartas* partes &c. Tambem de 9 para sima se usa hoje dos nomes ordinais da lingoa Latina, como $\frac{3}{1000}$ *tres mil-avos*, ou *tres millesimas* partes da unidade.

82 Mostra pois o numerador de quantas partes da unidade se compõe a quantidade, que se declara pelo quebrado; e o denominador determina a grandeza e valor dessas partes, mostrando quantas dellas formaõ a unidade. Por isso se chama denominador, porque dá o nome ás partes da fracçaõ, e faz v. gr. nestes dous quebrados $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, que as partes do primeiro sejaõ *quintas*, e as do segundo *setimas*.

83 Tanto o numerador como o denominador se

He a terminaçaõ de *oitavos*, até onde os nossos Arithmeticos antigos davaõ nome *ordinal* proprio ao denominador. Dahi por diante, ou por arrecearem usar dos *ordinais* da lingoa Latina, ou para maior facilidade na leitura dos quebrados, usáraõ dos *cardiais*, ajuntando-lhes a terminaçaõ do mesmo nome *oitavos*, para os fazerem ser equivalentes aos *ordinais*. Deste modo *onze-avos* tem o lugar de hum nome que se formaria de *onze*, assim como *oitavos* se fórma de *oito*; que seria *onzavos*. Assim dous *onze-avos* he como se dissessemos dous *onzavos*, tres *cem-avos* o mesmo que tres *centavos* &c.

ſe chamaõ tambem *termos* do quebrado, que por elles ſe repreſenta. E em dous quebrados, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores chamaõ-ſe termos *homologos*; e o numerador de hum com o denominador do outro, termos *heterogeneos*.

Dos numeros inteiros conſiderados em fórma de quebrados.

84 AS operações, que ſe fazem ſobre os quebrados, conduzem muitas vezes a reſultados fraccionarios, cujo numerador ſe acha igual, ou maior que o denominador, como v. gr. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

As expreſsões deſta ſorte naõ ſaõ fracções propriamente tais, mas numeros inteiros, ou inteiros com quebrados, repreſentados em forma de fracções.

85 Para extrahir os inteiros, que ſe achaõ incluidos nellas, he neceſſario dividir o numerador pelo denominador. O quociente moſtrará os inteiros, e o reſto da diviſaõ; ſe o houver, ſerá o numerador de huma fracçaõ propriamente tal, que ſe ha-de ajuntar aos ditos inteiros, ficando o meſmo denominador. Aſſim $\frac{27}{5}$ ſe reduzem a $5\,\frac{2}{5}$ iſto he, ſinco unidades, e dous quintos da unidade.

A razaõ he, porque na expreſſaõ $\frac{27}{5}$ o denominador 5 moſtra que a unidade ſe tem dividido em 5 partes : logo quantas vezes houver 5 em 27, tantas unidades inteiras haverá no valor da fracçaõ $\frac{27}{5}$.

86 As multiplicações, e divisões dos numeros inteiros acompanhados de fracções requerem, ao menos para maior facilidade das operações, que os ditos inteiros se reduzaõ á fórma de quebrados. Isto se faz multiplicando o inteiro pelo denominador da fracçaõ, á qual se quer reduzir, e o producto será o numerador.

Por exemplo: Querendo reduzir o numero 8 a huma fracçaõ que tenha 5 por denominador, multiplicaremos 8 por 5, e o producto 40 será o numerador; donde teremos $\frac{40}{5}$. A razaõ he, porque havendo de reduzir o numero 8 a *quintos*, cada unidade se considera composta de 5 partes: logo 8 unidades se converteráõ em 40 das ditas partes. Do mesmo modo o numero misto $7\frac{4}{9}$ convertido em *nove-avos* dará $\frac{67}{9}$, porque o inteiro 7 vale $\frac{63}{9}$, e ajuntando os $\frac{4}{9}$, teremos $\frac{67}{9}$.

Quando se ha-de reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, e naõ importa que tenha certo denominador, o mais simples de tudo he tomar para isso a unidade, a qual se subentende sempre como denominador natural de todos os numeros inteiros. Porque assim como por $\frac{8}{3}$ entendemos oito *terços*, e por $\frac{8}{2}$ oito *meios*, assim por $\frac{8}{1}$ entenderemos oito *unidades*.

Das

Das mudanças, que ſe pódem fazer nos termos de hum quebrado, ſem lhe alterar o valor.

87 HE manifeſto, que em quantas mais partes ſe conceber a unidade dividida, tantas mais ſeraõ neceſſarias para repreſentar huma meſma quantidade.

88 Donde ſe vê, que pode fazer-ſe o denominador de huma fracçaõ duplo, triplo, quadruplo &c., ſem lhe mudar o valor, com tanto que ao meſmo tempo ſe faça tambem o ſeu numerador duplo, triplo, quadruplo &c.

Logo pode dizer-ſe em geral: *Que hum quebrado naõ muda de valor, quando ſe multiplicaõ ambos os ſeus termos por hum meſmo numero,*

Aſſim $\frac{3}{4}$ he o meſmo que $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ &c.; e $\frac{1}{2}$ a meſma couſa que $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ &c.

89 Por huma razaõ ſemelhante ſe entende, que quanto menos partes ſe ſuppuzerem na unidade, tanto menos ſeráõ preciſas para formar huma meſma quantidade.

Pelo que he manifeſto, que ſem mudar o valor de hum quebrado podemos fazer o ſeu denominador 2, 3, 4 &c. vezes menor, com tanto que façamos igualmente o numerador 2, 3, 4 &c. vezes menor.

Donde em geral ſe póde dizer: *Que hum quebrado naõ muda de valor todas as vezes que ambos os ſeus termos ſe dividem por hum meſmo numero.*

Para ſe ver diſtintamente a verdade deſtas duas pro-

Lea-se

propoſições , baſta reflectir ſobres as noções que temos dado do numerador , e denominador.

Pelo que devemos notar , que multiplicar ou dividir os termos de hum quebrado por hum meſmo numero , he couſa muito diverſa de multiplicar ou dividir o meſmo quebrado ; porque as ditas operações ſe fazem ſem elle mudar de valor, como temos declarado.

Os dous principios , que acabamos de expôr, ſervem de baſe ás duas Reducções ſeguintes , que ſaõ de grande uſo na pratica dos quebrados.

Reducçaõ dos Quebrados ao meſmo denominador.

90 1.° PAra reduzir duas fracções ao meſmo denominador , multiplicar-ſe-haõ os dous termos da primeira pelo denominador da ſegunda , e os dous termos deſta pelo denominador daquella.

Supponhamos , por exemplo , que temos para reduzir ao meſmo denominador os dous quebrados $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira fracçaõ 2 e 3 pelo denominador da ſegunda 4, e teremos $\frac{8}{12}$ que (n. 88) he do meſmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da ſegunda 3 e 4 pelo denominador da primeira 3 , e reſultará $\frac{9}{12}$ do meſmo valor que $\frac{3}{4}$. E aſſim as fracções $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ ſeraõ mudadas em em $\frac{8}{12}$, e $\frac{9}{12}$ que tem reſpectivamente o meſmo valor, e ſe achaõ reduzidas ao meſmo denominador.

He facil de ver, que por eſte methodo teraõ ſempre as novas fracções o meſmo denominador, porque em cada huma das operações ſe fórma eſte da multiplicaçaõ dos denominadores primitivos.

91 2.º Sendo mais de duas as fracções, reduzir-ſe-haõ ao meſmo denominador, multiplicando os dous termos de cada huma pelo producto dos denominadores de todas as outras.

Tendo v. gr. para reduzir ao meſmo denominador eſtas quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$.

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira 2 e 3 pelo producto dos denominadores das outras 4, 5, e 7; producto que acharemos multiplicando primeiro 4 por 5, e o ſeu producto 20 por 7, que dá 140. Aſſim multiplicando 2 e 3 por 140, teremos os productos 280, e 420, dos quais reſultará a fracçaõ $\frac{280}{420}$, que (n. 88) he do meſmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da ſegunda 3 e 4 pelo producto dos denominadores das outras 3, 5, e 7, iſto he, por 105, e teremos a fracçaõ $\frac{315}{420}$ igual a $\frac{3}{4}$. Paſſando á terceira multiplicaremos os ſeus termos 4 e 5 por 84, producto dos tres dominadores das outras 3, 4, e 7, e teremos a fracçaõ $\frac{336}{420}$ em lugar de $\frac{4}{5}$. E na quarta em fim multipliplicaremos ambos os ſeus termos 5 e 7 por 60, que he o producto dos denominadores 3, 4, 5 das tres primeiras, e teremos $\frac{300}{420}$ em lugar de $\frac{5}{7}$.

Deſte modo temos convertido as quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{7}$ neſtas quatro $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, e $\frac{300}{420}$, menos ſimples na verdade, mas do meſmo valor que ellas, e pela razaõ de ſerem reduzidas ao meſmo denominador, mais ſuſceptiveis das operações da Addiçaõ, e Subtracçaõ, como adiante moſtraremos.

He manifeſto pela meſma operaçaõ da reducçaõ, que as fracções que reſultaõ ſaõ reſpectivamente iguais ás fracções dadas, porque em cada huma deſtas ſe multiplicaõ ambos os termos por hum meſmo numero (n. 88). E como o denominador de cada huma das novas fracções he formado do producto de todos os denominadores primitivos, naõ pódem deixar de ficarem todas com o meſmo commum denominador.

Nada até §4- 95.

99 Como pelo methodo antecedente ſe reduzem ſim os quebrados ao meſmo commum denominador, mas nem ſempre ao mais ſimples que elles pódem ter, pela qual razaõ ſeria neceſſaria outra reducçaõ, e eſſa muito trabalhoſa, para os trazer á maior ſimplicidade, que permitte a condiçaõ de ficarem com a meſma denominaçaõ; ſerá muito conveniente procurar, que logo ſe reduzaõ ao mais pequeno denominador commum, que he poſſivel. Iſto ſe conſeguirá, praticando da maneira ſeguinte.

Se os denominadores dos quebrados que ſe haõ haó de reduzir á mefma denominaçaó, cada hum dos quais fe fuppõe abbreviado aos feus menores termos, naó tiverem divifor commum, a reducçaó fe praticará fimplesmente da maneira affima declarada; e o denominador commum, que fe achar, ferá o menor que os ditos quebrados podem ter.

Porem fe os denominadoras tiverem divifor commum, dividir-fe-haó todos por elle, ou pelo maior delles quando forem muitos; e os quebrados fe converteráó em outros tantos, que feraó de differente valor, mas depois fe reftituiráó ao mefmo. Eftes fe reduziráó á mefma denominaçaó, conforme a regra affima dada; e o denominador commum delles fe multiplicará pelo mefmo divifor, pelo qual foraó divididos os denominadores primitivos. Defte modo fe tornaráó a fazer os quebrados reduzidos iguais aos quebrados da queftaó, e ficaráó álem diffo com o menor denominador commum que he poffivel.

Quando fómente alguns dos denominadores tiverem divifor commum, por elle fe dividiráó os ditos denominadores, e fe multiplicaráó tambem os numeradores dos outros quebrados, cujos denominadores por elle fe naó pódem dividir, e affim fe formaráó os novos quebrados fubfidiarios, que fe haó de reduzir ao mefmo denominador, o qual fe multiplicará pelo dito divifor, para fe reftituirem ao valor dos quebrados propoftos. Do mefmo modo, quando todos os denominadores primitivos tem divifor commum, e feita a divifaó refultaó quebrados, nos quais alguns denominadores ainda tem divifor entre fi, fobre elles fe praticará o mefmo que no cafo antecedente, e

affim

aſſim por diante. E no fim o denominador commum dos quebrados reduzidos ſe multiplicará pelo producto de todos os diviſores, que ſucceſſivamente ſe empregáraõ. Os exemplos ſeguintes moſtraráõ claramente a praxe deſtas regras.

Exemplo I. Querendo reduzir á meſma denominaçaõ os dous quebrados $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{27}$; como os denominadores 18 e 27 tem o maior diviſor commum 9, parti-los-hemos ambos por 9, e reſultaráõ os dous quebrados $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$; os quais ſendo reduzidos ao meſmo denominador daráõ $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$; e multiplicando o denominador commum delles 6 pelo diviſor 9, ſe mudaráõ em $\frac{15}{54}$, $\frac{14}{54}$; quebrados iguais aos da queſtaõ, e os mais ſimples que ſaõ poſſiveis. Se a reducçaõ ſe fizeſſe ao modo ordinario, em lugar delles achariamos $\frac{135}{486}$, $\frac{126}{486}$.

Exemplo II. Havendo de reduzir ao meſmo denominador os quebrados $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{39}$; como os denominadores 26, 13, 39, tem o diviſor commum 13, por elle os dividiremos todos, e reſultaráõ os quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, ſobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita eſta, acharemos que ſe reduzem a $\frac{3}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{6}$; e multiplicando o denominador commum 6 pelo diviſor 13, ficaráõ os quebrados propoſtos reduzidos $\frac{3}{78}$, $\frac{12}{78}$, $\frac{8}{78}$,

com

com o menor denominador commum que he poſſivel. Se praticaſſemos a regra ordinaria, achariamos $\frac{507}{13182}$, $\frac{2028}{13182}$, $\frac{1352}{13182}$.

Exemplo III. Se tivermos de reduzir á meſma denominaçaõ os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$; como os tres denominadores 7, 15, 30, naõ tem diviſor commum, mas taõ ſómente os dous ultimos, eſtes ſe dividiráõ pelo ſeu maior diviſor 15, e pelo meſmo ſe multiplicará o numerador 2 do primeiro quebrado, cujo denominador naõ podemos dividir. Aſſim reſultaráõ outros tres quebrados $\frac{30}{7}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{2}$, ſobre os quais executaremos a reducçaõ. Feita a qual, acharemos que ſe reduzem a $\frac{60}{14}$, $\frac{56}{14}$, $\frac{7}{14}$; e multiplicando o denominador 14 pelo diviſor 15, ficaráõ os quebrados da queſtaõ reduzidos a $\frac{60}{210}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{7}{210}$. Se obraſſemos do modo ordinario achariamos $\frac{900}{3150}$, $\frac{840}{3150}$, $\frac{105}{3150}$.

Exemplo IV. Pede-ſe, que reduzamos ao meſmo denominador os quebrados $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{55}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{1}{154}$. Primeiramente, como todos os denominadores ſaõ diviſiveis por 11, feita a diviſaõ mudaremos os quebrados em $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{14}$. Depois, como neſtes ultimos os denominadores 7, e 14, ainda tem o diviſor commum 7, por elle os dividiremos,

mos, e pelo meſmo multiplicaremos os numeradores 3, e 7, cujos denominadores ſe naõ poderaõ dividir; e aſſim reſultaráõ novamente os quebrados $\frac{21}{1}$, $\frac{49}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, ſobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita a operaçaõ, acharemos que ſe reduzem a $\frac{210}{10}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{50}{10}$, $\frac{5}{10}$; e multiplicando o denominador commum 10 por 77, que he o producto dos diviſores 7, e 11, teremos os quebrados da queſtaõ reduzidos reſpectivamente a $\frac{210}{770}$, $\frac{98}{770}$, $\frac{50}{770}$, $\frac{5}{770}$, da fórma mais ſimples que he poſſivel. Se neſte caſo uſaſſemos da regra ordinaria achariamos $\frac{1956570}{7174090}$, $\frac{913066}{7174090}$, $\frac{465850}{7174090}$, $\frac{46585}{7174090}$, quebrados muito compoſtos, que careceriaõ de huma operaçaõ muito trabalhoſa, para ſe reduzirem á ſimplicidade da primeira fórma, ſendo para iſſo neceſſario procurar primeiro o maior diviſor commum entre o denominador e os quatro numeradores, como abaixo ſe moſtrará. ſſ

Reducçaõ dos Quebrados á expreſſaõ mais ſimples que he poſſivel.

92 HUma fracçaõ he tanto mais ſimples, quanto os ſeus termos ſaõ menores. Muitas vezes he poſſivel reduzir huma fracçaõ dada a menores termos; e iſto ſuccede todas as vezes que o numerador, e denominador ſe podem dividir ambos

por

por hum meſmo numero. Como eſta operaçaõ naõ lhe altera o valor (n. 89), he huma ſimplificaçaõ que ſe naõ deve omittir, pois naõ ſómente contribue para a elegancia da expreſſaõ, mas tambem para ſe formar melhor conceito do valor. Porque ſem embargo de que v. gr. a fracçaõ $\frac{27}{63}$ tem o meſmo valor que $\frac{3}{7}$, por eſta ſegunda comtudo ſe fórma huma idea mais clara da quantidade que por ambas ellas ſe repreſenta, naõ ſe diſtrahindo a attençaõ com taõ grande numero de partes, como na primeira.

Para ſe fazer pois a reſoluçaõ preſente, ou para *abbreviar quebrados*, eis-aqui o methodo que ſe ha-de ſeguir.

93 Primeiramente dividir-ſe-haõ ambos os termos por 2, e eſta operaçaõ ſe continuará em quanto ſe puder fazer ſem reſto. Depois ſe paſſará a dividir por 3, e dahi por 5, 7, 11, 13, 17 &c., iſto he, por todos os numeros *primos*, que ſaõ aquelles que naõ tem diviſor exacto, ſenaõ a ſi meſmos, ou a unidade.

A unica difficuldade, que ſe offerece neſte methodo, he ſaber quando ſe póde dividir ſem reſto por 2, 3, 5, &c. para naõ fazer debalde a diviſaõ. Para iſſo ajudaráõ muito os principios ſeguintes.

94 Todo o numero, cuja ultima letra á direita ſignifica numero par, he diviſivel por 2.

Todo o numero, cujos algariſmos ſomados fizerem 3, ou hum numero multiplo de 3, he diviſivel por 3. Aſſim v. gr. o numero 54231 póde dividir-ſe exactamente por 3, porque a ſomma

dos

dos ſeus algariſmos 5, 4, 2, 3, 1, faz 15, que he multiplo de 3, pois contem 5 vezes 3 exactamente.

Do meſmo modo, ſe a ſoma dos algariſmos fizer 9, ou hum multiplo de 9, ſerá o numero diviſivel por 9.

Todo o numero que acabar em 0, ou em 5, ſerá diviſivel exactamente por 5.

¶¶ E todo o numero, cujos algariſmos das caſas impares da direita para a eſquerda fizerem huma ſoma igual a dos algariſmos das caſas pares; ou tambem deſigual, com tanto que a differença das duas ſomas ſeja 11, ou hum multiplo de 11 ſerá diviſivel por 11. Aſſim ſerá diviſivel por 11 o numero 89452, porque as letras das caſas impares 2, 4, 8, fazem a meſma ſoma que as letras das caſas pares 5 e 9. Do meſmo modo o numero 8452719 ſerá diviſivel por 11, porque as letras das caſas pares 9, 7, 5, 8, fazem a ſoma 29, e as das pares 1, 2, 4, a ſoma 7; ſendo a differença das duas ſomas 22, que he multiplo de 11. ¶¶

Em quanto ao numero 7, e aos mais *primos*, ainda que ſeria facil achar regras ſemelhantes, como o exame que ellas ſe ſuppõe ſeria mais trabalhoſo que a meſma diviſaõ, milhor he que eſta ſe experimente.

Supponhamos v. gr. que queremos abbreviar o quebrado $\frac{2016}{5796}$. Primeiramente dividiremos ambos os termos por 2, porque ambos elles acabaõ em algariſmo par, e teremos $\frac{1008}{2898}$. Depois tornaremos a dividir por 2, e reſultará $\frac{504}{1449}$. E por-

que

que naõ póde mais fazer-se a divisaõ por 2, e pelo que fica dito se ve que póde fazer-se por 3, dividiremos por 3, e teremos $\frac{168}{483}$. Tornando a dividir por 3, resultará $\frac{56}{161}$; e porque naõ póde mais caber a divisaõ por 3, experimentaremos por 7, e como succede sem resto, ficará o quebrado proposto finalmente reduzido a $\frac{8}{23}$.

A razaõ porque nesta operaçaõ naõ experimentamos a divisaõ, senaõ pelos numeros *primos* 2, 3, 5, 7, &c., he porque depois de exhaurida v. gr. a divisaõ por 2, he escusado tentar faze-la por 4, por quanto se esta pudesse fazer-se sem resto, muito milhor se poderia fazer aquella.

95 De todos os meios, que se pódem applicar para abbreviar hum quebrado, o mais directo he dividir logo ambos os seus termos pelo maior divisor commum, que elles pódem ter. Eis-aqui a regra para o achar.

Divida-se o termo maior pelo menor. Se esta divisaõ se fizer sem resto, o termo menor será o maior divisor commum de ambos elles. Ficando porem algum resto, por elle se dividirá o termo menor, que servio de divisor na operaçaõ antecedente. Entaõ, se naõ houver resto, o resto precedente que servio de divisor será o maior divisor que se busca; e se houver resto, por elle se dividirá o que foi divisor na operaçaõ antecedente; e assim por diante, até chegar a huma divisaõ exacta; e o divisor della será o que se busca. Se o divisor da ultima operaçaõ for a unidade, he sinal de que a fracçaõ naõ póde reduzir-se a menores termos.

Sup-

Supponhamos v. gr. que temos para abbreviar o quebrado $\frac{3760}{9024}$. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum de ambos os termos, dividindo 9024 por 3760, donde virá o quociente 2, e o reſto 1504. Por eſte reſto dividiremos 3760, e teremos o quociente 2, e o reſto 752; pelo qual dividiremos o reſto precedente 1504. E como eſta diviſaõ ſe faz exactamente, ſerá o diviſor della 752 o maior diviſor commum dos termos do quebrado propoſto; o qual por conſeguinte, feita a diviſaõ, ſe reduzirá a $\frac{5}{12}$.

E com effeito, pela operaçaõ achamos que 752 he diviſor exacto de 1504; logo tambem o he de 3760, que ſe compõe de duas vezes 1504, e 1 vez 752; e por conſeguinte o deve ſer igualmente de 9024, que ſe compõe de 2 vezes 3760, e 1 vez 1504.

Além diſto he facil de ver, que 752 he o maior diviſor commum, que podem ter os numeros 9024 e 3760. Porque naõ póde haver diviſor commum entre 9024 e 3760, que o naõ ſeja ao meſmo tempo entre 3760 e 1504; nem tambem entre eſtes dous, ſem que o ſeja igualmente entre 1504 e 752; porém he evidente, que entre eſtes dous ultimos numeros naõ póde haver maior diviſor commum do que 752: Logo &c.

55 Se forem mais que dous os numeros entre os quais devemos achar o maior diviſor commum, uſaremos do methodo ſeguinte.

Buſque-ſe o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, entre o ſegundo e o terceiro, entre eſte e o quarto &c., de qualquer ſorte

que

que os numeros estiverem dispostos. Pratique-se o mesmo sobre os divisores achados, e assim por diante, até chegar a hum só divisor, o qual será finalmente o maior divisor commum dos numeros propostos. Se em alguma parte da operaçaõ sahirem dous ou mais divisores iguais, hum delles sómente se tomará para a operaçaõ seguinte; e se todos alguma vez sahirem iguais, será escusado continuar a operaçaõ, porque ella virá a acabar em hum divisor igual a elles, se se levar ao fim conforme a regra, e por conseguinte qualquer delles será o maior divisor que intentamos achar. Encontrando-se na operaçaõ dous numeros, quaisquer que sejaõ, os quais naõ tenhaõ divisor commum senaõ a unidade, tambem os numeros propostos o naõ teraõ.

Exemplo. Pede-se o divisor maior commum dos numeros . . . 7174090 . . . 1956570 . . . 913066 . . . 465850 . . . 46585. Primeiramente buscaremos o maior divisor commum entre o primeiro e o segundo, entre o segundo e o terceiro &c., e acharemos os numeros . . . 652190 . . . 130438 . . . 18634 . . . 46585; depois sobre estes faremos a mesma operaçaõ, e sahiráõ os divisores . . . 130438 . . . 18634 . . . 9317; sobre estes praticaremos do mesmo modo, e sahiraõ os divisores . . . 18634 . . . 9317; e finalmente achando o maior divisor commum destes dous ultimos, que he 9317, este será o maior divisor commum dos cinco numeros propostos. §§

Outro modo de considerar os quebrados, e consequencias que delles resultaõ.

96 A Idêa, que até agora temos dado dos quebrados, he que o denominador moſtra de quantas partes ſe ſuppõe composta a unidade; e o numerador, de quantas deſſas partes conſta a quantidade, que pelo quebrado ſe repreſenta.

Agora moſtraremos, como ſe podem tomar em outro ponto de viſta. Póde o numerador conſiderar-ſe, como repreſentando huma certa quantidade, que ſe ha-de repartir em tantas partes quantas ſaõ as unidades do denominador, para ſe tomar huma dellas.

Aſſim v. gr. no quebrado $\frac{4}{5}$ póde conſiderar-ſe o numerador 4, como repreſentando *quatro* couſas, v. gr. *libras*, que ſe haõ de repartir em *cinco* partes, para ſe ſignificar huma dellas. Porque he evidente, que tanto faz dividir 4 *libras* em 5 partes para tomar huma dellas; como dividir a *libra* em 5 partes para tomar 4.

97 Pelo que póde conſiderar-ſe o numerador de hum quebrado como hum *dividendo*, e o denominador como hum *diviſor*. E por iſto ſe vê o que querem dizer os reſtos da diviſaõ reduzidos ao modo fraccionario, que aſſima lhes demos (n. 60).

98 Donde ſe ſegue, que hum numero inteiro póde ſempre reduzir-ſe a huma expreſſaõ fraccionaria, fazendo delle o numerador, e dando-lhe a unidade por denominador. Aſſim 3 e $\frac{3}{1}$, 5 e $\frac{5}{1}$ repreſentaõ huma meſma couſa.

99 Segue-ſe tambem, que para converter em *dizima* qualquer quebrado, naõ he neceſſario mais do que conſiderar o numerador como hum reſto de diviſaõ, em que o denominador tenha ſervido de diviſor, e obrar como aſſima fica declarado (pag. 62), tendo advertencia de pôr huma cifra primeiro na caſa das unidades. Deſte modo ſe achará, que $\frac{3}{5}$ vale 0, 6, que $\frac{5}{9}$ vale 0, 5555 &c., que $\frac{1}{25}$ vale 0, 04, e aſſim dos mais.

Deſta maneira ſe pódem tambem reduzir á *dizima* os numeros *complexos*.

Se, por exemplo, quizermos reduzir $3^T\ 5^P\ 8^p\ 7^l$ a partes decimais da *toeſa*, de modo que ſe naõ deſpreze ametade de huma *linha*, obſervaremos que a *toeſa* contém 864 *linhas*, e por conſeguinte 1728 *meias-linhas*. Pelo que, para naõ deſprezar ametade de huma *linha*, ſerá neceſſario que a *dizima* paſſe da caſa das milleſimas, ou que chegue até ás decimas-milleſimas.

Iſto ſuppoſto, converteremos $5^P\ 8^p\ 7^l$ tudo em *linhas* (n. 57), e acharemos 823^l, ou $\frac{823}{864}$ de huma *toeſa*. E reduzindo eſte quebrado á *dizima*, como aſſima diſſemos, reſultará 0,9525, e por conſeguinte o numero propoſto ficará reduzido a 3^T, 9525.

55 As fracções particulares da *dizima* pódem reduzir-ſe ás ordinarias de dous modos diverſos.

Porque em primeiro lugar, ſe as quizermos conſervar na forma decimal, reduzir-ſe-haõ á maneira dos numeros inteiros, cuja natureza imitaõ (n. 86, 98). Se v. gr. quizermos pôr em figura de quebrado eſta expreſſaõ 0,23, baſtará eſcrever $\frac{0,23}{1}$; e ſe a quizermos reduzir ao denominador 7, praticando como nos inteiros, teremos $\frac{1,61}{7}$ (n. 86).

Querendo porém tirar-lhes a fórma decimal, as letras da *dizima* ſerviráõ de numerador, e para denominador ſe tomará a unidade com tantas cifras adiante, quantas eraõ as caſas da dizima. Aſſim 0,23 he o meſmo que $\frac{23}{100}$; 0,0071 o meſmo que $\frac{71}{10000}$ &c.

Póde alem diſto reduzir-ſe facilmente a hum quebrado ordinario a meſma *dizima* continuada ao infinito, com tanto que depois de certos intervallos tornem a vir as meſmas letras, e pela meſma ordem; *dizima*, que chamamos *periodica*. Deſte modo he a expreſſaõ 0,321321321 &c., na qual ſe ſuppõe o periodo dos tres algariſmos 321 repetido infinitamente.

E com effeito, ſe os periodos começarem logo deſde a virgula, tomar-ſe-ha hum delles para numerador, e o denominador ſerá hum numero compoſto de tantos 9, quantas forem as caſas de cada periodo. Aſſim acharemos que 0,321321321 &c. vale exactamente $\frac{321}{999}$; que 0,013201320132 &c. vale $\frac{132}{9999}$; e que 0,777777 &c. fracçaõ igualmente periodica, cujos periodos conſtaõ de huma ſó letra, ſe reduz a $\frac{7}{9}$.

Po-

Porém, ſe os periodos naõ começarem logo deſde a virgula, ſerá ſempre o denominador compoſto de tantos 9 como ſaõ as caſas de cada periodo, mas eſſes ſeguidos de tantas cifras quantas ſaõ as caſas decimais antes do primeiro periodo. E para acharmos o numerador, multiplicaremos as letras antecedentes ao primeiro periodo pelo denominador, no qual naõ attenderemos ás cifras que ſe lhe ajuntáraõ; e ao producto ajuntaremos hum dos periodos. Para reduzirmos v. gr. a hum quebrado ordinario eſta expreſſaõ 1,357121212 &c., como cada periodo conſta de duas letras, e antes do primeiro ſe achaõ tres caſas da *dizima*, ſerá o denominador 99000. E multiplicando os algariſmos 1357, que precedem ao primeiro periodo, pelo denominador 99, cortadas as cifras; teremos o producto 134343, ao qual ajuntando o periodo 12, ſerá o numerador 134355; e por conſeguinte o quebrado que ſe buſca $\frac{134355}{99000}$. Do meſmo modo acharemos, que 0,00473473473 &c. ſe reduz a $\frac{463}{99900}$; que 0,633333 &c. vale $\frac{57}{90}$; aſſim dos mais. §§

Das Operações Arithmeticas ſobre os Quebrados.

100 O Calculo dos quebrados ſe pratica por meio das meſmas quatro operações, que já temos moſtrado nos numeros inteiros. As duas primeiras de *Somar* e *Diminuir* requerem pela maior parte huma operaçaõ preparatoria, as outras duas naõ carecem de preparaçaõ alguma. *De*

De Somar Quebrados.

101 SE os quebrados tiverem a meſma denominaçaõ, para ſaber a ſua ſoma naõ he neceſſario mais do que ſomar os numeradores, e dar á ſoma delles o meſmo denominador.

Por exemplo: Havendo de ſomar os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, como todos ſaõ da meſma denominaçaõ, ajuntaremos os numeradores 2, 3, 5, e a ſoma 10 ſerá o numerador, que com o meſmo denominador 7 dará a ſoma total que ſe buſca $\frac{10}{7}$ a qual ſe reduz a $1\frac{3}{7}$ (n. 85).

102 Se os quebrados propoſtos forem de differente denominaçaõ, primeiramente ſe reduziráõ ao meſmo denominador como aſſima moſtrámos (n. 90, 91); e depois ſe ſomaráõ como no primeiro caſo.

Tendo de ſomar, por exemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, transformaremos primeiro os ditos quebrados em $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$; depois buſcaremos a ſua ſoma, que he $\frac{133}{60}$, ou $2\frac{13}{60}$ (n. 85).

De Diminuir Quebrados.

103 SEndo ambos os quebrados da meſma denominaçaõ, diminuir-ſe-ha o numerador de hum do numerador do outro, e ao reſto ſe dará o meſmo denominador. Aſſim

Assim, para diminuirmos $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, tiraremos o numerador 5 do numerador 8, e o resto 3 daremos o mesmo denominador 9; donde será o resto que buscamos $\frac{3}{9}$, que se reduz a $\frac{1}{3}$ (n. 93).

104 Se de 9 $\frac{5}{8}$ quizermos tirar 4 $\frac{7}{8}$, como $\frac{7}{8}$ naõ pódem diminuir-se $\frac{5}{8}$, tomaremos huma unidade do inteiro 9, a qual reduzida a oitavos, e somada com $\frac{5}{8}$ faz $\frac{13}{8}$ (n. 86). Entaõ, tirando $\frac{7}{8}$ de $\frac{13}{8}$, ficaráõ $\frac{6}{8}$; e tirando 4 de 8 (attendendo-se á unidade já tirada do numero 9) ficaráõ 4. E assim será o resto total 4 $\frac{6}{8}$, ou 4 $\frac{3}{4}$ (n. 93).

105 Sendo os quebrados de differente denominaçaõ, primeiro se reduziráõ ao mesmo denominador (n. 90); e feita esta preparaçaõ, se obrará como no primeiro caso.

Assim, para diminuirmos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, converteremos estes quebrados em $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$; e feita a diminuiçaõ, resultará o resto $\frac{1}{12}$.

De

De Multiplicar Quebrados.

106 A Multiplicaçaõ dos quebrados ſe executa por meio da regra ſeguinte : *Multipliquem-ſe os dous numeradores hum pelo outro , e da meſma ſorte os denominadores ; o producto dos primeiros ſerá o numerador , e o dos ſegundos o denominador do producto que ſe buſca.*

Querendo , por exemplo, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, multiplicaremos o numerador 4 pelo numerador 2 , e acharemos 8 para numerador ; depois multiplicaremos os denominadores 5, e 3, e acharemos 15 para denominador do producto , o qual por conſeguinte ſerá $\frac{8}{15}$.

Para ſe entender a razaõ deſta regra , he neceſſario trazer á lembrança , que multiplicar dous numeros he tomar hum delles tantas vezes quantas ſaõ as unidades do outro. Em virtude deſta meſma difiniçaõ , multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ vem a ſer o meſmo que tomar $\frac{2}{3}$ de huma vez o quebrado $\frac{4}{5}$, ou tomar duas vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$. Multiplicando pois 5 por 3 , os *quintos* de $\frac{4}{5}$ ſe ſe mudaõ em 15 *avos* , iſto he , em partes *tres vezes* menores ; e multiplicando 4 por 2 , tomaõ-ſe *duas vezes* eſſas novas partes : logo toma-ſe duas ve-

vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$; e por conſeguinte ſe multiplica effectivamente $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$.

107 Havendo de multiplicar-ſe quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro ſe reduzirá a quebrado, dando-lhe a unidade por denominador, e a operaçaõ entrará na regra geral aſſima dada.

Por exemplo: Se quizermos multiplicar 9 por $\frac{4}{7}$, reduziremos o inteiro 9 á fórma de quebrado $\frac{9}{1}$, e multiplicando $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$ acharemos o producto $\frac{36}{7}$ o qual ſe reduz a $5\frac{1}{7}$ (n. 85).

Donde ſe vê, que para multiplicar quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, a operaçaõ ſe reduz a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado.

108 Se forem *mixtos* os numeros, que ſe haõ de multiplicar, iſto he, ſe forem compoſtos de inteiro e quebrado, cada hum dos inteiros ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado, e ſe ſomará com elle (n. 86); e aſſim entraráõ na meſma regra aſſima dada (n. 106).

Por exemplo: Se tivermos de multiplicar $12\frac{3}{5}$ por $9\frac{3}{4}$, reduziremos primeiro o multiplicando a $\frac{63}{5}$, e o multiplicador a $\frac{39}{4}$; e depois multiplicaremos $\frac{63}{5}$ por $\frac{39}{4}$, e teremos o produ-

cto

cto $\frac{2457}{20}$, o qual se reduz a 122 $\frac{17}{30}$ (n. 85).

55 Na multiplicaçaõ dos quebrados póde logo attender-se a que o producto se ache já reduzido aos termos mais simples.

Para isso he primeiramente necessario, que os mesmos quebrados, que se haõ de multiplicar, se reduzaõ aos menores termos. Depois, deverá advertir-se se os termos *heterogeneos*, isto he, o numerador de hum quebrado com o denominador do outro, tem algum divisor commum, e por elle se partiráõ, ou pelo maior delles, quando forem muitos. Os quebrados que deste modo resultarem, se multiplicaráõ hum pelo outro, e o producto será o mesmo, que o dos quebrados propostos, abbreviado aos seus menores termos.

Querendo v. gr. multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{7}$, reflectiremos que o denominador do primeiro quebrado, e o numerador do segundo podem ambos partir-se por 5, e ficaráõ reduzidos a 1; e assim conheceremos logo, sem fazer operaçaõ alguma, que o producto he $\frac{3}{7}$.

Outro exemplo. Se houvermos de multiplicar $\frac{18}{13}$ por $\frac{26}{63}$, observaremos, que o numerador do primeiro quebrado com o denominador do segundo tem ambos o divisor maior commum 9, sendo pelo qual divididos se reduzem a 2, e 7; e que o denominador de primeiro com o numerador do segundo tambem tem divisor commum 13, pelo que se reduzem a 1, e 2. Deste modo se tornaráõ os os quebrados propoſtos em $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{7}$, cujo producto $\frac{4}{7}$ he o que ſe buſca, reduzido á fórma mais ſimples, o qual pela operaçaõ ordinaria ſahiria neſtes termos $\frac{468}{819}$, que dariaõ mais trabalho para ſe reduzirem á ſimplicidade daquelles. JJ

De Repartir Quebrados.

109 PAra ſe dividir hum quebrado por outro a regra he deſta maneira: *Mudem-ſe os termos do diviſor, paſſando o numerador para denominador, e o denominador para numerador; multiplique-ſe o dividendo pelo diviſor aſſim preparado; e o producto ſerá o quociente que ſe buſca.*

Querendo v. gr. partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, primeiramente mudaremos os termos do diviſor $\frac{2}{3}$, o qual ficará $\frac{3}{2}$; depois multiplicaremos $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$ (n. 106), e producto $\frac{12}{10}$, ou $1\frac{1}{5}$ (n. 75, 93), ſerá o quociente que buſcamos.

Para ſe entender a razaõ deſta regra, deve obſervar-ſe que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ he buſcar quantas vezes ſe contém $\frac{2}{3}$ em $\frac{4}{5}$. Iſto ſuppoſto, he facil de ver que 2 *terços* ſe devem conter

em

em $\frac{4}{5}$ tres vezes mais do que 2 unidades. He tambem evidente, que $\frac{4}{5}$ contem a unidade $\frac{4}{5}$ de huma vez, e que por conseguinte contem 2 unidades ametade de $\frac{4}{5}$ de huma vez. Logo deve o quebrado $\frac{4}{5}$ dividir-se primeiro por 2, e depois multiplicar-se por 3, ou tomar-se tres vezes a ametade de $\frac{4}{5}$, que vem a ser o mesmo que multiplicar por $\frac{3}{2}$, quebrado inverso do divisor $\frac{2}{3}$.

110 Se houver de partir-se quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro se reduzirá a quebrado, tomando a unidade por denominador, e a divisaõ se praticará conforme a mesma regra.

Tendo v. gr. de partir 12 por $\frac{5}{7}$, a operaçaõ se reduzirá a dividir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, ou (n. 109) a multiplicar $\frac{12}{1}$ por $\frac{7}{5}$, e o quociente será $\frac{84}{5}$, ou 16 $\frac{4}{5}$. Do mesmo modo, se quizermos partir $\frac{3}{4}$ por 5, dividiremos o quebrado por $\frac{5}{1}$, ou multiplicaremos por $\frac{1}{5}$, e será o quociente $\frac{3}{20}$

Don-

Donde ſe vê, que para dividir hum quebrado por hum inteiro, a operaçaõ ſe reduz ſimpleſmente a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado.

111 Quando os inteiros forem acompanhados de quebrados, cada hum ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado (n. 86), e a operaçaõ ſe fará como nos exemplos antecedentes.

Havendo v. gr. de partir $54 \frac{3}{5}$ por $12 \frac{2}{3}$, o dividendo ſe reduzirá a $\frac{273}{5}$, e o diviſor a $\frac{38}{3}$. Depois partir-ſe-há $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, ou (n. 109) multiplicar-ſe-há por $\frac{3}{38}$; e ſerá o quociente $\frac{819}{190}$, ou $4 \frac{59}{190}$ (n. 85).

¶ Na diviſaõ dos quebrados, ſerá tambem conveniente ter cuidado de achar logo o quociente, abbreviado aos menores termos poſſiveis.

Iſto ſe conſeguirá: Primeiramente, reduzindo os meſmos quebrados propoſtos aos ſeus menores termos, ſe o naõ eſtiverem; e depois, dividindo os termos *homologos*, iſto he, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores, pelo ſeu maior diviſor commum, quando o tiverem. Deſte modo reſultaráõ outros dous quebrados; que daráõ o meſmo quociente dos primeiros, e já reduzido aos termos mais ſimples.

Havendo v. gr. de partir $\frac{5}{7}$ por $\frac{5}{6}$, advertiremos logo que ambos os numeradores ſaõ di-

vi-

viſiveis por 5, e ſe reduzem a 1; e por tanto veremos, ſem fazer operaçaõ alguma, que o quociente he $\frac{6}{7}$.

Do meſmo modo, ſe houveſſemos de partir $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{5}$, como os denominadores ſe reduzem a 1, logo conheceriamos ſem calculo algum que o quociente he $\frac{3}{4}$.

Outro exemplo. Se nos pedirem o quociente de $\frac{22}{39}$ *avos* partidos por $\frac{11}{13}$, advertiremos que os numeradores ſe pódem ambos dividir por 11, e ſe reduzem a 2, e 1; e que os denominadores partidos por 13, ſe reduzem tambem a 3, e 1. Por conſeguinte teremos para repartir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{1}$ e ſerá o quociente pedido $\frac{2}{3}$, o qual pela regra ordinaria ſe acharia em termos muito compoſtos $\frac{286}{429}$. ¶¶

Uso dos Quebrados.

112 PElo que assima dissemos (n. 96), he facil de ver, como se ha-de mostrar o valor de huma fracçaõ por meio das divisões estabelecidas da unidade da questaõ.

Pergunta-se v. gr. quanto valem $\frac{5}{7}$ de huma *libra*. Como $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem o mesmo que $\frac{1}{7}$ de 5 *libras* (n. 96), reduziremos 5 *libras* a *soldos* (n. 57), e teremos 100 *soldos*, dividindo estes por 7, sahiraõ no quociente 14^s, e sobraráõ 2^s. Reduzindo tambem estes a *dinheiros*, teremos 24^d, que repartidos por 7 daráõ $3^d\,\frac{3}{7}$. E deste modo diremos, que $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem 14 *soldos*, 3 *dinheiros*, e $\frac{3}{7}$ de hum *dinheiro*.

Se nos perguntassem quanto valem $\frac{5}{7}$ de 24 *libras*, he visivel que podiamos buscar primeiro o valor de $\frac{5}{7}$ de huma *libra* como acabamos de mostrar, e multiplica-lo depois por 24. Porem he mais expedito o multiplicar logo as 24 *libras* por $\frac{5}{7}$, e sahirá o producto $\frac{120}{7}$ de huma *libra* (n. 107), ou 17 *libras* e $\frac{1}{7}$ de huma *libra*. Este ultimo quebrado reduzido a *soldos* e *dinheros* dará

2^s

$2^{f}\, 10^{d}\, \frac{2}{7}$; e pôr conſeguinte o valor total de $\frac{5}{7}$ *de* 24 *libras* ſerá $17^{lb}\, 2^{f}\, 10^{d}\, \frac{2}{7}$.

113 As fracções decimais, como naõ tem denominador, ainda ſaõ mais faceis de reduzir ás partes da unidade, eſtabelecidas pelo uſo ordinario.

Querendo ſaber, por exemplo, quanto valem 0,532 de huma *toeſa* em partes da diviſaõ vulgar da meſma *toeſa*: como eſta conſta de 6 *pés*, multiplicaremos 0,532 por 6, e o producto 3,192 moſtrará 3 *pés*, e 0,192 de hum *pé*. Depois, como o *pé* contem 12 *pollegadas*, multiplicaremos 0,192 por 12, e o producto 2,304 dará 2 *pollegadas*, e 0,304 de huma *pollegada*. Finalmente, como a *pollegada* ſe compõe de 12 *linhas*, multiplicaremos 0,304 por 12, e o producto 3,648 moſtrará 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*. Peloque diremos, que o valor total de 0,532 de huma *toeſa* he 3 *pés*, 2 *pollegadas*, 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*; e aſſim ſe procederá em outros caſos ſemelhantes.

114 A avaliaçaõ dos quebrados nos conduz naturalmente a fallar dos *quebrados de quebrados*. Por eſte nome entendemos huma ſerie de fracções ſeparadas humas das outras pela particula *de*, como v. gr. $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, &c. Porque qualquer quebrado naõ ſómente póde reportar-ſe á unidade, ou a hum numero inteiro, como $\frac{3}{4}$ *de huma libra*, $\frac{3}{4}$ *de vinte libras*, mas tambem a qualquer outro quebrado, cujo valor ſe póde conceber como hum todo, e dividir em

qual

qualquer numero de partes, para significar algumas dellas. Assim de $\frac{3}{4}$ podemos mostrar $\frac{2}{3}$; e depois concebendo dous terços de tres quartos como hum todo, podemos dividi-lo em *seis* partes, e dellas tomar *cinco*, donde resultaõ $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$.

Estes quebrados successivamente relativos huns aos outros podem converter-se em hum só, que unicamente se reporte á unidade principal, multiplicando todos os numeradores huns pelos outros, e da mesma sorte os denominadores. Assim $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ valé o mesmo que $\frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$; e $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ o mesmo que $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

E com effeito he facil de ver que tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ nada mais he que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, ou tomar *duas* vezes a *terça* parte do quebrado $\frac{3}{4}$. Do mesmo modo, tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ vem a ser o mesmo que tomar $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, porque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ fazem $\frac{6}{12}$; e pelo que témos dito $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ se reduzem a $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

Se nos pedirem o valor $\frac{3}{4}$ de $5\ \frac{2}{8}$, reduzire-

H mos

mos o inteiro 5 á denominaçaõ do ſeu quebrado (n. 86), e teremos $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$, que ſe reduzem a $\frac{129}{32}$, ou $4\frac{1}{32}$.

115 Quando huma fracçaõ involve termos algum tanto conſideraveis, e naõ póde abbreviar-ſe pelo methodo aſſima dado (n. 95), ſe a natureza da queſtaõ permittir que nos contentemos com hum valor approximado, mas reduzido a termos mais ſimples, poderemos uſar do methodo ſeguinte, pelo quál acharemos alternadamente valores ora maiores, ora menores, mas cada vez mais convergentes para o verdadeiro, até cahirmos finalmente na meſma fracçaõ propoſta.

Tomemos por exemplo a fracçaõ $\frac{100000000}{314159265}$, a qual, como ſe moſtrará na Geometria, repreſenta proximamente a *razaõ* entre o *diametro* e a *circunferencia* do circulo, e ſupponhamos que a queremos transformar em outras fracções menos exactas na verdade, mas reduzidas a termos mais ſimples.

Primeiramente dividiremos ambos os termos da dita fracçaõ pelo numerador, e a reduziremos a eſta fórma $\frac{1}{3\frac{14159265}{100000000}}$; a qual, deſprezando a fracçaõ que acompanha o denominador inteiro 3, ſe reduzirá a $\frac{1}{3}$, que he o primeiro valor approxamado da fracçaõ dada, o mais exacto que he poſſivel em termos taõ ſimples, mas maior do que o verdadeiro.

Para acharmos outro valor mais chegado ao verdadeiro, na fracçaõ junta ao denominador inteiro 3, partiremos ambos os termos pelo numerador, e a reduziremos a eſta fórma $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\cfrac{885145}{14159265}}}$;

a qual, deſprezando a fracçaõ junta ao denominador inteiro 7, ſe reduz a $\cfrac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (n. 86) a $\cfrac{1}{\frac{22}{7}}$, ou

(n. 109) a $\frac{7}{22}$; que he outro valor mais exacto, que o precedente $\frac{1}{3}$, mas algum tanto menor que o verdadeiro.

Se quizermos maior exactidaõ, dividiremos pelo numerador ambos os termos da fracçaõ junta ao denominador 7, e a fracçaõ primitiva ficará reduzida a eſta fórma $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\cfrac{1}{15\cfrac{882090}{885145}}}}$; a qual, deſpre-

 zan-

zando a fracçaõ que acompanha o denominador 15, ſe reduz a $\frac{106}{333}$, valor mais exacto que os precedentes, mas algum tanto maior que o verdadeiro. Porem ſe aqui houvermos de ſuſpender a operaçaõ, naõ deſprezaremos a fracçaõ junta ao denominador 15, mas advertindo que ella vale quaſi huma unidade, ajuntaremos 1 ao dito denominador, e teremos $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\cfrac{1}{16}}}$; expreſſaõ, que ſe reduz a $\frac{113}{355}$. Eſte he hum valor da fracçaõ propoſta muito mais exacto que os precedentes, mas ainda alguma couſa menor que o verdadeiro, pois para igualar a fracçaõ propoſta lhe falta $\frac{611}{22305307815}$, ou proximamente $\frac{1}{36506232}$.

55 Os quebrados reduzidos á fórma, que ſe tem dado á fracçaõ propoſta pela diviſaõ ſucceſſiva das fracçóes juntas aos denominadores inteiros, chamaõ-ſe *quebrados continuos*.

E deve notar-ſe, que a diviſaõ que fazemos neſta operaçaõ he a meſma que praticamos, quando buſcamos o maior diviſor commum dos termos de hum quebrado, para o abbreviarmos exactamente, ſendo poſſivel. Por iſſo achando finalmente que elles naõ tem diviſor commum ſenaõ a unidade, podemos ſervir-nos logo dos quocientes acha-

achados, diſpondo-os em fracçaõ continua com a unidade por numerador; e nella deſprezaremos os termos que permittir a exactidaõ que buſcamos.

Por exemplo; Querendo reduzir o quebrado $\frac{964}{5141}$, e buſcando o diviſor maior commum dos ſeus termos, acharemos que naõ tem outro que naõ ſeja a unidade. Porem como pela operaçaõ achamos os quocientes 5, 3, e 321, delles faremos a expreſſaõ

$$\cfrac{1}{5\cfrac{1}{3\cfrac{1}{321}}}$$

que he exactamente igual ao quebrado propoſto; e deſprezando a fracçaõ junta ao denominador 3, que com tanto mais razaõ ſe deſpreza quanto he mais pequena, ficará

$$\cfrac{1}{5\cfrac{1}{3}}$$

que ſe reduz a $\frac{3}{16}$; quebrado muito abbreviado, ao qual naõ falta mais do que $\frac{1}{82250}$ para igualar ao quebrado propoſto.

Dos numeros complexos.

116 AInda que as regras, que até agora temos dado, ſe pódem igualmente applicar aos numeros *complexos*, ou *heterogeneos*, naõ deixará com

tudo de ſer conveniente que delles tratemos em particular, porque muitas vezes a diviſaõ da unidade nelles eſtabelecida ſerve de facilitar as operações.

Há muitas eſpecies deſtes numeros, em que ſe uſaõ differentes diviſões, das quais principalmente dependem as regras do calculo. Mas naõ he neceſſario, que as pratiquemos todas aqui, porque os exemplos de humas ſe applicaõ a todas as mais, em ſe ſabendo a natureza das ſuas diviſões. Eis-aqui as mais uſadas entre nós.

§§ O dinheiro de França pela maior parte ſe conta por *libras*. A *libra* conſta de 20 *ſoldos*, e o *ſoldo* de 12 *dinheiros*. Eſtas differentes eſpecies ſe diſtinguem com as letras iniciais dos ſeus nomes. Aſſim $32^{lb}\ 15^{ſ}\ 7^{d}$ quer dizer 32 *libras*, 15 *ſoldos*, e 7 *dinheiros*.

A *libra* de peſo, ou *arratel*, quaſi em toda a parte ſe divide em 2 *marcos*, o *marco* em 8 *onças*, a *onça* em 8 *oitavas*, a *oitava* em 3 *ſcropulos*, o *ſcropulo* em 24 *grãos*. Para os peſos maiores uſamos de *quintais*. O *quintal* ſe divide em 4 *arrobas*, e a *arroba* em 32 *arrateis*.

As medidas das couſas ſecas em Portugal ſe reduzem a *moyos*. O *moyo* conſta de 15 *fangas*, a *fanga* de 4 *alqueires*, e o *alqueire* de 4 *quartas*; medidas, que alguma couſa differem entre ſi conforme os lugares.

Nas medidas dos liquidos uſamos de *pipas*. A *pipa* tem 25 *almudes*, o *almude* 12 *canadas*, e a *canada* 4 *quartilhos*; medidas, que tambem variaõ de grandeza conforme os lugares.

As diſtancias locais, ſendo maiores, medem-ſe por *eſtadios*, *milhas*, *legoas* &c. Nas meno-

res

tes ſe uſa da *toeſa*. Cada *toeſa* tem 6 *pés*, o *pé* 12 *pollegadas*, a *pollegada* 12 *linhas*, e a *linha* 12 *pontos*: eſpecies que por ſua ordem ſe aſſentaõ deſta maneira: $72^{T}\ 3^{P}\ 7^{P}\ 10^{l}\ 5^{pts}$. A *braça* Portugueza tem 10 *palmos craveiros*, e o *palmo* 8 *pollegadas*.

A medida natural do tempo he o *dia*. Cada *dia* ſe devide em 24 *horas*, a *hora* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c., e eſtes numeros por ſua ordem ſe coſtumaõ notar deſte modo: $223^{d}\ 13^{h}\ 40'\ 53''$ &c.

Hum circulo celeſte divide-ſe em 12 *ſignos*, o *ſigno* em 30 *grãos*, o *grão* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c. Os ſignos marcaõ-ſe com a letra *s*, os grãos com a letra o, os minutos primeiros, ſegundos &c. com huma, duas riſcas &c. deſta maneira: $11^{s}\ 23^{o}\ 43'\ 52''\ 23'''$ &c.

Tambem ſe tem imaginado diviſões particulares para avaliar a qualidade de algumas couſas, como temos o exemplo na conta do ouro, e da prata.

O ouro na ſua maior pureza, ſem liga alguma de outro metal, ſuppõe-ſe conſtar de 24 *quilates*, o quilate de 4 *grãos*, e o *grão* de 8 *oitavas*. Qualquer quantidade deſte metal v. gr. hum *marco*, ſendo puro, vale como de 24 *quilates*; ſendo ametade de ouro, e a outra ametade de outro metal, como de 12 *quilates*; ſendo 5 partes de ouro, e huma de outro metal, como de 20 *quilates* &c. Deve diſtinguir-ſe o *grão* do *quilate* do *grão* de peſo. Ao *grão* do *quilate* damos o nome de *grão de Lei*, porque tem hum valor fixo e determinado pela Lei, e o *grão* de peſo tem differente valor, conforme he mais ou menos puro o ouro, que nelle ſe contem.

Pela

Pela Lei 4 de Agosto de 1688 se fixou neste Reino o valor de hum marco de ouro de 22 quilates em 96U000 reis; e esta he a Lei da nossa moéda. Repartindo o dito valor por 22, acharemos que cada quilate em hum marco vale 4U363 $\frac{7}{11}$, cada *grão* de Lei 1U090 $\frac{10}{11}$ &c.; e conseguintemente, que o marco de 24 quilates vale 104U727 $\frac{3}{11}$ reis. Pela mesma Lei se ordenou, que os Bate-folhas usassem do ouro de 23 quilates, e que os Ourives fizessem as suas obras de 20 quilates e meio. Nestas, supposto o valor fundamental do marco de 22 quilates, deveria sahir o marco a razaõ de 89U454 $\frac{6}{11}$ reis, a onça a razaõ de 11U181 $\frac{9}{11}$, e a oitava a razaõ de 1U397 $\frac{8}{11}$. Porem para evitar o embaraço dos quebrados, a mesma Lei regulou o marco a 89U600 reis, a 11U200 a onça, e a 1U400 a oitava.

A prata, sem liga alguma, suppõe-se constar de 12 *dinheiros*, cada *dinheiro* de 24 *grãos de Lei*, e cada *grão* de 4 *quartas*. E por esta divisaõ se regula o valor de qualquer quantidade de prata, a qual sendo pura valerá como 12 *dinheiros*; tendo ametade de liga, como de 6 *dinheiros* &c.

Pela mesma Lei já citada se fixou neste Reino o valor de hum marco de prata de 11 *dinheiros*, que he a Lei da moéda, em 6U000 reis. Em consequencia deste valor fundamental, vale cada *dinheiro* em hum marco U545 $\frac{5}{11}$; o marco de 12 *dinheiros*, que he á Lei dos Bate-folhas, vale

6U545

6U545 $\frac{5}{11}$. Pela meſma razaõ o marco de 10 *dinheiros* e 6 *grãos*, que he a Lei dos Ourives da prata, deveria valer exactamente 5U590 $\frac{10}{11}$. Porem, para evitar o embaraço dos quebrados, a meſma Lei reduzio o dito marco a 5U600 reis.

He de advertir, que o dinheiro de ouro e prata alem do valor da Lei, que chamamos intrinſeco, tem tambem hum valor de ſinal, procedido dos direitos da caſa da moéda. A peça de meia onça de ouro de 22 *quilates* tem de peſo 6U000 reis, e pelo cunho vale 6U400; e o cruzado novo, que tem meia onça de prata de 11 *dinheiros*, péſa U375 reis, e corre por U480 reis. §§

De Somar os numeros complexos.

117 PAra fazer eſta operaçaõ, eſcrevem-ſe todas as addições, humas debaixo das outras, de maneira que as unidades da meſma eſpecie fiquem diſpoſtas em huma colunna vertical; e tendo paſſado huma riſca por baixo, principia-ſe a operaçaõ pelas unidades da infima eſpecie da direita para a eſquerda. Se a ſoma dellas naõ chegar a fazer huma unidade da eſpecie proximamente maior, eſcrever-ſe-há debaixo da riſca; e ſe chegar a fazer huma, ou mais das ditas unidades, eſcrever-ſe-há ſómente o que ficar, tiradas eſſas unidades, ou cifra naõ ficando reſto; e as tais unidades ſe levaráõ para a colunna ſeguinte, na qual ſe praticará o meſmo, e aſſim por diante.

Exem-

Exemplo I.

QUerendo ſomar -

227^{lb}	$14^{ſ}$	8^{d}	
2549	18	5	
184	11	11	
17	10	7	
2979^{lb}	$15^{ſ}$	7^{d}	Soma.

Ordenadas as addições, como ſe vê no exemplo principiaremos pelos *dinheiros*, cuja ſoma faz 31^{d}, nos quais ſe contem 2 vezes 11^{d}, iſto he $2^{ſ}$, e alem diſto ſobraõ 7^{d}. Por tanto aſſentaremos os 7^{d} na columna reſpectiva, e levaremos $2^{ſ}$ para a columna dos *ſoldos*. Neſta acharemos, que as unidades fazem 15, do qual numero aſſentaremos logo a letra 5 debaixo das unidades reſpectivas, e levaremos a dezena 1 para a ſomar com as dezenas dos meſmos *ſoldos*, as quais acharemos que fazem 5. E porque cada duas dezenas de *ſoldos* fazem huma *libra*, partiremos mentalmente o 5 por 2, e teremos por quociente 2^{lb}, ficando o reſto 1, que he 1 dezena de *ſoldos*; pelo que aſſentaremos eſta dezena no ſeu lugar, e levando 2^{lb} para a columna ſeguinte, acharemos finalmente que a ſoma total he 2979^{lb} $15^{ſ}$ 7^{d}.

Exemplo II.

SE quizermos somar as quatro addições seguintes - - - $54^T\ 2^P\ 3^P\ 9^l$

54^T	2^P	3^P	9^l
12	5	4	11
9	4	11	11
8	2	9	10
85^T	3^P	6^P	5^l

Principiaremos pelas *linhas*, que daõ 41^l, ou $3^P\ 5^l$; e por conseguinte assentaremos sómente as 5^l, e levaremos as 3^P para a colunna seguinte. Esta dará a soma 30^P, ou $2^P\ 6^P$; e por isso assentaremos nella as 6^P, e levaremos os 2^P para a colunna seguinte; cuja soma acharemos ser 15^P, ou $2^T\ 3^P$. Pelo que assentando nella 3^P, e levando 2^T para a colunna seguinte, teremos a soma total $85^T\ 3^P\ 6^P\ 5^l$.

Exemplo III.

55 HAvendo de somar $23^d\ 13^h\ 43'\ 52''$

	23^d	13^h	$43'$	$52''$
	35	0	12	41
	0	23	0	24
	12	14	23	5
	72^d	3^h	$20'$	$2''$ Soma

Na colunna dos *segundos* acharemos que as unidades fazem 12, e logo escreveremos $2''$, e levaremos a dezena 1 para a somarmos com as dezenas, as quaes fazem 12. E como 6 dezenas de *segundos* fazem hum *minuto*, partiremos mentalmenmente 12 por 6, e o quociente moſtrará $2'$, os quais levaremos para a colunna ſeguinte, e como naõ ficou reſto algum da dita diviſaõ, naõ eſcreveremos nada nas dezenas dos *ſegundos*. Na colunna ſeguinte as unidades daõ 10, e logo aſſentaremos a o, e levaremos a dezena 1 para a ſomarmos com as dezenas, as quais fazem 8; e partindo-as por 6 o quociente ſerá 1^h que guardaremos para a colunna das *horas*, e ficaráõ 2, que aſſentaremos na caſa das dezenas dos minutos. Na colunna das *horas* acharemos a ſoma total 51^h, que ſaõ $2^d\ 3^h$; e por conſeguinte aſſentando as 3^h, e levando os 2^d para a ſua reſpectiva colunna, acharemos que as addições propoſtas ſomaõ $72^d\ 3^h\ 20'\ 2''$.

Exemplo IV.

SE tivermos para ſomar

11^s	23^o	$43'$	$53''$
0	12	22	4
7	21	3	12
3	0	25	37
10^s	27^o	$34'$	$46''$ Soma.

Somaremos os *ſegundos* e *minutos*, como no exemplo precedente. E chegando ás unidades dos *gráos*, logo aſſentaremos a ſoma dellas 7^o na meſma caſa, e paſſaremos ás dezenas, cuja ſoma he 5; e porque 3 dezenas de *gráos* fazem hum *ſigno*, na caſa das dezenas aſſentaremos 2, e levaremos huma unidade para a colunna dos *ſignos*. Eſta dá a ſoma 22; mas porque no calculo deſtes numeros ſe lançaõ fóra os circulos inteiros, ou 12^s, to-

todas as vezes que os houver na ſoma, de 22^s tiraremos 12^s, e aſſentaremos o reſto 10^s; donde a ſoma que buſcamos ſerá $10^s\ 27^\circ\ 34'\ 46''$. ¶

De Diminuir os numeros complexos.

118 PAra diminuir hum numero complexo de outro, ambos ſe aſſentaráõ, como no ſomar, e a operaçaõ ſe principia tambem pela menor eſpecie. Se o numero inferior ſe póde tirar do ſuperior, feita a ſubtracçaõ, o reſto ſe eſcreve por baixo da riſca. Porem naõ ſe podendo tirar, o numero ſuperior ſe aumentará com o que produzir huma unidade da eſpecie immediatamente maior reduzida ás unidades da colunna em que eſtamos. Entaõ feita a ſubtracçaõ, ſe eſcreverá o reſto por baixo; e o numero de quem ſe tomou a unidade ſe tratará mentalmente ſem ella na operaçaõ ſeguinte, na qual ſe procederá do meſmo modo, e aſſim por diante.

Exemplo I.

SE do numero - -	143^{lb}	$17^{ſ}$	6^d
quizermos tirar -	75	12	9
	68^{lb}	$4^{ſ}$	9^d Reſto.

Como de 6^d naõ ſe pódem tirar 9^d, de $17^{ſ}$ tomaremos mentalmente $1^{ſ}$, que vale 12^d, e ajuntando eſtes com os 6^d, teremos 18^d dos quais tirando 9^d, ficaõ 9^d, que aſſentaremos por baixo. E no lugar ſeguinte naõ tiraremos $12^{ſ}$ de $17^{ſ}$,

mas

mas de $16^{ſ}$, por cauſa da unidade que já tiramos dos $17^{ſ}$; e eſcreveremos o reſto $4^{ſ}$. Finalmente tirando 75^{lb} de 143^{lb} ficaõ 68^{lb}; e por conſeguinte o reſto total ſerá $68^{lb}\ 4^{ſ}\ 9^{d}$.

Exemplo II.

SE de - - - - - -	163^{lb}	$0^{ſ}$	5^{d}	
houvermos de tirar -	84	18	9	
	78^{lb}	$1^{ſ}$	8^{d}	Reſto.

Naõ podendo tirar 8^{d} de 5^{d}, e naõ havendo na caſa dos *ſoldos* numero, do qual tomemos huma unidade, toma-la-hemos de 163^{lb}, a qual valerá $20^{ſ}$. Deſtes deixaremos mentalmente 19 no lugar vazio dos *ſoldos*, e converteremos ſómente 1 em *dinheiros*, os quais ajuntaremos com os 5^{d}; e feita a operaçaõ, como no exemplo antecedente, acharemos o reſto $78^{lb}\ 1^{ſ}\ 8^{d}$.

Exemplo III.

55 SE do numero	7^{s}	12^{o}	$20'$	$42''$	
quizermos tirar	4	23	36	23	
	2^{s}	18^{o}	$44'$	$19''$	Reſto.

Em chegando ás dezenas dos *minutos* acharemos para diminuir 3 de 1; e como iſto naõ póde ſer, tomaremos huma unidade dos 12^{o}, a qual vale 6 dezenas de *minutos*, e com 1 fazem 7, das quais tiraremos as 3. Do meſmo modo nas dezenas dos *grãos*, acharemos 2 para tirar de 0; e por iſſo

isso tomaremos huma unidade dos 7^s, a qual nos lembraremos que vale 3 dezenas de *gráos*; e acabando a operaçaõ, teremos o resto $2^s\ 18^\circ\ 44'\ 19''$.

No calculo destes numeros muitas vezes se diminue hum numero maior de outro menor, porque a este se póde ajuntar para esse effeito hum circulo inteiro, ou 12^s.

Exemplo IV.

SE de - - - - -	3^s	0°	$12'$	$27''$	
houvermos de tirar	9	15	27	22	
	5^s	14°	$45'$	$5''$	Resto.

Primeiramente nas dezenas dos *minutos*, sendo necessario tomar huma unidade da casa dos *gráos*, que a naõ tem, toma-la-hemos dos 3^s, a qual valerá 30°, e destes deixaremos 29° na mesma casa dos *gráos*, e tomaremos sómente 1°, que converteremos em 6 dezenas, para fazermos a subtracçaõ. Continuando a operaçaõ teremos finalmente para diminuir 9^s de 2^s, pelo que ajuntaremos 12^s a 2^s, e feita a subtraccaõ será o resto que buscamos $5^s\ 14^\circ\ 45'\ 5''$. §§

Multiplicaçaõ dos numeros complexos.

119 A Praxe desta operaçaõ pódle reduzir-se em geral á multiplicaçaõ dos quebrados ordinarios, conforme a regra que assima temos dado (n. 106).

Por-

Porque v. gr. ſe quizermos ſaber o feitio, que deve pagar-ſe por $45^T\ 3^P$ de obra tendo-ſe ajuſtado a *toeſa* a razaõ de $42^{lb}\ 17^ſ\ 8^d$; podemos converter o multiplicando $42^{lb}\ 17^ſ\ 8^d$ todo em *dinheiros* (n.57); que dará 10292^d. E porque o *dinheiro* he $\frac{1}{240}$ de huma *libra*, reduzir-ſe-há o multiplicando a $\frac{10292}{240}$ da meſma *libra*. Igualmente o multiplicador $54^T\ 3^P$ convertido todo em *pés* dará 327^P; e porque o *pé* he $\frac{1}{6}$ da *toeſa*, ficará o dito multiplicador reduzido a $\frac{327}{6}$ da meſma *toeſa*. Por conſequencia, a queſtaõ ſe reduz a multiplicar a fracçaõ $\frac{10292}{240}$ de huma *libra* por $\frac{327}{6}$ (n.106); donde reſulta o producto $\frac{3365484}{1440}$ da meſma *libra*, o qual ſe reduz finalmente (n. 112) a $2337^{lb}\ 2^ſ\ 10^d$.

Eſte methodo ſe extende a toda a ſorte de numeros complexos. Porem, como o que agora moſtraremos ſe executa com menos trabalho, naõ nos demoraremos mais com elle.

120 O numero, que ſe contém em outro algumas vezes exactamente, chama-ſe parte *aliquota* delle; e o que ſe naõ contém exactamente, parte *aliquanta*. Aſſim 3 he parte *aliquota* de 12, e *aliquanta* de 8.

Multiplicar, como ja diſſemos, nada mais he que tomar o multiplicando hum certo numero de vezes. Se v. gr. qualquer numero ſe houver de mul-

multiplicar por 8 $\frac{3}{4}$, devemos toma-lo 8 vezes, e alem diſſo $\frac{3}{4}$ de huma vez. Ora de dous modos podemos tomar os $\frac{3}{4}$ de hum numero; ou buſcando hum *quarto* delle, e repetindo-o 3 vezes; ou tomando primeiramente a ſua ametade, e depois ametade da meſma ametade. Aſſim v. gr.

Se tiveſſemos de multiplicar	84
por - - - - - - -	8 $\frac{3}{4}$
	672
	42
	21
	735 Producto.

Primeiramente, multiplicando pelo inteiro 8, teriamos o producto 672. Depois para tomarmos com mais facilidade os $\frac{3}{4}$ de 84, reſolveriamos o quebrado $\frac{3}{4}$ em $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. E aſſim tomando a ametade de 84, que he 42, e a ametade deſta que he 21, e reunindo os tres productos parciais, achariamos o producto total 735.

121 Para iſto ſe applicar aos numeros complexos, devemos notar que as differentes unidades, de que elles ſe compõem, ſaõ quebrados tanto entre ſi, como a reſpeito da unidade principal; e que para ſe multiplicarem com mais facilidade, he por conſeguinte muito conveniente reſolve-las em partes aliquotas tanto da unidade principal,

como humas das outras. Quando por esta resoluçaõ naõ se puderem haver partes aliquotas, que facilitem o calculo, supprir-se-ha com productos subsidiarios; da maneira, que mostraremos nos exemplos seguintes.

Exemplo I.

PErgunta-se, quanto devem custar $54^T\ 3^P$ de obra, a razaõ de 72^{lb} por *toesa*?

Deveremos pois multiplicar -	72^{lb}	
por - - - - - - -	$54^T\ 3^P$	
	$288^{lb}\ 0^f\ 0^d$	
	360	
	36	
	$3924^{lb}\ 0^f\ 0^d$	Prod.

E primeiramente multiplicaremos 72^{lb} por 54, conforme a regra costumada da multiplicaçaõ. Depois, para multiplicarmos por 3^P, reflectiremos que este numero representa meia *toesa*, e por conseguinte deve custar ametade do preço della; pelo que assentaremos por baixo 36, ametade do multiplicando, e somando os tres productos parciais, teremos o producto que se pede 3924^{lb}.

Exem-

Exemplo II.

PEde-se o producto de - 72^{lb}
por - - - - - - - $54^{T}\ 5^{P}$

288^{lb}	0^{s}	0^{d}
360		
36		
24		
3948^{lb}	0^{s}	0^{d} Producto.

Em primeiro lugar multiplicaremos 72^{lb} por 54, como no exemplo antecedente. Depois como 5^{P} saõ $\frac{5}{6}$ de huma *toesa*, resolveremos este quebrado em $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$. E assim tomando de 72^{lb} primeiramente a ametade 36, depois a terça parte 24, e somando os productos parciais, acharemos o producto total 3948^{lb}.

Exemplo III.

QUerendo-se multiplicar - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - $5^{T}\ 4^{P}\ 8^{P}$

360^{lb}	0^{s}	0^{d}
36		
12		
4		
4		
416^{lb}	0^{s}	0^{d} Prod.

Feita primeiramente a multiplicaçaõ por 5^T, multiplicaremos depois por 4^P, e para iſſo reſolveremos eſte numero em 3^P e 1^P. Por 3^P tomaremos ametade do multiplicando, que he 36^{lb}; e por 1^P obſervaremos que elle he hum terço de 3^P, e por conſeguinte tomaremos o terço de 36^{lb}, que he 12^{lb}. Para multiplicarmos por 8^P, em lugar de compararmos as *polegadas* com a *toeſa*, ſerá melhor que as comparemos com o *pé*; e reſolvendo 8^P em 4^P e 4^P, veremos que cada huma deſtas partes he hum terço do *pé*, e por iſſo dará 4^{lb}, que he o terço do producto que acabamos de achar para 1^P. Reunindo finalmente todas eſtas partes, ſerá o producto total 416^{lb}.

122 Se tambem o multiplicando for numero complexo, far-ſe-ha a operaçaõ, como ſe moſtra no exemplo ſeguinte.

Exemplo IV.

PAra multiplicar	72^{lb}	$6^{ſ}$	6^{d}	
por - - - -	27^T	4^P	8^P	
	504^{lb}	$0^{ſ}$	0^{d}	
	144			
	6	15	0	
	1	7	0	
	0	13	6	
	36	3	3	
	12	1	1	
	4	0	$4\frac{1}{3}$	
	4	0	$4\frac{1}{3}$	
	2009^{lb}	$0^{ſ}$	$6^{d}\frac{1}{3}$	Product.

Ten-

Tendo multiplicado 72^{lb} por 27, passaremos tambem a multiplicar 6^{s}, para o que resolveremos este numero em 5^{s} e 1^{s}. E porque 5^{s} fazem hum *quarto* da *libra*, multiplicar 5^{s} por 27 será o mesmo que tomar 27 *quartos* da *libra*, ou hum *quarto* de 27 *libras*, que he 6^{lb} 15^{s}. E para multiplicarmos 1^{s} por 27, como 1^{s} he hum *quinto* de 5^{s}, tomaremos hum *quinto* do producto antecedente 6^{lb} 15^{s}, que he 1^{lb} 7^{s}. E finalmente, para multiplicarmos 6^{d} pelo mesmo numero 27, advertiremos que 6^{d} fazem ametade de 1^{s}, e conseguintemente tomaremos ametade do producto 1^{lb} 7^{s}, que achamos competir a 1^{s}, a qual será 13^{s} 6^{d}.

Até aqui temos multiplicado todo o numero multiplicando pela primeira parte do multiplicador 27^{T}. Agora para o multiplicarmos tambem por 4^{P}, praticaremos como no exemplo antecedente. E resolvendo 4^{P} em 3^{P} e 1^{P}, por 3^{P} tomaremos ametade do multiplicando, a saber 36^{lb} 3^{s} e 3^{d}, e por 1^{P} tomaremos hum terço da dita ametade, que he 12^{lb} 1^{s} 1^{d}. Do mesmo modo resolveremos 8^{P} em 4^{P} e 4^{P}, e por cada huma destas partes tomaremos hum terço do producto, que achamos para 1^{P}, a saber 4^{lb} 0^{s} 4^{d} $\frac{1}{3}$. E recebendo todas as ditas partes, teremos o producto total 2009^{lb} 0^{s} 6^{d} $\frac{2}{3}$.

123 Nos exemplos precedentes tem sido muito faceis de tomar as partes do multiplicando, por causa da sua simplicidade. Quando forem mais compostas, usaremos do artificio que se mostra nos exemplos seguintes.

Exem-

Exemplo V.

PErgunta-ſe, quanto devem cuſtar 17^{T} de obra; a razaõ de 34^{lb} 10ſ 2^{d} a *toeſa*?

Será pois o multiplicando	34^{lb}	10ſ	2^{d}
e o multiplicador - -	17^{T}		
	238^{lb}	0ſ	0^{d}
	34		
	8	10	
	.	..	
	0	17	
	0	2	10
	586^{lb}	12ſ	10^{d} Prod.

E em primeiro lugar multiplicaremos 34^{lb} por 17, e depois 10ſ, os quais fazendo meia *libra* daráõ 17 meias *libras*, ou ametade de 17 *libras*, que he 8^{lb} 10ſ. Entaõ para multiplicarmos 2^{d} por 17, obſervaremos que 2^{d} fazem huma ſexta parte de 1ſ, e conſeguintemente huma ſexta de huma decima, ou (n. 114) huma ſexageſima parte de 10ſ. Pelo que por 2^{d} deveriamos tomar huma ſexageſima parte do producto 8^{lb} 10ſ, que temos achado competir a 10ſ. Mas para facilitar o calculo tomaremos primeiro a decima parte do dito producto, que he 0^{lb} 17ſ, e a marcaremos com pontos, ou riſcas, para denotar que he hum producto ſubſidiario, que ao depois naõ havemos de ſomar. Delle porém tomaremos a ſexta parte 2ſ 10^{d} que vem a ſer a ſexageſima parte de 8^{lb} 10ſ, e ſomando todos os productos parciais, ſerá o producto que ſe pergunta 586^{lb} 12ſ 10^{d}.

Exem-

Exemplo VI.

PErgunta-ſe, quanta obra ſe deve fazer por 34^{lb} $10^{ſ}$ 2^{d}, a razaõ de 17^{T} por 1^{lb}?

Multiplicaremos pois - - - - - - - - - - - - 17^{T}
por - - 34^{lb} $10^{ſ}$ 2^{d}

	68^{T}	0^{P}	$P0$	0^{1}	0^{pts}	
51						
	8	3				
	·	·	·	·	·	
	0	5	1	2	4	$\frac{4}{5}$
	0	0	10	2	4	$\frac{4}{5}$
	586^{T}	3^{P}	10^{P}	2^{1}	4^{pts} $\frac{4}{5}$	Producto.

E tendo multiplicado 17^{T} por 34^{lb}, paſſaremos a multiplicar por $10^{ſ}$; e porque $10^{ſ}$ fazem meia *libra*, pelo producto correſpondente tomaremos ametade de 17^{T}, que he 8^{T} 3^{P}. Para multiplicarmos por 2^{d}, buſcaremos o producto que deveria dar $1^{ſ}$, tomando a decima parte do producto antecedente, a ſaber 0^{T} 5^{P} 1^{P} 2^{1} 4^{pts} $\frac{4}{5}$; producto ſubſidiario, que marcaremos com pontos, e de que nos ſerviremos, para delle tomarmos a ſexta parte 0^{T} 0^{P} 10^{P} 2^{1} 4^{pts} $\frac{4}{5}$; que aſſentaremos por baixo; e ſomando todos os productos parciais, acharemos que o producto pedido he 586^{T} 3^{P} 10^{P} 2^{1} 5^{pts} $\frac{4}{4}$.

Te-

Temos dado eſte exemplo para confirmar o que aſſima diſſemos (n. 45) ; que era neceſſario diſtinguir o *multiplicando* do *multiplicador* , quando ambos foſſem *concretos*. E com effeito nos dous exemplos antecedentes temos os meſmos *factores* 17^T, e $34^{lb}\ 10ʃ\ 2^d$: e com tudo reſultaõ productos differentes.

ʃʃ He porém de advertir , que a dita differença he ſómente na expreſſaõ ; e que na realidade ſe declara pelo primeiro producto o meſmo numero de *libras* , que de *toeſas* pelo ſegundo ; ſendo ſómente diverſos os algariſmos , porque ſaõ diverſas as diviſões da *toeſa* , e da *libra*. Para iſto ſe provar baſta reduzir as partes da *libra* no primeiro, e as da *toeſa* no ſegundo , a huma fracçaõ da unidade principal , e ambos ſe acharaõ concordes , ſendo hum $586^{lb}\ \frac{77}{120}$, e o outro $586^T\ \frac{77}{120}$.

Advirta-ſe tambem , que nos exemplos aſſima dados ſe ſuppõe ſempre que a unidade principal he a da maior eſpecie , mas que póde ſervir igualmente de principal qualquer das outras. Póde v. g. perguntar-ſe quanta obra ſe deve fazer por 34^{lb} $10ʃ\ 2^d$, a razaõ de 17^T por $1ʃ$. Neſte caſo , por 2^d teriamos o producto $2^T\ 5^P$, por $10ʃ$ teriamos 170^T, e por 34^{lb} finalmente 11560^T ; donde ſeria o producto total $11732^T\ 5^P$. ʃʃ

Diviſaõ de hum numero complexo por hum numero incomplexo.

124 SE o dividendo ſómente for complexo, e ſe ao meſmo tempo o dividendo e o diviſor moſtrarem unidades de diverſa ſpecie , a operaçaõ ſe praticará da maneira ſeguinte. Di-

Dividir-ſe-haõ primeiramente as unidades principais do dividendo, conforme a regra dada para os numeros inteiros. O que ficar deſta diviſaõ reduzir-ſe-ha ás unidades da eſpecie immediatamente inferior (n. 57), e ſe ajuntará com as unidades ſemelhantes que no dividendo houver, e o total ſe partirá do meſmo modo. O reſto deſta diviſaõ ſe tornará a reduzir ás unidades da eſpecie ſeguinte, e ſe ajuntará com as do dividendo, e a ſoma ſe tornará a repartir; e aſſim por diante, até chegar á infima eſpecie.

Exemplo.

PAgando-ſe 4783 *libras*, 3 *ſoldos*, e 9 *dinheiros* pelo jornal de 87 *toeſas* de obra, queremos ſaber a quanto ſahe cada *toeſa*.

Para iſſo repartiremos 4783^{lb} $3^{ſ}$ 9^{d} por 87^{T}, da maneira ſeguinte:

4783^{lb} $3^{ſ}$ 9^{d}	87^{T}
433	54^{lb} $19^{ſ}$ 7^{d}
85	
$1703^{ſ}$	
833	
50	
609^{d}	
000	

Principiando pelas *libras*, partiremos pois 4783^{lb} por 87 (n. 65), e viráõ ao quociente 54^{lb}, ficando de reſto 85^{lb}. Eſte reſto convertido em *ſoldos* com os $3^{ſ}$ do dividendo primitivo faz $1703^{ſ}$;

e

e partindo esta soma por 87, sahiráõ no quociente 19ſ, e sobraráõ 50ſ. Do mesmo modo reduzindo este resto a *dinheiros*, e ajuntando-lhe os 9^d do dividendo, teremos 609^d; os quais sendo finalmente repartidos por 87, daraõ no quociente 7^d, sem resto algum; e conseguintemente será o quociente total que buscamos $54^{lb}\ 19ſ\ 7^d$.

125 No caso porém de mostrarem unidades da mesma especie tanto o dividendo, como o divisor, antes de fazer a divisaõ he necessario examinar, se o quociente deve, ou naõ deve ser da mesma especie que elles; exame, que facilmente se decide pelo estado da questaõ.

126 Mostrando pois o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo ao mesmo tempo conformar-se o quociente com as unidades de ambos elles, a divisaõ se praticará inteiramente como no primeiro caso.

Sabendo, por exemplo, que 1243^{lb} produziraõ de lucro 7254^{lb}, pergunta-se quanto cabe a cada *libra*. He claro nesta questaõ, que o quociente deve mostrar unidades da mesma especie que as do dividendo, e do divisor, isto he que se deve achar em *libras*, e partes da *libra*. Pelo que dividiremos 7254^{lb} por 1243, e convertendo o resto em *soldos* tornaremos a dividir por 1243, e assim por diante; e acabada a operaçaõ, acharemos que o quociente pedido he $5^{lb}\ 16ſ\ 8^d\ \frac{760}{1243}$.

127 Mostrando porém o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo o quociente mostrar unidades de differente especie que as de ambos elles, antes de fazer a divisaõ será necessario reduzir tanto o dividendo como o di-

divifor ás unidades da infima efpecie que no mefmo dividendo fe contém (n. 57). Depois diffo praticar-fe-ha como no exemplo precedente, tratando as unidades do dividendo affim reduzido, como fe foffem da mefma efpecie das que devem fahir do quociente.

Pergunta-fe v. gr. quantas *toefas* de obra fe devem fazer por 7954 *libr.* 11 *fold.* e 7 *dinh.* a razaõ de 72 *libras* a *toefa*? Pela mefma queftaõ entenderemos, que o quociente deve fahir em *toefas*, e partes da *toefa*. E por iffo reduziremos 7954^{lb} 11^{f} 7^{d} tudo em *dinheiros*, e teremos 1909099^{d}; o mefmo faremos ao divifor 72^{lb}, que dará 17280^{d}; e mudando no dividendo a denominaçaõ de *dinheiros* para *toefas*, teremos para dividir 1909099^{T} por 17280, donde refultará o quociente 110^{T} 2^{P} 10^{P} 6^{l} $\frac{19}{20}$.

Divifaõ de hum numero complexo, por outro complexo.

128 SEndo tambem complexo o divifor, reduzi-lo-hemos primeiro ás unidades da fua infima efpecie (n. 57), e multiplicaremos o dividendo pelo numero das vezes que entra a unidade da dita infima efpecie na unidade principal do mefmo divifor. Defte modo a operaçaõ ferá reduzida ao cafo precedente de hum divifor incomplexo.

Exemplo.

TEndo cuftado 854^{lb} 17^{f} 11^{d} huma obra de 57^{T} 5^{P} 5^{P}, pergunta-fe a como fahe a *toefa*? Deve-veremos pois dividir 854^{lb} $17^{\int}$ 11^{d} por 57^{T} 5^{P} 5^{P}. Para isso reduziremos o divisor a *pollegadas*, que fará 4169^{P}; e como saõ necessarias 72^{P} para fazer huma *toesa*, que he a unidade principal do divisor, multiplicaremos o dividendo por 72 (n.121), e teremos 61552^{lb} $10^{\int}$. Por tanto partiremos o numero 61552^{lb} $10^{\int}$ por 4169, da maneira seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 61552^{lb}\ 10^{\int} & 4169 \\ \cline{2-2} 19862 & 14^{lb}\ 15^{\int}\ 3^{d}\ \frac{1833}{4169} \\ 3186 & \\ \cline{1-1} 63730^{\int} & \\ 22040 & \\ 1195 & \\ \cline{1-1} 14340^{d} & \\ 1833 & \end{array}$$

Primeiramente as 61552^{lb} partidas por 4169 daõ no quociente 14^{lb}, e 3186^{lb} de resto. Este reduzido a *soldos* com os $10^{\int}$ do dividendo faz $63730^{\int}$; os quais sendo partidos por 4169 daõ no quociente $15^{\int}$, ficando de resto $1195^{\int}$. Este reduzido a *dinheiros* faz 14340^{d}, os quais sendo finalmente partidos por 4169 daõ 3^{d}, e sobraõ 1833^{d}; pelo que será o quociente pedido 14^{lb} $15^{\int}$ 3^{d} $\frac{1833}{4169}$.

He clara a razaõ desta regra. Porque reduzindo-se o divisor 57^{T} 5^{P} 5^{P} a 4169^{P}, e sendo 1^{P} hum 72-*avo* da *toesa*, o mesmo divisor se reduzirá a esta fracçaõ da *toesa* $\frac{4169}{72}$. Ora para dividir por huma fracçaõ he necessario inverter-lhe primeiro ro os termos, e depois multiplicar por ella (n. 109) Logo no exemplo proposto deveremos multiplicar por $\frac{72}{4169}$; que vem a ser o mesmo que multiplicar primeiro por 72, e depois dividir por 4169, como a regra prescreve.

Como a divisaõ por hum numero complexo se reduz á divisaõ por hum numero incomplexo, do modo que temos visto: sobre as unidades do quociente se guardará o mesmo que assima dissemos (n. 126, 127).

Aqui se poderia fallar tambem da multiplicaçaõ, e divisaõ geometrica, pelas quais se calculaõ as medições *Geodeticas* e *Stereometricas*. Mas estas operações pelo que respeita á fórma do calculo naõ differem em nada das que temos exposto. Sómente faltaria explicar a natureza das unidades dos factores, e do producto; porém reservamos isso para a Geometria, onde se entenderá com mais facilidade.

Da formaçaõ dos numeros quadrados, e extracçaõ das suas raizes.

129 CHama-se *quadrado* de hum numero o producto, que resulta da multiplicaçaõ delle por si mesmo. Assim 25 he o quadrado de 5 porque resulta da multiplicaçaõ de 5 por 5.

130 *Roiz quadrada* de qualquer numero he o numero que multiplicado por si mesmo produz o dito numero. Assim 5 he a raiz quadrada de 25, e 7 a raiz quadrada de 49 &c.

131 He pois o numero que se *quadra* multipli-

plicando e multiplicador ao mesmo tempo ; e por conseguinte he duas vezes factor do producto (n. 42) Donde vem, que o dito producto, ou quadrado se chama tambem *segunda potencia* do mesmo numero.

Para achar o quadrado de hum numero naõ he necessario mais do que multiplica-lo por si mesmo, conforme as regras ordinarias da Multiplicaçaõ. Mas para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, ou para vir pelo quadrado no conhecimento da raiz, he necessario hum methodo particular, principalmente quando o numero constar de mais que dous algarismos.

Se o numero proposto constar de hum ou dous algarismos, a sua raiz, em numero inteiro, será algum dos numeros digitos.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

cujos quadrados saõ

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Assim v. gr. a raiz quadrada de 72, em numero inteiro, será 8 ; porque estando 72 entre 64 e 81, a sua raiz tambem se achará entre as raizes dos ditos numeros, que saõ 8, e 9 ; e por conseguinte será 8 com hum quebrado. Este quebrado porém nunca se póde determinar exactamente, mas póde approximar-se continuamente, como mais abaixo se mostrará.

132 A raiz quadrada de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-se numero *surdo*, *irracional*, ou *incommensuravel*.

§§ Temos alguns principios derivados da Lei da Numeraçaõ, pelos quais podemos muitas vezes conhecer, que hum numero proposto certamente naõ he quadrado, e saõ os seguintes.

To-

Todo o numero cuja ultima letra á direita for 2, 3, 7, ou 8, naõ póde ser quadrado.

E todo o numero, que acabar em huma, tres, cinco, ou geralmente em numero impar de cifras, naõ será quadrado.

Se de qualquer numero lançarmos fóra os *noves*, e ficar no resto 2, 3, 5, 6, ou 8, conheceremos que naõ he quadrado. E o que deixar de resto 3, ou 6, naõ sómente naõ sera quadrado, mas naõ terá raiz racional de qualquer gráo que ella seja.

Do mesmo modo, se de hum numero tirarmos os *onzes*, e tivermos de resto 2, 6, 7, 8, ou 10, naõ poderá ser quadrado.

Os numeros, que naõ forem incluidos nestas regras, poderaõ ser quadrados, mas naõ se segue por isso que o sejaõ necessariamente. ¶¶

133 Em quanto aos numeros de mais letras que duas, observando o que se passa na formaçaõ do quadrado, acharemos o methodo inverso de lhes extrahir a raiz.

Para quadrar qualquer numero, por exemplo 54;

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Primeiramente, multiplicaremos o 4 superior pela 4 inferior, e o producto será evidentemente o *quadrado das unidades* do dito numero.

Depois, multiplicaremos o 5 superior pelo 4 in-

inferior, e teremos nesta operaçaõ o *producto das dezenas pelas unidades.*

Entaõ multiplicaremos o 4 superior pelo 5 inferior, donde resultará o producto das unidades pelas dezenas, ou (n. 44) *o producto das dezenas pelas unidades.*

Finalmente multiplicaremos o 5 superior pelo 5 inferior, e teremos por esta operaçaõ o *quadrado das dezenas.*

Somando estes productos parciais, achamos que o numero proposto produz o quadrado 2916, o qual vemos que se compõe do *quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades* da sua raiz 54.

134 Sendo isto que acabamos de observar huma consequencia immediata das regras da Multiplicaçaõ, he manifesto que naõ pertence sómente ao numero 54, mas a todo o numero composto de dezenas e unidades. Pelo que diremos em geral, que o quadrado de todo o numero composto de dezenas e unidades contém as tres sobreditas partes, a saber, o quadrado das dezenas, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades.

135 Isto supposto, como o quadrado das dezenas faz centenas (por quanto 10 vezes 10 fazem 100) he claro que o quadrado das dezenas naõ se contém nas duas ultimas letras do quadrado total. E como o producto das dezenas pelas unidades he necessariamente de dezenas, tambem he claro que o duplo deste producto se naõ contém na ultima letra do quadrado total.

136 Para voltarmos pois do quadrado 2916 a procurar a sua raiz, podemos discorrer desta maneira.

Exem-

Exemplo I.

2916	54 Raiz
416	
104	
000	

Comecemos pelas dezenas da mesma raiz. A formaçaõ do quadrado nos tem mostrado, que o quadrado dellas faz huma parte de 2916, e que nada delle se acha nas duas ultimas letras 16; logo estará o dito quadrado incluido em 29. E como a raiz quadrada de 29 naõ póde ser maior que 5, concluiremos que 5 he o numero das dezenas da raiz, e o assentaremos á direita do numero proposto, como se mostra no exemplo.

Entaõ quadraremos o 5, e tiraremos o seu quadrado exacto 25 de 29, e ficará o resto 4, para junto do qual abaixaremos as outras duas letras 16 do numero proposto.

Para acharmos agora as unidades da raiz, reflectiremos no que contem finalmente o resto 416. Pelo que assima mostramos se vê que naõ contem mais que duas partes, a saber, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades da mesma raiz. A primeira destas nos bastará para acharmos a letra que agora buscamos; pois sendo ella formada do duplo das dezenas multiplicado pelas uuidades, se a dividirmos pelo dobro das dezenas que ja conhecemos, o quocienté mostrará as unidades (n. 74). Falta pois saber, em que parte do resto 416 se contem o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades; e como, pelo que assima notamos, nada delle se contem na ultima letra do dito resto, necessariamente se achará em 41. Pelo que dividiremos 41 pelo dobro das dezenas 10, o qual escreveremos debaixo, e o quociente 4 mostrará as unidades da raiz, que por conseguinte será 54.

He porem de advertir, que, sem embargo de termos neste exemplo achado o quociente 4 justamente como convinha, póde algumas vezes succeder que o quociente achado desta maneira seria maior do que convem; porque 41 (isto he, a parte restante depois de separada a ultima letra) naõ sómente contem o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades, mas tambem as dezenas que podem resultar do quadrado das unidades. Por esta razaõ, para naõ haver duvida sobre a letra que temos achado, usaremos da verificaçaõ seguinte.

Depois de ter achado a letra das unidades 4, e de a ter escrito na raiz, tambem a assentaremos á direita do divisor 10, que ficará 104, e multiplicaremos este numero pela mesma letra 4, tirando os productos sucessivos das partes correspondentes de 416, como praticaremos na divisaõ; e como naõ resta nada, concluiremos que a raiz he com effeito 54.

Se ficasse porem algum resto, naõ deixaria por isso a raiz de ser exacta até á casa das unidades, com tanto que o dito resto naõ fosse igual, ou maior que o dobro da raiz achada aumentado de huma unidade; mas isto he o que se naõ pode recear, pois pelo methodo assima exposto sómente podemos errar tomando o quociente maior do que convem.

A verificaçaõ, que temos ensinado, he fundada

dada ſobre a meſma formaçaõ do quadrado. Porque multiplicando 104 por 4, he evidente que ſe fórma ao meſmo tempo o quadrado das unidades, e o producto das unidades pelo dobro das dezenas, que era o que faltava para completar o quadrado perfeito.

137 Do que acabamos de moſtrar concluiremos em geral o methodo de tirar a raiz quadrada de qualquer numero, que naõ tiver mais de quatro letras, nem menos de tres.

Depois de ſe terem ſeparado com hum ponto as duas ultimas letras á direita, buſcar-ſe-ha a raiz quadrada da parte que ficar á eſquerda, e eſſa raiz moſtrará as dezenas da raiz total que ſe buſca, e ſe aſſentará adiante do numero propoſto com a diſtinçaõ de huma riſca perpendicular, que a ſepare delle.

O quadrado exacto da letra achada ſe tirará da meſma parte, cuja raiz ſe buſcou, e o reſto ſe aſſentará debaixo, para junto do qual ſe abaixaráõ as duas letras, que ſe tinhaõ ſeparado no numero propoſto.

Neſtas letras ſe apartará com hum ponto a ultima á direita, e as que ficarem á eſquerda ſe dividiráõ pelo dobro das dezenas da raiz, o qual ſe aſſentará por baixo.

O quocientc deſta diviſaõ ſe eſcreverá adiante da primeira letra da raiz, e juntamente ao lado direito do diviſor, enchendo a caſa correſpondente á letra ſeparada.

E finalmente multiplicar-ſe-há o diviſor aſſim aumentando pelo meſmo quociente, e o producto ſe tirará do numero que fica por ſima do dito diviſor. Moſtremos iſto com outro exemplo.

Exemplo II.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 7569.

75.6 9	87 Raiz.
11 6.9	
1 6.7	
0.0 0	

Separemos primeiramente com hum ponto as duas ultimas letras 69, e buſquemos a raiz de 75, que acharemos ſer 8, e eſta letra aſſentaremos adiante da riſca; cujo quadrado exacto 64 diminuiremos de 75, aſſentando por baixo o reſto 11, para junto do qual abaixaremos as duas letras 69, que tinhamos ſeparado.

Depois no reſto total 1169 apartaremos com hum ponto a ultima letra 9, e ficará o dividendo 116, debaixo do qual eſcreveremos o diviſor 16, que he o dobro da raiz achada 8; feita a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que aſſentaremos adiante da primeira letra da raiz 8, e adiante do diviſor 16, debaixo da letra ſeparada 9.

Finalmente multiplicaremos o diviſor aſſim aumentando 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero ſuperior 1169; e porque naõ ſobra nada, entenderemos que o numero 7569 he quadrado perfeito, e que a ſua raiz exacta he 87.

138 Deve notar-ſe bem, que naõ ſe ha-de partir pelo dobro das dezenas ſenaõ a parte que ficar á eſquerda depois de ſeparada a ultima letra. De ſorte que naõ chegando ella a conter o dito dobro, naõ poderá por iſſo uſar-ſe da letra ſepara-

ra-

rada, mas aſſentar-ſe-ha cifra no quociente. Ao contrario, ſe o meſmo dobro ſe contiver na parte, que conſtitue o dividendo, mais de nove vezes, naõ poderá por-ſe no quociente letra maior que 9, pela razaõ que ja diſſemos tratando da Diviſaõ (n. 66).

139 Sendo bem comprehendido o que acabamos de dizer ſobre a raiz quadrada dos numeros que naõ tem mais de quatro letras, he facil de entender o que ſe deve praticar com os numeros de mais letras. De qualquer numero de letras que deva conſtar a raiz, ſempre a podemos conſiderar como compoſta de duas partes, das quais huma ſeja de dezenas, e a outra de unidades, como v. gr. o numero 874 póde conſiderar-ſe compoſto de 87 dezenas, e 4 unidades.

Iſto ſuppoſto, quando tivermos achado as duas primeiras letras da raiz pelo methodo que acabamos de expor, pelo meſmo poderemos achar a terceira, tomando as ditas duas letras como hum ſó numero de dezenas, e applicando-lhes para achar a terceira todo o raciocinio que applicamos á primeira para achar a ſegunda.

Igualmente, quando tivermos tres letras acharemos a quarta, ſe for neceſſario, tomando as tres por hum numero total de dezenas, e praticando com ellas o meſmo, que praticámos com as duas primeiras para achar a ſegunda; e aſſim por diante.

Mas para proceder com ordem, diſtribuiremos primeiro o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, marcando-as com hum ponto. A ultima claſſe á eſquerda, ſerá de huma ſó letra, quando o numero deſtas for impar.

A

A razaõ deſta preparaçaõ he, porque conſiderando a raiz como compoſta de dezenas e unidades, devem ſeparar-ſe duas letras á direita para ſe achar na parte reſtante o quadrado das dezenas (n. 135 e ſeg.). E pela meſma razaõ, conſtando as dezenas de unidades e dezenas de dezenas; deveremos ſeparar outras duas letras; e aſſim por diante.

Exemplo III.

Pede-ſe a raiz quadrada do numero 76807696.

```
76.8 0.76.96 | 8764
 12 8.0      |
  1 6 7      |
_________________
   1 1 1 7.6
   1 7 4 6
_________________
    7 0 0 9.6
    1 7 5 2 4
_________________
    0 0 0 0 0
```

Tendo diſtribuido o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, buſcaremos a raiz da ultima claſſe á eſquerda 76, que acharemos ſer proximamenre 8, e aſſentaremos eſte algariſmo adiante da riſca; depois quadraremos o 8, e diminuiremos o quadrado 64 de 76, eſcrevendo por baixo o reſto 12, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 80, ſeparando-lhe com hum ponto a ultima letra 0. Debaixo da parte que fica 128 eſcreveremos o diviſor 16 formado do dobro da raiz achada 8; e fazendo a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que eſ-

eſcreveremos na raiz depois da primeira letra 8, e tambem adiante do diviſor 16. Entaõ multiplicaremos 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero 1280, eſcrevendo por baixo o reſto 111, para junto do qual traremos a claſſe ſeguinte 76, ſeparando nella a ultima letra. Por baixo da parte reſtante 1117 eſcreveremos o diviſor 174, que he o dobro da raiz até agora achada 87; e partindo 1117 por 174 acharemos o quociente 6, que aſſentaremos na raiz, e adiante do diviſor; e multiplicando 1746 pelo meſmo quociente 6, tiraremos o producto do numero 11176, e eſcreveremos debaixo o reſto 700, ao qual ajuntaremos a ultima claſſe 96, ſeparando-lhe a ultima letra. Aſſim ficará 7009, que dividiremos pelo duplo da raiz achada 876, que he 1752, e acharemos o quociente 4, que poremos na raiz, e no diviſor; e multiplicando 17524 pelo meſmo 4, tiraremos o producto do numero 70096; e porque neſta ultima operaçaõ naõ fica reſto, ſerá a raiz exacta do numero propoſto 8764.

140 Quando o numero naõ for quadrado perfeito, no fim da operaçaõ ficará neceſſariamente algum reſto; e a raiz achada ſerá a verdadeira raiz do maior quadrado que no dito numero ſe contem. Neſte caſo naõ he poſſivel extrahir-ſe a raiz exactamente, mas podemos approximar-nos ao ſeu juſto valor quanto quizermos, de ſorte que o erro ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel.

Eſta approximaçaõ ſe faz commodamente por meio da *dizima*. Ajuntaõ-ſe ao numero dado duas vezes tantas cifras, quantas ſaõ as letras decimais que ſe querem na raiz; tira-ſe a raiz, como mo nos exemplos antecedentes ; e nella finalmente ſe aparta com a virgula ametade das caſas decimais, que ao numero ſe ajuntáraõ. Porque, devendo o producto de huma multiplicaçaõ ter tantas letras decimais, quantas houver nos factores juntamente (n. 54), o quadrado (cujos factores ſaõ iguais) deverá ter duas vezes mais letras decimais, do que em qualquer dos factores, iſto he, na ſua raiz ſe contem.

Exemplo IV.

PEde-ſe a raiz quadrada de 87567 exacta até a caſa das milleſimas.

Para ter milleſimas requerem-ſe tres caſas de *dizima* ; ſerá logo neceſſario ajuntar ao numero dado ſeis cifras, e tiraremos a raiz quadrada de 87567000000.

```
8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
 49
------
 346.7
 585
------
  5420.0
  5909
--------
  10190.0
  59181
---------
  427190.0
  591827
----------
   129111
```

Fa-

Fazendo a operaçaõ como nos exemplos antecedentes, acharemos a raiz 295917 exacta até as unidades. Esta pertence ao numero 87567000000; porem nós queremos a raiz de 87567, ou de 87567,000000. Por isso cortaremos para a dizima as tres ultimas letras da dita raiz, que vem a ser ametade das cifras que ajuntamos ao numero dado, e será a raiz que buscamos 295,917 exacta até á casa das millesimas.

Do mesmo modo, se nos pedirem a raiz quadrada do numero 2 até á casa das millionesimas, tiraremos a raiz de 2000000000000, que acharemos ser 1414213, e apartando com a virgula seis algarismos á direita, será a raiz que buscamos 1,414213.

ʃʃ A *Prova real* desta operaçaõ manifestamente se collige da mesma definiçaõ da *raiz* (n. 130). Multiplicar-se-há esta por si mesma, e ao producto se ajuntará o resto da operaçaõ, se o houver; e assim resultará o numero proposto, se a operaçaõ naõ estiver errada. Se. v. gr. de 12541028 acharmos a raiz 3541, e o resto 2347, para verificarmos este resultado, multiplicaremos a raiz por si mesma, e ao producto 12538681 ajuntaremos o resto 2347; e porque torna a restituir-se o numero 12541028, entenderemos que naõ houve erro na operaçaõ.

Querendo usar da *prova dos noves*, tirar-se-haõ estes da raiz, e o resto se multiplicará por si mesmo, tirando-se tambem do producto os noves, se os tiver; o que ficar se ajuntará ao resto da operaçaõ, e juntamente se lhe tiraráõ os noves, e o resto final será o mesmo que deve ficar depois de lançados fóra os noves do numero proposto. Assim

no

no meſmo exemplo, tirando os noves da raiz 3541 fica o reſto 4, que multiplicado por ſi meſmo faz 16, lançando fóra 9, ficaõ 7, que ſomados com o reſto da operaçaõ 2347, e tirando ao meſmo tempo os noves, finalmente daráõ o reſto 5; e eſte he o que deve ſobrar tirados os noves do numero dado 12541028, como ſobra com effeito. A prova dos *onzes* ſe applica como a dos *noves*, e de ambos ſe entenderá aqui o meſmo que ja fica advertido (n. 75).

141 Temos viſto aſſima (n. 106), que para multiplicar hum quebrado por outro, he neceſſario multiplicar entre ſi os numeradores, e da meſma ſorte os denominadores. Por conſeguinte, para quadrar hum quebrado deveremos quadrar ambos os ſeus termos. Aſſim o quadrado de $\frac{2}{3}$ he $\frac{4}{9}$, o de $\frac{4}{5}$ he $\frac{16}{25}$ &c.

142 Logo reciprocamente, para tirar a raiz quadrada de hum quebrado, devemos tirar as raizes do numerador e denominador. Deſte modo a raiz de $\frac{9}{16}$ ſerá $\frac{3}{4}$, porque a raiz do numerador 9 he 3, e do denominador 16 he 4.

143 Póde ſucceder, que o numerador, ou o denominador, ou ambos juntos naõ ſejaõ quadrados perfeitos. Se o numerador ſómente o naõ for, tirar-ſe-ha a ſua raiz approximada pelo methodo aſſima expoſto, á qual ſe dará por denominador a raiz exacta do denominador primitivo.

Aſſim por exemplo, querendo a raiz quadrada de $\frac{2}{9}$, tiraremos a raiz approximada do nu-

me-

merador 2, que ſerá 1,4, ou 1,41, ou 1,414, ou 1,4142 &c. conforme a menor ou maior exactidaõ que nos baſtar, á qual daremos o denominador 3, raiz exacta do denominador dado 9, e acharemos que a raiz de $\frac{2}{9}$ he $\frac{1,4}{3}$, ou $\frac{1,41}{3}$, ou $\frac{1,414}{3}$, ou $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Porem, ſe o denominador naõ for quadrado, multiplicar-ſe-haõ ambos os termos do quebrado propoſto pelo meſmo denominador, e a operaçaõ ſerá reduzida ao caſo precedente.

Querendo v. gr. tirar a raiz quadrada de $\frac{3}{5}$, reduziremos primeiro eſte quebrado a $\frac{15}{25}$, e tirando a raiz do numerador 15 até as milleſimas, no caſo de baſtar eſta exactidaõ, acharemos que a raiz proxima de $\frac{15}{25}$ ou $\frac{3}{5}$ he $\frac{3,872}{5}$.

144 Para naõ implicar-nos com differentes eſpecies de fracções ao meſmo tempo, podemos converter o reſultado $\frac{3,872}{5}$ unicamente em *dizima*, partindo 3,872 por 5, e teremos a raiz de $\frac{3}{5}$ puramente em partes decimais 0,774 (n. 99).

145 Em fim, ſe vierem inteiros juntos com os quebrados, os inteiros ſe reduziráõ á denominaçaõ dos quebrados (n. 86), e entaõ ſe praticará como nos exemplos antecedentes. Para tirarmos

v. gr.

v. gr. a raiz de 8 $\frac{3}{7}$, converteremos eſte numero em $\frac{59}{7}$ (n. 86), e depois em $\frac{413}{49}$ (n. 143), cuja raiz approximada ſerá $\frac{20,322}{7}$, ou 2,903.

146 Tambem ſe póde converter em *dizima* o quebrado, antes de ſe lhe tirar a raiz; advertindo, que as letras da *dizima* ſe haõ-de buſcar até fazerem o dobro das que queremos na raiz. Applicando eſte methodo ao numero 8 $\frac{3}{7}$, e querendo a raiz até á caſa das milleſimas, converteremos o dito numero em 8,428571 (n. 99), cuja raiz ſerá 2,903, como tinhamos achado.

147 Havendo de tirar a raiz quadrada de qualquer quantidade decimal, faremos que as caſas da dizima ſejaõ ſempre duas vezes tantas como as que deve ter a raiz, e para iſſo lhe ajuntaremos as cifras neceſſarias (n. 30); e a raiz achada ſempre terá na dizima ametade das caſas da dita quantidade propoſta, para o que ſe aſſentaráõ as cifras que forem neceſſarias entre a virgula e a primeira letra da meſma raiz.

Aſſim querendo extrahir a raiz de 21,935 até a caſa das milleſimas, tira-la-hemos como de 21,935000, e ſerá 4,683. Do meſmo modo acharemos que a raiz de 0,542 he 0,736, que a de 0,0054 he 0,073, e aſſim das mais.

148 O methodo, que fica expoſto (n. 69 e ſeg.) para ſe abbreviar a Diviſaõ, tambem ſe póde applicar facilmente á extracçaõ da raiz. Sendo baſtante, que ella ſe ache exacta até á caſa das unidades, diſtribuir-ſe-ha primeiramente em claſſes

o

o numero dado, e depois ſe cortaráõ á direita tantas letras menos huma, quantas forem as claſſes, e das que ficarem ſe extrahirá a raiz pelo methodo até agora declarado. O ultimo reſto que ficar ſe partirá pelo diviſor da operaçaõ precedente, no qual ſe naõ attenderá á ultima letra da parte direita; o reſto que ficar deſta diviſaõ ſe tornará a partir pelo meſmo diviſor, deſpreſando-ſe nelle outra letra á direita; e aſſim por diante.

Da formaçaõ dos numeros cubicos, e extracçaõ das ſuas raizes.

149 SE qualquer numero ſe multiplicar pelo ſeu quadrado, o producto que reſultar he o que chamamos *cubo* do meſmo numero. Aſſim 27 he cubo do numero 3, porque reſulta da multiplicaçaõ de 3 pelo ſeu quadrado 9.

Donde ſe vê, que o numero que ſe eleva ao cubo he tres vezes *factor* do meſmo cubo; e por iſſo o cubo ſe chama tambem a *terceira potencia*, ou *potencia do terceiro gráo* do meſmo numero.

150 Em geral, dizemos que hum numero ſe eleva á ſegunda, terceira, quarta, quinta &c. potencia, quando ſe multiplica 1, 2, 3, 4 &c. vezes conſecutivas por ſi meſmo, ou quando elle he 2, 3, 4, 5 &c. vezes *factor* do producto.

151 *Raiz cubica* de qualquer numero he o numero que multiplicado pelo ſeu quadrado fórma o dito numero propoſto. Aſſim 3 he raiz cubica de 27, porque da multiplicaçaõ de 3 pelo ſeu quadrado 9 reſulta o numero 27.

152 Para acharmos pois o cubo de qualquer nu-

numero dado naõ he neceſſaria outra regra ſenaõ a da multiplicaçaõ ; mas para extrahirmos a raiz cubica de qualquer numero he neceſſario hum methodo particular , o qual acharemos examinando a formaçaõ do meſmo cubo.

Obſervaremos porem , que naõ temos neceſſidade do dito methodo para acharmos a raiz cubica em numero inteiro , ſenaõ quando o numero propoſto tiver mais de tres letras. Porque ſendo 1000 o cubo de 10 , todo o numero menor que 1000, o qual por conſeguinte naõ terá mais de tres letras , terá a raiz cubica menor que 10. Deſtes numeros deveremos ſaber a raiz , para fazermos a operaçaõ , nos numeros maiores

Todo o numero pois , que naõ tiver mais do que tres letras , terá na raiz cubica , em numero inteiro , algum dos numeros digitos

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

aos quais correſpondem os cubos ſeguintes

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Aſſim acharemos que a raiz cubica de 428 em numero inteiro he 7 ; porque cahindo 428 entre 343 e 512 , tambem a ſua raiz ſe achará entre as raizes delles 7, e 8 ; e por conſeguinte em quanto ás unidades inteiras concordará com o numero 7, raiz exacta do cubo proximamente menor 343.

153 Há muitos numeros que naõ podem ter raiz cubica exacta. Mas podemos uſar de tal approximaçaõ , que o defeito ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel, como abaixo moſtraremos , depois de termos dado o methodo de extrahir a raiz do cubo perfeito,

154 Para bem ſe entender eſte methodo , veja-

jamos as partes de que deve conſtar o cubo de hum numero compoſto de dezenas e unidades.

Como pois reſulta o cubo da multiplicaçaõ de hum numero pelo ſeu quadrado (n. 149), he neceſſario trazer á lembrança que o quadrado de hum numero compoſto de dezenas e unidades conſta de tres partes, a ſaber, *do quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades.*

Logo para ſe formar o cubo deveráõ multiplicar-ſe eſtas tres partes do quadrado pelas dezenas e pelas unidades da raiz.

E em primeiro lugar multiplicando-as pelas dezenas, reſultaráõ tres productos, convem a ſaber, o cubo das dezenas, dous productos do quadrado das dezenas pelas unidades, e o producto das dezenas pelo quadrado das unidades. Depois multiplicando pelas unidades reſultaráõ outros tres productos, que ſeráõ o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, dous productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

Logo ajuntando os productos ſemelhantes, he claro, que o cubo de hum numero compoſto de dezenas e unidades conſta de quatro partes, a ſaber, *do cubo das dezenas, de tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, de tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e do cubo das unidades.*

Por meio deſtas partes podemos formar o cubo de qualquer numero compoſto de dezenas, e unidades. Tomemos por exemplo o numero 43.

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Primeiramente formaremos o cubo de 4, que he 64, e advertiremos que elle deve ſignificar *milhares*, porque o 4 moſtra dezenas, e o cubo de 10 he 10000; e aſſim acharemos que a primeira parte do cubo total he 64000.

Entaõ multiplicaremos o triplo do quadrado das 4 dezenas, que he 48, pelas tres unidades, e teremos o producto 144, que deve moſtrar centenas, porque o quadrado das dezenas faz centenas, e aſſim ſerá a ſegunda parte do cubo que buſcamos 14400.

Depois multiplicaremos o triplo das 4 dezenas que he 12 pelo quadrado das 3 unidades que he 9, e reſultará o producto 108, que devendo moſtrar dezenas dará a terceira parte do meſmo cubo 1080.

Finalmente formaremos o cubo das 3 unidades, ſerá 27, e fará a ultima parte do cubo total.

Somando em fim eſtas quatro partes acharemos que o cubo de 43 he 79507; o qual ſem duvida achariamos mais facilmente multiplicando primeiro 43 por ſi meſmo, e depois pelo producto 1849; mas aqui naõ ſe trata tanto de formar o cubo, como de moſtrar o meio, por onde ſe póde voltar reciprocamente do cubo para a ſua raiz.

155 Iſto pois ſuppoſto, eis-aqui o methodo que havemos de ſeguir na extracçaõ da raiz cubica.

Exem-

Exemplo I.

BUſquemos pois a raiz cubica de 79507.

Cubo	Raiz
79.507	43
155.07	
48	
79507	
00000	

Para diſtinguirmos a parte, em que ſe inclue o cubo das dezenas da raiz, deveremos ſeparar com hum ponto as tres ultimas letras 507 do numero dado, nas quais temos viſto que naõ ſe contem o dito cubo, por quanto repreſenta milhares. Da parte 79 que fica á eſquerda tiraremos pois a raiz cubica, que ſerá 4, e a eſcreveremos adiante da riſca junto ao numero dado.

Deſta letra, que achamos, e que moſtra as dezenas da raiz, formaremos o cubo exacto 64, e o tiraremos da dita parte 79, aſſentando por baixo o reſto 15, para junto do qual abaixaremos as tres letras 507 que tinhamos ſeparado, e ſerá o reſto total 15507, no qual eſtaráó incluidas as tres partes reſtantes do cubo total, a ſaber, tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

E como a primeira deſtas moſtra centenas, apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras 07 do dito reſto, e nas que ficaõ 155 ſeráó incluidos os tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades. Para acharmos pois as unidades, dividiremos 155 pelo triplo do quadrado das 4 dezenas que temos achado, que he 48, o qual eſcreveremos debaixo; e achando que 48 ſe contem *tres* vezes em 155, aſſentaremos 3 na raiz, e eſta ſerá a letra das unidades.

Para verificar a letra que temos achado, e conhecer ao meſmo tempo o reſto, ſe o houver, poderiamos formar as tres partes, que ſe devem achar no reſto 15507; mas ſerá igualmente commodo formar todo o cubo da raiz achada 43; e reproduzindo-ſe o numero dado, ficaremos na certeza de que achamos a ſua raiz exactamente.

Se o numero propoſto tiver mais do que ſeis letras, diſcorreremos como no exemplo ſeguinte:

Exemplo II.

SE nos pedirem a raiz cubica de 596947688

```
596.947.688 | 842
 849.47     |
 192        |
592704
___________________
   42436.88
   21168
 596947688
___________________
 000000000
```

Primeiramente conſideraremos a raiz, como compoſta de dezenas e unidades, e apartaremos com hum ponto as tres ultimas letras do numero dado. Depois, como a parte reſtante 596947, que

que contem o cubo das dezenas, tem tambem mais do que tres letras, deverá a sua raiz ter mais do que huma, e por conseguinte constará de unidades e dezenas de dezenas. Para acharmos tambem o cubo destas novas dezenas, deveremos pela mesma razaõ apartar com hum ponto outras tres letras á direita, e ficará a parte 596, na qual se achará o cubo dellas.

Buscaremos pois a raiz cubica de 596, que he 8, e a escreveremos adiante da risca; e formando o seu cubo exacto 512 o diminuiremos de 596, e assentaremos por baixo o resto 84. Para junto deste abaixaremos a classe seguinte 947, e teremos o numero 84947, no qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras á direita, e debaixo da parte 849 escreveremos o divisor 192, que he o triplo do quadrado da raiz achada 8, e fazendo a divisaõ acharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz adiante da primeira letra 8.

Para verificarmos esta raiz, e descobrirmos juntamente o resto, formaremos á parte o seu cubo 592704, e o tiraremos da parte correspondente do numero dado 596947, assentando por baixo o resto 4243. Para o lado direito deste resto abaixaremos a classe seguinte 688, da qual apartaremos com hum ponto as ultimas letras, e dividiremos a parte restante 42436 pelo triplo quadrado da raiz achada 84, que he 21168, e acharemos o quociente 2, que assentaremos na raiz.

Para outra vez verificarmos a raiz achada 842, e sabermos o resto, se o houver, eleva-la-hemos ao cubo, e dará 596947688, o qual tiraremos do numero dado; e porque naõ fica resto, entenderemos que o numero 842 he exactamente a raiz que buscamos.

 De-

Deve notar-ſe, que no decurſo deſta operaçaõ naõ ſe póde ja mais aſſentar na raiz letra maior do que 9; e quando coubeſſe maior, ſeria ſinal de ſe ter tomado a letra precedente menor, do que devia ſer. Tambem ſerá facil de conhecer, quando ſe tem tomado na diviſaõ hum quociente maior do que convinha, porque o cubo que reſultar naõ poderá diminuir-ſe da parte correſpondente do numero propoſto. Neſte caſo diminuir-ſe-há a raiz de huma, duas &c. unidades ſucceſſivamente, até que o ſeu cubo ſe poſſa diminuir.

Quando o numero dado naõ he cubo perfeito a raiz que ſe acha he approximada; e raras vezes baſtará ſabe-la até as unidades ſómente. Para iſto he muito vantajoſa a *dizima*, por meio da qual ſe póde approximar cada vez mais para o verdadeiro valor da raiz, aindaque naõ he poſſivel que eſta ſe repreſente jamais por numero exactamente.

156 Para ſe approximar pois a raiz cubica, quanto for neceſſario, ajuntaremos ao numero dado tres vezes tantas cifras, quantas letras quizermos na *dizima*. E tirando a raiz como nos exemplos antecedentes, nella cortaremos com a virgula as letras correſpondentes ás cifras que ajuntamos.

Exemplo III.

PEde-ſe a raiz cubica do numero 8755 até á caſa das milleſimas. Como as milleſimas eſtaõ na terceira caſa da dizima, deverá o cubo conſtar de nove decimais (n. 54); e por tanto ajuntaremos nove cifras ao numero propoſto.

Pe-

Pelo que a queſtaõ ſe reduz a tirar a raiz cubica de 8755000000000.

```
8.755.000.000.000 | 20610
07.55             |
_________________________
 12
8000
______________
  755000
  1200
8741816
_________________
  1318400.0
  127308
875455298I
___________________________
     44701900.0
    127743163
8754552981000
_____________________________
     447019000
```

E diſtribuindo o dito numero em claſſes, buſcaremos a raiz cubica da ultima claſſe 8 á eſquerda, que he 2, e a eſcreveremos adiante da riſca; e tirando o ſeu cubo 8 da meſma claſſe 8, aſſentaremos por baixo o reſto 0, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 755. Separando nella as duas ultimas letras com hum ponto, debaixo da parte reſtante 7 eſcreveremos o diviſor 12, que he tres vezes o quadrado da raiz achada 2. Dividindo 7 por 12, a letra que cabe ao quociente he 0, a qual aſſentaremos na raiz, e formando o cubo da raiz já achada 20, que he 8000, diminuinuilo-hemos da parte correſpondente 8755, e eſcreveremos debaixo o reſto 755, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 000, e continuaremos a operaçaõ do meſmo modo.

Acabada ella, acharemos que a raiz cubica de 8755000000000 exacta até á caſa das unidades he 20610; e por conſeguinte a raiz de 8755,000000000 ſerá 20,610 exacta até á caſa das milleſimas, por quanto a raiz deve ter tres vezes menos caſas na *dizima* do que he no ſeu cubo (n. 54).

Querendo-ſe levar mais adiante eſta approximaçaõ, ajuntar-ſe-haõ tres cifras ao ultimo reſto, e ſe continuará a operaçaõ da meſma maneira que ſe praticou por cada claſſe, que ſe ajuntou a cada reſto; e aſſim por diante.

55 Eſte methodo de extrahir a raiz cubica pode applicar-ſe ás raizes de mais alto gráo. Nellas obſervaremos em geral: 1.° Que o numero dado ſe ha-de diſtribuir em claſſes de tantas letras, quantos forem os gráos da potencia dada, exceptuando a ultima claſſe á eſquerda que poderá conſtar de menos, e a raiz terá tantas letras quantas forem as claſſes. 2.° Que da ultima claſſe á eſquerda ſe buſcará a raiz do gráo propoſto, ou exacta, ou proximamente menor, a qual ſerá a primeira letra da raiz que ſe buſca. 3.° Que a dita raiz achada ſe elevará á potencia dada, a qual ſe diminuirá da meſma ultima claſſe á eſquerda, e ao reſto ſe ajuntará a primeira letra da claſſe ſeguinte. 4.° Que debaixo do reſto aſſim augmentado ſe aſſentará por diviſor a potencia da meſma raiz achada do gráo immediatamente inferior ao gráo propoſto, ſendo eſta multiplicada pelo numero

mero que moſtra o gráo da potencia da queſtaõ.
5.º Que fazendo-ſe a diviſaõ o quociente ſe ajuntará á primeira letra da raiz, e toda a raiz achada ſe elevará outra vez á potencia da queſtaõ, a qual ſe tirará da parte correſpondente do numero dado, ao reſto ſe ajuntará do meſmo modo a primeira letra da claſſe ſeguinte, e ſe lhe applicará por diviſor a potencia da raiz ja achada do gráo proximamente menor que o propoſto, multiplicada pelo expoente do meſmo gráo propoſto &c.

Deſte modo, para tirarmos a raiz 5ª de qualquer numero, dividilo-hemos em claſſes de 5 letras. Buſcaremos a raiz 5ª da ultima claſſe á eſquerda, que moſtrará a primeira letra da raiz que procuramos. Formaremos a 5ª potencia exacta della e a tiraremos da meſma claſſe, e ao reſto ajuntaremos a primeira letra da claſſe ſeguinte. Debaixo deſte reſto aſſim augmentado aſſentaremos por diviſor a potencia 4ª da raiz achada, multiplicada por 5; e pela diviſaõ acharemos a ſegunda letra da raiz, a qual elevaremos novamente á 5ª potencia, e a diminuiremos da parte correſpondente do numero dado; ao reſto ajuntaremos a primeira letra da claſſe ſeguinte, e lhe applicaremos por diviſor o quintuplo da 4ª potencia da raiz ja achada, e aſſim por diante.

Para ſe conhecer facilmente a raiz da ultima claſſe á eſquerda ſerá neceſſario ter preſente huma taboa das potencias dos numeros digitos, como aqui ſe moſtraõ até á potencia nona.

RAIZES	POTENCIAS							
	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	5561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Tornando á raiz cubica, cujo uſo he mais frequente, naõ ſe póde negar que o methodo aſſima dado tem o incommodo de ſer neceſſario calcular os diviſores á parte, e formar o cubo da raiz, todas as vezes que ſe acha huma letra de novo; calculo, que ſe faz cada vez mais trabalhoſo, á medida que ſe augmentaõ as letras na meſma raiz. Nos livros ordinarios ſe acha huma regra differente para a extracçaõ da raiz cubica, mas eſſa taõ complicada e trabalhoſa, que certamente ſe deverá preferir o methodo que fica expoſto. Para facilitar pois eſta operaçaõ ſerá conveniente que ajuntemos aqui hum methodo particular, o qual he da maneira ſeguinte.

Principiando a operaçaõ, como aſſima fica declarado, até ſe achar a ſegunda letra da raiz, eſta ſe aſſentará tambem abaixo da riſca, e atraz della para a eſquerda o triplo da primeira letra da meſ-

mesma raiz. O numero que resultar se multiplicará pela mesma letra achada, e o producto se assentará debaixo do divisor, começando da ultima casa das duas letras que foraõ separadas do dividendo. Este producto se somará com o divisor, e a soma se assentará por baixo, a qual se tornará a multiplicar pela mesma letra achada, e o producto se hirá logo diminuindo do dividendo; e ajuntando ao resto a classe seguinte teremos o novo dividendo. O divisor se achará facilmente, somando mentalmente o quadrado da letra ultimamente achada com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e se assentará a soma debaixo do mesmo dividendo, chegando-a huma casa mais para a direita. Feita a divisaõ acharemos a terceira letra da raiz, a qual tambem escreveremos em baixo, e atrás della seguidamente o triplo das letras precedentes da mesma raiz; depois multiplicaremos este numero pela mesma letra que ultimamente achamos, e praticaremos tudo o mais como na operaçaõ antecedente; e assim por diante. Quando o divisor sahir maior que o dividendo, por-se-ha cifra na raiz, ajuntar-se-ha outra classe ao dividendo, e o mesmo divisor se adiantará huma casa mais para a direita.

Exem-

Exemplo.

PEde-se a raiz cubica de 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
11321130902464	
283027107	
11655616	
2830282725616	
00000000000000	

Tendo achado as duas letras 97 pelo methodo ordinario, assentaremos a segunda 7 debaixo da raiz, e atrás della o triplo da primeira 9, que he 27, e se formará o numero 277, o qual multiplicaremos pelo mesmo 7, e assentaremos o producto 1939 debaixo do divisor 243, principiando porem da ultima casa do dividendo 187358; somando o dito producto com o divisor, teremos a ſoma 26239, a qual multiplicaremos outra vez pela meſma letra 7, e ao meſmo tempo tiraremos o producto do dividendo 187358, aſſentando por baixo o reſto 3685, ao qual ajuntando a claſſe ſeguinte teremos o novo dividendo 3685751. E ſomando mentalmente o quadrado da meſma letra 7, que he 49, com os dous numeros 26239 e 1939, que precedem immediatamente ao dividendo, e eſcrevendo a ſoma huma caſa mais para a direita, teremos o novo diviſor 28227.

Pela diviſaõ acharemos o quociente 1, que aſſentaremos na raiz, e tambem abaixo della com o triplo das letras precedentes da raiz 97, donde reſultará o numero 2911, que multiplicaremos pela meſma letra achada 1, e ſomando o producto com o diviſor teremos a ſoma 2825611, a qual tornaremos a multiplicar pela meſma letra 1, e tiraremos o producto do dividendo, donde ficará o reſto 860140, ao qual ajuntaremos a claſſe ſeguinte, e ſerá o novo dividendo 860140227; e ſomando o quadrado da meſma letra achada 1 com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e eſcrevendo a ſoma huma caſa mais para a direita, teremos o novo diviſor 2828523.

Dividindo outra vez acharemos o quociente 3, o qual aſſentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras antecedentes formaremos o numero 29133, que multiplicaremos pelo meſmo 3, e ſomaremos o producto 87399 com o diviſor, donde reſultará a ſoma 282939699, a qual tornaremos a multiplicar pelo meſmo 3, e tirando o producto do dividendo ficará o reſto 11321130, ao qual ajuntaremos a claſſe ſeguinte para termos o novo dividendo 11321130902. Como pela for-

ma-

maçaõ do diviſor vemos, que a letra 2 do numero que precede ao dividendo, ha-de cahir debaixo da primeira letra do dividendo 1, e que naõ póde conſeguintemente fazer-ſe a diviſaõ, poremos logo cifra na raiz, ajuntaremos ao dividendo a claſſe ſeguinte, ſomaremos o quadrado da letra precedente 3 com os dous numeros precedentes ao dividendo, eſcrevendo a ſoma duas caſas mais para a direita, teremos o novo diviſor 283027107.

E tornando a dividir finalmente acharemos o quociente 4, que aſſentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras precedentes, que fará 2913904; multiplicando eſte numero pelo meſmo 4, e ajuntando o producto com o diviſor teremos a ſoma 283028272 5616, a qual multiplicaremos outra vez pelo 4, e diminuiremos o producto do dividendo; e porque naõ ſobra nada, ſerá a raiz cubica do numero propoſto exactamente 971304. ʃʃ

157 Como na multiplicaçaõ dos quebrados devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador (n. 106), he claro, que o cubo de hum quebrado ſe formará elevando ambos os ſeus termos ao cubo. E reciprocamente, para ſe tirar a raiz cubica de hum quebrado, ſerá neceſſario tirar as raizes tanto do numerador como do denominador. Deſte modo a raiz cubica de $\frac{27}{64}$ ſerá $\frac{3}{4}$, porque a raiz cubica do numerador 27 he 3, e do denominador 64 he 4.

158 Se o denominador ſómente for cubo perfeito, tirar-ſe-há a raiz approximada do numera-

dor,

dor, e por denominador ſe porá a raiz exacta do denominador primitivo.

Aſſim v. gr. pedindo-ſe a raiz cubica de $\frac{143}{343}$, acharemos que a raiz do numerador até á caſa das centeſimas he 5,22, e que a raiz exacta do denominador he 7: pelo que a raiz pedida ſerá proximamente $\frac{5,22}{7}$, ou 0,74 (n. 99).

159 Porem, ſe o denominador naõ for cubo perfeito, ambos os termos do quebrado ſe multiplicaraõ pelo quadrado do meſmo denominador (n. 88), e a operaçaõ ſe reduzirá ao caſo precedente.

Aſſim v. gr. querendo ſaber a raiz cubica de $\frac{3}{7}$, multiplicaremos ambos os ſeus termos por 49 quadrado do denominador 7, e ſe reduzirá a $\frac{147}{343}$ (n. 88), cuja raiz cubica ſerá proximamente $\frac{5,27}{7}$ (n. 158), ou 0,75 (n. 99).

Quando os quebrados vem juntos com inteiros, os inteiros ſe reduzem aos quebrados (n. 86), e a queſtaõ entrará nos caſos precedentes. Tambem podem reduzir-ſe os quebrados á dizima, antes de lhes tirarmos a raiz; mas eſta reducçaõ ſe continuará até achar tres vezes mais letras decimais do que ſe querem ter na raiz.

Deſte modo, para tirar a raiz cubica de 7 $\frac{3}{11}$ até á caſa das milleſimas, reduziremos eſte numero a 7,272727272, cuja raiz ſerá 1,937.

160 Quando ſe houver de tirar a raiz cubica de

de huma fracçaõ decimal, procurar-ſe-há que ella tenha tres vezes mais caſas de dizima, do que deve ter a raiz, ajuntando-lhe as cifras que para iſto forem neceſſarias. Entaõ tirar-ſe-ha a raiz, ſem fazer caſo da virgula, e nella ſe apartaraõ depois com a virgula as caſas da dizima que lhe competem, iſto he, o terço das que puzemos no numero propoſto; e ſe as letras della naõ chegarem a tanto, ajuntar-ſe-lhe-haõ á eſquerda as cifras que forem neceſſarias.

V. g. Para tirarmos a raiz cubica de 6,54 até a caſa das milleſimas, ajuntar-lhe-hemos ſete cifras, e buſcaremos a raiz como ſe foſſe do inteiro 654000000, a qual acharemos ſer 1870. E ſeparando-lhe tres letras para a dizima, por haver nove no numero dado, ſerá a raiz pedida 1,870, ou 1,87. Do meſmo modo acharemos, que a raiz cubica de 0,0006 he 0,08 até á caſa das centeſimas; e aſſim das mais.

161 O methodo abbreviado, que enſinamos para a Diviſaõ (n. 69 e ſeg.), tambem ſe applica facilmente á extracçaõ da raiz cubica. Porque ſendo baſtante tira-la até a caſa das unidades, dividir-ſe ha o numero propoſto em claſſes, e depois ſe lhe cortaraõ tantas letras á direita, menos duas, quanto for o dobro das meſmas claſſes. Das letras que ficarem á eſquerda ſe extrahirá a raiz cubica, e em chegando ao ultimo reſto deſprezaremos a ultima letra no diviſor que lhe competir, e aſſim por diante; mas naõ tomaremos o diviſor da operaçaõ precedente, ſenaõ quando elle tiver tantas letras conſtantes á eſquerda quantas forem as do reſto actual.

Das

Das razões, proporções, e progressões; e das regras, que dellas dependem.

162 PElo nome de *Razaõ* nada mais entendemos na Mathematica do que a grandeza relativa, que resulta da comparaçaõ de duas quantidades. Esta he de dous modos.

163 Porque se compararmos duas quantidades procurando saber quanto huma dellas excede, ou he excedida da outra, o resultado da comparaçaõ será a differença das mesmas quantidades, e esta se chama *Razaõ Arithmetica.*

Assim v. gr. comparando 15 com 8 para saber a sua differença 7, este numero 7, que resulta da comparaçaõ, he a razaõ arithmetica do numero 15 ao numero 8.

Para denotarmos, que comparamos duas quantidades neste ponto de vista, costumamos separallas com hum ponto Assim por esta expressaõ 15.8 entenderemos a razaõ arithmetica de 15 para 8.

164 Porem se compararmos duas quantidades, procurando conhecer quantas vezes huma contem, ou he contida na outra, o resultado desta comparaçaõ he a *Razaõ Geometrica.* E quando se diz *Razaõ* simplesmente, sempre se entende a *Geometria.*

Comparando v. gr. 12 com 3 para sabermos quantas vezes o contem, o que resulta desta comparaçaõ, isto he, o ser 12 *quadruplo* de 3, he a razaõ geometrica de 12 para 3.

Para mostrarmos, que comparamos duas quantidades neste sentido, costumamos separa-las com dous pontos. Esta expressaõ 12:3 significa a razaõ geometrica de 12 para 3.

165 Das duas quantidades, que se comparaõ arithmetica ou geometricamente, a que se profere ou escreve em primeiro lugar chama-se *antecedente*, e a outra *consequente*. Assim na razaõ 12:3 o numero 12 he antecedente, e o numero 3 consequente; e ambos elles em commum se chamaõ *termos* da razaõ.

166 Para conhecer a razaõ arithmetica de duas quantidades, naõ he necessario mais do que diminuir huma da outra, e o resto mostrará a razaõ, ou quanto huma tem de mais que a outra.

167 Para avaliar porem a razaõ geometrica de duas quantidades, deveremos dividi-las huma pela outra, e o quociente mostrará a razaõ dellas, isto he, quantas vezes huma contem a outra.

168 Daqui por diante avaliaremos sempre a razaõ geometrica pela divisaõ do antecedente pelo consequente, aindaque aquelle seja mais pequeno. Assim a razaõ de 12 para 3 será 4, e de 3 para 12 será $\frac{3}{12}$, ou $\frac{1}{4}$.

ℑℑ Deve notar-se, que naõ póde haver razaõ senaõ entre quantidades *homogeneas*; porque as *heterogeneas* nem se excedem, nem se contem mutuamente. Assim 12 *toesas* para 3 *libras* naõ tem razaõ alguma arithmetica nem geometrica. Porque sem embargo de que o numero doze tem sobre 3 o excesso de 9, he visivel que 12 *toesas* naõ tem sobre 3 *libras* excesso algum assignavel nem de *libras*, nem de *toesas*. E do mesmo modo, aindaque 12 contem a 3 quatro vezes, 12 *toesas* naõ contem de modo algum a 3 *libras*, porque saõ quantidades de differente genero, entre as quais naõ póde haver comparaçaõ.

A

A differença dos termos na razaõ arithmetica, e o quociente na geometrica, tambem tem o nome de *denominadores* e *expoentes* da razaõ.

A razaõ geometrica divide-se em *racional*, e *irracional*. He racional, quando o expoente se póde exprimir por numero quer seja inteiro, quer quebrado; irracional, quando o expoente naõ pode exprimir-se jamais por numero algum exactamente, como he a razaõ da unidade para a raiz quadrada de 2. Tambem se divide em razaõ de *igualdade*, e *desigualdade*, conforme consta de termos iguais, ou desiguais; chama-se razaõ *de maior desigualdade*, quando o antecedente he maior que o consequente; e *de menor desigualdade*, quando he menor.

Os Mathematicos antigos fazem sinco differenças genericas da razaõ de maior desigualdade, (que naõ deve ignorar quem quizer entender as suas obras) a saber: *Multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *multiplex-superparticularis*, *multiplex-superpartiens*; e da razaõ de menor desigualdade saõ outras tantas differenças, que se declaraõ com os mesmos nomes precedidos de hum *sub*, a saber: *submultiplex*, *subsuperparticularis* &c.

Razaõ *multiplex* he, quando o antecedente contém o consequente algumas vezes exactamente; e *submultiplex*, quando nelle he contido do mesmo modo. A primeira he em particular *dupla*, *tripla*, *quadrupla* &c., e a segunda *subdupla*, *subtripla*, *subquadrupla* &c., conforme os expoentes. A razaõ 10:1 he *decupla*, e 1:10 *subdecupla*.

Superparticularis he, quando o antecedente contém huma vez ao consequente, e além disso huma parte aliquota delle , como 3:2 ; e *ſubſuperparticularis* , quando o antecedente he contido do meſmo modo no conſequente , como 2:3. As eſpecies da primeira diſtinguem-ſe com os nomes das partes aliquotas precedidos de hum *ſesqui* ; e as eſpecies da ſegunda com os meſmos vocabulos precedidos de hum *ſub*. Deſte modo as razões 3:2, 4:3 , 5:4 , 6:5 &c. pela meſma ordem tem os nomes de *ſesquialtera* , *ſesquitertia* , *ſesquiquarta* , *ſesquiquinta* &c. ; e as razões 2:3, 3:4 , 4:5 , 5:6 &c. de *ſubſesquialtera* , *ſubſesquitertia* , *ſubſesquiquarta* , *ſubſesquiquinta* &c.

Superpartiens he , quando o antecedente contém huma vez o conſequente e mais algumas partes aliquotas delle , como 5:3 ; e *Subſuperpartiens*, quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo , como 3:5. As eſpecies deſte genero ſe denotaõ ajuntando a denominaçaõ das partes aliquotas , e metendo depois do *ſuper* as vozes *bi* , *tri* , *quadri* &c. , pelas quais ſe moſtra quantas deſſas partes aliquotas ſe exprimem. Aſſim 5:3 he razaõ *ſuperbipartiens tertias* , 8:5 *ſupertripartiens quintas* &c. E reciprocamente , 3:5 he razaõ *ſubſuperbipartiens tertias* , 5:8 *ſubſupertripartiens quintas* &c.

Multiplex-ſuperparticularis he , quando o antecedente contém algumas vezes o conſequente , e além diſſo huma parte aliquota delle ; e *ſubmultiplex-ſuperparticularis* , quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo. As eſpecies da primeira ſaõ *dupla-ſesquialtera* 5:2 , *dupla-ſesquitertia* 7:3 &c. , *tripla-ſesquialtera* 7:2 , *tripla-ſesquitertia* 10:3 &c. &c. ; e da ſegunda *ſubdupla-ſesquialtera* 2:5 , *ſubdupla-ſesquitertia* 3:7 &c, *ſub-*

tri-

tripla-ſesquialtera 2:7, *ſubtripla-ſesquitertia* 3:10 &c. &c.

Finalmente *multiplex-ſuperpartiens* he, quando o antecedente contém algumas vezes o conſequente e mais algumas partes aliquotas delle; e *ſubmultiplex-ſuperpartiens*, quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo. As eſpecies de ambas facilmente ſe denominaõ pelo que aſſima fica declarado. A razaõ 8:3 he *dupla-ſuperbipartiens tertias*, 74:7 *decupla-ſuperquadripartiens ſeptimas* &c.; e reciprocamente, a razaõ 3:8 he *ſubdupla-ſuperbipartiens tertias*, 7:74 *ſubdecupla-ſuperquadripartiens ſeptimas* &c. ʃʃ

169 A razaõ arithmetica fica ſendo a meſma, todas as vezes que ambos os termos ſe augmentaõ ou diminuem de huma meſma quantidade; porque aſſim naõ ſe altéra nada a differença, na qual conſiſte a razaõ. Aſſim 3.8 he o meſmo que 4.9, que 5.10 &c.

170 A razaõ geometrica tambem ſerá a meſma, todas as vezes que ambos os termos ſe multiplicarem, ou dividirem por huma meſma quantidade. Porque conſiſtindo a razaõ no quociente do antecedente dividido pelo conſequente (n. 168), he huma quantidade fraccionaria (n. 97), a qual naõ muda de valor, quando ambos os termos ſe multiplicaõ ou dividem por huma meſma quantidade (n. 88, 89). Aſſim a razaõ 3:12 vale o meſmo que 6:24, multiplicando ambos os termos por 2; e o meſmo que 1:4, dividindo ambos os termos por 3.

171 Eſta propriedade ſerve de muito para reduzir huma razaõ aos termos mais ſimples. Tendo

v. gr. de examinar a razaõ de $6\frac{3}{4}$ a $10\frac{2}{3}$; reduzindo tudo a quebrado, acharemos que he a mesma razaõ que de $\frac{27}{4}$ a $\frac{32}{3}$; depois reduzindo ao mesmo denominador, a mesma que de $\frac{81}{12}$ a $\frac{128}{12}$; e supprimindo o denominador commum 12 (que he o mesmo que multiplicar ambos os termos por 12) a razaõ proposta será a mesma que a de 81 para 128.

55 A mesma mudança, que se faz em huma razaõ arithmetica, ajuntando ou tirando huma quantidade ao antecedente, tambem se fará tirando ou ajuntando a mesma quantidade ao consequente; porque de ambos os modos resultaõ duas razões, das quais huma contém os termos da outra augmentados ou diminuidos da mesma quantidade. Na razaõ 5.9 tanto faz tirar 2 ao antecedente para ficar 3.9, como ajuntar 2 ao consequente para ficar 5.11; e reciprocamente tanto faz ajuntar 2 ao antecedente para ficar 7.9, como tirar 2 ao consequente para ficar 5.7.

E a mesma mudança, que se faz em huma razaõ geometrica, multiplicando ou dividindo o antecedente por huma quantidade, se fará tambem dividindo ou multiplicando o consequente pela mesma quantidade; porque por ambas as operações resultaõ duas razões, das quais huma he formada dos termos da outra multiplicados ou divididos por huma mesma quantidade. Na razaõ 4:9 vale o mesmo dividir o antecedente por 2, que multiplicar o consequente pelo mesmo 2, pois sahiráõ as razões iguais 2:9 e 4:18; do mesmo modo do multiplicando o antecedente por 3, ou dividindo o consequente pelo mesmo 3, resultaráõ as razões iguaes 12:9, e 4:3. ¶¶

172 Se quatro quantidades forem tais, que as duas primeiras tenhaõ a mesma razaõ que as duas ultimas, formaráõ todas huma *proporçaõ*; e esta será arithmetica, ou geometrica, conforme forem as razões arithmeticas, ou geometricas.

Estas quatro quantidades 7, 9, 12, 14 formaõ huma proporçaõ arithmetica, porque entre as duas primeiras e as duas ultimas ha a mesma razaõ de differença 2. Para denotar esta proporçaõ, assentaõ-se os quatro termos deste modo 7.9:12.14, ou tambem assim $7 - 9 = 12 - 14$; expressões, pelas quais entendemos que 7 *he para* 9, *como he* (arithmeticamente) 12 *para* 14.

Estas quatro quantidades 3, 15, 4, 20 formaõ huma proporçaõ geometrica, porque 3 se contém em 15 tantas vezes, como 4 em 20. Para assim o darmos a entender, assentaremos os termos deste modo 3:15::4:20, ou $3:15 = 4:20$; expressões, que querem dizer, que 3 *he para* 15, *como* 4 *he para* 20.

¶¶ Daqui se entenderá facilmente, que o producto de qualquer multiplicaçaõ he o quarto termo em proporçaõ geometrica a respeito da unidade e dos factores, isto he, *que a unidade he para hum dos factores, como o outro para o producto*; porque o producto contém tantas vezes hum dos factores, quantas o outro contém a unidade.

Do mesmo modo na divisaõ, *a unidade he para o quociente, como o divisor para o dividendo*; porque o dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente.

De-

Deve notar-se que todas as razões geometricas saõ homogeneas, pois consistem no quociente do antecedente dividido pelo consequente, o qual quociente he sempre numero abstracto. Por isso, aindaque naõ póde haver razaõ entre termos heterogeneos, póde com tudo haver proporçaõ, com tanto que cada hum dos antecedentes seja homogeneo com o seu consequente. Assim 12 *toesas* saõ para 3 *toesas*, como 8 *libras* para 2 *libras*; porque sem embargo de naõ ter comparaçaõ a *toesa* com a *libra*, póde com tudo comparar-se a razaõ de *toesas* a *toesas* com a razaõ de *libras* a *libras*; pois quantas vezes se contém 3 *toesas* em 12 *toesas*, tantas se contém 2 *libras* em 8 *libras*, isto he, *quatro vezes*. ¶

173 O primeiro termo e o quarto de huma proporçaõ chamaõ-se *extremos*; o segundo e terceiro, *meios*.

Como na proporçaõ ha duas razões, e por conseguinte dous antecedentes e dous consequentes, aos termos da primeira chamamos *primeiro antecedente*, e *primeiro consequente*, e aos da segunda *segundo antecedente*, e *segundo consequente*.

174 Quando saõ iguais os meios de huma proporçaõ, esta se chama *continua*.

Assim 3.7:7.11 he huma proporçaõ arithmetica continua, e o termo 7 he o *meio arithmetico* entre 3 e 11. Esta proporçaõ se escreve por abbreviatura desta maneira ÷ 3.7.11, denotando o sinal ÷ que o meio 7 faz juntamente as vezes de primeiro consequente, e segundo antecedente.

Do mesmo modo 5:20::20:80 he huma proporçaõ geometrica continua, e o termo 20 he o *meio geometrico proporcional* entre 5 e 80. Esta pro-

por-

porçaõ ſe eſcreve deſta maneira ∺ 5:20:80, denotando tambem o ſinal ∺ que o termo 20 ſe ha de tomar duas vezes.

175 Do que até agora temos dito ſobre a proporçaõ tanto arithmetica, como geometrica, ſe ſegue:

1.° Que ſe na proporçaõ arithmetica ſe ajuntar ou tirar aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ, conforme elles forem menores ou maiores que os conſequentes, cada hum ficará ſendo igual ao ſeu conſequente; pois he evidente, que deſte modo ſe ajunta ao termo menor de cada razaõ o que lhe falta para igualar o maior, ou ſe tira do maior o exceſſo que tem ſobre o menor. Aſſim na proporçaõ 3.7:8.12, ſe ao primeiro e terceiro termo ſe ajuntar a differença 4, teremos 7.7:12.12.

2.° Que ſe na proporçaõ geometrica ſe multiplicarem os conſequentes pelo expoente da razaõ, ficaráõ ambos iguais aos ſeus antecedentes; porque multiplicar o conſequente pelo expoente he toma-lo tantas vezes, quantas ſe contém no antecedente. Aſſim na proporçaõ 12:3::20:5, multiplicando 3 e 5 pelo expoente 4, teremos 12:12::20:20; e na proporçaõ 15:9::45:27, multiplicando 9 e 27 pelo expoente $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$, teremos 15:15::45:45.

Propriedades das proporções arithmeticas.

176 A Propriedade fundamental das proporções arithmeticas he, que a *ſoma dos extremos ſempre*

pre he igual á ſoma dos meios. Aſſim v. g. neſta proporçaõ 3.7:8.12 tanto os extremos 3 e 12, como os meios 7 e 8, fazem igualmente a ſoma de 15.

E com effeito ſe o primeiro termo for igual ao ſegundo, e o terceiro ao quarto, como na proporçaõ 7.7:12.12, he claro, que os extremos fazem huma ſoma igual á dos meios. Porém toda a proporçaõ arithmetica póde reduzir-ſe a eſta fórma, ajuntando ou tirando aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ (n. 175, 1°). Logo, como eſta addiçaõ ou ſubtracçaõ igualmente augmenta ou diminue a ſoma dos meios e dos extremos, e conſeguintemente naõ altéra a ſua igualdade ou deſigualdade, he evidente, que ſahindo as ſomas iguais pela dita reducçaõ, já eraõ iguais antes della.

177 Como na proporçaõ continua o meio ſe toma duas vezes, a ſoma dos extremos ſerá dupla do meſmo meio. Aſſim na proporçaõ ÷ 7.11.15 a ſoma dos extremos 7 e 15 faz 22, que he o dobro de 11.

§§ Reciprocamente: ſe quatro quantidades forem tais, que a ſoma das medias ſeja igual á das extremas, formaráõ huma proporçaõ arithmetica.

Porque para ſerem iguais as ditas ſomas he neceſſario que quanto huma das medias excede a huma das extremas, tanto pela outra deſtas ſeja excedida a outra daquellas; e conſequentemente entre a primeira e ſegunda haverá a meſma differença, que entre a terceira e quarta, como ſe requer para haver proporçaõ arithmetica.

Donde ſe ſegue, que tres quantidades eſtaráõ em proporçaõ continua todas as vezes que a media for igual á ametade da ſoma das extremas.

Sendo pois dados tres termos, acharemos o quarto arithmetico ſomando o ſegundo com o terceiro, e diminuindo da ſoma o primeiro; dados dous termos, acharemos o terceiro em proporçaõ arithmetica continua tirando o primeiro do dobro do ſegundo; e dados dous termos, acharemos o meio arithmetico tomando ametade da ſoma delles.

Segue-ſe tambem, que em qualquer proporçaõ arithmetica podem os meios paſſar para extremos, e os extremos para meios; e que tanto os extremos, como os meios, podem trocar entre ſi o lugar, ficando ſempre em proporçaõ. Deſte modo a proporçaõ 3.7:8.12 pela permutaçaõ dos termos produz as proporções ſeguintes:

3. 7: 8.12
3. 8: 7.12
7. 3:12. 8
7.12: 3. 8
8. 3:12. 7
8.12: 3. 7
12. 7: 8. 3
12. 8: 7. 3

Do meſmo principio ſe entende facilmente que a proporçaõ arithmetica ſe conſervará ajuntando ou tirando qualquer quantidade ao primeiro termo e juntamente ao terceiro, ou ao ſegundo e juntamente ao quarto. Aſſim na proporçaõ 3.7:8.12, ajuntando a ambos os antecedentes qualquer numero v. g. 6, e a ambos os conſequentes qualquer outro v. g. 9, conſervar-ſe-ha á proporçaõ 9.16:14.21.

Do

Do mesmo modo, se os termos correspondentes de duas ou mais proporções arithmeticas se somarem, ou diminuirem, as somas ou as differenças ficaráõ em proporçaõ. Assim somando as duas proporções 3.7:8.12 e 2.5:6.9 resulta a proporçaõ 5.12:14.21; e diminuindo a segunda da primeira, a proporçaõ 1.2:2.3. ʃʃ

Propriedades das proporções geometricas.

178 A Propriedade fundamental das proporções geometricas he, que *o producto dos meios sempre he igual ao producto dos extremos*; assim como na proporçaõ 3:15::7:35, tanto os extremos 3 e 35, como os meios 7 e 15, daõ igualmente o producto 105.

Porque he evidente, que o producto dos meios e dos extremos deve ser o mesmo todas as vezes que cada hum dos antecedentes for igual ao seu consequente. Porém toda a proporçaõ geometrica póde reduzir-se a esta fórma, multiplicando ambos os consequentes pelo expoente da razaõ (n. 175, 2°). Logo, como por esta operaçaõ ambos os productos se multiplicaõ igualmente pelo expoente, he claro, que sahindo iguais, tambem eraõ iguais antes da dita multiplicaçaõ.

Logo na proporçaõ continua *he o producto dos extremos igual ao quadrado do meio*. Porque sendo os dous meios iguais, o seu producto he o quaquado de qualquer delles.

Sendo pois dados dous numeros, acharemos o meio proporcional multiplicando hum pelo outro, e tirando a raiz quadrada do producto. Querrenrendo v. g. achar o meio geometrico entre 4 e 9, multiplicaremos estes numeros, e do producto 36 tiraremos a raiz quadrada 6, e teremos ∺ 4:6:9.

179 Dados os tres primeiros termos de huma proporçaõ geometrica, achar-se-ha o quarto multiplicando o segundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro. Porque he manifesto, que teriamos o quarto termo dividindo o producto dos extremos pelo primeiro (n. 74); porém o producto dos extremos he igual ao dos meios (n. 178): logo teremos igualmente o quarto termo, dividindo o producto dos meios pelo primeiro.

Pedindo-se v. g. o quarto termo da proporçaõ geometrica, cujos tres primeiros saõ 3:8::12, multiplicaremos 8 por 12, e partiremos por 3 o producto 96. O quociente 32 será o quarto proporcional, de sorte que teremos 3:8::12:32; e com effeito a primeira razaõ he $\frac{3}{8}$, e a segunda $\frac{12}{32}$, que, dividindo-se ambos os termos por 4 (n. 89), se reduz tambem a $\frac{3}{8}$.

Pelo mesmo raciocinio se vê claramente, que em geral se póde achar qualquer dos termos, dando-se os outros tres. *Buscando-se algum dos extremos, o producto dos meios se dividirá pelo extremo dado; e buscando-se algum dos meios, o producto dos extremos se dividirá pelo meio conhecido.*

180 Esta propriedade da igualdade dos productos dos meios, e dos extremos, naõ póde competir senaõ a quatro quantidades em proporçaõ geometrica. Porque naõ estando em proporçaõ, he evidente que multiplicando ambos os consequentes pela razaõ dos dous primeiros termos, sómen-

mente o primeiro antecedente ficará igual ao seu consequente, e por essa razaõ naõ poderá ser o producto dos meios igual ao dos extremos.

Logo, *se quatro quantidades forem tais, que o producto das medias seja igual ao das extremas, estaraõ em proporçaõ geometrica.*

181 Donde se segue, *que a proporçaõ se conservará entre quatro quantidades, passando as medias para extremas, e as extremas para medias.*

182 O mesmo succederá, *se trocarmos o lugar das medias, ou tambem das extremas.* Porque de ambos os modos se conservará a igualdade sobredita dos productos.

Assim da proporçaõ 3:8::12:32 resultaõ pela unica permutaçaõ dos termos as proporções seguintes.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3 & : & 8 & :: & 12 & : & 32 \\
3 & : & 12 & :: & 8 & : & 32 \\
8 & : & 3 & :: & 32 & : & 12 \\
8 & : & 32 & :: & 3 & : & 12 \\
12 & : & 3 & :: & 32 & : & 8 \\
12 & : & 32 & :: & 3 & : & 8 \\
32 & : & 12 & :: & 8 & : & 3 \\
32 & : & 8 & :: & 12 & : & 3
\end{array}
$$

A segunda destas se diz resultar da primeira *alternando*, a terceira *invertendo*, a quarta *invertendo e alternando*, a quinta *alternando e invertendo*, a sexta *transpondo*, a setima *transpondo e invertendo*, a oitava finalmente *transpondo invertendo e alternando.*

183 Como o terceiro termo de huma proporçaõ póde passar para o lugar do segundo, e reciprocamente; segue-se, *que a proporçaõ se hade con-*

conservar, todas as vezes que ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes se multiplicarem, ou dividirem juntamente por huma mesma quantidade.

Porque mudados os termos, os que eraõ antecedentes formaõ a primeira razaõ, e os consequentes a segunda. Pelo que multiplicar, ou dividir ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes por huma quantidade, vem a ser o mesmo que multiplicar, ou dividir os dous termos de huma razaõ pela mesma quantidade; operaçaõ que lhe naõ altera o valor (n. 170).

Dada v. g. a proporçaõ 3:7 :: 12:28, dividindo ambos os antecedentes por 3 podemos inferir que 1:7 :: 4:28; porque da primeira proporçaõ teremos *alternando* 3:12 :: 7:28 (n. 182), e dividindo os termos da primeira razaõ por 3 (n. 170), teremos 1:4 :: 7:28; e *alternando* outra vez 1:7 :: 4:28 (n. 182).

184 *Se em qualquer proporçaõ geometrica a soma do antecedente e consequente, ou a sua differença, se comparar com o antecedente, ou com o consequente em ambas as razões do mesmo modo, o resultado formará huma proporcaõ.*

Porque se a soma, ou a differença referida, se comparar com o consequente, he visivel, que ajuntando ou tirando o consequente ao antecedente, este o deverá conter mais ou menos huma vez do que antes o continha; e como esta mudança se faz igualmente na segunda razaõ, que pela natureza da proporçaõ he igual á primeira, seraõ necessariamente iguais as novas razões que assim resultaõ. O mesmo raciocinio terá lugar quando se comparar a dita soma ou differença com o antecedente, considerando primeiro os antecedentes muda-dados para o lugar dos consequentes, e reciprocamente (n. 181).

Dando-se v. g. a proporçaõ 12:3::32:8, della poderemos inferir outras quatro proporções, como aqui se mostraõ, nas quais o final + quer dizer *mais*, e o final − *menos*.

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

$$\begin{array}{l} 12 + 3 : 3 :: 32 + 8 : 8 \\ 12 + 3 : 12 :: 32 + 8 : 32 \\ 12 - 3 : 3 :: 32 - 8 : 8 \\ 12 - 3 : 12 :: 32 - 8 : 32 \end{array}$$

A primeira destas se diz resultar da proporçaõ primitiva *compondo*, ou por *composiçaõ de razaõ*, a segunda *por composiçaõ inversa de razaõ*, a terceira *dividindo*, ou *por divisaõ de razaõ*, e a quarta *por divisaõ inversa*, ou *por conversaõ de razaõ*.

185 Donde se collige, *que em toda a proporçaõ geometrica a soma ou differença dos antecedentes he para a soma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.*

Assim da proporçaõ 12:3::32:8 resultaõ as duas proporções seguintes:

$$\begin{array}{l} 12 + 32 : 3 + 8 :: 12 : 3 \\ 32 - 12 : 8 - 3 :: 12 : 3 \end{array}$$

Porque *alternando* teremos 12:32 :: 3:8 (n. 182), e desta pela *composiçaõ* e *divisaõ inversa da razaõ* resultaráõ as duas proporções 12 + 32:12::3 + 8:3, e 32 − 12:12::8 − 3:3 (n. 184), as quais alternando outra vez se convertem em 12 + 32:3

+

$+ 8 :: 12:3$, e $32 - 12:8 - 3 :: 12:3$ (n. 182).

186 Logo, *ſendo dado qualquer numero de razões iguais, ſerá a ſoma de todos os antecedentes para a ſoma de todos os conſequentes, como qualquer antecedente para o ſeu conſequente.* Por exemplo, ſendo iguais as razões $4:12 :: 7:21 :: 2:6$ teremos tambem $4 + 7 + 2:12 + 21 + 6 :: 4:12 :: 7:21$ &c.

Porque tomando as duas primeiras $4:12 :: 7:21$, teremos $4 + 7:12 + 21 :: 4:12$ (n. 185), ou (pela razaõ de ſer $4:12 :: 2:6$) $4 + 7:12 + 21 :: 2:6$; eſta proporçaõ dará outra vez $4 + 7 + 2:12 + 21 + 6 :: 2:6$ (n. 185), e aſſim por diante.

187 *Razaõ compoſta* he a que ſe fórma de duas ou mais razões, multiplicando entre ſi os antecedentes, e da meſma ſorte os conſequentes. Dando-ſe v. g. as razões 12:4 e 25:5, o producto dos antecedentes ſerá 300, e dos conſequentes 20; e aſſim 300:20 ſerá a razaõ compoſta das duas razões 12:4 e 25:5.

188 Como qualquer razaõ ſe avalia pelo quociente do antecedente dividido pelo conſequente, e conſeguintemente por huma fracçaõ que tenha o antecedente por numerador, e o conſequente por denominador (n. 168), he claro, que a razaõ compoſta ſe fórma pela multiplicaçaõ das fracções, que expõem o valor das razões componentes (n. 106). Aſſim exprimindo-ſe a razaõ 12:4 por $\frac{12}{4}$ ou por 3, e a razaõ 25:5 por $\frac{25}{5}$ ou por 5; a razaõ compoſta dellas 300:20 ſe exprime por $\frac{300}{20}$, ou por 15, que he o producto dos expoentes das razões 12:4 e 25:5.

186

189 A razaõ compoſta de duas iguais chama-ſe *razaõ duplicada* de qualquer dellas ; ſendo compoſta de tres , *triplicada* ; de quatro , *quadruplicada &c.* ; e qualquer das razões iguais componentes ſerá no primeiro caſo *ſubduplicada* da razaõ compoſta , no ſegundo *ſubtriplicada &c.* Dadas v. g. as razões iguais 2:3 e 4:6 , a que dellas ſe compõe 8:18 ſerá razaõ duplicada de 2:3 ou de 4:6 ; e qualquer deſtas razaõ ſubduplicada de 8:18.

190 *Se duas proporções ſe multiplicarem ordenadamente , iſto he , ſe o primeiro termo de huma ſe multiplicar pelo primeiro da outra , o ſegundo pelo ſegundo &c. , os quatro productos que reſultarem eſtaráõ em proporçaõ.*

Porque multiplicar as duas proporções deſta maneira , he multiplicar duas razões iguais por outras duas iguais (n. 172) ; logo as duas razões compoſtas que reſultaõ ſaõ iguais ; logo os quatro productos formaõ huma proporçaõ (n. 172).

191 Donde ſe ſegue , *que os quadrados , cubos , e* em geral *as potencias ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais , ſaõ tambem entre ſi proporcionais* ; porque para formar as ditas potencias naõ he neceſſario mais do que multiplicar a proporçaõ dada por ſi meſma huma , duas &c. vezes conſecutivamente.

192 Do meſmo modo , *as raizes quadradas , cubicas* , e geralmente *as raizes ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais , tambem ſaõ proporcionais.* Porque deſte modo naõ ſe faz outra couſa , ſenaõ tirar raizes ſemelhantes de razões iguais (n. 142 , 157 , 168) ; logo as novas razões que reſultaõ ſeraõ iguais ; e por conſeguinte as ditas raizes proporcionais (n. 172).

Uſo

Uſo das propoſições antecedentes.

193 AS propoſições que acabamos de moſtrar, e que ſe chamaõ *Regras das Proporções*, tem hum uſo continuo em todas as partes da Mathematica. Porém aqui ſómente tocaremos o que pertence á Arithmetica, principiando pelo uſo da propoſiçaõ aſſima demonſtrada (n. 179), que ſerve de fundamento a tudo o mais.

Da Regra de tres directa, e ſimples.

194 A Regra de *tres*, que pelo ſeu grande uſo ſe chama tambem *Regra aurea*, divide-ſe em muitas eſpecies, as quais todas tem por objecto achar hum termo de huma proporçaõ por meio dos outros tres.

A que ſe chama *regra de tres directa e ſimples* tem o nome de *ſimples*, e na linguagem dos noſſos auctores antigos de *cham*, porque a propoſta das queſtões a que ſe applica naõ involve mais do que quatro quantidades, das quais ſe daõ tres, e ſe pergunta a quarta.

Chama-ſe tambem *directa*, porque das quatro quantidades, que nella ſe conſideraõ, ha duas principais homogeneas entre ſi, cada huma das quais determina huma das outras de tal modo, que como a primeira daquellas contém ou he contida na ſegunda, aſſim a que depende da primeira contenha, ou ſeja contida na que depende da ſegunda. Iſto ſe verificará todas as vezes que huma das quantidades principais com a que della depende occupa-rem juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes; o que naõ póde ter lugar na *regra de tres inversa*, como depois mostraremos.

O methodo de achar o quarto termo de huma proporçaõ, e de practicar conseguintemente a *regra de tres directa e simples*, já fica sufficientemente declarado (n. 179); falta mostrar o uso desta regra por meio de alguns exemplos.

Exemplo I.

SE 40 obreiros em hum tempo certo tem feito 268 *toesas* de obra, quantas *toesas* faraõ 60 obreiros no mesmo tempo?

Pelo mesmo teor da questaõ se vê, que os dous numeros de obreiros 40 e 60 saõ os termos principais, e que a obra de 268^T he relativa ao primeiro, e a que se busca relativa ao segundo. Tambem he manifesto, que a obra hade crescer na razaõ dos obreiros, de sorte que o duplo, triplo, quadruplo &c. numero delles, deve produzir huma obra, dupla, tripla, quadrupla &c. dentro do mesmo tempo; e conseguintemente, que o numero pedido de *toesas* deve conter o numero dado de 268 *toesas*, como o numero dos obreiros que as haõ de fazer contém o numero dos obreiros relativo ás 268 *toesas*. Pelo que deveráõ os termos heterogeneos respectivos occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes, o que mostra ser a proporçaõ directa. Buscar-se-ha pois o quarto proporcional aos tres termos seguintes - - -

$$40:60::268^T:$$

ou, dividindo os termos da primeira razaõ por 20 (n. 170), aos tres seguintes - - - - -

$2 : 3 :: 268^T :$

Por tanto (n. 179) multiplicaremos 268^T por 3, e partiremos o producto 804^T por 2; o quociente 402^T ſerá o quarto termo, iſto he, a obra que faráõ 60 obreiros trabalhando tanto tempo e com tanta diligencia como os outros 40 que fizeraõ 268^T.

Exemplo II.

HUma náo com vento uniforme caminhou 275 leguas em 3 dias. Pergunta-ſe, em quantos dias caminhará 2000 leguas, continuando o vento e todas as mais circunſtancias do meſmo modo?.

He claro, que neſta queſtaõ ſe requer tanto mais tempo, quanto mais forem as leguas que ſe haõ de andar; e conſeguintemente, que o tempo que ſe buſca deve conter tantas vezes 3 dias quantas o numero das leguas, que lhe ſaõ reſpectivas, contém as leguas reſpectivas aos 3 dias. Buſcar-ſe-ha pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - -

$275 : 2000 :: 3^d.$

Pelo que multiplicaremos 3^d por 2000; e dividindo o producto 6000^d por 275, teremos o quociente $21^d \frac{9}{11}$, que he o tempo que ſe requer para navegar 2000 leguas ſegundo as condições da queſtaõ.

Exemplo III.

PAgando-ſe $168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^d$ por $52^T\ 4^P\ 5^P$ de obra, pergunta-ſe quanto ſe deve pagar por $77^T\ 1^P\ 8^P$?

Pela meſma queſtaõ ſe vê, que o preço relativo a $77^T\ 1^P\ 8^P$ deve conter tantas vezes o preço relativoa $52^T\ 4^P\ 5^P$, quantas o numero $77^T\ 1^P\ 8^P$ contém o numero $52^T\ 4^P\ 5^P$. Bufcar-fe-ha pois o quarto proporcional aos tres termos feguintes - - - - - - - -

$$52^T\ 4^P\ 5^P : 77^T\ 1^P\ 8^P :: 168^{lb}\ 9^{f}\ 4^{d} :$$

Ifto fe poderá fazer, multiplicando $168^{lb}\ 9^{f}\ 4^{d}$ por $77^T\ 1^P\ 8^P$, e dividindo o producto por $52^T\ 4^P\ 5^P$, conforme as regras dadas para o calculo deftes numeros (n. 122, 128).

Porém ferá mais facil o reduzir os dous termos da primeira razaõ á fua infima efpecie de *pollegadas*; e a queftaõ fe reduzirá a bufcar o quarto termo da proporçaõ feguinte - - - - -

$$3797 : 5564 :: 168^{lb}\ 9^{f}\ 4^{d} :$$

Entaõ multiplicando $168^{lb}\ 9^{f}\ 4^{d}$ por 5564 teremos o producto $937348^{lb}\ 10^{f}\ 8^{d}$; e dividindo efte por 3797, o quociente $246^{lb}\ 17^{f}\ 3^{d}\ \frac{2789}{3797}$ ferá o que deve pagar-fe por $77^T\ 1^P\ 8^P$.

Havendo além diffo fracções nos mefmos termos, depois de reduzidos á infima efpecie como nefte exemplo, a fua razaõ fe fimplificará do modo que affima moftramos (n. 171).

Da Regra de tres inverfa e fimples.

195 A Regra de tres fimples e inverfa, ou reciproca he, quando o termo pedido deve ter para o feu homogeneo dado a mefma razaõ, que tem o relativo defte para o relativo daquelle; e nifto confifte a ordem inverfa, porque na regra directa o termo pedido deve ter para o feu homogeneo a mefma razaõ, que tem o relativo daquelle para o defte.

deste. Pelo que na regra inversa sendo os termos dispostos como convém, huma das quantidades principais com a sua relativa teráõ o lugar dos meios, e a outra com a sua o lugar dos extremos.

Ordenados porém os termos na fórma conveniente á natureza da questaõ, a operaçaõ se pratica como a precedente, buscando o quarto proporcional aos tres termos dados.

Exemplo I.

SE 30 obreiros fazem certa obra em 25 dias, quantos obreiros saõ necessarios para fazerem a mesma obra em 10 dias?

Reflectindo na questaõ logo vemos que devem ser tanto mais os obreiros, quanto forem menos os dias. Pelo que o numero pedido dos obreiros deverá conter o seu homogeneo (30 obreiros), como o relativo deste (25 dias) contém o relativo daquelle (10 dias). Buscar-se-ha pois o quarto proporcional aos tres termos seguintes - - - -

$$10^{d} : 25^{d} :: 30^{obr} :$$

E multiplicando o segundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro acharemos 75, que he o numero dos obreiros da questaõ.

Exemplo II.

TEndo a equipagem de huma náo mantimento para 15 dias, e restando-lhe huma viagem de 20 dias, pergunta-se como se devem reduzir as rações por dia?

Tomando a raçaõ costumada por unidade, he claro, que a raçaõ que buscamos deve ser tanto me-

menor que a unidade, quanto he maior o numero de 20 dias que o de 15 dias; e por conſeguinte buſcaremos o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - -

$$20^d : 15^d :: 1 ;$$

O qual acharemos ſer $\frac{15}{20}$, ou $\frac{3}{4}$; e aſſim diremos que cada peſſoa ſe deve reduzir a tres quartos da raçaõ que houvera de ter, ſe reſtaſſem ſómente 15 dias de viagem.

Da Regra de tres compoſta.

N.

196 NA Regra de tres compoſta a razaõ da quantidade que ſe buſca para a ſua homogenea naõ ſe determina por meio da razaõ ſimples de outras duas quantidades, como nas regras antecedentes, mas por meio de muitas razões ſimples, as quais ſe devem compôr (n. 187) conforme pedir o eſtado da queſtaõ. Sendo eſtas compoſtas, a queſtaõ ſe reduz á regra de tres ſimples, como ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE 30 jornaleiros fazem 132 *toeſas* de obra em 18 dias, 54 jornaleiros quantas *toeſas* faráõ em 28 dias?

He manifeſto, que a obra da queſtaõ depende naõ ſómente do numero dos jornaleiros, mas tambem dos dias. Para ſe attender a hum e outro, he neceſſario reflectir que 30 jornaleiros em 18 dias fazem o meſmo que 18 vezes 30, ou 540 jornaleiros

leiros em hum dia; e do mesmo modo, que 54 jornaleiros em 28 dias fazem tanto como 1512 jornaleiros em hum dia. Pelo que a questaõ se reduz a esta: Se 540 jornaleiros fazem 132 toesas de obra, quantas toesas faraõ 1512 jornaleiros? e por conseguinte buscaremos o quarto termo desta proporçaõ - - - - - - -

$$540 : 1512 :: 132^T :$$

E multiplicando o segundo termo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, será o numero pedido $369^T\ 3^P\ 7^P\ 2^d\ \frac{2}{5}$.

Exemplo II.

HUm caminheiro andando 7 horas por dia fez huma jornada de 230 legoas em 30 dias. Pergunta-se, em quantos dias andará 600 leguas, caminhando 10 horas por dia com a mesma velocidade?

Se o numero das horas fosse o mesmo em ambos os casos, he visivel que o tempo pedido deveria ser tanto maior, quanto he maior a distancia relativa que se propõe; mas caminhando mais horas por dia no segundo caso, por esta razaõ deverá ser o tempo menor; e por conseguinte a questaõ depende da regra de tres directa e inversa simultaneamente. Reduzir-se-ha porém a huma regra simples, se reflectirmos que andar 30 dias a 7 horas por dia he fazer 210 horas effectivas de jornada. Assim a questaõ se reduzirá a estes termos: Se em 210 horas andou hum caminheiro 230 leguas, em quantas horas andará 600 leguas? O numero das horas, que satisfizer a esta questaõ, se par-

partirá por 10, visto andar o caminheiro 10 horas por dia, e o quociente será o numero dos dias que se pergunta. Assim buscaremos o quarto termo proporcional aos tres seguintes - - - -

$$230^{l} : 600^{l} :: 210^{b}$$

O qual acharemos ser $547^{b}\,\frac{19}{23}$, e dividindo-o por 10, será o numero dos dias $54\,\frac{18}{23}$.

Da Regra de Companhia.

197 ESta Regra tomou o nome das Companhias de negocio, nas quais tem grande uso, quando se trata de repartir pelos companheiros o ganho ou a perda, conforme as entradas de cada hum. Porém o seu objecto em geral he dividir hum numero dado em partes, que tenhaõ entre si huma razaõ dada. O methodo, que para isto se dá, funda-se no principio que assima fica demonstrado (n. 186), como se verá no exemplo seguinte.

Exemplo I.

DA-se o numero 120 para ser distribuido em tres partes tais, que sejaõ entre si como os numeros dados 4, 3, 2.

Pelo teor da questaõ se offerecem immediatamente estas duas proporções. Que 4 he para 3, como a 1ª parte que se busca he para a 2ª, e que 4 he para 2, como a 1ª parte he para a terceira; isto he (n. 182), que 4 he para a 1ª parte, como 3 para a 2ª, e 4 para a 1ª, como 2 para a 3ª; pelo que

que temos tres razões iguais, a ſaber: 4 para a 1ª parte, como 3 para a 2ª, e como 2 para a 3ª.

Porém temos moſtrado (n. 186), que em qualquer numero de razões iguais a ſoma dos antecedentes he para a dos conſequentes, como qualquer dos antecedentes para o ſeu conſequente; logo no exemplo figurado ſerá a ſoma 9 das partes dadas para a ſoma 120 das partes que ſe pedem, como qualquer das partes dadas para a ſua relativa que ſe buſca.

Pelo que a Regra de Companhia em geral ſe reduz a praticar a regra de tres tantas vezes, quantas ſaõ as partes que ſe buſcaõ, tomando ſempre por primeiro termo a ſoma das partes dadas, por ſegundo o numero que ſe quer diſtribuir, e por terceiro a parte dada que he relativa á que actualmente ſe buſca. Aſſim na queſtaõ propoſta deveráõ completar-ſe as proporções ſeguintes - - -

9 : 120 :: 4 :
9 : 120 :: 3 :
9 : 120 :: 2 :

E na primeira acharemos que o quarto termo he $53\frac{1}{3}$, na ſegunda 40, e na terceira $26\frac{2}{3}$ (num. 179), os quais juntos fazem a ſoma de 120, e ſaõ entre ſi como as partes dadas 4, 3, 2.

ʃʃ Eſta Regra ſe executará com mais brevidade, *partindo o numero propoſto pela ſoma das partes dadas, e multiplicando depois o quociente por cada huma das meſmas partes*. Porque em qualquer regra de tres tanto ſe acha o quarto termo, multiplicando o ſegundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, como dividindo o ſegundo pelo primeiro, e multiplicando o quociente

pelo

pelo terceiro. E como na Regra de Companhia o primeiro e ſegundo termo ſaõ ſempre os meſmos, huma ſó diviſaõ baſta para reſolver todas as regras de tres, que nella forem neceſſarias.

Aſſim no meſmo Exemplo, partindo 120 por 9 teremos o quociente $13\frac{1}{3}$, e multiplicando eſte ſucceſſivamente por 4, 3, 2, acharemos as partes relativas que lhes correſpondem $53\frac{1}{3}$, 40, e $26\frac{2}{3}$. ʃʃ

De qualquer modo que ſe pratique, naõ he neceſſario buſcar a ultima parte. Baſta tirar do numero propoſto a ſoma das outras, porque o reſto ſerá conſeguintemente a ultima que falta.

Exemplo II.

A Preza de hum navio avaliada em 800000 *libras* deve ſer diſtribuida por tres companheiros, dos quais o primeiro entrou com 120000, o ſegundo com 60000, e o terceiro com 20000 *libras*. Pergunta-ſe a parte de cada hum.

Temos pois o numero 800000^{lb} para ſer partido em tres partes, que guardem entre ſi a razaõ dos numeros 120000, 60000, 20000, ou (n. 170) dos numeros 12, 6, 2, porque a parte de cada hum deve ſer proporcional á ſua entrada. Aſſim com a ſoma 20 dos numeros 12, 6, 2, armaremos as tres proporções ſeguintes.

$$20 : 800000^{lb} :: 12 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 6 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 2 :$$

E

E acharemos, que a parte do primeiro he 480000^{lb}, do ſegundo 240000^{lb}, e do terceiro 80000^{lb}.

Exemplo III.

HUma Companhia de tres negociantes ganhou 12050 *libras*, tendo entrado nella o primeiro com 3000^{lb} por 6 mezes, o ſegundo com 4000^{lb} por 5 mezes, e o terceiro com 8000^{lb} por 9 mezes: Quanto deve ter cada hum?

Eſte caſo contém huma Regra de Sociedade composta, e eſta ſe reduz facilmente á ſimples. Porque a entrada do primeiro 3000^{lb} por 6 mezes vale o meſmo que 6 vezes 3000^{lb}, ou 18000^{lb} por hum mez; e do meſmo modo as entradas do ſegundo, e terceiro, valem o meſmo que 20000^{lb}, e 72000^{lb} pelo meſmo tempo de hum mez. Feita eſta reducçaõ, naõ ha mais do que partir o numero 12050^{lb} em tres partes proporcionais ás entradas reduzidas 18000^{lb}, 20000^{lb}, 72000^{lb}, e praticando como no exemplo precedente acharemos, que deve ter o primeiro $1971^{lb}\ 16ſ\ 4^{d}\ \frac{4}{11}$, o ſegundo $2190^{lb}\ 18ſ\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$, e o terceiro $7887^{lb}\ 5ſ\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$.

198 A' meſma Regra de Companhia ſe reduzem muitas outras queſtões, precedendo a preparaçaõ neceſſaria, como nos exemplos ſeguintes.

Dando-ſe o numero 650 para ſer diſtribuido em tres partes tais, que a primeira ſeja para a ſegunda como 5 para 4, e para a terceira como 7 para 3, naõ poderemos immediatamente praticar a Regra, por naõ terem as duas razões dadas 5:4 e 7:3 o primeiro termo commum. Mas a essa fórma se reduziráõ, sem perderem o valor, multiplicando ambos os termos de cada huma pelo primeiro da outra (n. 170). Assim resultaráõ as razões equivalentes 35 : 28, e 35 : 15, e a questaõ será reduzida a partir o numero 650 em tres partes proporcionais aos numeros 35, 28, 15, segundo a Regra assima dada.

Se o numero houvesse de partir-se em quatro partes, de sorte que a primeira fosse para a segunda como 5 para 4, para a terceira como 9 para 5, e para a quarta como 7 para 3, estas razões se reduziriaõ a ter o primeiro termo commum, multiplicando ambos os termos de cada huma pelo producto dos primeiros termos de todas as outras. Donde teriamos as razões equivalentes 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135, e a questaõ seria reduzida a partir o numero proposto em quatro partes proporcionais aos numeros 315, 252, 175, e 135.

Da Regra de Falsa Posiçaõ.

199 USa-se desta Regra, quando em lugar do numero, que buscamos, substituimos outro qualquer, e procedendo com elle conforme o teor da questaõ, comparamos o resultado com o que devia sahir, para dahi virmos no conhecimento do verdadeiro numero, que satisfaz á mesma questaõ. Chama-se simples, quando basta fazer huma só hypothese; composta, quando saõ necessarias duas.

A simples pratica-se por huma regra de tres, na qual *serve de primeiro termo o numero que resul-*

tou

tou da hypothese conforme as condições da questaõ, *de segundo o numero que devia resultar*, *e de terceiro a mesma hypothese.* E por isso só póde usar-se esta regra nas questões, em que o numero que se busca he para o numero dado que delle resulta, como qualquer outro para o que delle hade resultar da mesma maneira; circumstancias, que devem conhecer-se pela natureza da questaõ: e quando naõ, póde tentar-se a Regra, e depois fazendo experiencia do numero achado se conhecerá, se com effeito satisfaz á questaõ.

Exemplo.

PErgunta-se o numero, cujo terço, quinto, e tres septimos façaõ juntamente 808.

Para evitarmos quebrados, podemos escolher para hypothese hum numero que tenha as partes aliquotas 3, 5, 7, o qual acharemos multiplicando entre si estes tres numeros, que daõ o producto 105. Tomando pois o numero 105 por hypothese, buscaremos o seu terço 35, o seu quinto 21, e tres septimos 45. Se a soma destes fizesse 808, o mesmo numero da hypothese seria o que buscamos; porém como a soma faz 101, buscaremos o quarto proporcional aos tres termos seguintes - -

101 : 808 : : 105 :

E acharemos o numero 840, que satisfaz á questaõ.

A Regra de duas posições he mais geral, pois naõ sómente por ella se resolvem todas as questões da Regra simples, mas tambem muitas outras que estaõ fóra do alcance daquella. Pratica-se desta maneira.

Em lugar do numero que se busca toma-se arbibitrariamente qualquer por hypothese, e conforme a questaõ se examina o que delle resulta; depois toma-se outro qualquer, e se nota tambem o que delle resulta. Entaõ se faz esta proporçaõ: *Como a differença dos resultados das duas hypotheses, para a differença entre o resultado da primeira hypothese, e o verdadeiro resultado que devia sahir, assim a differença das hypotheses para hum quarto.* Este se ajuntará ou tirará á primeira hypothese, conforme ella produzio menos, ou mais do que devia ser, e isto no caso de que crescendo a hypothese cresça tambem o resultado; sendo ao contrario, o numero achado se ajuntará ou diminuirá conforme a mesma hypothese tiver produzido mais ou menos do que convinha. Como qualquer das hypotheses se póde tomar como primeira, he claro que de dous modos differentes se póde achar o que se busca.

Exemplo.

TRes negociantes ganháraõ 6954^{lb}. O segundo teve mais que o primeiro 54^{lb}, e o terceiro mais que os outros dous 78^{lb}. Pergunta-se o lucro de cada hum.

Supponhamos para mais facilidade que o lucro do primeiro foi 1^{lb}. Logo conforme a questaõ seria o lucro do segundo $1^{lb} + 54^{lb}$, ou 55^{lb}, e do terceiro $1^{lb} + 55^{lb} + 78^{lb}$, ou 134^{lb}, os quais somados daõ 190^{lb}.

Supponhamos outra vez que o lucro do primeiro foi 2^{lb}, e teremos para o segundo 56^{lb}, e para o terceiro 136^{lb}, cuja soma dá 194^{lb}.

Assim das duas hypotheses 1^{lb} e 2^{lb} temos os resultados 190^{lb} e 194^{lb}, devendo sahir 6954^{lb}. A dif-

differença entre os refultados das duas hypothefes he 4^{lb}, entre o refultado da primeira hypothefe ao que devia refultar he 6764^{lb}, e entre as duas hypothefes he 1^{lb}. Pelo que bufcaremos o quarto proporcional aos tres termos feguintes - - -

$$4 : 6764 :: 1^{lb} :$$

que acharemos fer 1691^{lb}, e ajuntando-o á primeira hypothefe 1^{lb} teremos o ganho do primeiro 1692^{lb}, e por confeguinte o do fegundo 1746^{lb}, e o do terceiro 3516^{lb}, que fazem com effeito a foma de 6954^{lb}, e fatisfazem ás mais condições da queftaõ.

He claro, que efta Regra naõ póde ter lugar fenaõ nas queftões, em que a differença das hypothefes he conftantemente proporcional á differença dos refultados que ellas produzem, fegundo o teor das mefmas queftões. Quando porém as hypothefes fe tomaõ proximas ao numero que fe bufca, em todas as queftões tem lugar proximamente a dita proporcionalidade; e por iffo efta Regra tem grande ufo na refoluçaõ das equações de gráo fuperior, e de muitas outras queftões em toda a Mathematica.

Se foffem duas as quantidades que fe perguntaõ, feriaõ neceffarias tres hypothefes. Porque em primeiro lugar fe deveriaõ fuppôr duas quaifquer quantidades em lugar dellas, depois confervando a primeira fe augmentaria ou diminuiria arbitrariamente a fegunda, e finalmente confervando a fegunda fe faria mudança na primeira. Do mefmo modo fe moftra, que feriaõ neceffarias quatro pofições, fe foffem tres as quantidades, e affim por diante. Para eftes cafos feria coufa muito embaraçada o prefcrever regras arithmeticas, quando por

ou-

outra parte ſe póde com muita facilidade e ſegurança dirigir o calculo por meio da Algebra.

Da Regra de Liga.

200 ESta regra tem por objecto a miſtura das couſas de differente valor ; e he de dous modos : Directa , quando ſe daõ as quantidades , que ſe haõ de miſturar , com o valor de cada huma , e ſe pergunta o valor do miſto que reſulta : Inverſa , quando ſe dá o valor das couſas que ſe haõ de miſturar , e ſe pergunta a porçaõ que de cada huma ſe deve tomar , para que o miſto ſeja de hum preço dado.

A primeira executa-ſe deſte modo : *Cada huma das quantidades ſe multiplica pelo ſeu valor , a ſoma dos productos ſe divide pelo numero das quantidades , e o quociente he o valor que ſe buſca.*

Exemplo.

QUerendo ligar 5 marcos de ouro de 24 quilates com 8 de 21 , e 6 de 17 ; pergunta-ſe o quilate a que ſe reduz o composto.

Multipliquem-ſe os 5 marcos pelos ſeus reſpectivos quilates 24 , e daraõ o producto 120 ; do meſmo modo multipliquem-ſe os 8 marcos por 21 , e os 6 por 17 , e daraõ os productos 168 , e 102. A ſoma de todos tres faz 390 , a qual ſendo dividida pela ſoma total dos marcos 19 dá no quociente $20 \frac{10}{19}$; e eſtes ſaõ os quilates do composto.

Na Regra inverſa , quando ſómente duas couſas ſe haõ de ligar a hum preço dado entre os preços

ços dellas, praticar-se-haõ estas duas proporções. *Como a differença entre os preços dos simplices para a differença entre os preços do composto e do simples de menor valor, assim a quantidade do composto para a parte que deve ter do simples de maior valor.* Depois: *Como a differença entre os preços dos simplices para a differença entre os preços do composto e do simples de maior valor, assim a quantidade do composto para a parte que deve levar do simples de menor valor.*

Exemplo.

HUm Ourives quer fazer huma obra que tenha de peso 8 marcos, e seja de 20 quilates e $\frac{1}{2}$ conforme a Lei; e para isso quer ligar duas especies de ouro, hum de 22 quilates, outro de 17. Pergunta-se quanto deve tomar de cada hum.

Tome-se a differença entre os quilates das especies dadas 22 e 17, que he 5, e as differenças entre o quilate proposto 20 $\frac{1}{2}$ e cada hum dos outros, que saõ 3 $\frac{1}{2}$, e 1 $\frac{1}{2}$; e busque-se o quarto termo nas duas proporções seguintes - - -

$$5 : 3\tfrac{1}{2} :: 8 : \qquad\qquad 10 : 7 :: 8 :$$

ou (n. 171)

$$5 : 1\tfrac{1}{2} :: 8 : \qquad\qquad 10 : 3 :: 8 :$$

A primeira das quais dará 5 $\frac{3}{5}$, isto he 5 marc. 4 onç. 6 oitav. 1 scrop. 4 gr. e $\frac{4}{5}$, que he a parte do ouro de 22 quilates, e a ſegunda dará 2 $\frac{2}{5}$, ou 2 marc. 3 onç. 1 oitav. 1 ſcrop. 19 gr. e $\frac{1}{5}$, que he a parte que ſe deve tomar do ouro de 17 quilates.

Quando ſe haõ-de ligar mais do que duas eſpecies de diverſo valor, primeiramente ſe ligaráõ pela regra directa todas as que forem de maior valor que o compoſto que ſe pertende fazer, tomando de cada huma dellas arbitrariamente a porçaõ que melhor parecer, e ſe buſcará o preço deſte compoſto. O meſmo ſe praticará com todas as eſpecies de menor valor que o intermedio dado. E deſte modo ficaraõ as eſpecies reduzidas a duas, huma de valor maior, e outra de menor que o propoſto, as quais ſe ligaráõ como no caſo precedente, e achando-ſe a porçaõ que de cada huma ſe deve tomar, tambem conſtaráõ as partes dos ſimplices, de que arbitrariamente as compuzemos.

Exemplo.

DAõ-ſe quatro qualidades de vinho, o primeiro dos quais vale a 120 reis a medida, o ſegundo a 90, o terceiro a 60, e o quarto a 50, e delle ſe quer fazer huma miſtura que valha a 70 reis a medida.

Primeiramente miſturaremos os dous de maior valor que o propoſto, tomando de cada hum as partes que melhor nos parecer, v. gr. duas medidas do que vale a 120, e tres do que vale a 90, e acharemos que o todo aſſim compoſto valerá a razaõ de 102 a medida. Depois ſupporemos tambem

bem miſturados os outros dous, tomando igualmente de cada hum as partes que nos parecer, v. gr. duas partes do que vale a 60, e tres do que vale a 50, e acharemos que o preço do miſto ſerá a 54. Aſſim teremos duas qualidades de vinho, hum que vale a 102, e outro que vale a 54, para ſerem miſturados de ſorte que o compoſto valha a 70. E praticando como no exemplo precedente acharemos, que do primeiro deveremos tomar huma porçaõ como $\frac{1}{3}$, e do ſegundo como $\frac{2}{3}$, ou do primeiro como 1, e do ſegundo como 2. Porem ambos elles ſaõ compoſtos de outros dous, cujas partes fizemos entrar na razaõ de 2 e 3; logo as partes dos quatro vinhos ſeráõ como 2, 3, 4, 6; iſto he, por cada duas medidas do primeiro tomaremos 3 do ſegundo, 4 do terceiro, e 6 do quarto.

Eſta queſtaõ ſe póde reſolver de muitas maneiras, conforme as partes qua arbitrariamente ſe tomarem para formar os dous compoſtos parciais, que finalmente ſe haõ-de ligar.

Outras regras relativas ás Proporções.

201 MUitas outras Regras ſe encontraõ nos livros de Arithmetica, as quais ſe reduzem á pratica da Regra de tres, e ſendo bem entendida a natureza das queſtões naõ podem embaraçar a quem ſouber o que até agora temos dito.

202 Deſte genero he a *Regra dos juros*, na qual ſe buſca o intereſſe de qualquer quantia por

qualquer tempo, ſuppoſta a razaõ do que vence 100 cada anno.

Pergunta-ſe v. gr. o juro que vence a quantia de 449200 reis em 7 annos e 3 mezes a razaõ de 5 por 100 em cada anno. Como 100 vencem de juro 5 em hum anno, em 7 annos e $\frac{1}{4}$ venceráõ $36\frac{1}{4}$, e por conſeguinte teremos a proporçaõ: Como 100 para $36\frac{1}{4}$, aſſim o capital 449200 para o ſeu juro, que ſe achará ſer 162835.

Dando-ſe a quantia 612035 ſoma do capital e juros vencidos em 7 annos e 3 mezes, a 5 por 100, ſe quizermos ſaber o capital, reflectiremos, que vencendo 100 no dito tempo $36\frac{1}{4}$, deveremos ter a proporçaõ: Como $136\frac{1}{4}$ para 100, aſſim a quantia dada 612035 para o capital que ſe pede, 449200.

Pergunta-ſe o capital, que em 7 annos e 3 mezes produza 162835 a razaõ de 5 por 100, teremos: Como $36\frac{1}{4}$ para 100, aſſim o juro dado 162835 para o capital que ſe pergunta, 449200.

Pergunta-ſe o tempo, em que o capital 449200 ha-de produzir o juro 162835, a 5 por 100, teremos: Como 449200 para 162835, aſſim 100 para hum quarto, que ſerá $36\frac{1}{4}$. Eſte he o juro de 100 dentro do tempo pedido, e como o juro annual de 100 he 5, dividindo $36\frac{1}{4}$ por 5, o

 quo-

quociente $7\frac{1}{4}$ moſtrará o dito tempo, iſto he, 7 annos e 3 mezes.

Perguntando-ſe em fim a que razaõ por 100 ſe deve pôr o capital 449200 para dar 162835 em 7 annos e tres mezes, teremos: Como 449200 para 162835, aſſim 100 para $36\frac{1}{4}$; e dividindo eſte numero pelo tempo $7\frac{1}{4}$, o quociente 5 dará o juro annual de 100, que ſe pergunta.

Pelo que reſpeita ao *juro dos juros*, e outras queſtões mais complicadas ſobre intereſſes e uſuras, na Algebra ſe reſolveraõ com mais facilidade.

203 Nos *déſcontos*, e *abatimentos* ſe diſcorre do meſmo modo que nos juros, como ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Comprou certa peſſoa hum campo por 4536 *libras* fiado por 10 annos; mas reſolvendo-ſe logo a pagar de contado, offerece o pagamento ao vendedor abatendo-lhe na razaõ de $4\frac{1}{2}$ por 100. Pergunta-ſe, quanto deve pagar?

He manifeſto, que neſte caſo naõ ſe buſca outra couſa ſenaõ o capital que com o ſeu juro de $4\frac{1}{2}$ por 100 em 10 annos faça 4536^{lb}. Ora como 100 produzem $4\frac{1}{2}$ por anno, em dés annos produziráõ 45; e aſſim teremos: Como 145 para 100, aſſim 4536^{lb} para a quantia que ſe pede; a qual he $3128^{lb}\ 5^{ſ}\ 6^{d}\frac{6}{29}$.

Ten-

Tendo huma pessoa passado a hum mercador hum credito de 2854^{lb} para pagar no termo de hum anno, e querendo remi-lo passados 7 mezes, com a condiçaõ de lhe fazer o credor hum abatimento na razaõ de 6 por 100; pergunta-se quanto deve pagar?

Como 100 pela convençaõ vencem 6 em hum anno, em 7 mezes deveráõ vencer $3\frac{1}{2}$. Assim o que o devedor havia de pagar do principio como 100, no fim do anno o devia pagar como 106, e passados 7 mezes sómente o haverá de pagar como $103\frac{1}{2}$. Por conseguinte teremos: Como 106 para $103\frac{1}{2}$, assim 2854^{lb} para a quantia que se pergunta, a qual acharemos ser 2786^{lb} 13^{s} $9^{d}\ \frac{15}{53}$.

Deste modo usando da regra de tres se resolvem outras muitas questões pertencentes aos contratos mercantîs, nas quais, para quem tem entendido os exemplos precedentes, naõ he necessario entrar com mais individuaçaõ.

Das Progressões Arithmeticas.

204 A *Progressaõ Arithmetica* he huma serie de termos, que de tal forma se vaõ seguindo huns aos outros, que cada hum excede ao precedente, ou he excedido delle, em huma quantidade constante. Por exemplo esta serie

$$\div\ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25\ \&c.$$

he

he huma Progressaõ Arithmetica, porque cada termo tem de excesso sobre o que lhe fica atrás a mesma quantidade 3. Esta progressaõ se denota com o mesmo signal $\div$, que se usa na Proporçaõ Arithmetica contínua (n. 174), porque na realidade naõ he mais do que a mesma Proporçaõ continuada álem do terceiro termo.

A Progressaõ he *crescente*, *ascendente*, ou *divergente*, quando os termos saõ cada vez maiores; *decrescente*, *descendente*, ou *convergente*, quando saõ cada vez menores. Como ambas tem as mesmas propriedades, somente com a differença de que o *somar* em huma deve ser *diminuir* na outra, naõ trataremos senaõ da ascendente: e o que della dissermos se applicará sem difficuldade á descendente.

205 He claro pois pela mesma noçaõ da Progressaõ, que com o primeiro termo e com a differença commum, a qual tambem se chama *razaõ* da Progressaõ, se pódem formar todos os mais, pela addiçaõ successiva da mesma *razaõ*. Porque o segundo se forma do primeiro somado com a razaõ; o terceiro he a soma do segundo e da mesma razaõ, ou do primeiro e do duplo da razaõ; o quarto contem o terceiro e mais a razaõ, ou o primeiro e mais o triplo da mesma razaõ; e assim por diante.

206 Donde se segue, em geral, *Que qualquer termo de huma progressaõ Arithmetica he igual á soma do primeiro, e da razaõ tomada tantas vezes, quantos saõ os termos precedentes.*

207 Por conseguinte quando o primeiro termo for o, qualquer dos outros será igual á razaõ multiplicada pelo numero dos termos, que ficarem antes delle.

208

208 Por meio deſte principio podemos achar immediatamente qualquer termo de huma Progreſſaõ Arithmetica, ſem que nos ſeja para iſſo neceſſario calcular os precedentes.

Pergunta-ſe v. gr. qual ha-de ſer o centeſimo termo neſta Progreſſaõ $\div 4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19$ &c. Como o termo que ſe pede he o centeſimo, ſerá precedido de 99 termos. Conſtará pois do primeiro 4, e da razaõ 5 multiplicada por 99; e ſerá por conſeguinte 499.

209 Do meſmo principio ſe entenderá o methodo de meter entre dous numeros dados qualquer numero de meios arithmeticos, iſto he, de aſſignar huma Progreſſaõ Arithmetica, dados os extremos, e o numero dos termos. Iſto ſe executa, *diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o reſto pelo numero de todos os termos menos hum, ou pelo numero dos meios e mais hum.* O quociente ſerá a razaõ da Progreſſaõ, a qual por conſeguinte ſe formará como aſſima diſſemos (n. 205).

Se quizermos, por exemplo, meter oito meios arithmeticos entre 4 e 11, diminuiremos 4 de 11, e dividiremos o reſto 7 pelo numero dos meios e mais hum. O quociente $\frac{7}{9}$ ſerá a razaõ da Progreſſaõ, a qual ſerá por conſeguinte $\div 4 \cdot 4\frac{7}{9} \cdot 5\frac{5}{9} \cdot 6\frac{3}{9} \cdot 7\frac{1}{9} \cdot 7\frac{8}{9} \cdot 8\frac{6}{9} \cdot 9 \cdot \frac{4}{9} \cdot 10\frac{2}{9} \cdot 11.$

Do meſmo modo, ſe entre 0 e 1 quizermos meter nove meios arithmeticos, dividiremos a differença 1 dos extremos dados por $9 + 1$, ou por

por 10, e teremos a razaõ $\frac{1}{10}$, ou 0,1, e por conseguinte a progressaõ que buscamos será $\div$ 0 . 0,1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

210 Donde se vê, que por menor e menor que seja a differença de dous numeros, sempre entre elles se pódem meter quantos meios arithmeticos quizermos.

O que temos dito das Progressões Arithmeticas he o que basta para a intelligencia dos Logarithmos, de que abaixo havemos de tratar. Pelo que respeita ás mais propriedades das mesmas Progressões, em outro lugar as mostraremos com mais commodidade.

Das Progressões Geometricas.

211 A *Progressaõ Geometrica* he huma serie de termos, cada hum dos quais contem o seu antecedente, ou nelle he contido, igual numero de vezes. Esta serie v. g.

$$\dot{\div}\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384\ \&c.$$

he huma Progressaõ Geometrica, porque cada termo contem o seu antecedente o mesmo numero de vezes, isto he, 2. Este numero de vezes, que cada termo contem, ou he contido no antecedente, chama-se *denominador*, ou *razaõ* da Progressaõ. E este se denota com o signal $\dot{\div}$, como a Proporçaõ Geometrica contínua, porque he a mesma Proporçaõ continuada a maior numero de termos.

A Progressaõ Geometrica he *crescente*, *ascendente* ou *divergente*, quando os termos vaõ sendo cada vez maiores: *decrescente*, *descendente*, ou

con-

convergente, quando ſaõ cada vez menores. Naõ he preciſo tratar de ambas ſeparadamente, porque tem as meſmas propriedades, mudando-ſe ſómente a multiplicaçaõ em diviſaõ, e reciprocamente, alem de que mudada a ordem dos termos huma ſe converte na outra.

212 Da meſma noçaõ da Progreſſaõ Geometrica ſe ſegue, que com a razaõ e o primeiro termo ſe podem formar todos os outros. Porque o ſegundo reſulta do primeiro multiplicado pela razaõ, o terceiro do ſegundo multiplicado tambem pela razaõ, ou do primeiro multiplicado pelo quadrado da razaõ; o quarto do terceiro multiplicado igualmente pela razaõ, ou do primeiro multiplicado pelo cubo da razaõ &c.

Deſte modo na Progreſſaõ aſſima figurada o ſegundo termo 6 reſulta do primeiro 3 multiplicado pela razaõ 2; o terceiro 12 do primeiro 3 multiplicado pelo quadrado da razaõ 4; o quarto 24 do primeiro 3 multiplicado pelo cubo da razaõ 8 &c.

213 Donde ſe ſegue, em geral, *Que qualquer termo de huma Progreſſaõ Geometrica ſe fórma do primeiro multiplicado pela razaõ elevada a huma potencia que tem por expoente o numero dos termos precedentes.*

Pelo que ſe o primeiro termo for 1, qualquer outro termo ſerá igual á potencia da razaõ que correſponder ao numero dos termos antecedentes: porque a multiplicaçaõ pela unidade naõ augmenta o producto.

214 Daqui ſe deduz o methodo de achar qualquer termo de huma Progreſſaõ Geometrica, ſem calcular os precedentes, o que he muitas vezes de grande utilidade.

Pe-

Pede-ſe v. g. o termo duodecimo deſta Progreſſaõ ∸ 3 : 6 : 12 : 24 &c. Como antes do duodecimo ha onze termos, ſerá o que buſcamos igual ao producto do primeiro 3 multiplicado pela undecima potencia da razaõ 2. Eſta potencia ſe achará pela multiplicaçaõ contínua do numero 2, até elle ſer onze vezes factor no producto. Mas para abbreviar a operaçaõ podemos elevar 2 ao cubo 8, e eſte ao ſeu cubo 512, que ſerá a potencia nona de 2; e multiplicando 512 pelo quadrado 4, teremos 2048 potencia undecima do meſmo 2. Finalmente multiplicando a potencia achada pelo primeiro termo 3, ſerá o termo duodecimo que buſcamos 6144.

215 Do meſmo principio ſe deduz o methodo de meter qualquer numero de meios proporcionais entre dous numeros dados. Iſto ſe faz, *dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do gráo correſpondente ao numero dos meios augmentado de huma unidade.* Eſta raiz ſerá a razaõ, com a qual ſe formaráõ os termos pedidos (n. 212).

Porque o maior dos numeros dados, que ſe póde tomar como ultimo termo da Progreſſaõ, ſerá igual ao producto do menor, que he o primeiro termo, multiplicado pela razaõ elevada á potencia correſpondente ao numero dos termos menos o ultimo, ou ao numero dos meios e mais hum (n. 213). Logo dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, o quociente ſerá a razaõ elevada ao gráo correſpondente ao numero dos meios augmentado de huma unidade (n. 74); aſſim extrahindo do dito quociente a raiz do meſmo gráo, teremos a razaõ da Progreſſaõ.

Pe-

Pede-ſe v. g. que entre 2 e 2048 metamos nove meios geometricos. Primeiramente dividiremos 2048 por 2, e teremos o quociente 1024. Depois buſcaremos a raiz decima de 1024 (pag. 168), que acharemos ſer 2; eſta ſerá a razaõ da Progreſſaõ, com a qual acharemos os termos pedidos, e teremos ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Se quizermos meter quatro meios geometricos entre 6 e 48, dividindo o ultimo termo 48 pelo primeiro 6 teriamos o quociente 8, do qual haveriamos de extrahir a raiz quinta. Como porem o numero 8 naõ tem raiz quinta exacta, he ſinal de que entre 6 e 48 naõ ſe podem aſſignar por numeros exactamente quatro meios geometricos; mas poderáõ aſſignar-ſe mais e mais proximos á exactidaõ, extrahindo a dita raiz por approximaçaõ até onde quizermos. Aſſim acharemos, que a raiz quinta de 8 he 1,5157167 proximamente (pag. 151), e baſtando calcular os meios pedidos até quatro letras decimais, teremos ∺ 6 : 9,0943 : 13,7844 : 20,8932 : 31,6682 : 48.

Donde podemos concluir, que entre dous numeros ſe podem ſempre determinar tantos meios geometricos quantos quizermos, ou exactos, ou ao menos approximados até onde for neceſſario. E iſto he o que neſte lugar baſta ſaber das Progreſsões.

Dos

Dos Logarithmos.

216 CHamaõ-ſe *Logarithmos* os numeros de huma Progreſſaõ Arithmetica, em quanto ſe comparaõ termo por termo a outros tantos numeros de huma Progreſſaõ Geometrica. Poſtas v. g. eſtas duas Progreſsões

÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 &c.

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c.

cada termo da primeira he Logarithmo do numero correſpondente, que na ſegunda occupa o meſmo lugar; aſſim 3 he Logarithmo de 2; 5 de 4; 7 de 8 &c.

217 Donde ſe ſegue, que o meſmo numero póde ter infinitos Logarithmos. Porque á meſma Progreſſaõ Geometrica, em que elle ſe acha, podemos fazer correſponder infinitas Progreſsões Arithmeticas diverſas.

Como porem attendemos preſentemente ao uſo actual dos Logarithmos, naõ nos demoraremos em contemplar as differentes Progreſsões Arithmeticas e Geometricas, que ſe podiaõ combinar entre ſi, mas paſſaremos logo ás que ſe eſcolheraõ para formar as Taboas Logarithmicas de que uſamos.

218 Eſcolheo-ſe pois a Progreſſaõ Arithmetica dos numeros naturais, e a Geometrica que procede na razaõ decupla, as quáis pareceraõ mais convenientes á lei da numeraçaõ actual. Aſſim teremos por fundamento dos Logarithmos ordinarios as duas Progreſsões ſeguintes

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 &c.

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 &c.

219 Pelo que neste systema de Logarithmos será sempre muito facil saber o Logarithmo de todos os numeros, que se exprimirem pela unidade seguida de qualquer numero de cifras, pois sempre o Logarithmo constará de tantas unidades, quantas forem as cifras.

Em quanto aos numeros, que mediaõ entre os termos da Progressaõ decupla, pelos principios até agora dados naõ podemos explicar o methodo, pelo qual foraõ calculados os seus Logarithmos. Mas apontaremos o methodo que se podia seguir, se naõ houvesse outros meios, senaõ os que a Arithmetica nos offerece.

220 Para acharmos pois o Logarithmo de qualquer numero v. gr. 3, he claro pela mesma noçaõ dos Logarithmos, que elle deve achar-se na Progressaõ fundamental $\div\!\div$ 1; 10; 100 &c. Ora metendo entre 1 e 10 hum grande numero de meios geometricos (n. 215) succederá necessariamente de duas cousas huma, ou que algum delles coincidirá justamente com o numero 3, ou ao menos que hum será proximamente menor e o consecutivo proximamente maior que 3, sendo a differença tanto menor, quanto o numero dos meios for maior; de sorte que augmentando quanto for necessario o numero dos meios, hum delles se poderá finalmente tomar pelo mesmo numero 3.

Entaõ metendo entre o e 1 tantos meios arithmeticos, quantos geometricos se calcularaõ entre 1 e 10, o termo desta Progressaõ, que corresponder ao lugar do numero 3 na outra Progressaõ, ou do numero summamente proximo a 3, será o Logarithmo delle; e assim dos mais.

221 Affim deveremos imaginar ; Que tendo-se metido 10000000 meios arithmeticos entre o e 1 , entre 1 e 2 , entre 2 e 3 &c. , se meteraõ outros tantos geometricos entre 1 e 10, entre 10 e 100, entre 100 e 1000 &c.; Que ordenando termo por termo estas Progressões , se buscaraõ na Geometrica os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c., ou os termos proximamente iguais a elles, e na Arithmetica se notaráõ os termos , que lhes correspondiaõ no mesmo lugar , e eraõ por conseguinte os seus Logarithmos ; E que finalmente transportando a huma columna vertical , como na Taboa seguinte , os numeros 1 , 2 , 3 , 4 , 5 &c. , ao lado direito se assentaráõ os seus Logarithmos. A isto se reduz a formaçaõ das Taboas Logarithmicas.

TA-

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
0	Inf.negat.	33	1,518514	66	1,819544
1	0,000000	34	1,531479	67	1,826075
2	0,301030	35	1,544068	68	1,832509
3	0,477121	36	1,556303	69	1,838849
4	0,602060	37	1,568202	70	1,845098
5	0,698970	38	1,579784	71	1,851258
6	0,778151	39	1,591065	72	1,857332
7	0,845098	40	1,602060	73	1,863323
8	0,903090	41	1,612784	74	1,869232
9	0,954243	42	1,623249	75	1,875061
10	1,000000	43	1,633468	76	1,880814
11	1,041393	44	1,643453	77	1,886491
12	1,079181	45	1,653213	78	1,892095
13	1,113943	46	1,662758	79	1,897627
14	1,146128	47	1,672008	80	1,903090
15	1,176091	48	1,681241	81	1,908485
16	1,204120	49	1,690196	82	1,913814
17	1,230449	50	1,698970	83	1,919078
18	1,255273	51	1,707570	84	1,924279
19	1,278754	52	1,716003	85	1,929419
20	1,301030	53	1,724276	86	1,934498
21	1,322219	54	1,732394	87	1,939519
22	1,342423	55	1,740363	88	1,944483
23	1,361728	56	1,748188	89	1,949390
24	1,380211	57	1,755875	90	1,954243
25	1,397940	58	1,763428	91	1,959041
26	1,414973	59	1,770852	92	1,963788
27	1,431364	60	1,778151	93	1,968483
28	1,447158	61	1,785330	94	1,973128
29	1,462398	62	1,792392	95	1,977724
30	1,477121	63	1,799341	96	1,982271
31	1,491362	64	1,806180	97	1,986772
32	1,505150	65	1,812913	98	1,991226

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
99	1,995635	133	2,123859	167	2,222716
100	2,000000	134	2,127105	168	2,225309
101	2,004321	135	2,130334	169	2,227887
102	2,008600	136	2,133539	170	2,230449
103	2,012837	137	2,136721	171	2,232996
104	2,017033	138	2,130879	172	2,235528
105	2,021189	139	2,143015	173	2,238046
106	2,025306	140	2,146128	174	2,240549
107	2,029384	141	2,149219	175	2,243038
108	2,033424	142	2,152288	176	2,245513
109	2,037426	143	2,155336	177	2,247973
110	2,041393	144	2,158362	178	2,250420
111	2,045323	145	2,161368	179	2,252853
112	2,049218	146	2,164353	180	2,255273
113	2,053078	147	2,167317	181	2,257679
114	2,056905	148	2,170262	182	2,260071
115	2,060698	149	2,173186	183	2,262451
116	2,064458	150	2,176091	184	2,264818
117	2,068186	151	2,178977	185	2,267172
118	2,071882	152	2,181844	186	2,269513
119	2,075547	153	2,184691	187	2,271842
120	2,079181	154	2,187521	188	2,274158
121	2,082785	155	2,190332	189	2,276462
122	2,086360	156	2,193125	190	2,278754
123	2,089905	157	2,195900	191	2,281033
124	2,093422	158	2,198657	192	2,283301
125	2,096910	159	2,201397	193	2,285557
126	2,100371	160	2,204120	194	2,287802
127	2,103804	161	2,206826	195	2,290035
128	2,107210	162	2,209515	196	2,292256
129	2,110590	163	2,212188	197	2,294466
130	2,113943	164	2,214844	198	2,296665
131	2,127271	165	2,217484	199	2,298853
132	2,120574	166	2,220108	200	2.301030

222 A primeira letra de cada Logarithmo á efquerda chama-fe *Characteriftica*, porque por ella fe conhece a que década pertence o numero correfpondente ao mefmo Logarithmo. Se hum Logarithmo tiver v. gr. a characteriftica 3, he final que o feu numero he de *milhares*; porque fendo 3 Logarithmo de 1000, e 4 Logarithmo de 10000, todos os numeros comprehendidos entre 1000 e 10000 teraõ por Logarithmo 3 com huma fracçaõ; e por confeguinte ferá 3 a characteriftica, e as letras feguintes reprefentaráõ a fracçaõ em partes decimais. Em huma palavra: *O numero terá tantas letras e mais huma, quantas forem as unidades na characteriftica do feu Logarithmo.*

Os Logarithmos da pequena Taboa, que affima ajuntamos para exemplo, tem depois da characteriftica feis letras de dizima, e nas Taboas ordinarias tem fete. Mas efta differença naõ prejudica aos ufos, que delles havemos de fazer em alguns dos exemplos, que abaixo moftraremos.

Propriedades dos Logarithmos.

223 COmo naõ tratamos aqui fenaõ dos Logarithmos ordinarios, as propriedades, que delles havemos de moftrar, devem principalmente deduzir-fe das Progrefsões Geometricas, que principiaõ por 1; e das Arithmeticas, que principiaõ por 0.

Tomem-fe pois quaisquer duas Pregrefsões com eftas circunftancias, por exemplo as duas feguintes.

$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.
$\because$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.

Pela

Pela natureza e correſpondencia deſtas Progreſsões he manifeſto, que qualquer termo da primeira conſta da razaõ tomada tantas vezes, quantas a razaõ da ſegunda entra por factor no termo correſpondente. Porque a razaõ da Progreſſaõ Arithmetica entra tantas vezes, e a da Geometrica he tantas vezes factor em qualquer termo, quantos ſaõ os termos precedentes (n. 207, 212); porem os termos correſpondentes de ambas as Progreſsões ſaõ precedidos de igual numero de termos: logo, &c.

Aſſim v. gr. no termo 28 da primeira a razaõ 4 ſe contem ſete vezes, e outras tantas a razaõ 3 da ſegunda he factor no termo correſpondente 2187; e aſſim nos mais.

224 Logo, *Somando dous quaisquer termos da Progreſſaõ Arithmetica, e multiplicando os ſeus correſpondentes na Geometrica, o producto deſtes e a ſoma daquelles ſeraõ termos correſpondentes nas meſmas Progreſsões.*

Porque a ſoma conterá a razaõ da Progreſſaõ Arithmetica tantas vezes, quantas a contem juntamente os termos ſomados; e o producto terá a razaõ da Progreſſaõ Geometrica tantas vezes por factor, quantas ella o he nos termos multiplicados ambos juntos. Porem cada termo da Progreſſaõ Arithmetica contem a razaõ tantas vezes, quantas a razaõ da Geometrica he factor no termo correſpondente. Logo a ſoma conterá tantas vezes a razaõ Arithmetica, quantas o producto terá por factor a razaõ Geometrica; e conſeguintemente ſeráõ termos correſpondentes nas ditas Progreſsões.

225 Somando pois dous termos quaisquer da

Progressaõ Arithmetica, conheceremos o producto dos termos que lhes correspondem na Geometrica, se para isso forem continuadas as mesmas Progresśões quanto he necessario.

Somando v. gr. os termos 8 e 24, que correspondem a 9 e 729, teremos a soma 32, a qual corresponde na Progressaõ Geometrica ao numero 6561; e este será o producto de 729 por 9.

226 Por conseguinte, sendo os numeros naturais 1, 2, 3 &c na Taboa Logarithmica tirados de huma Progressaõ Geometrica que principia por 1, e os seus Logarithmos sendo os termos que lhes correspondem em huma Progressaõ Arithmetica que começa por o, he manifesto, *que somando os Logarithmos de quaisquer numeros teremos o Logarithmo do seu producto.* Deste principio resultaõ os usos dos Logarithmos, que agora mostraremos.

Uso dos Logarithmos.

227 PAra multiplicar por Logarithmos he pois necessario *somar os Logarithmos dos factores, e buscando a soma entre os Logarithmos das Taboas, o numero que lhe competir será o producto.*

Querendo v. gr. multiplicar 13 por 14, buscaremos na Taboa os Logarithmos destes numeros, a saber.

Log. de 13 - - - 1,113943
Log. de 14 - - - 1,146128

E a soma - - - 2,260071 será o Log. do producto, que acharemos ser 182, numero que na Taboa compete ao dito Logarithmo.

228 Logo para quadrar hum numero, naõ he

he preciſo mais que duplicar o ſeu Logarithmo. Porque para quadrar deve o numero multiplicar-ſe por ſi meſmo; e por conſeguinte deve tomar-ſe duas vezes, ou duplicar-ſe o ſeu Logarithmo. Pela meſma razaõ triplicando o Log. de hum numero teremos o Log. do ſeu cubo.

229 Em geral: *Para elevar hum numero a qualquer potencia, tomar-ſe-ha o ſeu Log. tantas vezes quantas o numero entra por factor neſſa potencia, ou multiplicar-ſe-ha o Logarithmo pelo expoente della.*

Querendo v. gr. formar a potencia 7ª de 2, buſcaremos o ſeu Logarithmo 0,301030, e multiplicando-o por 7 teremos 2,107210; Logarithmo, que na Taboa correſponde a 128, e eſta he a potencia 7ª de 2.

230 Logo reciprocamente: *Para extrahir a raiz quadrada, cubica, quarta, quinta &c. de qualquer numero, dividiremos o ſeu Log. por* 2, 3, 4, 5 *&c.* ou, geralmente, *pelo expoente da raiz; e o quociente ſerá o Logarithmo della.*

Procurando v. gr. a raiz quadrada de 144, tomaremos na Taboa o ſeu Log. 2,158362, e dividindo-o por 2 teremos 1,079181, que na meſma Taboa achamos ſer Log. de 12; e por conſeguinte 12 ſerá a raiz quadrada de 144.

Se buſcarmos a Raiz 7ª de 128, a Taboa nos dará o Log. deſte numero, que he 2,107210, e dividindo-o por 7, teremos 0,301030; Logarithmo que na Taboa compete ao numero 2; e por iſſo ſerá 2 a raiz 7ª de 128; e aſſim das mais.

231 A Regra da Diviſaõ por Logarithmos ſe pratica, *diminuindo o Log. do diviſor do Log. do dividendo; e o reſto ſerá o Log. do quociente.*

Querendo v. gr. dividir 187 por 17, buſcaremos os ſeus Logarithmos, e teremos . . . .

Log. do divid. 187	- - -	2,271842
Log. do divis. 17	- - -	1,230449

E o resto - - - - - - - 1,041393 será o Log. do quociente, que consultando a Taboa acharemos ser 11.

Quando o Log. do quociente se naõ acha exactamente na Taboa, mas cahe entre dous Log. della, he signal que a divisaõ naõ se póde fazer sem resto; mais abaixo diremos o que se deve fazer neste caso.

A razaõ desta Regra he, porque sendo o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente (n. 74), deve o Log. do dividendo formar-se da soma dos Log. do divisor e do quociente (n. 227); e conseguintemente tirando o Log. do divisor do Log. do dividendo, o resto será o Log. do quociente (n. 39).

232 Pelo que temos visto se vê, que a Regra de tres se ha-de praticar por Logarithmos, *somando os Log. do 2º e 3º termo, diminuindo o Log. do 1º; e o resto será o Log. do 4º*; o qual por conseguinte se achará por meio das Taboas.

Buscando-se v. gr. o quarto proporcional aos termos 7 : 12 :: 105 :, será a operaçaõ desta maneira:

Log. do 3º 105	- - -	2,021189
Log. do 2º 12	- - -	1,079181
Soma	- - - - - -	3,100370
Log. do 1º 7	- - -	0,845098
Resto	- - - - - -	2,255272, ou

Log. do num. 180, que he o quarto pedido.

233 Deve notar-se, que se o Logarithmo, que resulta de alguma operaçaõ, coincidir com algum Log. da Taboa em todas as letras, exceptuando a ultima á direita, naõ se deverá fazer caso desta differença. Porque sendo os Log. dos numeros intermedios da Progressaõ décupla approximados sómente até a metade de huma unidade da ultima casa da dizima, póde succeder, que pela addiçaõ de muitos Log., ajuntando-se os pequenos defeitos da ultima letra de cadahum, influaõ na ultima letra do resultado o defeito ou excesso de huma ou duas unidades; e ainda de mais, conforme o numero dos Log. de que elle resultar. Na operaçaõ precedente temos hum exemplo desta advertencia.

Dos Numeros, cujos Logarithmos se naõ achaõ nas Taboas.

234 COmo as Taboas ordinarias dos Logarithmos foraõ ordenadas segundo a serie natural dos numeros inteiros, he claro que nellas immediatamente se naõ achaõ os Logarithmos dos numeros fraccionarios. O mesmo se entenderá das raizes dos numeros, que naõ saõ potencias perfeitas &c.

Querendo-se pois o Log. de hum numero inteiro acompanhado de fracçaõ, reduzir-se-há tudo a quebrado (n. 86): e diminuindo entaõ o Log. do denominador do Log. do numerador, o resto será o Log. que se procura.

Se buscarmos v. g. o Log. de $8\frac{3}{11}$, reduzi-

re-

remos primeiro este numero a $\frac{91}{11}$, e depois tiraremos 1,041393 (Log. do denominador 11) de 1,959041 (Log. do numerador 91). O resto 0,917648 será o Log. do numero proposto 8 $\frac{3}{11}$; porque 8 $\frac{3}{11}$, ou $\frac{91}{11}$, he o mesmo que 91 dividido por 11 (n. 96).

235 Pela mesma razaõ se mostra, que para haver o Log. de huma fracçaõ propria se deve diminuir o Log. do denominador do Log. do numerador. Porem, como esta diminuiçaõ naõ póde ter lugar, por ser o Log. do denominador maior que o do numerador, tiraremos o Log. deste do Log. daquelle; e o resto será o Log. que buscamos, sendo porem precedido do signal —, para se mostrar que a diminuiçaõ se fez de hum modo opposto ao que devia ser. Assim acharemos que o Log. de $\frac{11}{91}$ he — 0,917648 &c.

236 O referido signal, assim como denota que a subtracçaõ se fez de hum modo opposto ao que convinha, tambem serve para trazer á lembrança, que a fim de compensar isso mesmo se devem no calculo applicar os ditos Logarithmos por huma regra opposta á que temos estabellecido para os outros; isto he: *Que havendo de multiplicar por huma fracçaõ o Log. desta se deve diminuir; e que havendo de dividir, se deve somar* (*).

SS

(*) Os numeros, que saõ precedidos do signal —, chamaõ-se *negativos*. Na Algebra daremos huma idea mais clara delles. Entretanto devemos prevenir, que naõ-se haõ-de conceber, como numeros menores que o; porque abaixo do *nada* naõ póde haver cousa alguma

55 Em geral: *Se o Log. dos factores forem todos poſitivos, ou todos negativos, a ſoma delles com o meſmo ſignal; ſe huns poſitivos, outros negativos, a differença entre as duas ſomas de huns e dos outros com o ſignal da maior, dará o Log. do producto.* E em quanto á diviſaõ: *Muda-ſe o ſignal do diviſor, e pratica-ſe a meſma regra da multiplicaçaõ.*

Alguns exprimem os Log. das fracções de outra maneira, fazendo ſómente a characteriſtica negativa, e conſervando a dizima ſempre poſitiva. Eſta fórma de Logarithmos reſulta, ſubtrahindo effectivamente o Log. do denominador do Log. do numerador da direita para a eſquerda, e em chegando ás characteriſticas, toma-ſe por characteriſtica negativa o que ſeria neceſſario ajuntar á characteriſtica do Log. do numerador para que a do Log. do denominador ſe pudeſſe della ſubtrahir ſem reſto.

Por exemplo, para acharmos o Log. de $\frac{2}{151}$, de 0,301030 (Log. do numerador 2) deveremos tirar 2,178977 (Log. do denominador 151). Para iſto ſerá neceſſario ajuntar 2 á characteriſtica do Log. do numerador, que ficará 2,301030, e ſerá o reſto 0,122053; entaõ, pondo de menos 2 na ſua characteriſtica, por termos poſto outro tanto de mais no Log. do numerador, ſerá o Log. que buſcamos — 2,122053, entendendo-ſe porem que o ſignal negativo ſómente affecta a characteriſtica. Mas para naõ haver equivocaçaõ com os outros Log. totalmente negativos, coſtumaõ notar-ſe os de que agora fallamos deſte modo $\bar{2}$,122053, ou tambem aſſim ⊣ 2,122053.

A razaõ diſto he, porque tomando o Log. 2,301030 em lugar de 0,301030, o numero 2 que a eſte compete ſe multiplica realmente por 100. Logo tirando 2,178977 de 2,301030, o reſto 0,122053 ſerá o Log. de $\frac{200}{151}$. Para eſte quebrado ſe reduzir a $\frac{2}{151}$ he preciſo dividi-lo por 100, e por conſeguinte tirar 2 á characteriſtica do ſeu Logarithmo. Logo o Logarithmo de $\frac{2}{151}$ ſerá $-2+0{,}122053$ ou $\overline{2}{,}122053$.

Quando entrarem no calculo eſtes Logarithmos, obſervar-ſe-haõ as Regras aſſima dadas em quanto a ambas as partes delles. Na multiplicaçaõ ſempre ſe ſomaõ as letras decimais, porque ſaõ todas poſitivas; e ſe deſta ſoma paſſarem algumas unidades para a caſa das characteriſticas ajuntaõ-ſe com as poſitivas, e a differença entre as ſomas das negativas e poſitivas com o ſignal da maior ſerá a characteriſtica. Na diviſaõ ſempre ſe diminue o Log. do diviſor do Log. do dividendo em quanto á dizima; em quanto ás characteriſticas muda-ſe o ſignal do diviſor, e pratica-ſe a regra da multiplicaçaõ. Quando no diminuir da dizima for neceſſario pedir huma unidade á caſa da characteriſtica, e eſta for 0, ou negativa, deverá eſta ficar com huma unidade de menos, v. gr. ſendo 0 ficará $\overline{1}$, ſendo $\overline{1}$ ficará $\overline{2}$ &c.

Do meſmo modo: Quando ſe houver de multiplicar hum Log. deſtes, como na formaçaõ das potencias, multiplicaremos primeiro as letras decimais, e ſe dellas houverem de paſſar algumas

uni-

unidades para a caſa da characteriſtica, guarda-las-hemos para ſerem diminuidas do producto della. E quando ſe houver de dividir, como na extracçaõ das raizes, ſe a characteriſtica contiver exactamente o diviſor, a operaçaõ ſe fará do modo ordinario; e ſe naõ, ajuntar-ſe-haõ á characteriſtica tantas unidades negativas, quantas baſtarem para conter exactamente o diviſor; e para compenſar iſto, ſe ajuntaráõ outras tantas poſitivas em lugar de dezenas á primeira letra da dizima. Aſſim o Log. $\bar{2},873245$ ſendo multiplicado por 5 dá o producto $\bar{6},366225$; ſendo dividido por 7, o quociente $\bar{1},839035$.

Eſtes Log. reduzem-ſe aos totalmente negativos, tirando 1 á characteriſtica, e tomando em lugar das outras letras o ſeu complemento para 9, exceptuando a derradeira, da qual ſe tomará o complemento para 10. E reciprocamente, hum Log. inteiramente negativo ſe converterá na outra fórma, ajuntando 1 á ſua characteriſtica, e tomando o complemento das outras letras do modo que temos dito. Aſſim o Log. $\bar{2},374972$ ſe transforma em $-1,625028$, o Log. $\bar{1},587430$ em $-0,412570$, e reciprocamente. ſſ

237 Quando o numero paſſar os limites das Taboas (as quais pela maior parte chegaõ até 20000, ou ao menos até 10000) ſempre dellas podemos haver o Logarithmo, com tanto que o numero naõ ſeja de mais letras do que as decimais dos meſmos Logarithmos.

238 Para iſſo devemos trazer á lembrança, que ſe

ſe ajuntarmos 1, 2, 3 &c. unidades á characteriſtica de hum Log. o ſeu numero ſe entenderá multiplicado por 10, 100, 1000 &c. e ao contrario dividido, ſe tirarmos 1, 2, 3 &c., unidades á meſma characteriſtica; porque niſſo naõ fazemos outra couſa, ſenaõ ajuntar, ou tirar ao dito Log. o Log. de 10, ou de 100, ou de 1000 &c.

239 Iſto ſuppoſto, ſe v. gr. buſcarmos o Log. de 357859, delle cortaremos á direita tantas letras, quantas forem baſtantes, para que as que ficarem á eſquerda naõ excedaõ os limites das Taboas, iſto he, duas neſte caſo, e teremos o numero 3578,59 que he 100 vezes menor que o propoſto (n. 28). Depois buſcaremos o Log. de 3578 que he 3,5536403, e a differença entre eſte e o Log. proximamente ſeguinte de 3579, que he 1214. Entaõ diremos: Se 1, differença entre os numeros 3578 e 3579, dá a differença dos Log. 1214, a differença 0,59 entre os numeros 3578 e 3578,59 que differença dará nos ſeus Log.? Como temos a unidade por primeiro termo, baſta multiplicar o ſegundo pelo terceiro, e o producto 716,26, ou 716, deixando as partes decimais, he a differença que devemos ajuntar a 3,5536403 Logarithmo de 3578 para termos 3,5537119 Log. de 3578,59. E finalmente, como 3578,59 ſe deve multiplicar por 100 para fazer 357859, reſta ajuntarmos 2 á characteriſtica de ſeu Log. para termos 5,5537119 Log. do numero propoſto 357859.

Se as letras que ſe haõ-de cortar forem todas cifras, he claro, que buſcando nas Taboas o Log. do numero que ficar á eſquerda, naõ ſerá preciſo mais do que ajuntar-lhe á characteriſtica tantas unidades, quantas foraõ as cifras que ſe cortaraõ.

240 Quando o numero he ſeguido de dizima, buſca-ſe o Log. como ſe foſſe inteiro, ou immediatamente nas Taboas, ou pelo methodo precedente, quando exceda os limites, e da characteriſtica ſe tiraõ tantas unidades, quantas ſaõ as letras decimais. Querendo v. gr. o Log. de 3,27 buſcaremos na Taboa o de 327 que he 2,5145477, e tirando 2 á characteriſtica ficará 0,5145477 Log. de 3,27. Querendo o Log. de 35,7859 buſcaremos o de 357859 (n. 239), que he 5,5537119, e tirando 4 á characteriſtica teremos 1,5537119 Log. de 35,7859.

241 Em fim, ſe o numero conſtar ſómente de notas decimais, buſcaremos ſim o Log. delle como ſe foſſe inteiro, mas diminui-lo-hemos de tantas unidades, quantas forem as caſas da dizima, e o reſto com o ſignal — ſerá o Log. deſejado. Querendo v. gr. o Log. do numero 0,03, buſcaremos na Taboa o Log. de 3, que he 0,477121, e diminuindo-o de 2, teremos — 1,522879, Log. de 0,03.

¶¶ Se quizermos porem o Log. com a characteriſtica ſomente negativa, buſcaremos tambem o Log. das letras decimais, como ſe foſſem numero inteiro, e da characteriſtica tiraremos tantas unidades, quantas forem as caſas da meſma dizima. Aſſim acharemos, que $\overline{2}$,477121 he o Log. de 0,03; $\overline{3}$,514548 Log. de 0,00327, &c. ¶¶

Dos

Dos Logarithmos, cujos numeros se naõ achaõ nas Taboas.

242 COmo para fazermos as operações com mais facilidade substituimos em lugar dos numeros naturais os artificiais, que saõ os seus Logarithmos, assim tendo acabado o calculo he necessario voltar dos Logarithmos para os numeros. Raras vezes succederá, que o Log. resultante das operações corresponda a hum numero inteiro, que naõ exceda os limites das Taboas, como he necessario, para que o mesmo Log. se ache nellas. Assim he preciso, que tenhamos hum methodo para achar por meio das mesmas Taboas o numero correspondente a qualquer Log. proposto. O qual he desta maneira.

243 Tirem-se da characteristica tantas unidades, quantas forem bastantes, para que o Log. naõ exceda os limites das Taboas. Entaõ,

Se o Log. se achar nas Taboas, o numero que lhe corresponder, sendo augmentado de tantas cifras á direita, quantas unidades se houverem tirado da characteristica, será o numero que buscamos. Tirando v. gr. 3 unidades á characteristica do Log. 7,2273467, acharemos que nas Taboas corresponde a 16879; e assim 16879000 será o numero representado pelo Log. 7,2273467 (n. 238).

Reduzida porem a characteristica aos limites das Taboas, se o Log. proposto cahir entre dous Log. consecutivos dellas, praticar-se-ha deste modo: Supponhamos, que se pede o numero correspondente ao Log. 5,2432768. Tirando 2 unidades

á

á characteristica, o Log. 3,2432768 cahirá entre os Log. de 1750 e 1751, e por conseguinte o seu numero será 1750 com huma fracçaõ. Para acharmos esta, tomaremos a differença entre os Log. de 1750 e 1751, que he 2481, e a differença entre o Log. proposto e o Log. de 1750, que he 2388. Entaõ diremos: Se a differença dos Log. 2481 dá a differença dos numeros 1, a differença dos Log. 2388 que differença dará nos mesmos numeros? Como o segundo termo he sempre 1, dividiremos o terceiro pelo primeiro, e o quociente será o quarto, que neste exemplo acharemos 0,9625. Assim o Log. 3,2432768 corresponde ao numero 1750,9625, e conseguintemente o Log. 5,2432768 ao numero 175096,25 (n. 28, 238).

244 Quando a characteristica naõ excede os limites das Taboas, he claro, que naõ se lhe deve tirar unidade alguma; e por isso tendo achado o numero correspondente, naõ se lhe ajuntaraõ cifras algumas, nem se mudará o lugar da virgula.

245 He porem muito de advertir, que a proporçaõ assima praticada suppõe, que as differenças dos Log. saõ proporcionais ás differenças dos numeros correspondentes, como saõ com effeito proximamente, sendo os numeros grandes, mas de nenhuma sorte sendo pequenos. Por isso, quando o numero for menor que 1800 nas Taboas que chegaõ até 18000, ou menor que 1000 nas Taboas que naõ passaõ de 10000, ajuntaremos á characteristica as unidades que forem precisas, para buscarmos o numero na classe suprema das mesmas Taboas, no qual deveremos separar para a dizima tantas letras, quantas foraõ as unidades

que

que ajuntamos á characteriſtica ; e ſe quizermos mais exactidaõ, praticaremos a proporçaõ aſſima indicada (n. 243).

Por exemplo, buſcando-ſe o numero correſpondente ao Log. 0,5432725, pela inſpecçaõ da Taboa logo veremos, que cahe entre 3 e 4. Se ahi tomaſſemos as partes proporcionais, teriamos 3,529 &c., que ſe aparta muito da verdade. Porem ajuntando 3 unidades á characteriſtica, acharemos que o Log. 3,5432725 moſtra hum numero entre 3493 e 3494 ; pelo que baſtando-nos a terceira caſa da dizima, diremos que o numero correſpondente ao Log. 0,5432725 he 3,493. Se quizermos porem mais letras decimais, pelo methodo aſſima dado, acharemos que o Log. 3,5432725 correſponde ao numero 3493,594 (n. 143), e por conſeguinte o Log. 0,5432725 ao numero 3,493594 (n. 238).

Porem eſta approximaçaõ dos numeros tem ſeus limites. Porque ſendo, como aſſima diſſemos, exactos ſómente os Log. até huma meia unidade da ultima caſa decimal, he manifeſto, que as ſuas differenças participaõ deſte defeito. Por iſſo em chegando a ultima letra da differença dividida a influir ſobre o quociente, dahi por diante todas as letras delle ſeraõ faltas de exactidaõ, e por iſſo he eſcuſado continuar a diviſaõ. As Taboas ordinarias naõ alcançaõ ſeguramente ſenaõ até os numeros de ſete letras ; e iſto he o que baſta quaſi ſempre. Sendo preciſo mais, recorrer-ſe-ha a Taboas de mais letras, ou naõ ſe uſará de Logarithmos.

246 Quando o Log. for negativo, tirar-ſe-ha de 4, 5, 6 &c. unidades, de ſorte que o reſto ſe

ache na ſuprema claſſe das Taboas, e do numero correſpondente ſe tomaráõ tantas caſas para a dizima, quantas foraõ as unidades, das quais ſe diminuio o Logarithmo.

Por exemplo, buſcando-ſe a fracçaõ correſpondente ao Log. — 1,532732 diminuiremos eſte de 5 e o reſto 3,467268 moſtrará na Taboa hum numero entre 2932 e 1933; pelo que a fracçaõ pedida ſerá 0,02932. E com effeito tirar o Log. — 1,532732 de 5 he o meſmo que multiplicar por 100000 a fracçaõ que lhe correſponde (n. 219, 236). Logo o numero correſpondente ao reſto deverá dividir-ſe por 100000, tomando 5 caſas decimais (n. 28).

ʃʃ Sendo os Log. ſómente negativos em quanto á characteriſtica, ainda he mais facil de achar a fracçaõ correſpondente. Buſcar-ſe-ha o numero que correſponde ao Log. com a characteriſtica que melhor parecer, e a primeira letra delle ſe aſſentará tantas caſas adiante da virgula, quantas ſaõ as unidades negativas da characteriſtica.

Aſſim v. gr. querendo até a quarta letra decimal a fracçaõ correſpondente ao Log. $\bar{2}$,235724, buſcaremos o numero que proximamente compete ao Log. 2,235724, que he 172, e a fracçaõ ſerá 0,0172. Querendo a fracçaõ correſpondente ao Logarithmo $\bar{1}$,732589 até a ſexta nota decimal, procuraremos o numero que proximamente compete ao Log. 5,732589, que acharemos ſer 540242, e por conſeguinte a fracçaõ deſejada 0,540242. ʃʃ

247 Do que até aqui temos dito faremos varias applicações na Trignometria, e em outras partes da Mathematica. Aqui ſómente daremos,

por meio de exemplos tirados da mesma Arithmetica, alguma idea da vantagem que resulta dos Logarithmos em quanto á promptidaõ e facilidade dos calculos.

Exemplo I.

PErgunta-se o quociente de 17954 dividido por 12836, approximado até as decimas-millesimas. Usando dos Log. obraremos desta maneira:

Log. de 17954	- -	4,254161
Log. de 12836	- -	4,108430
Resto	- - -	0,145731

o qual sendo procurado nas Taboas com a characteristica 4 corresponde a 13987; e conseguintemente será o quociente pedido 1,3987 (n. 238).

Exemplo II.

PEde-se a raiz cubica de 53 approximada até á casa das decimas-millesimas.

Busque-se o Log. de 53, que he 1,724276, e divida-se por 3 (n. 230). O quociente 0,574759 será o Log. da raiz. Este com a characteristica 5 corresponde nas Taboas proximamente ao numero 375628; Logo a raiz será 3,75628 (n. 238).

Exemplo III.

QUerendo saber a raiz quinta do cubo de 5736 exacta até a terceira letra decimal, buscaremos o Log. de 5736, que he 3,758609, e multiplicando-o do-o por 3, teremos 11,275827 Log. do cubo do mesmo numero. Dividindo este por 5, teremos 2,255165 por Log. da raiz procurada; e entrando com elle nas Taboas com huma characteristica augmentada de 3 unidades, acharemos que proximamente compete ao numero 1799555; e assim será a raiz que buscamos 179,955.

Exemplo IV.

Querendo meter quatro meios geometricos entre $2\frac{2}{3}$ e $5\frac{3}{4}$, como seria necessario dividir $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, e extrahir do quociente a raiz quinta (n. 215), para conhecer a razaõ da Progressaõ; por Logarithmos se obrará deste modo:

Tirar-se-ha 0,425969 Log. de $2\frac{2}{3}$ de 0,759668 Log. de $5\frac{3}{4}$ (n. 231), e o resto 0,333699 se dividirá por 5 (n. 230). O quociente 0,066740 será o Log. da razaõ; e entrando com elle nas Taboas com a characteristica 4, acharemos o numero 11661, donde concluiremos que a razaõ he 1,1661 exacta até as decimas-millesimas. Assim naõ resta mais do que multiplicar o primeiro termo $2\frac{2}{3}$ pela razaõ 1,1661, o producto outra vez pela razaõ &c. (n. 211).

Porem estas mesmas operaçóes se faráõ mais expeditamente, ajuntando ao Log. do primeiro termo 0,425969 o Log. da razaõ 0,066740, depois o duplo, triplo, e quadruplo deste; e teremos 0,492709 ; 0,559449 ; 0,626189 ; 0,692929 por Logarithmos dos quatro meios proporcionais, que seraõ proximamente 3,109 ; 3,626 ; 4,228 ; 4,931.

Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do seu uso.

248 QUando se praticaõ as operações por Logarithmos, e alguns destes se devem diminuir, póde simplificar-se o calculo, substituindo em lugar delles os seus complementos.

249 Para disto se formar huma idea clara, he necessario reflectir, que tendo para diminuir qualquer numero de outro que conste da unidade seguida de tantas cifras, quantas saõ as letras do primeiro, a operaçaõ se reduz a escrever da esquerda para a direita a differença entre 9 e cada huma das letras do numero proposto, exceptuando a ultima, em lugar da qual se tomará o que lhe faltar para 10. Assim v. gr. querendo diminuir 526927 de 1000000, tiraremos successivamente as letras 5, 2, 6, 9, 2, de 9 ; e a ultima 7 de 10, e será o resto 473073. Querendo diminuir 4873 de 1000000, o numero proposto se considerará como 004873 e praticando a mesma regra, teremos o resto 995127.

250 O resto formado desta maneira he o que se chama *Complemento Arithmetico* do numero proposto.

251 Como he taõ facil a substituiçaõ do complemento em lugar de qualquer numero, que apenas se póde contar por operaçaõ, he manifesto,

que

que havendo de formar-ſe hum reſultado da addiçaõ e ſubtracçaõ de varios numeros, tudo ſe póde reduzir a huma unica operaçaõ de ſomar. Por exemplo, ſe houvermos de ſomar os numeros 672736 e 426452, e da ſoma tirar os numeros 432752 e 18675, por huma ſó operaçaõ acharemos o reſultado da maneira ſeguinte:

	672736
	426452
Compl. de 432752 -	567248
Compl. de 18675 -	981325
Soma - - - -	2)647761

Iſto he, ſomar-ſe-haõ os dous primeiros numeros com os complementos dos outros dous; e ſeparando a primeira letra da ſoma 2, as ſeguintes 647761 daraõ o reſultado que ſe buſca.

A razaõ deſta operaçaõ he, porque em lugar de diminuir 432752 ſomando o ſeu complemento, ou 1000000 — 432752, naõ ſómente diminuimos com effeito o numero 432752, mas ajuntamos ao meſmo tempo 1000000. Logo por cada complemento deveremos tirar huma unidade na primeira letra da ſoma.

252 A applicaçaõ diſto aos Logarithmos he evidente. Em lugar dos que ſe haõ-de ſubtrahir, ſubſtituiremos os ſeus complementos, que ſe deſignaõ com as letras CL, e na ſoma deixaremos de eſcrever tantas dezenas na characteriſtica quantos forem os complementos.

Exem-

Exemplo I.

SUpponhamos que ſe procura o quarto proporcional aos termos 1677 : 1599 :: 129 :

Como deveriamos ſomar os Log. de 1599 e 129, e da ſoma tirar o Log. de 1677 (n. 232), por huma ſoma unica praticaremos deſte modo:

CL. de 1677	- -	6,775467
Log. de 1599	- -	3,203848
Log. de 129	- -	2,110590

E a ſoma - - - - - 2,089905, deixando a dezena da characteriſtica ſerá o Log. do quarto termo, que nas Taboas acharemos 123.

Exemplo II.

QUeremos multiplicar $\frac{675}{527}$ por $\frac{952}{377}$, e dividir o producto por $\frac{631}{753}$.

Já ſabemos, que neſte caſo deveriamos multiplicar os numeros 675, 952, 753, e depois os numeros 527, 377, 631, e dividir o primeiro producto pelo ſegundo (n. 106, 109). Por Logarithmos praticaremos pois do modo ſeguinte:

Log. de 675	- -	2,829304
Log. de 952	- -	2,978637
Log. de 753	- -	2,876795
CL. de 527	- -	7,278189
CL. de 377	- -	7,423659
CL. de 631	- -	7,199971

E a Soma - - - - - 0,586555, lançando

fóra as 3 dezenas da characteristica, por entrarem nella 3 complementos, mostrará nas Taboas o numero que buscamos 3,8597 proximamente.

253 Alem disto, servem tambem os complementos com grande vantagem do calculo, para fazer positivos os Logarithmos das fracções. Para acharmos v. gr. o Logarithmo de $\frac{3}{4}$, que representa o numero 3 dividido por 4 (n. 96), ao Log. de 3 que he 0,477121 ajuntaremos o Compl. do Log. de 4 que he 9,397940, e a soma 9,875061 será o Log. de $\frac{3}{4}$. Bem entendido, que nelle se involve hum complemento, e conseguintemente se deveria lançar fóra huma dezena da characteristica, se houvesse. Mas esta se subentende sempre, e se lança fóra no fim das operações, em que entra o dito Logarithmo, se póde ser.

§§ Os Logarithmos desta fórma realmente naõ differem dos que se exprimem por huma characteristica negativa. Porque o Log. 9,875061, no qual se subentende huma dezena subtractiva da characteristica, tem com effeito por characteristica $9-10$, e conseguintemente vem a ser o mesmo que $\bar{1},875061$. Se o mesmo Log. involvesse dous complementos, teria realmente a characteristica $9-20$, e valeria o mesmo que $\overline{11},875061$.

Deve reparar-se, que os Logarithmos se servem mutuamente de complementos. Assim como 9,875061 he complemento do Log. 0,124939, do mesmo modo 0,124939 he complemento do Log. 9,875061. Estes Logarithmos, que saõ mutuamenmente complementos, correſpondem a numeros entre ſi *reciprocos*, os quais ſaõ todos aquelles que ſendo multiplicados hum pelo outro daõ a unidade por producto, como 3 e $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ &c. E por iſſo, como he o meſmo dividir por 3 que multiplicar por $\frac{1}{3}$, em lugar de ſubtrahir o Log. de 3 podemos ajuntar o Log. de $\frac{1}{3}$, que he o complemento do Log. de 3; e aſſim nos outros caſos.

254 O meſmo ſe entenderá dos Log. das fracções decimais. Se quizermos v. g. o Log. de 0,575, que repreſenta o meſmo que $\frac{575}{1000}$, ao Log. de 575 ajuntaremos o complemento do Log. de 1000, e a ſoma 9,759668 ſerá o Log. que buſcamos. De outra ſorte: Buſque-ſe o Log. da fracçaõ decimal, como ſe foſſe numero inteiro, e em lugar da characteriſtica ſe ponha huma que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c., quantas ſaõ as caſas deſde o lugar das unidades atè a primeira letra da fracçaõ. Aſſim 0,05621 terá o Log. 8,749812; 0,00000000005621 o Log. 0,749812; e finalmente 0,000000000005621 o Log. 9,749812; ſubentendendo-ſe no primeiro e ſegundo hum ſó complemento, e no terceiro dous.

255 Quando dos Logarithmos ſe houver de tornar aos numeros, ſe no reſultado de quaisquer operações naõ ſe puderem lançar fóra da characteriſtica tantas dezenas, quantos forem os complementos que nellas entraraõ, he manifeſto, que elle deve moſtrar huma fracçaõ. Para determinarmos

mos esta, lançaremos da characteristica todas as dezenas que tiver, e considerando o resto como Log. de hum numero inteiro, buscaremos este nas Taboas (n. 242, e seg.), e nelle notaremos tantas dezenas de casas decimais da direita para a esquerda, quantos forem os complementos que no dito Log. restaraõ.

Resultando v. gr. o Log. 8,732235 de varias operações em que tivesse entrado hum complemento, conheceremos que elle pertence a huma fracçaõ, por naõ podermos lançar fora da characteristica huma dezena que nella ha de mais. Assim buscando o numero inteiro que corresponde ao Log. 8,732235, acharemos 539802500, e fazendo nelle 10 casas de dizima, será a fracçaõ 0,0539802500.

Como porem raras vezes he necessario levar as fracções a taõ alto ponto de approximaçaõ, tomar-se-ha a characteristica a arbitrio, e tendo achado o numero competente com as letras que bastarem, delle formaremos a fracçaõ, pondo a sua primeira letra tantas casas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteristica do Log. proposto tiver de menos que 10, 20 &c. conforme o Log. contiver hum, dous &c. complementos.

Deste modo o Log. 8,73225 procurado nas Taboas com a characteristica 3, corresponde ao numero 5398 proximamente; e porque a characteristica 8 tem 2 menos que 10, a primeira letra 5 deverá estar na segunda casa depois da virgula, e será a fracçaõ 0,05398. Se o Log. involvesse dous complementos, seria a fracçaõ correspondente 0,000000000005398.

256 Deve notar-se, que quando se multiplicaõ estes Logarithmos, como succede na formaçaõ das potencias das fracções, juntamente se multiplicaõ os complementos que nelles se contem. Por isso, lançando fóra as dezenas que tiver a characteristica do producto, se terá conta dos complementos que nella ficaõ, para se determinar o valor da fracçaõ.

Por exemplo, dando-se o Log. 7,924753 que sabemos involver hum complemento, e querendo-se elevar á quinta potencia a fracçaõ correspondente, multiplicaremos o Log. por 5, e o producto 39,623765 terá 5 complementos. Omittindo as 3 dezenas, ficará o Log. 9,623765 com dous complementos; e conseguintemente corresponderá á fracçaõ 0,00000000004205.

257 Pelo contrario, quando os mesmos Logarithmos se houverem de dividir, como succede na extracçaõ das raizes, deve procurar-se que ajuntando as dezenas necessarias á characteristica se ponhaõ no Log. tantos complementos, quantas forem as unidades no expoente da raiz, ou o dobro, triplo &c. dellas; e praticando a divisaõ, o quociente conservará hum, dous, tres &c. complementos.

Por exemplo, se o Log. 9,702922 tiver hum complemento, e da fracçaõ correspondente quizermos extrahir a raiz cubica, ajuntar-lhe-hemos 2 dezenas á characteristica, e ficará 29,702922 com tres complementos; entaõ dividindo por 3, o quociente 9,900974 terá hum só complemento, e mostrará a raiz que buscamos 0,7961. Se da fracçaõ correspondente ao Log. 1,987542, no qual ha dous complementos, quizermos extrahir a raiz quadrada, dividi-lo-hemos por 2 (porque naõ he necessario ajuntar dezena alguma á characteristica neste caso) e o quociente 0,993771 involverá hum complemento, e mostrará por conseguinte a fracçaõ 0,00000000857. Se da fracçaõ correspondente ao Log. 9,887745, no qual se contiverem 5 complementos, quizermos extrahir a raiz quarta, ajuntaremos 3 dezenas á characteristica e teremos 39,887745 com 8 complementos; entaõ dividindo por 4, o quociente 9,971936 conservará dous complementos, e mostrará por conseguinte a fracçaõ 0,0000000009374; e assim dos mais.

O uso dos Complementos serve de abbreviar vantajosamente as operações Trignometricas; e por isso he de grande utilidade na Astronomia, e em todas as partes da Mathematica, onde se houver de praticar a resoluçaõ dos triangulos por meio dos Logarithmos.

FIM DA ARITHMETICA.

IN-

INDICE

Dos Principios que se contém nestes Elementos.

citas

ferva-se a mesma regra, sem attender á virgula dos factores, e no producto separaõ-se tantas letras de Dizima para a direita, quantas saõ as que tem os factores ambos juntos; para o que se meteráõ (quando for necessario) huma ou mais cifras, entre a virgula, e a primeira letra significativa do producto, n. 54.

Dividir he buscar quantas vezes hum numero contém outro numero dado, n. 59.

O numero que se divide, chama-se *partiçaõ*, ou *dividendo*; o outro, pelo qual se divide, *partidor*, ou *divisor*; e o resultado, *quociente*, n. 59.

A Divisaõ he equivalente a huma diminuiçaõ reiterada; e o quociente mostra, quantas vezes o divisor se póde tirar do dividendo, n. 59.

O dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente, n. 59.

A especie das unidades do quociente naõ póde determinar-se, senaõ pela natureza da questaõ, que der lugar á divisaõ, n. 59.

Para dividir hum numero composto por hum numero simples, procede-se por partes da esquerda para a direita, examinando quantas vezes entra o divisor na primeira letra do dividendo, ou nas primeiras duas, quando a primeira for menor que o divisor, e assim se procederá de casa em casa até á ultima; advertindo, que naõ cabendo o divisor hum numero exacto de vezes na parte que se divide, o resto se ajuntará em lugar de dezenas á letra seguinte, e naõ chegando a caber huma vez, se assentará cifra no quociente, n. 60.

Sendo tambem composto o divisor, a operaçaõ he do mesmo modo: Toma-se no dividendo huma parte naõ menor que o divisor, e confrontando as primeiras letras de hum e outro, se acha a letra do quociente, a qual se multiplica pelo divisor, e o producto se diminue da parte do dividendo, e ao resto se ajunta a letra seguinte do mesmo dividendo, para formar huma nova parte que se torna a dividir do mesmo modo, e assim por diante, n. 62.

Quando o producto da letra do quociente pelo divisor sahe maior que a parte actual do dividendo, he signal que a dita letra se julgou maior do que devia ser; e quando, diminuido o dito producto da parte correspondente do dividendo, ficar o resto naõ menor que o divisor, he signal que a letra do quociente se assentou menor do que convinha, n. 63.

Quando o dividendo, e o divisor acabaõ ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ podem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver, n. 67.

A Divisaõ da dizima se reduz á dos numeros inteiros, procurando-se que no dividendo, e no divisor haja o mesmo numero de casas decimais, n. 68.

Se ao resto final de huma divisaõ se ajuntar huma cifra, e se continuar a operaçaõ, achar-se-ha a letra competente á casa das decimas, e assim por diante, n. 68.

A Divisaõ, e Multiplicaçaõ provaõ-se reciprocamente huma pela outra; porque dividindo o producto por hum dos factores

Para

Para multiplicar quebrados he necessario multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador, n. 106.

A multiplicaçaõ de quebrado por inteiro, ou de inteiro por quebrado, reduz-se a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado, n. 107.

Os numeros mixtos de inteiro, e quebrado, reduzem-se a quebrados simples, e entraõ na regra geral, n. 108.

Para dividir hum quebrado por outro invertem-se os termos do divisor, e pratica-se a regra da multiplicaçaõ, n. 109.

A divisaõ de hum quebrado por hum inteiro reduz-se a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado; e na divisaõ de hum inteiro por hum quebrado pratica-se o mesmo, e depois invertem-se os termos, n. 110.

Os numeros mixtos reduzem-se a quebrados simples, e pratica-se a regra geral, n. 111.

Quebrado de quebrado he o que exprime as partes de outro quebrado, considerado como hum todo, e dividido em hum numero determinado de partes iguais, n. 114.

Hum quebrado de quebrado he igual ao producto de todos os quebrados que entraõ na sua expressaõ, reportando-se entaõ esse producto á unidade principal, n. 114.

Para somar numeros complexos, principia-se pelas unidades da infima especie; se a soma dellas contém huma, ou mais unidades da especie seguinte, escreve-se sómente o resto, e essas levaõ-se para a columna seguinte; e assim por diante, n. 117.

Para diminuir complexos principia-se pelas unidades da infima especie: e quando naõ póde fazer-se a subtracçaõ, toma-se huma unidade da especie immediata, que se converte em unidades da especie actual, e se ajunta com as outras, e da soma se faz a diminuiçaõ, guardando-se huma analogia perfeita com a regra ordinaria, n. 118.

A multiplicaçaõ, e divisaõ de complexos, póde fazer-se pelas regras dos quebrados ordinarios; reduzindo as especies inferiores a huma fracçaõ da principal, antes de fazer as ditas operações, n. 119.

Parte *aliquota* de hum numero he o numero, que nelle se contém algumas vezes exactamente, n. 120.

Para multiplicar os numeros complexos resolvem-se as especies inferiores em partes aliquotas da especie principal, e humas das outras; e quando esta resoluçaõ naõ suggere productos faceis de calcular, suppre-se com productos subsidiarios, n. 121, 122, 123.

Para dividir hum complexo por incomplexo, no caso de ser o quociente da mesma natureza que o dividendo, parte-se pelo divisor a especie maior do dividendo, o resto se converte em unidades da especie seguinte, e se ajunta com as que houver no dividendo, e a soma se torna a partir pelo mesmo divisor; e assim por diante, n. 124.

Sendo porém o quociente de diversa natureza, reduzir-se-ha tanto o dividendo, como o divisor, ás unidades da infima especie do dividendo; e depois se

quadrado das unidades, *e o cubo das unidades*, n. 154.

Para extrahir a raiz cubica de hum numero, divide-se em classes de tres letras começando da direita para a esquerda: da ultima classe á esquerda (a qual póde ser de duas, e de huma letra) tira-se a raiz, e esta será a primeira letra da raiz procurada; o cubo desta letra se diminue da mesma classe, e ao resto se ajunta a classe seguinte, que formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o triplo do quadrado da raiz achada, o qual se assentará da terceira letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, e formando o cubo da raiz total achada, se diminuirá das duas classes respectivas do numero proposto, e ao resto se ajuntará a terceira classe para formar outro dividendo, o qual se partirá do mesmo modo pelo triplo quadrado da raiz total já achada; e assim por diante, n. 155.

Querendo approximar a raiz de hum numero, que naõ he cubo perfeito, ajuntar-lhe-hemos tantas classes de tres cifras, quantas saõ as letras decimais, que queremos na raiz, e praticaremos a regra precedente, n. 156.

Para extrahir a raiz cubica de hum quebrado he necessario tirar as raizes tanto do numerador, como do denominador. Se estes naõ forem cubos perfeitos, reduz-se o quebrado a fracçaõ decimal, procurando que tenha tres vezes mais casas de dizima do que queremos na raiz, e pratica-se a regra precedente, n. 157 e seg.

Razaõ he a grandeza relativa, que resulta da comparaçaõ de duas quantidades do mesmo genero, n. 162.

A razaõ he *Arithmetica*, quando se considera a differença de duas quantidades; *Geometrica*, quando se considera quantas vezes huma contém a outra. Quando se diz *Razaõ* simplesmente, sempre se entende a Geometrica, n. 163, 164.

As duas quantidades, que se comparaõ na *Razaõ*, chamaõ-se *termos*: o primeiro delles, *antecedente*; e o segundo, *consequente*, n. 165.

Huma razaõ arithmetica naõ muda de valor, quando se ajunta, ou se tira a ambos os termos della, huma mesma quantidade, n. 169.

Huma razaõ geometrica naõ muda de valor, quando ambos os termos se multiplicaõ, ou dividem por hum mesmo numero, n. 170.

Proporçaõ, ou *Analogia*, he a igualdade de duas razões; e esta he *Arithmetica*, ou *Geometrica*, conforme as razões, n. 172.

Proporçaõ *continua* he, quando os termos medios saõ iguais entre si, n. 174.

Em toda a proporçaõ arithmetica a soma dos meios he igual á dos extremos; e reciprocamente, n. 176.

Se a proporçaõ arithmetica for continua, a soma dos extremos he dupla do meio; e reciprocamente, n. 177.

Em toda a proporçaõ geometrica o producto dos meios he igual ao dos extremos; e reciprocamente, n. 178, 180.

Se a proporçaõ for continua, o producto dos extremos será igual

que lhe he proporcional, numer. 197.

A *Regra de falsa posiçaõ* he simples, quando vimos no conhecimento de hum numero por meio de huma hypothese; e composta, quando saõ necessarias duas, n. 199.

Na simples, deve ser: Como o resultado da hypothese para o verdadeiro resultado, que devia sahir, assim a hypothese para o numero que se procura, numer. 199.

Na composta, deve fazer-se: Como a differença dos resultados das duas hypotheses para a differença entre o resultado da primeira, e o verdadeiro, que devia sahir; assim a differença das hypotheses para a differença entre a primeira, e o numero que se busca, n. 199.

A *Regra de Liga* tem por objecto a mistura de quantidades de valor diverso. He directa, quando se daõ as quantidades com o seu valor, e se procura o valor do misto; *inversa*, quando se dá o preço do misto com o dos simples, e se perguntaõ as partes que de cada hum delles se deve n tomar, n. 200.

Na directa, multiplicaõ-se as unidades de cada especie pelo seu valor respectivo; a soma dos productos divide-se pelo numero total das unidades do composto; e o quociente he o valor de cada unidade delle.

Na inversa, sendo duas especies sómente, as partes que dellas se devem tomar saõ na razaõ inversa das differenças entre o valor das ditas especies, e o preço proposto. Sendo mais de duas, todas as de maior valor que o misto proposto se ligaráõ arbitrariamente pela regra directa, e da mesma sorte todas as de menor valor: e reduzido o caso a duas especies, se praticará a regra precedente, n. 200.

A *Progressaõ Arithmetica* he huma serie de termos, que tem sempre a mesma differença entre si, n. 204.

Qualquer termo de huma Progressaõ Arithmetica compõe-se do primeiro, e da differença repetida tantas vezes, quantos saõ os termos precedentes, n. 206.

Entre dous numeros dados póde meter-se qualquer numero de meios proporcionais arithmeticos, diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o resto pelo numero dos meios augmentado de huma unidade; o quociente será a razaõ, ou differença da Progressaõ, com a qual se formaráõ os termos pedidos, n. 209.

A *Progressaõ Geometrica* he huma serie de termos cada hum dos quais contém, ou he contido no seu antecedente igual numero de vezes, n. 211.

Qualquer termo de huma Progressaõ Geometrica forma-se do primeiro, multiplicado pela razaõ elevada á potencia, que tem por expoente o numero dos termos precedentes, n. 213.

Entre dous numeros dados póde meter-se qualquer numero de meios geometricos, dividindo o maior pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do grão correspondente ao numero dos meios augmentado de huma unidade; esta raiz será a razaõ da Progressaõ, com a qual se formaráõ os meios pedidos, n. 215.

Os

teiro, mas esse Logarithmo se tira de tantas unidades, quantas saõ as casas decimais, e ao resto se põe o final —.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo, que se naõ acha nas Taboas, mas cahe entre dous Logarithmos da suprema classe dellas, tomar-se-ha a differença dos Logarithmos entre os quais elle cahe, e a differença entre o menor delles, e o Logarithmo proposto; e dividindo esta por aquella, o quociente nos dará as letras decimais, que devemos ajuntar ao numero correspondente ao Logarithmo proximamente menor, n. 243.

Se o Logarithmo tiver menor, ou maior characteristica, do que a classe suprema das Taboas, reduzir-se-ha a ella, ajuntando-lhe, ou tirando-lhe as unidades necessarias; e no numero achado se adiantará a virgula para a direita tantas casas, quantas foraõ as unidades que se tiráraõ, ou para a esquerda, quantas foraõ as que se ajuntáraõ á characteristica, n. 243, 245.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo negativo, tira-se este de tantas unidades, quantas bastarem para que a characteristica do resto pertença á classe suprema das Taboas; e no numero correspondente se tomaráõ tantas casas decimais, quantas foraõ as unidades das quais se diminuio o Logarithmo, n. 246.

Complemento Arithmetico de hum numero he a differença entre elle, e a unidade seguida de tantas cifras, quantas saõ as casas do mesmo numero, n. 250.

Toma-se o complemento de hum numero, escrevendo da esquerda para a direita o que falta a cada huma das letras para 9, e na ultima o que lhe falta para 10, n. 249.

Por meio dos complementos se mudaõ as subtracções em addições, substituindo em lugar dos Logarithmos subtractivos os seus complementos, e deixando na soma de escrever tantas dezenas na characteristica, quantos forem os complementos, n. 252.

Ao Logarithmo de hum quebrado dá-se fórma positiva, ajuntando ao Logarithmo do numerador o complemento do Logarithmo do denominador; mas neste Logarithmo se entenderá que fica huma dezena de mais na characteristica, a qual se tirará no fim das operações em que elle entrar, podendo ser, n. 253.

Para dar fórma positiva ao Logarithmo de huma fracçaõ decimal, busca-se como se fosse numero inteiro, e dá-se-lhe huma characteristica que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c., quantas saõ as casas desde a virgula até a primeira letra significativa da fracçaõ, n. 254.

Para achar a fracçaõ decimal correspondente a hum Logarithmo, que sabemos involver complemento, dá-se-lhe a characteristica maior das Taboas, e a primeira letra do numero correspondente se escreve tantas casas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteristica do Logarithmo tiver de menos que 10, 20 &c., conforme elle tiver hum, dous

ARITH.