ELEMENTOS

[illegible]

ASTRONOMIA

[illegible]

ELEMENTOS

DE

ASTRONOMIA

TOMO II

Coeli enarrant gloriam Dei, et opera manuum ejus annuntiat firmamentum.

Ps. XVIII, 2.

ELEMENTOS

DE

ASTRONOMIA

PELO CONSELHEIRO

RODRIGO RIBEIRO DE SOUSA PINTO

LENTE DE PRIMA JUBILADO DA FACULDADE DE MATHEMATICA
E DIRECTOR DO OBSERVATORIO ASTRONOMICO
DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

TOMO II

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1873

SEGUNDA PARTE

ELEMENTOS

DE

ASTRONOMIA

SEGUNDA PARTE

Na primeira parte determinámos as posições dos planos, a que se referem immediatamente as observações; descrevemos os instrumentos proprios para as fazer; e tractámos das correcções que devem applicar-se aos resultados d'ellas.

Assim preparados, estudemos os movimentos dos corpos celestes: começando pelo estudo dos movimentos do Sol, que por sua importancia merece para nós o primeiro logar.

SECÇÃO PRIMEIRA

THEORIA DO SOL

CAPITULO I

Primeira determinação da orbita solar

1. Sejam: z_i, z^s, as distancias zenithaes meridianas dos bordos inferior e superior do Sol; r_i, r^s, as refracções correspondentes; ϖ a parallaxe de altura do centro; e D a colatitude do logar da observação. Chamando z a distancia zenithal meridiana apparente do centro do Sol e Δ a sua distancia polar, $90°-d$, é (*)

$$z=\frac{z_i+z^s+r_i+r^s}{2},\ \Delta=\mathrm{D}+z-\varpi \ldots\ldots (1).$$

2. Seja t o intervallo de tempo sideral decorrido desde a passagem meridiana d'uma estrella, correcta da precessão, da aberração e da nutação, até a passagem seguinte do Sol. No instante da passagem do centro do Sol, ou ao meio dia verdadeiro, será

$$\mathrm{AR}\,\Theta-\mathrm{AR}\star=15\,t \ldots\ldots (2).$$

(*) As distancias zenithaes observadas differem da meridiana, por ser uma tomada um pouco antes, e outra um pouco depois, da passagem meridiana. E as leituras não são rigorosamente as distancias zenithaes observadas, mas sim as projecções d'estas sôbre o plano do limbo. É necessario pois reduzir as distancias lidas ás observadas, e estas á meridiana (P. 1.ª nn. 129 e 130).

3. As equações (1) e (2) dão, para cada dia ao meio dia verdadeiro, a distancia polar do Sol, e a sua ascensão recta contada desde o plano horario da estrella.

Mas, como para fazer estas observações, se costuma tomar o instante em que o segmento luminoso, separado pelo fio do reticulo, se reduz a um ponto, as distancias zenithaes assim tomadas precisam d'uma correcção, egual ao semi-diametro apparente f do fio, subtractiva de z^s e additiva a z_i; e os toques no fio vertical precisam similhantemente d'outra correcção, egual á semi-duração da passagem d'um ponto do Sol pelo fio.

Estas correcções não alteram a distancia zenithal do centro, nem o tempo da sua passagem; mas o semi-diametro apparente será

$$\text{semid. app. } \Theta = \frac{z_i + r_i - z^s - r^s}{2} + f \ldots\ldots (3).$$

Se nas distancias zenithaes se tomarem os contactos externos do fio com os bordos, o termo f mudará de signal.

4. Applicando as fórmulas (1), (2), (3) ás observações feitas por Mathieu e Bouvard no anno de 1807, no Observatorio nacional de Paris, cuja latitude se suppõe de 48° 50′ 14″,0, resulta a tabella seguinte, reduzida pelo sr. Folque á divisão sexagesimal (Folque, Astron.).

As declinações boreaes são precedidas do signal +, e as austraes do signal —.

As passagens da estrella são correctas das variações da precessão, aberração e nutação desde o primeiro de Janeiro de 1807, para considerar como invariaveis as suas coordenadas desde esse dia.

Datas	Diametro apparente do Sol	Declinação do Sol	Tempo decorrido desde a passagem meridiana da lyra até á seguinte do Sol
1806			
Dezembro			
18	32′.34″,59	—23°.24′. 6″,32	23ʰ.11′.58″,91
20	32.34 ,98	23 .27 . 0 ,79	23 .20.51 ,65
22	32.35 ,60	23 .27 .53 ,67	23 .29.44 ,74
27	32.35 ,60	23 .21 .53 ,15	23.51 .57 ,28
1807			
Janeiro			
1	32.35 ,60	23 . 4 .11 ,83	0 .14 . 6 ,37
2	32.35 ,60	22 .59 .14 ,30	0 .18 . 2 ,65
9	32.35 ,21	22 .12 . 4 ,45	0 .49.16 ,35
10	32.35 ,21	22 . 3 .32 ,89	0 .53.37 ,97
11	32.35 ,02	21 .54 .34 ,98	0 .57.58 ,98
25	32.32 ,42	19 . 6 .54 ,62	1 .57.41 ,39
28	32.31 ,81	17 .21 .24 ,08	2 .10.13 ,84
Fevereiro			
3	32.29 ,99	16 .42 . 0 ,21	2 .34.43 ,85
7	32.28 ,60	15 .29 .36 ,50	2 .50.50 ,67
11	....	14 .13 .13 ,98	3 . 6.44 ,61
13	32.26 ,40	13 .33 .29 ,47	3 .14.36 ,79
15	32.25 ,59	12 .52 .56 ,87	3 .22.26 ,89
16	32.25 ,20	12 .32 .20 ,65	3 .26.19 ,13
26	32.20 ,60	8 .56 .40 ,00	4 . 4.34 ,61
Março			
1	32.19 ,20	7 .48 .59 ,63	4 .15.51 ,29
3	32.18 ,20	7 . 3 .21 ,34	4 .23.19 ,97
17	32.10 ,81	1 .35 .29 ,55	5 .14.55 ,59
19	32. 9 ,19	0 .48 . 6 ,61	5 .22.12 ,95
20	32. 8 ,80	0 .24 .24 ,61	5 .25.51 ,37
21	32. 8 ,61	—0 . 0 .50 ,45	5 .29.29 ,62
22	32. 8 ,19	+0 .22 .52 ,95	5 .33. 7 ,69

Datas	Diametro apparente do Sol	Declinação do Sol	Tempo decorrido desde a passagem meridiana da lyra até á seguinte do Sol
1807			
Março			
23	32′. 7″,61	+ 0°.46′.34″,69	5ʰ.36′.45″,68
25	32. 6 ,41	1 .33.48 ,30	5 .44. 1 ,56
Abril			
8	31 .58 ,79	6 .52.41 ,05	6 .34.57 ,27
9	31 .58 ,21	7 .20.36 ,29	6 .38.36 ,47
25	31 .49 ,79	12 .58.23 ,76	7 .37.50 ,02
Maio			
1	....	14 .52.30 ,30	8 . 0.31 ,25
2	31 .46 ,42	15 .10.37 ,71	8 . 4.19 ,86
16	31 .40 ,39	18 .56.56 ,77	8 .58.41 ,64
17	31 .40 ,00	19 .10.48 ,55	9 . 2.38 ,89
25	31 .37 ,21	20 .50. 2 ,89	9 .34.35 ,85
27	31 .36 ,40	21 .11.25 ,05	9 .47.40 ,46
Junho			
12	31 .32 ,81	23 . 7.28 ,56	10 .48.19 ,44
13	31 .32 ,61	23 .11.19 ,99	10 .52.28 ,19
20	31 .31 ,61	23 .27.10 ,87	11 .21.34 ,16
22	31 .31 ,61	23 .27.53 ,25	11 .29.51 ,30
24	31 .31 ,41	23 .26.59 ,37	11 .38.10 ,35
Julho			
9	31 .31 ,19	22 .28.23 ,38	12 .40.12 ,20
10	31 .31 ,41	22 .21.12 ,75	12 .44.19 ,84
11	....	22 .13.45 ,99	12 .48.23 ,13
22	31 .32 ,81	20 .26.52 ,99	13 .32.48 ,65
25	31 .33 ,39	19 .50.39 ,80	13 .44.44 ,39
28	....	....	13 .56.34 ,94
Agosto			
10	31 .37 ,41	15 .47.51 ,59	14 .46.53 ,07
11	31 .37 ,80	15 .30.23 ,45	14 .50.41 ,08
12	31 .38 ,19	15 .12.37 ,49	14 .54.28 ,40

Datas	Diametro apparente do Sol	Declinação do Sol	Tempo decorrido desde a passagem meridiana da lyra até á seguinte do Sol
1807			
Agosto			
20	31'.41",20	+12°.42'.12",21	15ʰ.24'.27",16
23	31 .42 ,59	11 .42 .18 ,57	15 .35 .33 ,39
Setembro			
1	....	....	16 . 8 .31 ,78
3	31 .47 ,39	7 .49 .24 ,38	16 .15 .46 ,54
4	31 .48 ,00	7 .27 .20 ,91	16 .19 .24 ,00
16	31 .55 ,59	2 .55 . 6 ,64	17 . 2 .37 ,22
17	31 .56 ,59	2 .31 .55 ,06	17 . 6 .12 ,61
21	31 .57 ,40	0 .58 .53 ,71	17 .20 .34 .20
22	....	0 .35 .30 ,01	17 .24 . 9 ,68
23	....	+0 .12 . 5 ,99	17 .27 .45 ,33
Outubro			
3	32 . 3 ,20	—3 .42 . 4 ,56	18 . 3 .52 ,50
4	32 . 3 ,59	4 . 5 .18 ,93	18 . 7 .30 ,66
19	32 .12 ,01	9 .45 . 0 ,90	19 . 2 .52 ,48
20	32 .12 ,60	10 . 6 .45 ,22	19 . 6 .38 ,16
25	32 .15 ,19	11 .53 . 8 ,57	19 .25 .36 ,91
Novembro			
2	....	14 .33 .34 ,00	19 .57 .10 ,31
3	....	14 .52 .38 ,98	20 . 0 .33 ,24
Dezembro			
3	....	....	22 . 4 .56 ,55
8	32 .32 ,59	22 .40 .35 ,04	22 .26 .44 ,56
10	32 .32 ,59	22 .52 .41 ,38	22 .35 .31 ,26
17	32 .34 ,40	23 .21 .23 ,02	23 . 6 .26 ,78
18	32 .34 ,59	23 .23 .39 ,91	23 .10 .52 ,81
1808			
Janeiro			
4	32 .35 ,21	22 .49 .25 ,78	0 .26 .16 ,89
6	32 .35 ,21	22 .36 .53 ,73	0 .35 . 4 ,03

5. O exame da tabella, mostra: que a declinação é negativa e decrescente desde 22 de Dezembro até 21 de Março, positiva e crescente desde 21 de Março até 22 de Junho, positiva e decrescente desde 22 de Junho até 23 de Setembro, negativa e crescente desde 23 de Setembro até 22 de Dezembro; que toca o seu maximo valor nas proximidades de 22 de Dezembro e 22 de Junho, sendo sensivelmente a mesma 'nestas duas epochas; que é nulla nas proximidades de 21 de Março e 23 de Setembro; e que toma valores sensivelmente eguaes nas epochas equidistantes das maximas declinações.

Em quanto ás ascensões rectas, vê-se: que vão crescendo desde 0^h até 24^h; e que as dos pontos, cujas declinações, ambas crescentes ou ambas decrescentes, são eguaes, differem entre si pouco mais ou menos 12^h.

Assim a orbita do Sol parece ser uma curva fechada plana, cujo plano passa pelo centro da terra. É o que mais rigorosamente iremos vendo.

6. Para achar as ascensões rectas e as declinações correspondentes a tempos differentes dos meios dias verdadeiros das observações, e para determinar os pontos notaveis da orbita, temos pela formula ordinaria da interpolação, parando nas differenças segundas:

Funcções .... f, f', f'' $\quad \dfrac{f'-f}{i'-i}=\delta,\ \dfrac{f''-f'}{i''-i'}=\delta',\ \dfrac{\delta'-\delta}{i''-i}=\delta^2;$
Raizes .... i, i', i''

e, para a raiz t, a funcção

$$y=f+(t-i)\,\delta+(t-i)\,(t-i')\,\delta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

D'esta equação tira-se:

1.° Para $y=o$ .... $t=i-\dfrac{f}{\delta+(t-i')\,\delta^2}$ .... (a);

2.° Para y maximo, ou $\dfrac{dy}{dt}=o$,.. $t=\dfrac{i'+i}{2}-\dfrac{\delta}{2\delta^2}$, $y=f-(t-i)^2\delta^2$.. (b);

3.° Movimento effectivo em uma unidade de tempo desde t até $t+1$. . . . . $\Big\}$ $..y'-y=\delta+(2t+1-i-i')\delta^2..(c);$

4.° Movimento virtual em uma unidade de tempo. . . . . $\Big\}$ $...m=\frac{dy}{dt}=\delta+(2t-i-i')\,\delta^2..(d),$

que para a epocha i é. . . . . $m=\delta-(i+i')\delta^2$. . . . . (5).

As formulas (b), applicadas ás tres declinações proximas, cujas differenças têem signaes contrarios, darão os instantes dos solsticios e as maximas declinações. A formula (a), applicada ás declinações quando mudam de signal, dará os instantes dos equinoccios.

7. Quando nos equinoccios as observações se fazem em dias consecutivos, é escusado attender ás differenças segundas.

Suppondo que se tomam duas declinações consecutivas, uma $+d'$ correspondente ao tempo i', outra $-d$ correspondente ao tempo i, e chamando α a ascensão recta do ponto equinoccial, e t o tempo da entrada do centro do sol 'nelle, teremos:

Tempos do relogio.	i,	t,	i';
AR do Θ, contadas do meridiano da estrella,	A,	α,	A$'$;
Declinações do Θ.	$-d$,	o,	d'.

Então a formula (a), applicada ás declinações, e depois a formula (4) applicada ás ascensões rectas, darão:

$$\left.\begin{aligned} t&=i+(i'-i)\frac{d}{d'+d}=\frac{id'+i'd}{d'+d}\\ \alpha&=\mathrm{A}+(\mathrm{A}'-\mathrm{A})\frac{d}{d'+d}=\frac{\mathrm{A}d'+\mathrm{A}'d}{d'+d}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

8. Se o relogio marca exactamente intervallos de tempo sideral, as differenças de ascensão recta A, A′, são numeros da ultima columna da tabella. Mas se o relogio não estivesse bem regulado pelo tempo sideral, sería necessario reduzir estes numeros a differenças de ascensão recta.

Sejam θ^h, θ'^h, dois intervallos entre as passagens meridianas consecutivas da estrella e do Sol, marcadas pelo relogio. O retardamento do Sol sobre a estrella será $\theta'-\theta$; e como $i'-i$ é o dia solar expresso em tempo do relogio, será $i'-i-(\theta'-\theta)$ o dia sideral expresso na mesma especie de tempo (*). Portanto é $\dfrac{24}{i'-i-(\theta'-\theta)}=\mathrm{F}$ o factor de conversão de qualquer numero de horas do relogio em horas sideraes; e a ascensão recta da estrella, contada do ponto de ♈, é, pela segunda formula (6),

$$\mathrm{AR}_\star=24^h-\alpha=24^h-\mathrm{F}\frac{d'\theta+d\theta'}{d'+d}.$$

9. Costuma-se tomar o instante da passagem de ♈ pelo meridiano como origem do tempo sideral absoluto. Por isso, chamando T o tempo do relogio da passagem meridiana da estrella, o tempo do relogio correspondente ao tempo sideral absoluto 0, que é o da passagem de ♈, será

$$\mathrm{T}+\frac{\alpha}{\mathrm{F}}=\mathrm{T}+\frac{d'\theta+d\theta'}{d'+d}.$$

E ficará assim conhecido o estado absoluto do relogio relativamente ao tempo sideral.

10. Supponhamos que a orbita é plana. Então, chamando ω a in-

(*) Para ver isto mais claramente, temos

$$i=1.^a \text{ pass. da } \star+\theta,\quad i'=2.^a \text{ pass. da } \star+\theta';$$

por conseguinte $\quad i'-i=\text{dia sideral}+\theta'-\theta.$

clinação do plano d'ella sobre o do equador, ou a maxima declinação, e $15(A-\alpha)=a$ a ascensão recta do Sol contada de ♈, deve ser

$$\text{tang}\,\omega\,\text{sen}\,a=\text{tang}\,d\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(7).$$

Portanto, se com as observações feitas nos equinoccios e nos solsticios determinarmos α e ω, como fica dicto nos numeros precedentes, e os substituirmos nesta equação com os diversos valores de A deduzidos da ultima columna da tabella, os valores resultantes de d deverão coincidir com os da penultima columna. É com effeito o que acontece.

11. Em geral duas observações feitas em quaesquer epochas devem dar, por meio de formulas trigonometricas, os dois elementos α e ω.

Com effeito, chamando A e d, A′ e d', as duas ascensões rectas referidas á estrella de comparação e as declinações correspondentes, teremos

$$\text{tang}\,d=\text{tang}\,\omega\,\text{sen}\,(A-\alpha),\ \text{tang}\,d'=\text{tang}\,\omega\,\text{sen}\,(A'-\alpha),$$

que dão

$$\frac{\text{sen}\,(A'-\alpha)-\text{sen}\,(A-\alpha)}{\text{sen}\,(A'-\alpha)+\text{sen}\,(A-\alpha)}=\frac{\text{tang}\,d'-\text{tang}\,d}{\text{tang}\,d'+\text{tang}\,d};$$

e por conseguinte, fazendo $\dfrac{A'+A}{2}-\alpha=k,$

teremos:

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\,k&=\text{tang}\left(\frac{A'-A}{2}\right)\frac{\text{sen}\,(d'+d)}{\text{sen}\,(d'-d)},\\ \alpha&=\frac{A'+A}{2}-k,\ \text{tang}\,\omega=\frac{\text{tang}\,d}{\text{sen}\,(A-\alpha)}=\frac{\text{tang}\,d'}{\text{sen}\,(A'-\alpha)}\end{aligned}\right\}\,.\,.\,.\,.\,(8).$$

12. Se as observações se fizerem tão perto do equinoccio que se possam desprezar os cubos de $A-\alpha$, $A'-\alpha$, d', d, a primeira das equações (8) dará

$$\alpha=\frac{A'+A}{2}-\frac{A'-A}{2}.\frac{d'+d}{d'-d}=A-(A'-A).\frac{d}{d'-d};$$

que é a segunda formula (6), suppondo a declinação d negativa.

Estas observações feitas perto dos equinoccios são as mais proprias para determinar α; assim como as feitas nos solsticios são as mais proprias para determinar ω: e por isso começamos no n.º 6 por usar d'ellas (*).

Exemplos

1.º Fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 21 de Março de 1807, a tabella dá:

t	d	A
$0^d,000000$	$0°.\ 0'.50'',45$ austr.	$5^h.29^m.29^s,62$
1 ,002524	0 .22 .52 ,95 bor.	5 .33 . 7 ,69

E com estes numeros acha-se pelas formulas (6) do n.º 7, para o

(*) Com effeito, da equação (7) tiram-se

$$\delta\omega=\frac{\operatorname{sen}2\omega}{\operatorname{sen}2d}.\delta d-\frac{\operatorname{sen}2\omega}{2}\cot a,\ \delta a.\ \delta a=\frac{\cot\omega}{\cos a\cos^2 d}.\delta d.$$

A primeira d'estas mostra, que os erros da declinação e da ascensão recta influem muito na obliquidade, quando as observações são proximas dos equinoccios; e a segunda mostra, que o erro da declinação influe muito na determinação do tempo dos equinoccios, quando as observações são proximas dos solsticios.

equinoccio da Primavera.

$$t = 0^{d},035533; \ \alpha = 5^{h}.29^{m}.37^{s},35:$$

sendo t contado desde a epocha em tempo sideral.

2.° Fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 23 de Setembro, a tabella dá:

	$0^{d},000000$	$0^{\circ}.12'.\ 5'',99$ bor.	$17^{h}.27^{m}.45^{s},33$
	10 ,025083	3 .42 . 4 ,56 austr.	18 . 3 .52 ,50
/7	11 ,027608	4 . 5.18 ,93 austr.	18 . ~~4~~ .30 ,66

Com estes numeros acha-se, para o equinoccio do Outomno, pela formula (a) do n.° 6, e depois pela formula (4) do mesmo numero applicada ás ascensões rectas (*):

/d
$$t = 0^{d},514612, \ \alpha' = 17^{h}.29^{m}.35^{s},94.$$

Com os dois primeiros as formulas (8) dariam $\alpha' = 17^{h}.29^{m}.36^{s},76$.

3.° Fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 20 de Dezembro de 1806, a tabella dá:

0,000000	$23^{\circ}.27'.\ 0'',79$
2,006170	23 .27 .53 ,67
7,021593	23 .21 .53 ,15

(*) Se se attendesse ás differenças terceiras, usando tambem da observação de 19 de Outubro, a formula

$$t = -\frac{f}{\delta - (i'-t)\,\delta^2 + (i'-t)\,(i''-t)\,\delta^3}$$

daria

/d
$$t = 0^{d},51594, \ \alpha' = 17^{h}.29^{m}.36^{s},37.$$

E com estes numeros acha-se, pelas formulas (b),

$$t = 1^d,94506,\quad \omega = 23^\circ.27'.53'',72.$$

Similhantemente, fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 20 de Junho de 1807, acha-se

$$t = 1^d,88595,\quad \omega = 23^\circ.27'.53'',42.$$

4.° Se para determinar α e ω usarmos das observações feitas em epochas differentes dos equinoccios e dos solsticios, por exemplo das de 16 de Maio e 25 de Outubro, teremos

$$A = 8^h,978232,\quad d = +18^\circ.56'.56'',77,$$

$$A' = 19\ ,426920,\quad d = -11\ .53\ .\ 8\ ,57.$$

E as formulas (8) do n.° 11 darão (*):

$$\alpha = 5^h.29^m.36^s,03;\quad \omega = 23^\circ.27'53'',67.$$

5.° Fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 22 de Dezembro de 1806, e desprezando as variações dos dias solares consecutivos, temos, para as ascensões rectas,

i......	0	5	10
A......	23,495760	23,865912	24,235104.

(*) Como tang k pertence aos dois arcos k e $180^\circ + k$, resultam para α dois valores α_1 e $\alpha_1 + 12^h$, correspondentes aos dois equinoccios. Tomar-se-ha por α o valor α_1 ou α_2 que der ω positivo; e por α' o outro.

E a formula (*c*) do n.º 6 dá o movimento em ascensão recta no dia solar, de 22 a 23 de Dezembro, $0^h,074107$.

Similhantemente acharemos que a variação da ascensão recta no dia solar de 16 a 17 de Setembro de 1807 é $0^h,059832$.

6.º Desprezando as variações dos dias solares consecutivos, e fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 18 de Dezembro de 1807, a tabella dá:

$$\begin{array}{llll} i \ldots\ldots & 0 & 17 & 19 \\ A \ldots\ldots & 23,181336 & 24,438025 & 24,584453. \end{array}$$

E com estes numeros, tomando $f = 23,181336$, $y = 23,199697$, acha-se, em tempo solar, pela formula (4) do n.º 6,

$$t = \frac{y - f}{\delta - (i' - t)\,\delta^2} = 0^d,2463.$$

13. Chama-se *anno tropico* o intervallo de tempo, no fim do qual o Sol retoma a ascensão recta que tinha no principio. Este anno é pois de $365^d,2463$.

O mesmo anno expresso em tempo sideral deve ter mais um dia, porque a estrella volta á conjuncção em ascensão com o Sol depois de ter descripto mais uma circumferencia do que elle. Por isso temos

$$365,2463 . 1^{\text{dia sol.}} = 366,2463 . 1^{\text{dia sid.}};$$

d'onde resulta (*)

$$\text{dia sid.} = \text{dia sol.} - 235'',907 \text{ solares}$$

$$\text{dia sol.} = \text{dia sid.} + 236'',553 \text{ sideraes.}$$

(*) Adiante veremos que é mais exactamente o anno tropico $365^d,242264$; d'onde resulta:

$$\text{dia sid.} = \text{dia sol.} - 235'',9094 \text{ solares,}$$

$$\text{dia sol.} = \text{dia sid.} + 236'',5553 \text{ sideraes.}$$

Esta differença entre o dia solar e o sideral é, como deve ser, o valor medio das variações diurnas das ascensões rectas do Sol, calculadas pelo processo que se seguiu no exemplo 5.º E d'ella se deduz:

$$1''\,\text{med.} = 1''\,\text{sid.} + 0'',0027;\ 1'\,\text{med.} = 1'\,\text{sid.} + 0'',164.$$

14. Determinados o instante do equinoccio da Primavera, e a obliquidade da ecliptica, podem calcular-se as longitudes por qualquer das formulas (*):

$$\operatorname{sen} l = \frac{\operatorname{sen} d}{\operatorname{sen} \omega},\ \cos l = \cos a \cos d,\ \operatorname{tang} l = \frac{\operatorname{tang} a}{\cos \omega}.$$

Devemos porém advertir que, em virtude de causas de que logo fallaremos, o Sol não descreve uma curva perfeitamente plana. Por isso a projecção d'este astro na esphera celeste é dada: pela sua longitude contada no plano da ecliptica, do qual pouco se affasta, para o norte e para o sul, durante um anno; e pela sua pequena *latitude.*

(*) Na primeira formula influirão muito na longitude, perto dos solsticios, os erros da declinação; mas na segunda e na terceira não poderão influir consideravelmente os erros de ascensão recta e declinação. É o que mostram as respectivas equações differenciaes:

$$\delta l = \frac{\delta d}{\operatorname{sen} \omega \cos a},\ \delta l = \delta a \cos \omega + \delta d \cos a \operatorname{sen} \omega,\ \delta l = \frac{\delta a \cos^2 d}{\cos \omega}.$$

Os erros tabulares influirão muito na primeira formula perto dos solsticios, e na segunda perto dos equinoccios. É o que mostram as respectivas equações differenciaes:

$$\delta_1 l = \frac{e \operatorname{tang} l}{M \operatorname{sen} 1''},\ \delta_1 l = -\frac{e \cot l}{M \operatorname{sen} 1''},\ \delta_1 l = \frac{e \operatorname{sen} 2l}{2M \operatorname{sen} 1''};$$

sendo M o modulo dos logarithmos, M = 0,43429448.

Attendendo pois ás duas especies de erros, de observações e de taboas, parece mais seguro o uso da terceira formula.

D'ahi vem que, em rigor, quando se pretende determinar a obliquidade ω pelas observações, e quando se calcula a longitude por estas formulas, deve attender-se áquella latitude (*).

(*) 1. A equação

$$\operatorname{sen} d = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \omega \cos \lambda + \cos \omega \operatorname{sen} \lambda$$

differenciada em ordem a d e λ, e fazendo depois $\lambda = o$, dá (Fig. 1)

$$\delta d = \frac{\cos \omega}{\cos d} . \delta\lambda = \Theta q - SQ.$$

Chamando pois $d_1 = \Theta q$ a declinação observada, e $\delta\lambda = \Theta S$ a latitude: a declinação, que deve empregar-se nas equações (8), será

$$d = d_1 - \frac{\cos \omega}{\cos d} \delta\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Similhantemente, differenciando em ordem a A, d, λ, a equação

$$\cos (A_{,} - \alpha) \cos d = \cos l \cos \lambda.$$

e fazendo $\lambda = o$, acharemos

$$\delta a = - \delta d \cos (A_{,} - \alpha) \operatorname{tang} \omega = - \frac{\cos (A_{,} - \alpha) \operatorname{sen} \omega}{\cos d} . \delta\lambda.$$

E por isso, chamando A_1 a ascensão recta observada, devemos empregar nas mesmas formulas a ascensão recta

$$A = A_1 + \frac{\cos (A_{,} - \alpha) \operatorname{sen} \omega}{\cos d} . \delta\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta).$$

Nos solsticios é $\qquad d = \omega,\ A - \alpha = 90°,$

o que dá $\qquad d = d_1 - \delta\lambda,\ A = A_1;$

e assim reduz-se 'nelles a correcção a subtrahir a latitude $\delta\lambda$ da declinação observada solsticial.

2. Quando da ascensão recta observada do Sol se quer deduzir a sua longitude

15. Examinando os valores das distancias do Sol á terra deduzidos da columna dos diametros apparentes da tabella, acharemos que: a distancia é minima ou *perigea* no principio de Janeiro; cresce, desde o principio de Janeiro até o principio de Julho, em que se torna máxima ou *apogea;* e diminue, desde o principio de Julho até o principio de Janeiro seguinte, passando, em ordem inversa, pelos valores que tivera naquelle primeiro semestre.

Se, tomando por unidade qualquer das distancias, forem r', r'' as distancias perigea e apogea referidas a essa unidade, estas mesmas distancias referidas á media $\dfrac{r'+r''}{2}$ como unidade serão

$$\frac{r'}{\dfrac{r'+r''}{2}},\quad \frac{r''}{\dfrac{r'+r''}{2}};$$

ΥS, a formula $\operatorname{tang} l_1 = \dfrac{\operatorname{tang}(A_1-\alpha)}{\cos\omega}$ dá $l_1 = \Upsilon S'$; e é necessario passar da longitude $\Upsilon S'$ para ΥS, isto é, do triangulo $PS'P'$ para $P\Theta P'$. Ora differenciando, na hypothese de A constante, a formula

$$\cos\omega \operatorname{sen} l = \operatorname{sen}\omega \operatorname{tang}\lambda + \cos l \operatorname{tang}(A-\alpha),$$

e fazendo $\lambda = o$, resulta

$$\delta l = \operatorname{tang}\omega \cos l \,.\, \delta\lambda.$$

Portanto dão a longitude as formulas:

$$\operatorname{tang} l_1 = \frac{\operatorname{tang}(A_1-\alpha)}{\cos\omega},\ l = l_1 + \cos l_1 \operatorname{tang}\omega \,.\, \delta\lambda \,.........(\gamma).$$

Depois a latitude será dada mais exactamente pelas formulas

$$\operatorname{sen} d = \operatorname{sen} l \operatorname{sen}\omega,\ \delta\lambda = (d_1 - d)\frac{\cos d}{\cos\omega}.$$

ou

$$\text{dist. perig.} = 1 - \frac{r'' - r'}{r'' + r'}, \ \text{dist. apog.} = 1 + \frac{r'' - r'}{r'' + r'}.$$

Por exemplo, fazendo epocha no instante da passagem meridiana do Sol no dia 20 de Dezembro de 1806, as observações do diametro apparente, nesse dia e em 1 e 9 de Janeiro de 1807, chamando y o maximo diametro, dão:

Tempos	Δ	δ	δ^2
0,0000	$+0'',62$	$+0'',0562$	$-0'',00550$:
11,0370	$-0\ ,39$	$-0\ ,0486$	
19,0614			

$$\text{d'onde } t = \frac{11^d,037}{2} - \frac{\delta}{2\delta^2} = 10^d,628;\ y = 32'34'',98 + 0'',62 = 32'35'',60.$$

Similhantemente, chamando y' o minimo diametro, as observações de 24 de Junho, 9 e 10 de Julho de 1807 dão

$$t = 8^d,023;\ y' = 31'31'',41 - 0'',94 = 31'30'',47.$$

Portanto, como os diametros apparentes estão entre si na razão inversa das distancias respectivas, teremos

$$\frac{r''}{r'} = \frac{325933}{315078},$$

e as distancias perigea e apogea referidas á media como unidade serão:

$$\text{dist. perig.} = 0,9831, \ \text{dist. apog.} = 1,0169.$$

16. Tomando a differença de dia para dia entre as longitudes do Sol, ou, mais exactamente, interpolando essas longitudes, e tomando depois as differenças para intervallos de tempos constantes mais pequenos; e comparando entre si tanto essas differenças de longitude, como as distancias correspondentes aos meios dos intervallos respectivos: acha-se

que os movimentos angulares do Sol 'nestes intervallos são inversamente proporcionaes aos quadrados das distancias; de sorte que entre os raios vectores e as velocidades angulares $\frac{dv}{dt}$ tem logar a relação

$$\frac{r^2\,dv}{dt} = 2c,$$

sendo $2c$ uma constante.

Mas $\frac{r^2\,dv}{2}$ é o elemento da area descripta pelo raio vector;

logo $$\text{area} = \tfrac{1}{2}\int r^2\,dv = ct;$$

o que dá a primeira lei de Kepler:

As areas descriptas pelo raio vector são proporcionaes aos tempos empregados em descrevel-as.

Como as variações dos movimentos angulares são mais rapidas que as dos diametros apparentes, e como 'nestes ha sempre a incerteza proveniente do effeito da irradiação, é melhor servir-nos, para o calculo das distancias, da lei que acabamos de achar. Assim, partindo d'um raio vector r correspondente á velocidade angular v, acharemos mais exactamente o raio vector r_1, que corresponde á velocidade angular v_1, pela formula

$$r_1 = r.\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v_1}}.$$

17. Construindo uma curva, cujos raios vectores tenham entre si as mesmas razões que teem as distancias do Sol á terra, e comprehendam os mesmos angulos que comprehendam aquellas distancias, acharemos que ella parece ter a configuração d'uma ellipse.

Posto isto, se deduzirmos da tabella a longitude ϖ do Sol correspondente á minima distancia r', e os valores dos diametros apparentes d', d'' ou antes das velocidades angulares v', v'', correspondentes ás distancias minima e maxima r', r'', teremos, supposta a curva elliptica, e chamando

a, ae, ϖ, o seu semi-eixo maior, a sua excentricidade, e a longitude do perigeu:

$$r' = a(1-e),\ r'' = a(1+e).$$

E os elementos da ellipse serão

$$\text{long. perig.} = \varpi,\ a = \frac{r'+r''}{2},\ e = \frac{r''-r'}{r''+r'} = \frac{d'-d''}{d'+d''} = \frac{\sqrt{v'}-\sqrt{v''}}{\sqrt{v'}+\sqrt{v''}}.$$

18. Se com estes elementos, e com as longitudes da tabella, calcularmos as distancias correspondentes a essas longitudes, pela equação da ellipse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(l-\varpi)},$$

a coincidencia dos seus valores com os deduzidos das observações, inscriptas na tabella, deverá justificar a hypothese da ellipticidade da curva.

Por exemplo (n.° 15), em 20 de Dezembro de 1806, e 1 e 9 de Janeiro de 1807, interpolando, para $t = 10^d,628$, as longitudes da tabella (Astron. de Folque): 267°, 9572; 280°, 2440; 288°, 3925: dão a longitude do perigeu

$$\varpi = 279°48'39'',6.$$

E em 24 de Junho, 9 e 10 de Julho de 1807, interpolando, para $t = 8^d,023$, as longitudes da mesma tabella: 92°,0553; 106°,2724; 107°,2355: dão a longitude do apogeu $\pi = 99°35'2'',4$,

ou a do perigeu $\varpi = 279°35'2'',4$.

O meio d'estes valores é

$$\varpi = 279°41'51'',0.$$

Teremos pois:

$$\varpi = 279°41'51'',0;\ e = \frac{r'' - r'}{r'' + r'} = 0,0169;\ a = 1.$$

Depois, calculando com os valores achados de ϖ, e, a, e com as longitudes da tabella, os valores das distancias, e comparando-os com os que se deduzem da mesma tabella, acharemos resultados pouco differentes.

Estes exemplos não devem considerar-se como dando resultados definitivos, mas como proprios para guiar na resolução dos problemas correspondentes, quando se tiverem observações mais exactas e numerosas.

A mesma comparação feita entre as distancias deduzidas das longitudes observadas pela ultima formula do n.º 16, e as deduzidas da equação da ellipse com os elementos: $a = 1,00041$; $e = 0,0168$; $\varpi = 279°3'16'',99$: dá, nas observações de Greenwich de 1775 (Astron. de Biot), o quadro seguinte. A columna dos movimentos diurnos d'elle foi calculada pela formula

$$\text{movim. diurno} = \frac{10,027379.\,l}{t};$$

sendo l as differenças dos numeros da columna das longitudes correspondentes aos dois dias de cada mez, e t os intervallos de tempo decimal das respectivas observações.

Greenwich Datas de 1775		Longitudes	Movim. diurno	Distancia observada	Distancia calculada	Excesso das observadas
Janeiro	12ᵈ.8ʰ,16699	292°,22685	1°,01826	0,98448	0,98406	+ 42
»	13 .8 ,19699	293 ,24538				
Fevereiro	17 .9 ,19107	328 ,72977	1 ,00725	0,98950	0,98949	+ 1
»	18 .9 ,21785	329 ,73696				
Março	14 .9 ,84099	353 ,76363	0 ,99380	0,99622	0,99585	+ 37
»	15 .9 ,86635	354 ,75723				
Abril	28 .0 ,98842	37 ,95372	0 ,97075	1,00800	1,00845	— 45
»	28 .1 ,01477	38 ,92437				
Maio	15 .1 ,44487	54 ,38637	0 ,96247	1,01234	1,01233	+ 1
»	16 .1 ,47216	55 ,34397				
Junho	17 .2 ,37845	85 ,98474	0 ,95449	1.01654	1,01680	— 26
»	18 .2 ,40734	86 ,93937				
Julho	18 .3 ,26473	115 ,55334	0 ,95440	1,01658	1,01647	+ 11
»	19 .3 ,29259	116 ,50779				
Agosto	26 .4 ,30145	152 ,89668	0 ,96606	1,01042	1,01003	+ 39
»	27 .4 ,32684	153 ,86256				
Setembro	22 .4 ,98087	179 ,24913	0 ,98060	1,00283	1,00286	— 3
»	23 .5 ,00583	180 ,22950				
Outubro	24 .5 ,82588	210 ,10671	1 ,00024	0,99303	0,99352	— 49
»	25 5. ,85258	212 ,90688				
Novembro	18 . 6,52053	237 ,03453	1 ,01152	0,98746	0,98763	— 16
»	20 . 6,57873	239 ,05791				
Dezembro	17 .7 ,36289	265 ,47057	1 ,01836	0,98415	0,98403	+ 12
»	18 .7 ,39371	266 ,48928				

0,98638

Por onde se vê que, differindo pouco, e irregularmente, os valores calculados dos observados, se deve reputar sensivelmente exacta a hypothese da ellipticidade.

A observação dá assim a segunda lei de Kepler, applicada ao movimento do Sol:

O Sol descreve uma ellipse no seu movimento relativo em volta da terra.

19. Para escrever commodamente as duas leis de Kepler, que ficam enunciadas, costuma usar-se d'um angulo auxiliar NCP$=u$ (Fig. 2), que faz a linha dos apsides CP com a recta CN, tirada do centro C para o ponto N onde a ordenada SQ produzida encontra o circulo descripto sobre o diametro AP; circulo que se chama *excentrico*.

Por ser

$$\text{area SFP} : \text{area NFP} :: \text{SQ} : \text{NQ} :: b : a,$$

temos

$$\text{area NFP} = \frac{a}{b}.\,\text{area SFP} = \text{area NCP} - \text{area NCF},$$

ou

$$\frac{a}{b}.\,\text{area SFP} = \frac{1}{2}\,a^2 u - \frac{1}{2}\,ae.\,a\,\text{sen}\,u.$$

E, pela primeira lei de Kepler, chamando t o tempo correspondente á posição S do Sol, T o tempo periodico, ou o tempo que o Sol gasta em voltar ao mesmo ponto da sua orbita, e fazendo $\frac{2\pi}{\text{T}} = n$, é

$$\text{SFP} = \pi\,ab.\,\frac{t}{\text{T}} = \frac{1}{2}\,nabt,$$

que, substituindo na precedente, dá

$$nt = u - e\,\text{sen}\,u.$$

Tambem é $CQ = CF + FQ$, ou $a \cos u = ae + r \cos v$,

que, em virtude da equação da ellipse, $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$,

dá $$r = a(1 - e\cos u).$$

Finalmente, a comparação d'estes dois valores de r dá

$$1 - e\cos u = \frac{1-e^2}{1+e\cos v},$$

da qual, resolvendo em ordem a cos u, e formando a expressão $\dfrac{1-\cos u}{1+\cos u}$

se tira

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\operatorname{tang}\frac{1}{2}u.$$

20. Temos assim as tres equações:

$$\left.\begin{array}{c} nt + \varepsilon - \tilde{\omega} = u - e\,\mathrm{sen}\,u, \\ \operatorname{tang}\dfrac{l-\tilde{\omega}}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\dfrac{u}{2}, \\ r = a(1 - e\cos u): \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (9),$$

equivalentes ás duas leis de Kepler, de que até aqui nos occupamos.

Chama-se 'nellas ε a *epocha*, isto é, a longitude media correspondente a um certo tempo, por exemplo ao primeiro de Janeiro de cada anno; e t o tempo decorrido desde essa origem.

O angulo auxiliar u é a *anomalia do excentrico;* o angulo $v = l - \varpi$ é a *anomalia verdadeira;* e o angulo $nt + \varepsilon - \varpi$, que descreveria um astro ficticio, chamado *Sol medio*, se, partindo do perigeu ao mesmo tempo que o Sol verdadeiro e movendo-se uniformemente, voltasse ao mesmo ponto no fim do tempo periodico T, é a *anomalia media*.

21. Se chamarmos *equação do centro* a differença

$$Q = v - (nt + \varepsilon - \varpi) = l - (nt + \varepsilon)$$

entre a anomalia verdadeira e a media, ou entre a longitude verdadeira e a media, a longitude elliptica do Sol será assim:

$$l = \varepsilon + nt + Q \ldots\ldots (10).$$

Pela eliminação, e pelo desenvolvimento em serie, as formulas (9) dão (*Mec. cel.* l. 2.° n.° 22, e *Th. an.* l. 2.° n.° 24), até a ordem de e^2:

$$\left.\begin{array}{l} u = nt + \varepsilon - \varpi + e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \varpi) + \dfrac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2(nt + \varepsilon - \varpi), \\[2ex] Q = 2e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \varpi) + \dfrac{5}{4} e^2 \operatorname{sen} 2(nt + \varepsilon - \varpi), \\[2ex] r = a\left[1 + \dfrac{1}{2}e^2 - e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \dfrac{1}{2}e^2 \cos 2(nt + \varepsilon - \varpi)\right]. \end{array}\right\} \ldots (11).$$

22. Mostra-se na Mechanica que as duas leis de Kepler acima referidas são o resultado d'uma lei unica, a da *attracção*, que obra na razão inversa dos quadrados das distancias.

Adiante veremos que, por outra lei de Kepler: — *os quadrados dos tempos periodicos são proporcionaes aos cubos dos eixos maiores das orbitas.*

Esta terceira lei de Kepler, juncta ás outras duas, mostra que para as moleculas do Sol, dos planetas, e dos satellites relativamente aos quaes ella se póde verificar, a attracção é a mesma, isto é, que, a eguaes distancias, esta força é proporcional ás massas.

Emquanto á Lua, tambem se mostra, pela comparação do seu movimento com o que resulta da attracção terrestre transportada á distancia d'este satellite, que tem logar a mesma lei da attracção.

Portanto, podemos considerar como lei universal a seguinte:

O Sol, os planetas e os satellites attrahem-se reciprocamente na razão composta da razão directa das massas, e da inversa dos quadrados das distancias.

A investigação dos movimentos dos corpos celestes, devidos á attracção e ás impulsões primitivas, constitue um grande problema de Mechanica, cujas arbitrarias são funcções dos elementos das orbitas.

A astronomia theorica, tendo chegado pela comparação das primeiras observações á lei da attracção universal, e partindo d'ella, fornece as formulas pelas quaes se calculam as posições e os movimentos dos corpos celestes: a astronomia practica determina, pela discussão de boas e numerosas observações, as constantes que entram 'nessas formulas.

23. O exame das formulas analyticas, que dão os movimentos do Sol, mostra: que a parte principal d'elles é devida á acção reciproca do Sol e da terra, em virtude da qual a orbita relativa d'um d'estes corpos em volta do outro se considera como uma ellipse; e que os effeitos das acções da Lua e dos planetas se podem decompor em duas especies: uns taes, e tão lentos, que o movimento ainda se reduz commodamente á ellipse, modificando lenta e progressivamente as constantes d'esta, de modo que se attenda aos mesmos effeitos; outros que mais convém tomar como perturbações do movimento elliptico.

D'este modo a longitude do Sol, em qualquer tempo, representa-se pela expressão

$$\text{long}\,\Theta = \varepsilon + nt + P + Q \ldots\ldots (12).$$

Onde P designa a somma das perturbações; e ε, n, ϖ, e, são constantes, que soffrerão variações; assim como as soffrerão as constantes α, ω, que determinam a posição da ecliptica.

E em conformidade com esta formula são dispostas as taboas, que servem para calcular as longitudes.

24. Preparados com estas noções, tractemos agora de determinar com a maior exactidão, que for possivel, os elementos da orbita solar, e e as suas variações.

CAPITULO II

Determinação mais exacta da posição da ecliptica

I

Determinação mais exacta da obliquidade da ecliptica

25. Na primeira approximação determinamos os elementos da orbita solar, ou usando de observações isoladas, ou de tantas, ligadas pela interpolação parabolica, quantas esta o permittia. Mas, como a orbita é uma elipse, será mais exacto, para o mesmo fim, empregar maior numero de observações, ligando-as pela interpolação elliptica. É o que vamos fazer.

26. Da formula $\quad \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} l = \operatorname{sen} d$

resulta $$\delta d = \delta l \, . \, \frac{\operatorname{sen}\omega \cos l}{\cos d} \, ;$$

conseguintemente é $$\delta d < \delta l \, . \operatorname{tang}\omega \cos l.$$

E como 12^h é o maior erro que se póde commetter em tempo, quando se toma por instante do solsticio o da maxima distancia zenithal meridiana, a substituição por δl do maximo movimento do Sol em 12^h dá um limite superior de δd,

$$\delta d < 30',6 \tang 23^\circ . 27' . 27'' \operatorname{sen} 30',6 < 0',12.$$

Portanto as taboas astronomicas, que suppõem a obliquidade já determinada com muito maior approximação, não podem conter, por parte d'este elemento, senão pequenos erros, que se corrigem por novas observações, do modo que vamos expor.

27. Sejam: δd o que falta a uma declinação d, observada poucos dias antes ou poucos dias depois do instante do solsticio, para ser a declinação solsticial ω; e δl o que falta á longitude correspondente l para ser 90° : isto é, sejam

$$\delta d = \omega - d, \ \delta l = 90^\circ - l.$$

A equação $$\operatorname{sen} d = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \omega$$

dá $$\operatorname{sen}(\omega - \delta d) = \cos \delta l \operatorname{sen} \omega,$$

ou $$\operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen}(\omega - \delta d) = 2 \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \delta l;$$

e tirando d'esta δd, em serie ordenada relativamente ás potencias de $2 \tang \omega \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \delta l = m$, resulta (Fr. *Math. Pur.* p. IV, n.° 67, 3.°)

$$\delta d \operatorname{sen} 1'' = m - \frac{1}{2} m^2 \tang \omega + \frac{1}{6} m^3 (1 + 3 \tang^2 \omega) + \dots . (13).$$

Escrevendo esta formula do modo seguinte

$$\delta d \operatorname{sen} 1'' = m - \frac{1}{2} m^2 \operatorname{tang} \omega + \frac{1}{4} m^2 - \frac{1}{12} m^3 (1 - 6 \operatorname{tang}^2 \omega)$$

$$= m - \frac{1}{2} m^2 \operatorname{tang}\omega \cos^2 \frac{1}{2} \delta l - \frac{1}{12} m^3 (1 - 6 \operatorname{tang}^2 \omega),$$

e desprezando o ultimo termo, que para $\delta l = 20°$ apenas dá $0'',04$, acha-se a formula de Mathieu (*)

$$\delta d \operatorname{sen} 1'' = m - \frac{1}{2} m^2 \operatorname{tang} \omega \cos^2 \frac{1}{2} \delta l \ldots\ldots\ldots (14).$$

28. Estas formulas podem empregar-se com segurança ainda vinte dias antes e vinte depois do solsticio. Porque, se fosse 1^m o erro do tempo do solsticio dado pelas taboas, supposição actualmente muito exagerada, o erro e de δl, que d'elle resultaria, apenas daria em $\frac{m}{\operatorname{sen} 1''}$ o erro $\operatorname{tang} \omega \operatorname{sen} \delta l \,.\, e < 0'',37$ para $\delta l = 20°$: e um pequeno erro c de ω dá para a correcção δd o erro $\frac{2c \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \delta l}{\cos^2 \omega}$, que é insensivel (**).

(*) Por ser

$$6 \operatorname{tang}^2 \omega - 1 < 0,11 \quad \text{e} \quad 1 + 3 \operatorname{tang}^2 \omega > 1,5,$$

0,864

vê-se que, por meio dos dois termos da formula (14) se aproveitam mais de $\frac{19}{20}$ = 0,95 do terceiro termo da formula (13), e se despreza apenas menos de $\frac{1}{20}$ d'elle.

(**) Se achassemos d pelas taboas, a influencia do erro da longitude em d

..

29. Supponhamos que se observam i declinações, que não distam mais de vinte dias do solsticio; e que se calculam pelas formulas (13) ou (14) os i valores de δd, que lhes correspondem. A obliquidade será (*)

$$\omega = \frac{\Sigma(d + \delta d)}{i} \ldots\ldots\ldots (15).$$

'Nesta formula os erros de δd provenientes dos erros das taboas são muito pequenos, como acabamos de mostrar; a somma em Σd dos erros fortuitos das declinações d, que dá a observação, é com probabilidade da mesma ordem que cada um d'elles, e attenuada pelo divisor i; e os erros permanentes, devidos ás imperfeições dos instrumentos, suppõe-se menores que os das observações, em que se fundaram as taboas que se pertende corrigir.

seria a mesma que em δd; mas o erro c da obliquidade, daria $\frac{\delta d}{c} = \frac{\cos\omega \operatorname{sen} l}{\cos d}$, transmittindo-se a d quasi por inteiro na proximidade dos solsticios. Por isso determina-se d pela observação.

(*) Por ser nos dois solsticios, respectivamente,

$$\delta\omega = -\delta D - \delta z,\ \delta'\omega = \delta D + \delta z'$$

a semi-somma dos dois valores correspondentes da obliquidade é independente do erro da latitude.

II

Determinação mais exacta dos equinoccios

30. Se chamarmos, respectivamente, δz, δD, $\delta\omega$ os erros da distancia zenital, da colatitude geographica do logar, e da obliquidade da ecliptica, e $\delta d = -\delta D - \delta z$ o da declinação: a formula $\operatorname{sen} l = \frac{\operatorname{sen} d}{\operatorname{sen} \omega}$ dará

$$\delta l = \frac{-\delta D \cos d - \delta z \cos d - \delta\omega \operatorname{sen} d \cot \omega}{\cos l \operatorname{sen} \omega}.$$

31. Posto isto, supponhamos que, perto do equinoccio da primavera, se fazem duas observações, uma anterior ao instante do equinoccio, outra posterior e a egual distancia d'elle. Por serem $d' = -d$, $l' = 360 - l$, teremos para estas duas observações, respectivamente,

$$\delta l = \frac{-\delta D \cos d - \delta z \cos d - \delta\omega \operatorname{sen} d \cot \omega}{\cos l \operatorname{sen} \omega},$$

$$\delta l' = \frac{-\delta D \cos d - \delta z' \cos d + \delta\omega \operatorname{sen} d \cot \omega}{\cos l \operatorname{sen} \omega}:$$

logo $$\delta l + \delta l' = \frac{-2\,\delta D \cos d - (\delta z + \delta z') \cos d}{\cos l \operatorname{sen} \omega}.$$

Suponhamos tambem que se fazem duas observações equidistantes do equinoccio de outomno, sendo a distancia de cada uma a este segundo equinoccio egual á distancia ao equinoccio da primavera da correspondente feita perto d'aquelle primeiro equinoccio. Por serem $d_1 = -d$, $l_1 = 180° + l$, teremos

$$\delta l_1 + \delta l'_1 = \frac{2\delta D \cos d + (\delta z_1 + \delta z'_1)\cos d}{\cos l \operatorname{sen} \omega}.$$

Portanto

$$\delta l + \delta l' + \delta l_1 + \delta l'_1 = \frac{(\delta z'_1 - \delta z' + \delta z_1 - \delta z)\cos d}{\cos l \operatorname{sen} \omega}.$$

O segundo membro d'esta equação é independente dos erros da latitude e da obliquidade; e tambem o é da parte principal das refracções e dos erros constantes do instrumento, por serem quasi eguaes entre si as distancias z e z'_1, z' e z_1: conseguintemente só influem nelle os erros commettidos no calculo das variações da refracção, devidas á mudança do estado atmospherico, e os erros fortuitos commettidos nas observações das distancias zenithaes. Mas, podemos confiar tanto na taboa das refracções, por ser consideravel a altura 49° 7′34″ do equador sobre o nosso horizonte, e é tão grande a exactidão das observações feitas com bons circulares, que o resultado d'aquellas duas causas de erro apenas póde ser actualmente d'alguns segundos.

32. Bem entendido isto, supponhamos que se determinam pela observação e pelo calculo muitas longitudes sensivelmente equidistantes dos equinoccios da primavera e do outomno.

Por que em uma pequena extensão são constantes, ou ao menos variam uniformemente os erros das longitudes, calculadas pelas taboas que se deduziram das formulas analyticas (n.° 23), o meio d'elles corresponde á epocha media (*). Se fizermos pois i observações, metade an-

(*) Da expressão da longitude tira-se

$$\delta\cdot = \left\{ \begin{array}{l} t\delta n + \delta\varepsilon + 2\delta e \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(nt+\varepsilon)\cos\varpi - \cos(nt+\varepsilon)\operatorname{sen}\varpi \\ + \frac{5}{4} e [\operatorname{sen} 2(nt+\varepsilon)\cos 2\varpi - \cos 2(nt+\varepsilon)\operatorname{sen} 2\varpi] \end{array} \right. \\ + (t\delta n + \delta\varepsilon - \delta\varpi) \left\{ \begin{array}{l} + 2e[\cos(nt+\varepsilon)\cos\varpi + \operatorname{sen}(nt+\varepsilon)\operatorname{sen}\varpi] \\ + \frac{5}{4} e^2 [\cos 2(nt+\varepsilon)\cos 2\varpi + \operatorname{sen} 2(nt+\varepsilon)\operatorname{sen} 2\varpi] \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

teriores, metade posteriores ao equinoccio da primavera, e i, observações, metade anteriores, metade posteriores ao equinoccio do outomno; e forem: $t, t', t'', \ldots$ os tempos das primeiras, e $t_1, t'_1, t''_1, \ldots$ os tempos das segundas; S_c a somma das longitudes calculadas para os primeiras tempos, e S_0 a somma das observadas; $S_{,c}$ a somma das longitudes calculadas para os segundos tempos, e $S_{,0}$ a somma das observadas; teremos:

$$\text{Erro no tempo } \left(\frac{\Sigma t}{i} = \theta\right) \ldots\ldots \frac{S_c - S_0}{i},$$

$$\text{Erro no tempo } \left(\frac{\Sigma t_1}{i_1} = \theta_1\right) \ldots\ldots\ldots \frac{S_{,c} - S_{,0}}{i_1}.$$

Finalmente, tirando estes erros das respectivas longitudes, calculadas pelas taboas para os tempos $\frac{\Sigma t}{i}$, $\frac{\Sigma t_1}{i_1}$, teremos as longitudes correctas para os mesmos tempos, e com ellas determinaremos mais exactamente os instantes dos equinoccios (*).

na qual pondo ± 1 por $\cos(nt+\varepsilon)$, e $nt + \varepsilon$ ou $\pi - (nt+\varepsilon)$ por sen $(nt+\varepsilon)$, na proximidade dos dois equinoccios, resulta

$$\delta l = a + bt,$$

e por conseguinte
$$\frac{\Sigma \delta l}{i} = a + b\frac{\Sigma t}{i}.$$

(*) Fazendo $l = o$ e chamando t_1 o tempo da passagem pelo equinoccio é

$$o = \varepsilon + nt_1 + 2e \operatorname{sen}(nt_1 + \varepsilon - \tilde{\omega}) + \ldots,$$

t_1 tempo calculado sahi- fazendo a esta formula para o ... $\Sigma\,\delta\varepsilon$ ...

que subtrahida da correcta

$$o = \varepsilon + \delta\varepsilon + n(t_1 + \delta t_1) + 2e \operatorname{sen}[n(t_1 + \delta t_1) + \varepsilon + \delta\varepsilon - \tilde{\omega}],$$

e desprezando $e\delta t_1$ e $e\delta t_2$, dá a correcção do tempo do equinoccio

ε

$$\delta t_1 = -\frac{\delta\varepsilon}{n}.$$

33. Chamando $\delta\varepsilon$, δn, as correcções da epocha e do movimento medio, as equações precedentes dão

$$\delta\varepsilon + \theta\,\delta n = \frac{S_o - S_c}{i},\quad \delta\varepsilon + \theta_1\,\delta n = \frac{S_{1o} - S_{1c}}{i_1},$$

das quaes se tira
$$\delta\varepsilon = \frac{\frac{\theta_1}{i}(S_o - S_c) - \frac{\theta}{i_1}(S_{1o} - S_{1c})}{\theta_1 - \theta}.$$

E se as applicarmos a dois equinoccios distantes, teremos:

$$\delta n = \frac{\frac{S_1 o - S_1 c}{i_1} - \frac{S_o - S_c}{i}}{\theta_1 - \theta}.$$

34. Se o movimento medio se suppõe bem determinado, ou correcto anteriormente por observações feitas em equinoccios distantes; e se é egual o numero das observações em ambos os equinoccios: a semisomma dos valores de $\delta\varepsilon$ dá

$$\delta\varepsilon = \frac{\Sigma S_o - \Sigma S_c}{2i},$$

que (n.° 31) é independente dos erros de latitude e de obliquidade.

CAPITULO III

Do Calendario solar

35. Determinando com toda a precisão, pelo processo ensinado nos numeros precedentes, dois equinoccios consecutivos, teremos a grandeza do anno tropico, que já achamos approximadamente no n.° 13. Mas, como esta grandeza varía em virtude de mudanças periodicas e seculares, de que adiante tractaremos, seria necessario eliminar do anno tropico dado pela observação os effeitos d'ellas, para obter o valor do anno tropico medio.

O effeito das variações periodicas póde illudir-se comparando entre si dois equinoccios separados por muitos annos, e dividindo o intervallo comprehendido entre elles pelo numero dos annos. Na verdade deve ter-se compensado nos equinoccios intermedios grande parte d'estas deseguualdades; e o que restar d'ellas entre os dois extremos ficará attenuado pelo grande divisor.

Mas, em quanto ás desegualdades seculares, é necessaria a comparação de muitos annos tropicos, já correctos das periodicas, para as determinar, e applical-as ao mesmo anno (*).

(*) Chamemos: t, t' as epochas de dois equinoccios da mesma especie, separados pelo numero n de annos; Θ o valor do anno tropico correspondente á epocha intermedia $\frac{t+t'}{2}$; e α o excesso de cada anno tropico sobre Θ.

Será $$t'-t=n\Theta+\Sigma\alpha;$$

e como é $\Sigma\alpha=0$, resulta $$\Theta=\frac{t'-t}{n}.$$

Para outro intervallo $t''-t'$, será

$$\Theta'=\frac{t''-t'}{n'}.$$

36. Com todos estes cuidados determinou Delambre a grandeza do anno tropico medio, que achou de $365^d,242264$ em 1800.

Este anno tropico suppõe o movimento medio diurno do Sol em longitude $n=59',13883$.

Mas nem todos os astronomos estão de accordo sobre a grandeza do anno tropico. Bessel, nas correcções dos elementos das taboas solares de Delambre, o suppõe de $365^d,242220$; e Hansen, nas suas taboas, de $365^d,242204$ (*).

37. No uso civil convém, para commodidade, contar os annos por numeros inteiros de dias; mas de modo que as datas concordem, quanto for possivel, com as estações. Por isso é necessaria, de quando em quando, a introducção de dias addicionaes ou intercalares, a fim de corrigir o erro, que, para obter aquella vantagem, se tiver commettido.

38. Os antigos attribuiam ao anno valores muito differentes do verdadeiro; mas pela reforma, aconselhada por Sosigenes, astronomo de Alexandria, e ordenada por Julio Cesar, foi o valor do anno tropico fixado em $365^d,25$ numero que se ficou chamando por isso *anno juliano*.

'Nesta supposição bastou que tres annos *communs* de 365^d se fizessem seguir por um *bissexto* de 366^d, para ficar no fim d'este compensado o erro de $0^d,75=18^h$ commettido 'naquelles. O dia intercalar ajunctou-se no fim do mez de Fevereiro, o qual é assim de 28^d nos annos communs, e de 29^d nos bissextos; annos que facilmente se distinguem uns dos outros, por ser divisivel por 4 a data dos bissextos, e não o ser a dos communs.

39. Em 1582, chegando a 10 dias para mais o erro do anno juliano, accumulado desde o anno 325 da nossa era, em que teve logar o Concilio de Nicéa, ordenou o Summo Pontifice Gregorio XIII, que o

E se for k o augmento annual do anno tropico, teremos

$$\Theta'=\Theta+k\left(\frac{t''+t'}{2}-\frac{t'+t}{2}\right)=\Theta+k\left(\frac{t''-t}{2}\right).$$

logo
$$k=\frac{\Theta'-\Theta}{\frac{1}{2}(t''-t)}.$$

(*) Segundo Bessel, o anno tropico entre $1800+t$ e $1800+t+1$ é

$$365^d,24222013-t\,.\,0,00000006686.$$

Segundo Hansen, o anno tropico entre $1850+t$ e $1860+t+1$ é

$$365^d,2422008-t\,.\,0,00000006240.$$

dia 5 de Outubro d'esse anno fosse o dia 15; e, para evitar a repetição d'aquelle erro, determinou que, desde 1700 inclusivamente, d'entre cada quatro annos tropicos seculares, que deviam ser bissextos pela regra geral, se contassem tres por communs e o quarto por bissexto.

Ficam assim bissextos tão sómente os annos seculares, cuja parte secular, isto é, cujos algarismos á esquerda dos dois ultimos, é divisivel por 4; e são communs os outros.

Esta ultima correcção de $-\dfrac{3^d}{400} = -0^d{,}0075$ reduz o anno tropico a $365^d{,}2425$, que differe apenas 0,000236 do valor $365^d{,}242264$ achado por Delambre. E como a differença produz $0^d{,}944$, ou quasi um dia em 4000 annos, seria facil, como lembra Biot, para epochas muito remotas, supprimindo mais um bissexto em 4000 annos, reduzir o anno a $365^d{,}24225$, differente apenas 0,000014 do de Delambre. Mas nem esta correcção é necessaria para os astronomos actuaes, nem se póde asseverar que tenha a approximação, que se lhe suppõe, por causa da variabilidade da grandeza do anno tropico medio.

40. O, que fica exposto, mostra que um anno é bissexto: quando a sua parte não secular é divisivel por 4; ou quando esta parte é nulla, e a secular é divisivel por 4. De sorte que o Calendario gregoriano se resume nos seguintes resultados:

Sejam: m as duas ultimas letras á direita de um anno proposto; s as letras á esquerda d'estas; e $\left[\dfrac{a}{b}\right]$ o resto da divisão d'uma quantidade a por outra b. Teremos:

$$\left(\begin{array}{l}
\text{Se } m > o, \text{ e} \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{m}{4}\right] > o \\[2ex] \left[\dfrac{m}{4}\right] = o \end{array}\right., \text{ o anno é} \left\{\begin{array}{l} \text{commum} \\[2ex] \text{bissexto} \end{array}\right. \\[6ex]
\text{Se } m = o, \text{ e} \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{s}{4}\right] > o \\[2ex] \left[\dfrac{s}{4}\right] = o \end{array}\right., \text{ o anno é} \left\{\begin{array}{l} \text{commum} \\[2ex] \text{bissexto} \end{array}\right.
\end{array}\right)$$

41. A reforma gregoriana foi adoptada logo pela maior parte dos povos europeus, em 1700 pelos protestantes de Allemanha, e em 1752 pelos Inglezes; mas até hoje ainda o não foi pelos Russos. Esta nação continúa a usar do anno juliano, mas indicando a correspondencia dos dois estylos nas suas relações com o resto da Europa. E por isso as suas datas têm de menos que as nossas 10^d desde 1582 até 1700, 11^d desde 1700 até 1800, 12^d desde 1800 até 1900: excesso, que se exprime pela formula

$$10^d + s - 16 - \frac{1}{4}(s-16),$$

chamando $\frac{1}{4}(s-16)$ a parte inteira do quociente da divisão de $s-16$ por 4.

Assim, chamando τ qualquer data pelo estylo juliano em um dia, posterior a Fevereiro, de um anno cuja parte secular é s, as datas dos Russos, nas suas relações com o resto da Europa, são

$$\frac{\tau}{\tau + 10 + s - 16 - \frac{1}{4}(s-16)};$$

sendo juliana a data superior á risca, e gregoriana a inferior.

42. A distribuição dos dias do anno por 12 mezes, uns de 31 dias, outros de 30 dias, e outros de 28 ou 29 dias; e a divisão de 52 semanas, com o resto de um ou dois dias: são tão conhecidos que nada mais diremos sobre ellas.

Limitar-nos-hemos a advertir que o primeiro dia do primeiro anno da nossa era foi um *sabbado*. O que fará conhecer qual é o dia da semana correspondente a qualquer anno, mez, e dia da era.

CAPITULO IV

Desegualdade dos dias, e estações

43. Em virtude da obliquidade da ecliptica, os raios solares cáem nos diversos logares da terra mais ou menos obliquamente nas diversas epochas do anno; e por isso a intensidade da acção do calor solar, que influe na vegetação e em muitos phenomenos importantes, está ligada com aquellas epochas, e com a posição dos logares terrestres.

44. Em quanto á posição dos logares: dividiu-se a esphera terrestre em cinco zonas ou cintas, separadas umas das outras por circulos parallelos ao equador.

Chamaram-se: *zona torrida* a central, comprehendida entre os tropicos, isto é, entre 23°28′ de latitude boreal e 23°28′ de latitude austral; *zonas temperadas* as comprehendidas entre os tropicos e os circulos polares, isto é, entre 23°28′ e 66°32′ de latitude boreal, e entre 23°28′ e 66°32′ de latitude austral; e *zonas glaciaes* as duas extremas comprehendidas entre os circulos polares e os *polos terrestres*, isto é, entre 66°32′ e 90° de latitude boreal, e entre 66°32′ e 90° de latitude austral.

Na zona torrida, comprehendida entre os verdadeiros tropicos, o Sol passa duas vezes no anno pelo zenith de cada logar, excepto nos mesmos tropicos onde coincidem em uma só estas duas vezes. Nas zonas temperadas, onde a distancia dos seus parallelos limites aos pólos é egual á obliquidade da ecliptica, o Sol descreve em todo o anno uma parte do seu curso diurno sobre o horizonte, e outra debaixo do horizonte. Finalmente nas zonas glaciaes, que terminam nos pólos, ha uma parte do anno em que o Sol não se mergulha no horizonte, e outra em que não sobe acima d'elle.

45. As circumstancias do movimento diurno, relativas aos effeitos que ficam apontados, incluem-se na formula que dá o angulo horario,

$$\cos P = \frac{\cos z - \cos \Delta \cos D}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}.$$

1.° Na passagem meridiana superior do Sol é

$$\cos P = 1, \text{ ou } z = \pm (\Delta - D).$$

Chamando d o seu semidiametro, o disco do Sol não passará acima do horizonte em quanto for $z - d > 90°$; tocal-o-ha sómente na subida, quando for $z - d = 90°$; passará em parte acima do horizonte quando for $z - d < 90°$, e todo quando for $z + d < 90°$.

2.° Na passagem meridiana inferior é

$$\cos P = -1; \text{ ou } z = \Delta + D, \text{ ou } z = 360° - (\Delta + D).$$

O disco do Sol terá uma parte acima do horizonte, em quanto for $z - d < 90°$; o seu bordo superior tocará apenas o horizonte na descida, quando for $z - d = 90°$; e estará algum tempo abaixo do horizonte, em quanto for $z - d > 90°$.

3.° Quando o Sol estiver sobre o horizonte em uma parte da sua revolução diurna, e debaixo do horizonte em outra parte da mesma revolução, a formula precedente, fazendo $z = 90°$, dará

$$\cos P = -\cot \Delta \cot D.$$

Não attendendo ao semi-diametro do Sol, serão $\frac{P}{15}$ a semi-duração do dia, e $12^h - \frac{P}{15}$ a semi-duração da noite.

46. Em virtude da refracção menos parallaxe $r - p$, e do abaixamento crepuscular a, o Sol ainda é visivel quando está abaixo do horizonte a quantidade $r - p$; e a sua luz ainda nos alumia quando o mesmo astro está abaixo do horizonte a quantidade a: effeito que póde considerar-se como se fosse devido a um augmento do semi-diametro do Sol egual á mesma quantidade.

Assim, se o pólo superior for o boreal, e o Sol estiver no hemispherio austral, começará este astro a apparecer no horizonte, para os habitantes do parallelo cuja colatitude é D, quando $z-d-r+p$, ou $\Delta-D-r+p-d$, passar de $=90°$ a $<90°$, isto é, quando Δ passar de $=90°+D+d+r-p$ a $<90°+D+d+r-p$. E começará a haver alguma luz, quando Δ passar de $=90°+D+d+a$ a $<90°+D+d+a$.

Por exemplo, no parallelo boreal de colatitude 14°24′, suppondo 3°36′ a refracção horizontal e 16′ o semi-diametro do Sol: para que este astro esteja sobre o horizonte, deve verificar-se a condição, $\Delta<(90°+14°24'+16'+3°36'=108°16)$. A esta condição correspondem os tempos $>$ 28 de Janeiro e $<$ 15 de Novembro, dentro dos quaes ella tem logar: portanto só estará o Sol debaixo do horizonte nos dois mezes e meio decorridos desde 15 de Novembro até 28 de Janeiro. Sem a refracção teriamos $\Delta<104°40'$, o que daria o tempo $>$ 10 de Fevereiro e $<$ 2 de Novembro; de sorte que a refracção fará anticipar 13' o apparecimento do Sol, e demorar outros tantos o seu desapparecimento.

Foi um phenomeno d'esta especie o que observaram em 1597 os tres Hollandezes, *Heemskerke*, *Barensz* e *Gerard de Veer* na nova Zembla, os quaes, achando-se na posição referida, depois de tres mezes de noite contínua, viram reapparecer o Sol no horizonte 14 dias mais cedo do que esperavam.

Vê-se pois que, em virtude do crepusculo e das grandes refracções horizontaes, produzidas pela atmosphera frigidissima das regiões polares, deve 'nestas regiões durar o dia muito mais do que duraria sem aquellas causas. A claridade é além d'isso augmentada pela luz da Lua, quando este astro está sobre o horizonte, e pelos meteóros igneos, que são alli muito frequentes.

47. Chamando δz a refracção menos a parallaxe, ou o abaixamento crepuscular, e fazendo $z=90°$, as formulas

$$\cos P = -\frac{\cos D \cos \Delta}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta}, \quad \cos P' = \frac{-\operatorname{sen} \delta z - \cos D \cos \Delta}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta},$$

darão P, P′, e conseguintemente o effeito $P'-P$ de δz sobre o angulo horario. E tambem darão, pondo por δz o diametro do Sol, o tempo que o disco d'este astro emprega em emergir todo do horizonte, ou em immergir-se todo no horizonte.

Quando δz é pequena, póde $P'-P$ tirar-se da equação

$$\cos P - \cos P' = \frac{\operatorname{sen} \delta z}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta}$$

em serie ordenada relativamente ás potencias de $\dfrac{\operatorname{sen} \delta z}{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}$.
E tambem póde calcular-se $P'-P$ por approximações successivas, usando da transformada

$$\operatorname{sen} \frac{P'-P}{2} = \frac{\operatorname{sen} \delta z}{2 \operatorname{sen}\left(P + \dfrac{P'-P}{2}\right) \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}.$$

48. Quando δz é o abaixamento crepuscular a, que ordinariamente se suppõe de 17° a 18°; chamando $\dfrac{c}{15}$ o crepusculo, as equações

$$\cos P = -\frac{\cos \Delta \cos D}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}, \quad \cos(P+c) = \frac{-\operatorname{sen} a - \cos \Delta \cos D}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D},$$

darão o crepusculo no logar cuja colatitude é D, e para os dias do anno em que a distancia polar do Sol é Δ; porque a primeira dará P e depois a segunda dará c.

CAPITULO V

Mudanças da obliquidade da ecliptica; e precessão dos equinoccios

I

Exposição e medida d'estes phenomenos

49. Comparando entre si os valores da obliquidade da ecliptica determinada em epochas muito afastadas umas das outras, acha-se que, desde os tempos mais remotos até hoje, tem sido a obliquidade cada vez mais pequena; como se vê no quadro seguinte:

Datas	Logares da observação	Observadores	Obliquidade observada	Obliquidade calculada	Excesso da observada
			23°	23°	0°
—1100	China	Tchou-Koung	54',0332	51',9677	+2',0655
350	Marselha	Pytheas	49 ,3330	46 ,1168	+3 ,2162
250	Alexandria	Eratosthenes	45 ,6497	45 ,3165	+0 ,3332
50	China	Lieou-Hiang	45 ,6497	44 ,0567	+1 ,5930
+ 173	China	....	41 ,5495	42 ,2833	—0 ,7338
461	China	Tsou-Choug	38 ,8727	39 ,8841	—1 ,0114
629	China	Litchou-Foung	40 ,0682	38 ,2830	+1 ,7852
880	Arabia	Albatenius	35 ,6829	35 ,2163	+0 ,4666
1000	Cairo	Ebn-Jounis	34 ,4333	34 ,8340	—0 ,4007
1279	Pekin	Cocheou-King	32 ,0401	32 ,3749	—0 ,3348
1473	Samarkandia	Ulugbey	31 ,7998	31 ,0832	+0 ,7166

As observações d'este quadro (extrahido da Astron. de Biot, 3.ª ed. t. 4.° pag. 90) mostram, que a obliquidade vai diminuindo. E, comparando os resultados, escriptos na quarta columna, com os da formula (n.° 53), que dá a theoria da attracção, escriptos na quinta columna, acham-se na sexta columna differenças tão pequenas, e tão irregulares, que não podemos deixar de attribuil-as aos erros das observações, e de reputar como real aquella diminuição, e como exacta a formula dada pela theoria.

Esta diminuição era de 0″,52 por anno em 1800, segundo Delambre; e de 0″,48, segundo Bessel.

50. Convertendo em longitudes e latitudes as ascensões rectas e declinações das estrellas deduzidas de observações antigas, e comparando-as com as que se deduzem similhantemente das observações modernas, acha-se uma variação sensivel nas longitudes, as quaes têm successiva e quasi uniformemente augmentado desde os tempos mais remotos até hoje. As latitudes acham-se pouco differentes.

Assim a longitude da estrella *α* da *da espiga da Virgem* era

em 1760, segundo Bradley, 200°.29′.39″,98 ;

em 1802, segundo Maskeline, 201 . 4.41 ,12:

por conseguinte variou de 35′.1″,14 em 42 annos, ou de 50″,03 annualmente.

Delambre, pela discussão de muitas observações, achou 50″,1 para 1800; e depois Bessel 50″,2.

D'este movimento resulta que o signo de *Aries*, que na epocha da invenção do Zodiaco devia coincidir com a constellação do mesmo nome, se tem atrazado d'ella, estando hoje na constellação *Pisces*.

51. A variação da obliquidade da ecliptica póde proceder da mudança de inclinação da ecliptica; ou da mudança de inclinação do equador; ou de ambas estas mudanças.

A ultima explicação é a que tem logar, como logo exporemos, e que a theoria indica.

52. A variação das longitudes poderia proceder do movimento de toda a esphera celeste em torno do eixo dos pólos da ecliptica; ou do movimento conico do eixo de rotação da terra em volta do eixo dos pólos da ecliptica.

Com effeito o primeiro d'estes movimentos augmentaria simultanea e egualmente as longitudes de todas as estrellas referidas ao equinoccio fixo: o segundo augmentaria do mesmo modo as longitudes, fazendo retrogradar o equinoccio, collocado sempre a 90° de distancia do circulo maximo que passa pelos dois pólos.

Mas a segunda explicação, além de ser muito mais simples, é tambem a que se conforma com os resultados da theoria da attracção, e que desde já admittiremos.

53. A theoria mostra que, se representarmos por CE_0 (Fig. 3) a ecliptica de 1750, e por $\Upsilon_0 Q_0$ o equador: a ecliptica movel em $1750 + t$, CE; o equador ΥQ; o equinoccio verdadeiro (Υ); o nodo *descendente* C da ecliptica movel sobre a *fixa*; e o ponto Υ_1 da ecliptica movel, para o qual é $C\Upsilon_0 = C\Upsilon_1$, ponto que se póde tomar, com approximação sufficiente, como a projecção do equinoccio Υ_0 de 1750 sobre a ecliptica movel de $1750 + t$, serão determinados pelas relações, que vamos expor.

Sejam

$$E_0 \Upsilon_0 Q_0 = \omega_0, \quad E_0 \Upsilon Q = \omega, \quad E(\Upsilon)Q = (\omega);$$

$$\Upsilon_0 \Upsilon = \psi, \quad \Upsilon_1(\Upsilon) = (\psi),$$

$$\Upsilon(\Upsilon) = \alpha, \quad C\Upsilon_0 = \Pi, \quad \Upsilon C(\Upsilon) = \pi.$$

As formulas da Mechanica Celeste fazem conhecer immediatamente quatro das quantidades ω, ψ, Π, π, (ψ), (ω), α, em funcção do tempo; e o triangulo $C\Upsilon(\Upsilon)$ faz depois conhecer as outras.

Estas funcções, apresentadas debaixo de fórma periodica, são, segundo Laplace, (Astron. de Biot, 3.ª ed. tom. 4.° n.os 114 e 154)

$$\psi=\begin{cases}50'',412\,t+2^{\circ}.47'.57'',02\\[1em]+3^{\circ},830058\ \mathrm{sen}\,(50'',412\,t+85^{\circ}.33'.57'',5)\\[1em]-6^{\circ},617772\cos 32'',1158\,t-1^{\circ},581516\ \mathrm{sen}\ 13'',9464\,t\end{cases}$$

$$\omega=\begin{cases}23^{\circ}.8'.32'',5-1^{\circ},636884\ \cos(58'',412\,t+85^{\circ}.33'.57'',5)\\[1em]+0^{\circ},457443\cos 13'',9464\,t-2^{\circ},561724\ \mathrm{sen}\ 32'',1158\,t\end{cases}$$

$$(\psi)=\begin{cases}50'',412\,t-1^{\circ},285407\ \mathrm{sen}\ 13'',9464\,t\\[1em]\qquad+5^{\circ},598342\ \mathrm{sen}^2\,16'',0579\,t\end{cases}$$

$$(\omega)=\begin{cases}23^{\circ}.28',23''-9^{\circ},929736\ \mathrm{sen}\ 32'',1158\,t\\[1em]\qquad-0^{\circ},661788\ \mathrm{sen}^2\,6'',9732\,t\end{cases}$$

54. Desenvolvendo as funcções periodicas em serie, até as segundas

potencias de *t*, como basta para as necessidades actuaes da astronomia, teremos, segundo usarmos d'estes dados, ou dos de Bessel (Astr. de Biot, tom. 4.°, n.os 114 e 154; e Bessel, tab. reg. pag. v):

$$\text{Segundo Laplace}\left\{\begin{array}{l}
\psi = 50'',28762\,t - 0'',0001217939\,t^2 \\
\omega = 23°.28'.23'' + 0'',0000098423\,t^2 \\
(\psi) = 50'',09914\,t + 0'',0001221480\,t^2 \\
(\omega) = 23°.28''.23'' - 0'',52114\,t - 0'',00000272294\,t^2 \\
\alpha = +\,0'',205484\,t - 0'',0002659500\,t^2 \\
\Pi = 171°.4'.34'',53 - 8'',42312\,t - 0'',0000647384\,t^2 \\
\pi = +\,0'',527523\,t - 0'',0000040549\,t^2
\end{array}\right\}$$

$$\text{Segundo Bessel}\left\{\begin{array}{l}
\psi = 50'',37572\,t - 0,0001217945\,t^2 \\
\omega = 23°.28'.18'',0 + 0'',00000984233\,t^2 \\
(\psi) = 50'',21129\,t + 0'',0001221483\,t^2 \\
(\omega) = 23°.28'.18'',0 - 0'',48368\,t - 0'',0000272295\,t^2 \\
\alpha = 0'',17926\,t - 0'',0002660394 \\
\Pi = 171°.36'.9'',94 - 5'',23023\,t - 0'',0000396166\,t^2 \\
\pi = +\,0'',48892\,t - 0'',0000030665\,t^2
\end{array}\right\}$$

II

Influencia no transporte das coordenadas

55. Posto isto, supponhamos que se dão as coordenadas a, d, d'uma estrella S (Fig. 4), correspondentes ao tempo $1750^{\text{ann.}}+t$; e que se querem as coordenadas a', d', corespondentes ao tempo $1750^{\text{ann.}}+t'$.

Na figura temos:

Em 1750. . . . . $a_0 = \Upsilon_0 A_0$, $d_0 = SA_0$, $l_0 = \Upsilon_0 L_0$, $\lambda_0 = SL_0$,

Em 1750+t. . . $a = (\Upsilon) A$, $d = SA$, $l = (\Upsilon) L$, $\lambda = SL$,

Em 1750+t'. . . $a' = (\Upsilon') A'$, $d' = SA'$, $l' = (\Upsilon') L'$, $\lambda' = SL'$.

Portanto:

1.° Com $\quad \Upsilon A = a + \alpha_t$, d, $E_0 \Upsilon Q = \omega_t$,

calcularemos, pelas formulas (5 ou 7) do n.° 19 da 1.ª Parte,

$$\Upsilon L_0,\ SL_0 = \lambda_0.$$

2.° Com $\quad \Upsilon' L_0 = \Upsilon L_0 + (\psi_{t'} - \psi_t)$, λ_0, $E_0 \Upsilon' Q' = \omega_{t'}$,

calcularemos, pelas formulas (4 ou 6) da 1.ª Parte,

$$\Upsilon' A',\ SA';$$

e teremos as coordenadas

$$a' = (\Upsilon') A' = \Upsilon' A' - \alpha_t', \; d' = SA'.$$

3.° Finalmente, se quizermos a longitude e a latitude para a mesma epocha $1750 + t'$, referidas á ecliptica apparente:

Com $$a', d', E'(\Upsilon')Q' = (\omega)_t',$$

calcularemos, pelas formulas citadas (1.°),

$$(\Upsilon')L' = l', \; SL' = \lambda'.$$

Teremos assim o quadro seguinte:

Dados	Calculados	Formulas da 1.ª Parte, n.° 19
$a + \alpha_t, d, \omega_t$	l, λ_0	(5 ou 7)
$l + \psi_t' - \psi_t, \lambda_0, \omega_t',$	$a' + \alpha_t', d'$	(4 ou 6)
$a', d', (\omega)_t'$	l', λ'	(5 ou 7)

56. Quando quizermos passar da longitude e da latitude d'uma estrella, correspondentes ao tempo 1750, para as correspondentes ao tempo $1750 + t$, poderemos fazel-o mais facilmente do seguinte modo:

Sejam $$\Upsilon_0 L_0 = l_0, \; SL_0 = \lambda_0,$$

a longitude e a latitude para 1750.

Com $$CL_0 = l_0 + \Pi_t, \lambda_0, E_0CE = \pi_t,$$

calcularemos CL, SL, pelas formulas (4) ou (6) do n.º 19 da 1.ª Parte; e teremos as coordenadas pedidas

$$l_t = CL - \Pi_t + (\psi)_t, \lambda_t.$$

57. Quando se querem transportar muitas estrellas d'um catalogo da epocha $1750 + t$ para outra epocha $1750 + t'$, é mais facil o processo seguinte:

No triangulo espherico $N\Upsilon\Upsilon'$, onde se conhecem as partes $N\Upsilon\Upsilon' = \omega_t$, $N\Upsilon'\Upsilon = 180° - \omega_{t'}$, $\Upsilon\Upsilon' = \psi_{t'} - \psi_t$, podem calcular-se previamente $N\Upsilon = m$, $N\Upsilon' = m'$, $\Upsilon NN' = i$, pelas formulas:

$$\operatorname{sen}^2 i = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(\omega_{t'} - \omega_t) + \operatorname{sen}\omega_t \operatorname{sen}\omega_{t'}, \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(\psi_{t'} - \psi_t),$$

$$\operatorname{sen} m = \operatorname{sen}(\psi_{t'} - \psi_t), \frac{\operatorname{sen}\omega_{t'}}{\operatorname{sen} i}, \operatorname{sen} m' = \operatorname{sen}(\psi_{t'} - \psi_t)\frac{\operatorname{sen}\omega_t}{\operatorname{sen} i}.$$

Depois, para cada estrella,

com $$NA = m + \alpha_t + a, \ d, \ i,$$

calculando NA', SA' (Part. 1.ª n.º 19, form. 4 ou 6),

ter-se-hão $$a' = NA' - m' - \alpha_{t'}, \ d' = SA'.$$

58. Em um pequeno intervallo de tempo, e relativamente a estrellas que não sejam muito proximas do pólo, podemos passar mais facilmente das coordenadas em uma epocha para as coordenadas na outra epocha proxima, suppondo 'nesse intervallo as variações das coordenadas quantidades muito pequenas da primeira ordem.

Sendo a'_t, d_t as coordenadas da estrella em $1750+t$, refiramos a ascensão recta ao equinoccio ♈ sobre a ecliptica fixa, tomando $a_t = a'_t + \alpha_t$.

Differenciando as formulas de transformação de coordenadas

$$\operatorname{sen} d_t = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \omega \cos \lambda + \cos \omega \operatorname{sen} \lambda,$$

$$\cos a_t \cos d_t = \cos l \cos \lambda,$$

vem

$$\delta d \cos d_t = \delta l \overset{\cos l}{\operatorname{sen}} \omega \cos \lambda + \delta \omega (\cos \omega \operatorname{sen} l \cos \lambda - \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \lambda),$$

$$\delta a_t \operatorname{sen} a_t \cos d_t + \delta d_t \cos a_t \operatorname{sen} d_t = \delta l \operatorname{sen} l \cos \lambda;$$

a primeira das quaes, em virtude da segunda proposta, e de

$$\operatorname{sen} a_t \cos d_t = \operatorname{tang} a_t \cos a_t \cos d_t = \operatorname{tang} a_t \cos l \cos \lambda$$

$$= \cos \omega \operatorname{sen} l \cos \lambda - \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \lambda,$$

e a segunda, em virtude da primeira e de

$$\operatorname{sen} l \cos \lambda = \cos \omega \operatorname{sen} a_t \cos d_t + \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} d_t,$$

se reduzem a:

$$(16)\ldots \begin{cases} \delta d_t = \delta l \cos a_t \operatorname{sen} \omega + \delta \omega \operatorname{sen} a_t, \\ \delta a_t = \delta l (\cos \omega + \operatorname{sen} \omega \operatorname{tang} d_t \operatorname{sen} a_t) - \delta \omega \operatorname{tang} d_t \cos a_t. \end{cases}$$

Sendo pois: δt o intervallo entre as duas epochas; a'_t, d_t, ω, as coordenadas da estrella, e a obliquidade da ecliptica na primeira epocha; δl o augmento de longitude, egual á precessão $\delta\psi$; e $\delta\omega$ a variação da obliquidade, no mesmo intervallo: as formulas (16) dão δd_t, δa_t; e as novas coordenadas são

$$d_{t+\delta t}=d_t+\delta d_t,\ a'_{t+\delta t}=a'_t+\delta a_t-\delta\alpha_t=a'_t+p_a\delta t,$$

sendo p_a a precessão annua.

59. Se, para abranger maior intervallo, quizermos aproveitar as quantidades da segunda ordem, podemos fazer o seguinte:

Sejam, até a segunda ordem, pela formula de Maclaurin:

$$a_t=a+\left(\frac{\delta a}{\delta t}\right)t+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 a}{\delta t^2}\right)t^2,$$

$$d_t=d+\left(\frac{\delta d}{\delta t}\right)t+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 d}{\delta t^2}\right)t^2.$$

Pelas formulas (16), são

$$\frac{\delta a}{\delta t}=(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}a\operatorname{tang}d).\frac{\delta l}{\delta t}-\cos a\operatorname{tang}d.\frac{\delta\omega}{\delta t},$$

$$\frac{\delta d}{\delta t}=\operatorname{sen}\omega\cos a.\frac{\delta l}{\delta t}+\operatorname{sen}a.\frac{\delta\omega}{\delta t}.$$

E, differenciando as expressões de a_t, d_t, o que dá

$$\frac{\delta a_t}{\delta t}=\left(\frac{\delta a}{\delta t}\right)+t\left(\frac{\delta^2 a}{\delta t^2}\right),\ \frac{\delta d_t}{\delta t}=\left(\frac{\delta d}{\delta t}\right)+t\left(\frac{\delta^2 d}{\delta t^2}\right),$$

vê-se que, na ordem de approximação a que nos referimos, as precessões annuas variam proporcionalmente ao tempo.

Portanto podemos passar das coordenadas a'_t, d_t de $1750 + t$ para as coordenadas $a'_{t'}$, $d_{t'}$ de $1750 + t'$ pelo processo seguinte:

Com $$a_t = a'_t + \alpha_t,\ d_t,\ \omega_t$$

calcularemos as precessões para $1750 + t$ pelas formulas

$$\frac{\delta a_t}{\delta t} = (\cos \omega_t + \operatorname{sen} \omega_t \operatorname{sen} a_t \operatorname{tang} d_t)\frac{\delta \psi}{\delta t} - \cos a_t \operatorname{tang} d_t \frac{\delta \omega_t}{\delta t},$$

$$\frac{\delta d_t}{\delta t} = \operatorname{sen} \omega_t \cos a_t \,.\, \frac{\delta \psi_t}{\delta t} + \operatorname{sen} a_t \,.\, \frac{\delta \omega_t}{\delta t};$$

e com ellas acharemos os valores approximados da ascensão recta e da declinação, correspondentes á segunda epocha $1750 + t'$,

$$a_{t'} = a_t + (t' - t)\,.\,\frac{\delta a_t}{\delta t},\ d_t' = d_t + (t' - t)\,.\,\frac{\delta d_t}{\delta t}.$$

Depois com estes valores approximados calcularemos a precessão correspondente á segunda epocha, mudando t em t' nas expressões de $\frac{\delta a_t}{\delta t}, \frac{\delta d_t}{\delta t}$.

Finalmente acharemos os valores mais approximados de $a'_{t'}$ e $d_{t'}$, ajunctando a a_t e d_t a somma das respectivas precessões desde $1750 + t$ até $1750 + t'$, isto é, a somma de $t' - t$ termos em progressão arithmetica, dos quaes $\frac{da_t}{dt}$ e $\frac{da_{t'}}{dt'}$ são os extremos; e referindo depois a ascensão recta ao equinoccio de $1750+t'$. O que dará:

$$a'_{t'}=a'_t+\frac{t'-t}{2}\left(\frac{\delta a_t}{\delta t}+\frac{\delta a_{t'}}{\delta t'}\right)+\alpha_t-\alpha_{t'},$$

$$d_{t'}=d_t+\frac{t'-t}{2}\left(\frac{\delta d_t}{\delta t}+\frac{\delta d_{t'}}{\delta t'}\right).$$

60. Se o catalogo de estrellas dá as precessões annuas, p_a, p_d, para o tempo t, com as suas variações seculares, s_a, s_d; e os movimentos proprios annuos, μ_a, μ_d; teremos:

$$\frac{\delta a_t}{\delta t}=p_a+\frac{\delta\alpha}{\delta t},\ \frac{\delta a_{t'}}{\delta t'}=p_a+\frac{s_a}{100}.(t'-t)+\frac{\delta\alpha}{\delta t'},$$

$$\frac{\delta d_t}{\delta t}=p_d,\ \frac{\delta d_{t'}}{\delta t'}=p_d+\frac{s_d}{100}.(t'-t);$$

E como, por ser $\alpha_t=at+bt^2$, ou $\frac{d\alpha_t}{d_t}=a+2bt$,

se vê que $\left(\frac{d\alpha_t}{dt}+\frac{d\alpha_{t'}}{dt}\right)\left(\frac{t'-t}{2}\right)$ é a somma $\alpha_{t'}-\alpha_t$ de todas as variações de α desde t até t', a substituição em $a'_{t'}$ e $d_{t'}$ dará:

$$a'_{t'}=a'_t+(t'-t)\left[p_a+\frac{s_a}{200}.(t'-t)+\mu_a\right],$$

$$d_{t'}=d_t+(t'-t)\left[p_d+\frac{s_d}{200}.(t'-t)+\mu_d\right].$$

III

Anno sideral; e invariabilidade do dia sideral

61. Em virtude da precessão dos equinoccios, o anno tropico medio differe do anno sideral, determinado pelo intervallo que decorre entre duas conjuncções successivas em ascensão recta do Sol com uma estrella fixa.

Seja T o anno tropico medio, S o anno sideral, e (ψ) o movimento do ponto de Aries sobre a ecliptica durante o anno tropico.

O Sol anda $360^\circ - (\psi)$ durante o anno tropico, e 360° durante o anno sideral. Portanto:

$$360^\circ - (\psi) : 360^\circ :: T : S = \frac{360}{360 - (\psi)} . T;$$

ou

$$S = T + \frac{T . (\psi)}{360 - (\psi)} .$$

Por não variar a precessão proporcionalmente ao tempo, os annos tropicos são deseguaes.

A differença entre dois annos tropicos é egual á differença entre as precessões annuas respectivas, reduzida a tempo na razão de 360° por anno.

Assim, sendo $+0'',0002443\,t$ o excesso da precessão annua correspondente a $1750+t$ sobre a correspondente a 1750, será

$$-\frac{T.24.3600}{360.3600}.0,0002443 = -0^s,005949\,t$$

a differença dos annos tropicos respectivos.

62. Como os movimentos da ecliptica fazem deslocar sobre o equador o ponto equinoccial, e este deslocamento não é proporcional ao tempo, deve d'ahi resultar uma desegualdade no dia sideral, que póde ser sensivel quando se comparam entre si dois dias muito distantes, ou quando se procura a influencia da sua accumulação em muitos dias.

Seja t um numero de annos julianos de $365^d,25$ medios; e i o numero correspondente de dias sideraes, eguaes ao que tinha logar em 1750; isto é, ao intervallo de tempo decorrido 'nesta epocha entre duas passagens meridianas consecutivas do equinoccio medio.

Temos assim 16 $i = 365,25\,t$;

e a expressão de α do n.° 54 reduz-se á

$$\alpha = \frac{0'',205484}{366,25}\,i - \frac{0'',00026595}{(366,25)^2}\,i^2 = ai - bi^2.$$

Durante a primeira revolução diurna do equinoccio sujeito ao movimento α, o movimento d'este equinoccio relativamente ao fixo de 1750 foi o valor de α correspondente a $i=1$, isto é, foi o arco $a-b$. Se o mesmo equinoccio continuasse a mover-se uniformemente, teria em relação ao fixo o movimento $(a-b)\,i$ em i dias; e como o movimento do equinoccio medio, relativamente ao fixo de 1750, foi 'nesse tempo $ai-bi^2$, o movimento d'este equinoccio relativamente áquelle ficticio de movimento uniforme, cuja revolução diurna se tomou por unidade, é a differença dos dois, $(a-b)\,i-(ai-bi^2)$. Assim, designando c uma circumferencia, o arco descripto em movimento diurno pelo equinoccio medio real é

$$A_i = ci - bi + bi^2.$$

E, chamando i' o numero de circumferencias e partes da circumferencia descriptas pelo equinoccio, é

$$ci' = ci - bi + bi^2.$$

63. Portanto, querendo saber quanto de dia sideral de $1750^{\text{ann.}} + i^{d}$ corresponde a um dia de 1750, mudaremos i em $i+1$ na expressão de i', e tomaremos a differença; o que dará a quantidade pedida

$$i'' - i' = 1 + \frac{2bi}{c}.$$

Inversamente, querendo saber quanto do dia de 1750 corresponde a um dia de $1750^{\text{ann.}} + i^{d}$, mudaremos i' em $i'+1$ e i em $i+x$; o que, tomando a differença $1 = x + \frac{b}{c}(2ix - x + x^2)$,

dará a quantidade procurada $x = \frac{c}{c + 2bi - b + bx}$:

ou, suppondo $x=1$ no denominador do segundo membro, e desprezando os quadrados de $\frac{bi}{c}$,

$$x = 1 - \frac{2bi}{c}.$$

Para $i = 366{,}25.5000$ a expressão $\frac{2bi}{c}$ não chega a $\frac{1}{1800}$ de segundo: conseguintemente o dia sideral não tem soffrido variação apreciavel desde os tempos mais remotos até hoje.

64. A differença $x - 1$ accumulada em i dias, desde $i = 1$ até i, dá (*)

$$\Sigma x = i - \frac{bi(i+1)}{c}.$$

Para $i = 366{,}25.4000$ esta expressão é $4^m.43^s{,}75$; correcção pequena, mas á qual se attende nas taboas astronomicas.

(*) Estes i dias são contados desde o fim do primeiro até o fim do i. Se contassemos desde o principio do primeiro até o principio do i, sommariamos desde $i = o$ até $i - 1$; o que daria

$$i - \frac{bi(i-1)}{c}.$$

D'aqui provém a differença das formulas que se lêem nos n.os 111 e 112 do tom. 4.° da Astronomia de Biot. No primeiro d'elles contam-se os i dias desde o fim do primeiro dia até o fim do i, e no segundo desde o principio do primeiro dia até o principio do i.

CAPITULO VI

Da nutação

I

Exposição do phenomeno da nutação

65. Depois de applicar aos logares medios das estrellas a precessão de que acabamos de tractar, e a aberração de que adiante tractaremos, ainda as differenças entre estes resultados e os que dá a observação são tão sensiveis, e tão regulares, que não podem attribuir-se a erros fortuitos da observação ou do calculo.

Bradley, comparando umas com as outras as suas observações, seguidas por alguns annos, achou tal correlação entre estas differenças e as posições dos nodos da orbita lunar, que foi levado a admittir na obliquidade da ecliptica uma variação proporcional ao coseno da longitude do nodo ascendente da Lua, e na posição dos equinoccios uma variação proporcional ao seno da mesma longitude.

Com effeito, applicando ás ascensões rectas e ás declinações das estrellas a precessão e a aberração no sentido d'estas coordenadas; e tomando as differenças entre as ascensões rectas e declinações assim correctas e as observadas, acha-se que:

1.° Na mesma epocha todas as estrellas dão os mesmos valores do augmento da obliquidade $\delta\omega$, e da retrogradação dos equinoccios $\delta\psi$, deduzidos das equações (16) do n.° 58.

2.° Em epochas diversas, a mesma estrella dá valores de $\delta\omega$ e $\delta\psi$ que seguem, com differenças pouco sensiveis, a lei da variação dos cosenos e senos de Ω, isto é, que teem a fórma

$$\delta_1\omega = A \cos \Omega, \quad \delta_1\psi = B \operatorname{sen} \Omega.$$

66. A theoria mostra que, mais rigorosamente, as correcções, de que tractamos, se compõem de termos periodicos dependentes da posição media dos nodos da orbita lunar; d'outros dependentes da posição do Sol na ecliptica; e d'outros finalmente, que dependem da posição da Lua na sua orbita: e assigna a fórma d'estes termos.

Os valores numericos dos coefficientes devem ser dados pelas observações; mas, como os resultados d'ellas não têem sido conformes, os astronomos não concordam a este respeito. São mais geralmente adoptados os valores de Brinckley, que entram nas formulas seguintes:

$$\delta\omega = \begin{cases} 9'',250 \cos \Omega - 0'',0903 \cos 2\Omega \\ + 0'',0900 \cos 2\,☾ + 0'',5447 \cos 2\Theta, \end{cases}$$

$$\delta\psi = \begin{cases} -17'',2985 \operatorname{sen} \Omega + 0'',2082 \operatorname{sen} 2\Omega \\ -0'',2074 \operatorname{sen} 2☾ - 1'',2550 \operatorname{sen} 2\Theta; \end{cases}$$

designando respectivamente Θ e ☾ as longitudes do Sol e da Lua, e Ω a longitude media do nodo ascendente da orbita lunar (*).

67. As correcções, que das variações $\delta\omega$ e $\delta\psi$ resultam para as ascensões rectas e para as declinações são (form. 16 do n.º 57)

$$a' - a = (\cos\omega + \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} a \operatorname{tang} d) \,.\, \delta\psi - \cos a \operatorname{tang} d \,.\, \delta\omega = \mathrm{M},$$

$$d' - d = \operatorname{sen}\omega \cos a \,.\, \delta\psi + \operatorname{sen} a \,.\, \delta\omega = \mathrm{N}.$$

68. 'Nestas formulas attendemos sómente aos termos da primeira

(*) Segundo a theoria, o coefficiente do primeiro termo de $\delta\psi$ é o coefficiente do primeiro termo de $\delta\omega$ multiplicado por $-2 \cot 2\,\omega$; e os coefficientes dos outros termos de $\delta\psi$ são os dos termos correspondentes de $\delta\omega$ multiplicados por $-\cot\omega$ (Mem. da Ac. das Sc. de Paris, t. VII, pag. 249).

ordem em $\delta\omega$ e $\delta\psi$. Se quizermos attender aos da segunda ordem, teremos

$$a'-a=\begin{cases} \left(\mathrm{M}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{2}\left(\dfrac{\operatorname{sen}2a}{2}+\cot\omega\cos a\operatorname{tang}d+\operatorname{sen}2a\operatorname{tang}^2 d\right)\right).\delta\psi^2 \\ -\operatorname{sen}\omega\left(\cos^2 a-\cot\omega\operatorname{sen}a\operatorname{tang}d+\cos 2a\operatorname{tang}^2 d\right).\delta\psi\,\delta\omega \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\operatorname{sen}2a}{2}+\operatorname{sen}2a\operatorname{tang}^2 d\right).\delta\omega^2, \end{cases}$$

$$d'-d=\begin{cases} \left(\mathrm{N}-\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega\operatorname{sen}a}{2}\left(\cot\omega+\operatorname{sen}a\operatorname{tang}d\right)\right).\delta\psi^2 \\ +\operatorname{sen}\omega\cos a\left(\cot\omega+\operatorname{sen}a\operatorname{tang}d\right).\delta\psi\,\delta\omega \\ -\dfrac{\cos^2 a\operatorname{tang}d}{2}.\delta\omega^2. \end{cases}$$

69. Separando o primeiro termo de cada uma das expressões de $\delta\omega$ e $\delta\psi$, que é o mais importante, sejam $\delta_1\omega$, $\delta_1\psi$, as partes respectivas de $\delta\omega$, $\delta\psi$, isto é

$$\delta_1\omega=m\cos\Omega,\ \delta\psi=-n\operatorname{sen}\Omega;$$

e substituamos nas equações do n.° 67.

Se depois entre estas equações eliminarmos a longitude media Ω do nodo da orbita lunar, que no periodo de $18^{\text{ann.}}$ e 214^{dias} passa por todos os valores desde o até 360°, resultará uma equação entre $a'-a$ e $d'-d$, cujo logar geometrico será a serie das posições apparentes das estrellas referidas á sua posição media.

Projectando esta curva no céu; considerando como rectilineos na superficie d'ella os dois arcos, aos quaes referiremos as coordenadas, um o arco de declinação que passa pelo logar medio, outro o arco do parallelo que passsa pelo mesmo logar; e attendendo a que $a'-a$ corresponde 'neste parallelo a $(a'-a)\cos d$: teremos

$$x=d'-d,\ y=(a'-a)\cos d;$$

ou $$x=-n\operatorname{sen}\omega\cos a\operatorname{sen}\Omega+m\operatorname{sen}a\cos\Omega,$$

$$y=-n\cos\omega\cos d\operatorname{sen}\Omega-n\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}a\operatorname{sen}d\operatorname{sen}\Omega-m\cos a\operatorname{sen}d\cos\Omega.$$

Depois eliminando $\cos\Omega$ e $\operatorname{sen}\Omega$ entre ellas, e fazendo

$$n(\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}d+\cos\omega\operatorname{sen}a\cos d)=A,$$

$$m(\operatorname{sen}a\cot\omega\cos d+\operatorname{sen}d)=B,$$

$$\cot\omega\cos d+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}d=C,$$

teremos:

$$\frac{(x\cos a\operatorname{sen}d+y\operatorname{sen}a)^2}{A^2}+\frac{(Cx-y\cos a)^2}{B^2}=1;$$

equação da ellipse descripta pelo logar apparente do astro, em volta do seu logar medio cujas cordenadas são a e d, por ser negativa a expressão

$$\left\{\begin{array}{l}4(B^2\operatorname{sen}a\cos a\operatorname{sen}d-A^2C\cos a)^2\\-4(B^2\cos^2a\operatorname{sen}^2d+A^2C^2)(B^2\operatorname{sen}^2a+A^2\cos^2a)\end{array}\right\}$$

$$=-4^2A^2B^2(C\operatorname{sen}a+\cos^2a\operatorname{sen}d)^2.$$

70. Se quizermos a curva descripta pelo pólo apparente em volta do pólo medio, faremos $d=90°$ na equação precedente, ficando a arbitraria; o que dará

$$\frac{(x\cos a+y\,\text{sen}\,a)^2}{n^2\,\text{sen}^2\,\omega}+\frac{(x\,\text{sen}\,a-y\cos a)^2}{m^2}=1.$$

Esta equação está referida ao centro, mas não aos eixos. Para a referir a elles, transformaremos as coordenadas, suppondo o novo eixo dos x' atraz do eixo dos x (Fig. 5), e para a parte dos $d'-d$, pelas formulas (Curso de Math. puras, Parte 2.ª n.º 233)

$$x\cos\alpha-y\,\text{sen}\,\alpha=x',\ x\,\text{sen}\,\alpha+y\cos\alpha=y'.$$

A simples inspecção d'estas formulas e da equação proposta mostra que, fazendo $\alpha=90°-a$, aquella equação se transforma na da ellipse referida aos eixos

$$\frac{y'^2}{n^2\,\text{sen}^2\,\omega}+\frac{x'^2}{m^2}=1.$$

E como é $\quad ♈p'=♈p+pp'=a+\alpha=90°,$

vê-se que o novo eixo dos x' é o coluro dos solsticios. O que tambem se conheceria immediatamente fazendo a arbitraria $a=90°$ na equação proposta em x e y.

D'onde resulta que o pólo apparente descreve em volta do pólo medio uma ellipse, cujo semi-eixo maior, tomado sobre o coluro dos solsticios, é m, e cujo semi-eixo menor é

$$n\,\text{sen}\,\omega=\frac{m\cos 2\,\omega}{\cos\omega}.$$

71. As expressões

$$x' = m \cos \Omega,\ y' = -n \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \Omega,$$

90° que são as de x, y, do n.º 69, quando 'nellas se suppõem $d=0$ e $a=90$, dão logar á construcção seguinte:

Sobre o eixo maior $pp' = 2m$ (Fig. 6) descrevamos um circulo; e supponhamos que o raio d'elle começa a retrogradar desde o coluro dos solsticios, com uma velocidade angular egual á do nodo medio da orbita da Lua, no momento em que este nodo coincide com o equinoccio da primavera.

Em qualquer posição PK do raio, será

$$\mathrm{KP}p = 360° - \Omega,\ \mathrm{RP} = m \cos \Omega = x',$$

$$t\mathrm{R} = \frac{n \operatorname{sen} \omega}{m} . \mathrm{RK} = -n \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \Omega = y';$$

conseguintemente o ponto, onde a ordenada encontra a ellipse, será o pólo apparente.

72. Transformando os productos dos senos e cosenos de a e Ω em senos e cosenos de sommas e differenças, as expressões de $d' - d$ e $a' - a$ do n.º 69, fazendo

$$h = \frac{m + n \operatorname{sen} \omega}{2},\ k = \frac{m - n \operatorname{sen} \omega}{2},\ l = n \cos \omega,$$

tomam a fórma

$$d' - d = h \operatorname{sen} (a - \Omega) + k \operatorname{sen} (a + \Omega),$$

$$a - a' = l \operatorname{sen} \Omega + [h \operatorname{sen} (90° + a - \Omega) + k \operatorname{sen} (90° + a + \Omega)] \operatorname{tang} d:$$

completando-se as expressões rigorosas com termos similhantes, nos quaes, em logar de Ω, apparecem respectivamente 2Θ, $2☾$, 2Ω.

Para facilitar o calculo d'estas expressões, podem formar-se seis taboas geraes: de $h \operatorname{sen} x$, $k \operatorname{sen} x$, $l \operatorname{sen} x$, $h' \operatorname{sen} x$, $k' \operatorname{sen} x$, e $l' \operatorname{sen} x$.

Taes são as taboas geraes de nutação, que contem o *Connaissance des temps* para 1810.

Os coefficientes analogos em Ω, 2Θ, $2☾$, 2Ω, são

$$h = 8'',068 + \frac{\delta\omega''}{30000},\ k = 1'',182 - \frac{\delta\omega''}{30000},\ l = 15'',869 - \frac{\delta\omega''}{30000},$$

$$\begin{array}{lll} h' = 0\ ,522 & ,\ k' = 0\ ,023 & ,\ l' = \ 1\ ,151 \\ h'' = 0\ ,165\,h' & ,\ k'' = 0\ ,165\,k' & ,\ l'' = \ 0\ ,165\,l' \\ h''' = -0\ ,166\,h' & ,\ k''' = -\,0,166\,k' & ,\ l''' = -0,166\,l' \end{array}$$

Das expressões de Peters, adoptadas no *nautical almanac*,

$$\delta\omega = 9'',2237 \cos\Omega - 0'',0895 \cos 2\Omega + 0'',5507 \cos 2\Theta,$$

$$\delta\psi = -\,17,2524 \operatorname{sen}\Omega + 0,2063 \operatorname{sen} 2\Omega - 1,2691 \operatorname{sen} 2\Theta,$$

resultam os coefficientes analogos em Ω, 2Θ:

$$h = 8'',0456;\ k = 1'',1781;\ l = 15'',8263$$
$$h' = 0\ ,5279;\ k' = 0\ ,0228;\ l' = 1\ ,1642.$$

73. As expressões completas, até a primeira ordem, de $a' - a$ e $d' - d$, (n.^os^ 66 e 67) têem a fórma

$$a' - a = \cos\omega\delta\psi + \operatorname{tang} d\,.\,\Sigma\,(A_i \operatorname{sen} a \operatorname{sen}\alpha - B_i \cos a \cos\alpha),$$

$$d' - d = \Sigma\,(A_i \cos a \operatorname{sen}\alpha + B_i \operatorname{sen} a \cos\alpha),$$

sendo α cada uma das quantidades Ω, 2Ω, $2☾$, 2Θ.

Fazendo $A_i \operatorname{sen} \alpha = M \operatorname{sen} (\alpha + x)$, $B_i \cos \alpha = M \cos (\alpha + x)$,

ou
$$\operatorname{tang} (\alpha + x) = \frac{A_i}{B_i} \operatorname{tang} \alpha,$$

$$M = \sqrt{A_i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + B_i^2 \cos^2 \alpha} = \frac{A_i \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + x)} = \frac{B_i \cos \alpha}{\cos (\alpha + x)},$$

podemos dar a $a' - a$ e $d' - d$ a fórma

$$a' - a = \cos \omega \,.\, \delta \psi - \operatorname{tang} d \,.\, \Sigma M \cos (\alpha + a + x),$$

$$d' - d = \Sigma M \operatorname{sen} (\alpha + a + x).$$

Esta transformação é vantajosa quando se querem as correcções da nutação para muitas estrellas.

II

Explicação dos phenomenos da precessão e nutação

74. Sem deduzir da theoria as expressões da obliquidade da ecliptica, da precessão, e da nutação, procuremos ao menos explicar como estes phenomenos estão ligados com as attracções do Sol, da Lua, e dos planetas, que os produzem.

Se a terra fosse espherica, a resultante de todas as acções do Sol sobre ella passaria pelo centro, e não alteraria a obliquidade da ecliptica, nem a direcção da linha dos eqüinoccios; mas, como não é espherica, a resultante não passa pelo centro, e altera aquelles elementos.

Supponhamos o espheroide terrestre decomposto na esphera inscripta, cujo diametro é o eixo dos pólos: e no menisco restante, cuja altura vae crescendo dos pólos para o equador. E para mais simplicidade supponhamos ainda este menisco reunido no equador; considerando assim a terra como composta da esphera inscripta, e d'um annel equatorial.

Por ser a acção do Sol, nas suas diversas posições, proporcional á massa e funcção das distancias, é claro que podemos representar a acção media d'este astro imaginando a sua massa repartida uniformemente por todos os pontos da sua orbita, e formando assim um annel ecliptico. O que reduz a questão de conhecer a acção media do Sol sobre o annel terrestre equatorial á de conhecer a acção do annel solar.

Posto isto, sejam (Fig. 7): EE′, QQ′ as projecções celestes da ecliptica, e do equador; e ♈ a do equinoccio da primavera. Se considerarmos dois pontos do equador M, M′, equidistantes do equinoccio, é claro, attendendo á symmetria das duas partes superior e inferior do annel equatorial, que a acção do annel ecliptico sobre os elementos M, M′, decomposta perpendicularmente ao plano do annel equatorial, dá duas componentes eguaes, e em sentido opposto, dirigidas por MP e M′P′. Estas forças, combinadas com a de rotação da terra, dirigida por MQ e Q′M′, e levemente modificada pelas componentes equatoriaes, dá duas resultantes dirigidas por ♈′M e M′♈″, que ambas, com as symmetricas relativamente ao equinoccio do outomno, tendem a imprimir ao nodo ♈ o movimento retrogado por ♈♈′♈″; e das quaes a primeira tende a diminuir a inclinação da orbita M♈E′, como a segunda tende a augmentar a mesma inclinação M′♈E.

O mesmo se póde dizer a respeito dos outros elementos equidistantes da linha dos equinoccios; por conseguinte a inclinação fica constante, e os equinoccios retrogradam.

75. A differença entre as figuras do menisco e do supposto annel equatorial, e a necessidade de transportar no seu movimento a esphera inscripta, alteram a velocidade da retrogradação; mas não mudam as conclusões, que estabelecemos, em virtude das quaes a acção media do Sol, que sem a rotação da terra diminuiria a inclinação do equador sobre a ecliptica e não alteraria a direcção da linha dos equinoccios, sendo combinada com aquella rotação, passa a mobilidade para a linha dos equinoccios, que faz retrogradar, e a invariabilidade para a inclinação do equador sobre a ecliptica.

76. Se a Lua se movesse na ecliptica, a sua acção media produziria um effeito similhante ao que produz a do Sol.

Para ter esta acção media, considerariamos a massa da Lua como distribuida uniformemente pela sua orbita, com o que attenderiamos ao effeito medio relativamente ás suas posições na orbita; e depois considerariamos esta massa como posta na ecliptica, formando um annel ecliptico de raio egual á distancia da Lua á terra, com o que attenderiamos ao effeito medio relativamente ás posições da orbita.

Portanto é em virtude das acções medias reunidas dos dois astros que têem logar os phenomenos referidos da invariabilidade da inclinação, e da precessão dos equinoccios.

77. Como a acção do Sol varía nas suas diversas posições, deve, em cada uma d'ellas, applicar-se ao effeito da acção media d'este astro uma equação dependente da sua longitude; e porque em cada uma das metades superior e inferior da sua orbita elle se acha, a respeito do menisco terrestre, em posições similhantes ás que tem na outra metade, o periodo da equação, de que tractamos, que é a nutação solar, deve ser metade do tempo da revolução do Sol: o que explica a proporcionalidade da nutação solar em longitude ao seno do dobro da longitude do Sol, e em obliquidade ao coseno do mesmo argumento.

Similhantemente, como a Lua não está sempre no mesmo ponto da sua orbita, e como o plano d'esta orbita varía de posição, á acção media lunar na ecliptica deve applicar-se uma equação, cujos termos dependam da posição da Lua na orbita lunar, e da posição d'essa orbita. Ora a posição da orbita lunar só torna a ser a mesma relativamente ao menisco terrestre, quando o nodo lunar tem feito o seu gyro completo; d'onde resulta o termo principal da nutação lunar, que é proporcional ao seno da longitude do nodo da orbita da Lua na nutação em longitude, e ao coseno do mesmo argumento na nutação em obliquidade. E em quanto á posição da Lua na sua orbita, é claro que ella se acha, a respeito do menisco terrestre, nas mesmas posições na metade superior que na inferior; d'onde resulta na nutação em longitude o termo proporcional ao seno do dobro da longitude lunar, e na nutação em obliquidade o termo proporcional ao coseno do mesmo argumento.

78. Já vimos que a acção dos planetas perturba o movimento do Sol, e que o effeito d'esta acção depende das posições d'elles nas suas orbitas relativamente á terra. D'onde resulta naturalmente a divisão dos effeitos da acção do systema planetario sobre o movimento do Sol em *periodicos*, que devem accrescentar-se ás coordenadas ellipticas, e em *seculares*, que mais commodamente se referem aos elementos ellipticos.

Um d'estes effeitos é a variação da obliquidade da ecliptica sobre o equador, a qual, tendo logar desde o momento em que começa a acção que a produz, se compõem de termos proporcionaes ao tempo, e de outros proporcionaes ás potencias superiores do tempo. Além d'isso, como da mudança da ecliptica resulta a mudança da intersecção d'ella com o equador, a precessão apparente resulta da combinação do movimento de precessão sobre a ecliptica fixa, devido ás acções medias do Sol e da Lua, com a mudança do equinoccio, devida ao movimento da ecliptica apparente em relação á fixa.

79. A mudança da ecliptica apparente colloca a orbita do Sol a respeito da ecliptica fixa em circumstancias em parte analogas áquellas nas quaes está a orbita da Lua a respeito da ecliptica; por conseguinte ao effeito da acção do Sol sobre o menisco terrestre, qual teria logar se elle se movesse na ecliptica fixa, devem accrescentar-se equações dependentes da mudança de posição da ecliptica apparente. Porém, como esta mudança se opéra lentamente, é claro que as equações, de que tractamos, devem ter periodos immensamente maiores que o da nutação lunar.

D'onde resultam variações na obliquidade do equador sobre a ecliptica fixa, e na precessão dos equinoccios sobre a mesma ecliptica. Mas, começando estes effeitos a ter logar sómente depois que a acção dos planetas produz a mudança da ecliptica, que é a sua causa, vê-se que a velocidade d'elles deve ser nulla quando começa aquella acção, e que por isso os mesmos effeitos se devem compor sómente de termos proporcionaes ao quadrado do tempo, e ás potencias superiores.

80. As considerações, que acabamos de apresentar, explicam as variações $\omega - \omega_0$, ψ, $(\omega) - \omega_0$, (ψ), de que tractamos no n.° 53, e as $\delta\omega$, $\delta\psi$ de que tractamos no n.° 66.

O complicado phenomeno da precessão, nutação, e mudança de obliquidade decompõe-se assim nos seguintes:

1.° Precessão sobre a ecliptica fixa, devida ás acções medias da Lua e do Sol sobre o espheroide terrestre.

2.° Mudança da inclinação da *ecliptica sobre o equador*, devida directamente á acção dos planetas sobre o Sol e sobre a terra; e variação que, em virtude d'esta mudança, soffre a precessão, e cujo effeito se deve accrescentar á precessão sobre a ecliptica fixa para ter a precessão apparente.

3.° Nutação periodica luni-solar, ou oscillação que produzem na inclinação do *equador sobre a ecliptica*, e na precessão, as variações da longitude do Sol, da longitude do nodo da orbita lunar, e da longitude da Lua.

Este effeito ajuncta-se como equação.

4.° Nutação secular, ou variações que produz nos mesmos elementos a mudança de posição da ecliptica, devida á acção dos planetas, e que são assim um effeito como reflectido da mesma acção.

Este effeito involve-se nas expressões da obliquidade media, e da precessão.

CAPITULO VII

Determinação mais exacta da excentricidade da orbita solar

81. Para fazer concorrer muitas observações á determinação da excentricidade, usando da interpolação elliptica, sirvamo-nos das proximas da maxima equação do centro.

Differenciando em ordem a t as equações do movimento elliptico (n.º ~~18~~), 19

$$nt = u - e \operatorname{sen} u,$$

e $$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} u, \text{ ou } \frac{1+\cos v}{1+\cos u} = \frac{1-e}{1-e\cos u},$$

resulta $$\frac{d(nt)}{dt} = \frac{du}{dt}(1 - e\cos u),$$

e $$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} v}{\cos^2 \frac{1}{2} u} \cdot \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{1+\cos v}{1+\cos u} \cdot \frac{du}{dt},$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos u)^2} \cdot \frac{d(nt)}{dt}.$$

A condição de ser maxima a equação do centro dá

$$\frac{d(v-nt)}{dt}=o,\ \text{ou}\ \frac{dv}{dt}=\frac{d(nt)}{dt},$$

que substituida na equação precedente, a reduz a

$$1=\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos u)^2},\ \text{ou}\ \cos u=\frac{1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{e},$$

e

$$\cos v=\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{4}}-1}{e}.$$

82. Como estes valores de cos u e cos v são da ordem da excentricidade, o angulo u é um pouco menor que 90°, e o angulo v um pouco maior que 90°, na epocha da maxima equação do centro. Fazendo pois $u=90°-u'$, $v=90°+v'$, são u', v', arcos muito pequenos da ordem da excentricidade; e as expressões precedentes transformam-se em

$$\text{sen}\,u'=\frac{1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{e},\ \text{sen}\,v'=\frac{1-(1-e^2)^{\frac{3}{4}}}{e}.$$

Desenvolvendo estas expressões em serie até a terceira potencia de e, e exprimindo u' e v' em segundos, resulta, até essa ordem,

$$u'\,\text{sen}\,1''=\frac{1}{4}e+\frac{37}{384}e^3,$$

$$v'\,\text{sen}\,1''=\frac{3}{4}e+\frac{21}{128}e^3.$$

E porque, até a mesma ordem, é

$$v-nt=v'+u'+\frac{e\cos u'}{\operatorname{sen} 1''}=v'+u'+\frac{e-\frac{1}{2}e\operatorname{sen}^2 u'}{\operatorname{sen} 1''}:$$

se 'nesta expressão substituirmos em logar de v', u', sen u', as suas expressões precedentes, resultará a maxima equação do centro

$$E=\frac{2e+\frac{88}{384}e^3}{\operatorname{sen} 1''},$$

que dá $$e=\frac{1}{2}E\operatorname{sen} 1''-\frac{11}{768}(E\operatorname{sen} 1'')^3.$$

Finalmente, substituindo estes valores de u, v, $v-nt$ na primeira equação do movimento elliptico, resulta a expressão da anomalia media nt, que corresponde á maxima equação do centro,

$$nt=90^\circ-\frac{5}{4}e-\frac{25}{384}e^3.$$

83. Se pelas observações se determinar a maxima equação do centro, a penultima formula precedente dará e com grande approximação, por serem os erros de E, proveniente d'ellas, attenuados pelo factor sen $1''$.

Sejam: s, S (Fig. 8) as longitudes ♈Fs, ♈FS, do Sol medio e do Sol verdadeiro no instante em que a equação do centro é maxima; s', S', as longitudes ♈Fs', ♈FS$'$ dos mesmos sóes, d'ahi a seis mezes, proximamente, quando a equação do centro tornar a ser maxima; E a maxima equação do centro na primeira epocha; e β a parte da sua diminuição secular, correspondente ao intervallo decorrido entre as duas epochas. Teremos

$$E=S-s,\ E-\beta=s'-S',$$

e por conseguinte

$$E = \frac{s' - s - (S' - S) + \beta}{2},$$

sendo β apenas $0',0014$.

84. Ainda que a equação do centro assim determinada não seja exactamente a maxima, por não ser provavel que as duas observações correspondam precisamente ao momento d'ella, com tudo approxima-se muito do seu verdadeiro valor; porque se vê facilmente, quer pela inspecção das taboas do Sol, quer pela formula

$$\frac{d(v - nt)}{d(nt)} = 2e \cos nt + \ldots,$$

que, na proximidade da maxima equação do centro, onde nt differe pouco de 90°, as variações da anomalia influem em muito fraca proporção nas da equação do centro. Mas ainda se póde corrigir esta pequena differença, e aproveitar maior numero de observações pouco distantes da epocha da maxima equação, como vamos vêr.

Sejam: l a longitude do Sol, dada pelas taboas em um tempo proximo da epocha na qual a equação do centro é maxima, antes da passagem pelo apogeu; l' a longitude do Sol, dada pelas taboas, em um tempo proximo da epocha na qual tem logar o mesmo phenomeno, depois da passagem pelo apogeu; e $nt + \varpi = M$, $nt' + \varpi' = M'$, as longitudes medias n'estes dois tempos. Se chamarmos: δM, $\delta M'$, o que falta ás longitudes medias dos dois tempos, para serem as correspondentes ás epochas da maxima equação do centro; e δE, $\delta E'$, o que falta ás duas equações do centro respectivas para serem as maximas: teremos nas epochas da maxima equação do centro, segundo as taboas:

$$1.^{a}\ \text{epocha} \begin{cases} \text{long. verd.} = l + \delta M + \delta E \\ \text{long. med.} = M + \delta M \end{cases}$$

$$2.^{a}\ \text{epocha} \begin{cases} \text{long. verd.} = l' + \delta M' + \delta E' \\ \text{long. med.} = M' + \delta M'. \end{cases}$$

Logo:

$$1.^a \text{ epocha.... long. verd.} - \text{long. med.} = l - M + \delta E,$$

$$2.^a \text{ epocha.... long. med.} - \text{long. verd.} = M' - l' - \delta E';$$

e por conseguinte

$$\text{maxima equação, } E = \frac{M' - M - (l' - l) - (\delta E' - \delta E) + \delta}{2} \dots (a).$$

85. Se a excentricidade *e* tem um pequeno erro *de*, os erros correspondentes da longitude são

$$dl = \frac{2 \operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} 1''} . de, \; dl' = \frac{2 \operatorname{sen} nt'}{\operatorname{sen} 1''} . de,$$

que, perto da maxima equação, onde sen nt e sen nt' se approximam respectivamente de $+1$ e -1 (n.º 82), os coefficientes de *de* elevam muito.

Em quanto a δE, cuja expressão (n.os 20 e 82) é

$$\delta E = \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} (1 - \operatorname{sen} nt) - \frac{5}{4} . \frac{e^2}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} 2nt \dots,$$

o erro *de* da excentricidade dá

$$d(\delta E) = \frac{2}{\operatorname{sen} 1''} (1 - \operatorname{sen} nt) . de - \frac{5}{2} \frac{e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} 2nt . de \dots,$$

que, por serem, nas mesmas epochas, sen nt e sen $2nt$ muito proximos respectivamente de $+1$ e o, é uma pequena quantidade.

Finalmente, em quanto á influencia que um pequeno erro de ϖ póde ter em δE, a equação

$$d(\delta E) = 2e \cos(nt) \,.\, d\varpi \ldots.$$

mostra que o erro de δE não passa de $\frac{1}{30}$ de $d\varpi$, e que é muito menor perto da epocha da maxima equação do centro.

Portanto, se na equação (a) substituirmos, em logar de l, l', dados pelas taboas, os seus valores S, S', deduzidos da observação, para evitar a influencia dos erros das mesmas taboas provenientes do erro de e; e em logar de δE, δE', substituirmos os seus valores achados pelas taboas, ou pelas suas expressões analyticas: teremos, com maior approximação,

$$\text{max. eq.} = \frac{M' - M - (S' - S) + \beta}{2} - \frac{\delta E' - \delta E}{2} \ldots (17).$$

86. Fazendo assim entrar na expressão da maxima equação do centro o movimento medio M' — M, e o movimento verdadeiro S' — S, dado pela observação; e as quantidades δE, δE', que faltam ás respectivas equações do centro para serem as maximas, dadas pelas taboas: o meio entre os resultados de muitos pares de observações, que se fizerem concorrer para a determinação d'este elemento, dará o seu valor com maior exactidão,

$$\text{max. eq.} = \frac{\Sigma(M' - M) - \Sigma(S' - S) - \Sigma(\delta E' - \delta E)}{2n} + \frac{\beta}{2},$$

sendo $2n$ o numero total das observações.

CAPITULO VIII

Determinação mais exacta do perigeu, e sua variação

I

Posição do perigeu

87. Se pelo methodo exposto no n.º 17 calcularmos a longitude perigéa em duas epochas muito afastadas uma da outra, acharemos que o perigeu muda consideravelmente em relação ao equinoccio.

A differença d'estas longitudes dividida pelo numero de annos tropicos decorridos entre as duas observações dá o movimento annuo tropico do perigeu. E como os erros das longitudes são tantos mais attenuados pela divisão quanto maior intervallo ha entre as observações, a imperfeição d'estas é em grande parte compensada pela sua distancia. D'onde resulta que o movimento annuo do perigeu assim determinado se póde tomar como tendo bastante approximação.

D'este modo as observações de Flamesteed e de Maskeline em 1690 e em 1775 dão

$$277^\circ.35',5170 \text{ e } 279^\circ.3',2832,$$

e por conseguinte o movimento annuo tropico do perigeu

$$m = 61'',95.$$

A theoria dá mais exactamente $m = 61'',9056432.$

88. Seja T o anno tropico medio; e A o anno anomalistico, isto é, o intervallo de tempo que o Sol gasta em voltar á mesma anomalia.

Em um anno anomalistico o Sol anda 360° em anomalia; e em um anno tropico anda $360° - m$. Logo

$$360° - m : 360° :: T : A = \frac{360\,T}{360 - m},$$

$$A = T + \frac{mT}{360} + \left(\frac{m}{360}\right)^2 T + \ldots.$$

Suppondo $T = 365^d{,}242264$, e $m = 61'',9056432$,

resulta $A = 365^d{,}259711$.

89. Achados assim A e m com bastante approximação, passemos a determinar mais exactamente a linha dos apsides, fazendo concorrer para isso muitas observações.

Segundo o que vimos no capitulo precedente, o apogeu está equidistante dos dois logares do Sol em que a equação do centro é maxima. depois de correcto o primeiro do movimento do apogeu no intervallo de tempo que o Sol emprega em passar d'elle para o segundo. Chamando pois: S, S', as longitudes observadas perto da maxima equação do centro; t, t', os tempos das observações; δt, $\delta t'$, as differenças entre estes tempos e as epochas da maxima equação; δE, $\delta E'$, o que falta ás equações do centro, correspondentes aos tempos das observações, para serem a maxima: teremos

$$\frac{\varpi + \varpi'}{2} = \frac{S + S' + n(\delta t + \delta t') + \delta E + \delta E'}{2} - 180°,$$

valor da longitude do perigeu na epocha intermedia entre as duas $t + \delta t$ e $t' + \delta t'$.

E a longitude $(\tilde{\omega})$ do perigeu, para uma epocha anterior Θ annos a esta, será

$$(\tilde{\omega}) = \frac{S + S' + n(\delta t' + \delta t) + \delta E + \delta E'}{2} - 180^\circ - m\,\Theta.$$

Applicando pois esta equação a um numero i de pares de observações annuaes da mesma especie, teremos

$$(\tilde{\omega}) = \frac{\Sigma[S + S' + n(\delta t' + \delta t) \cancel{- 2m\Theta}]}{2i} - 180^\circ. \quad \delta E + \delta E' -$$

Mas, como $\delta t'$ e δt não se podem obter com grande exactidão, por variarem muito pouco as equações do centro na proximidade da maxima, convém ainda usar do methodo seguinte.

90. Sejam: l, l', duas longitudes observadas, a primeira perto do perigeu, a segunda perto do apogeu; τ, τ' os tempos d'essas observações, dados pelo relogio; t, t', os tempos desconhecidos d'ellas, contados desde a passagem pelo perigeu.

Se entre as primeiras equações (9) do n.º 19

$$nt = u - e \operatorname{sen} u, \quad \operatorname{tg}\frac{l - \tilde{\omega}}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{1}{2}u,$$

eliminassemos o angulo auxiliar u, resultaria uma equação $l - \tilde{\omega} = ft$; e como, chamando $(\tilde{\omega})$ a longitude do perigeu no instante da passagem do Sol por elle, é $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}) + mt$ o seu valor no fim do intervallo t de poucos annos ou de fracção de anno, que separa o tempo correspondente a $(\tilde{\omega})$ dos tempos das observações que se querem fazer concorrer para a determinação d'este elemento, ficaria

$$l - (\tilde{\omega}) - mt = f(t).$$

Similhantemente para uma observação proxima do apogeu teriamos

$$l' - (\tilde{\omega}) - mt' = f(t').$$

E conhecemos o intervallo de tempo θ decorrido entre as duas observações,

$$t' - t = \theta.$$

Portanto estas tres equações determinariam a longitude do perigeu (ϖ) no instante da passagem do Sol por esse ponto, assim como os intervallos de tempo t, t' decorridos entre aquella passagem e os instantes das duas observações; e subtraíndo cada um d'esses intervallos do tempo da respectiva observação, teriamos tambem o tempo da passagem do Sol pelo perigeu.

91. Determinando assim muitos valores da longitude do perigeu e do tempo da passagem do Sol por este ponto, o meio termo entre esses valores daria mais exactamente os dois elementos.

A difficuldade reduz-se a eliminar u: o que não se pode fazer senão pela desenvolução em series, por ser transcendente a primeira equação. Mas, quando as observações forem sufficientemente proximas do perigeu ou do apogeu, estas series tornar-se-hão muito convergentes; e bastará aproveitar as primeiras potencias das quantidades que 'nellas são muito pequenas. O que vamos fazer nos numeros seguintes.

perigeu 92. Como $l - \varpi$ e u são quantidades muito pequenas na proximidade do apogeu, resulta, desprezando as potencias superiores d'ellas,

$$nt = u(1-e),\ l - \varpi = l - (\varpi) - mt = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot u = nt \cdot \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}}.$$

Em quanto ao apogeu, sejam t', l', o tempo d'uma observação feita perto d'este ponto, e a longitude respectiva.

O tempo d'essa observação, contado do instante da passagem pelo apogeu, é

$$t' - \frac{1}{2}\mathrm{A} = (t);$$

e a longitude do apogeu no instante da observação é

$$l' = 180° + \varpi' = 180° + (\varpi) + mt'.$$

Se contarmos pois os angulos vectores desde o apogeu, para o que basta mudar e em $-e$, ficaremos nas mesmas circumstancias em que estavamos na observação proxima do perigeu; e teremos, como 'nella,

$$l'-\alpha=n(t)\cdot\frac{\sqrt{1-e}}{(1+e)^{\frac{1}{2}}}.$$

ou

$$l'-180^\circ-(\varpi)-mt'=\frac{nt'\sqrt{1-e}}{(1+e)^{\frac{1}{2}}}-n\frac{A}{2}\frac{\sqrt{1-e}}{(1+e)^{\frac{1}{2}}}.$$

Finalmente, eliminando t' e (ϖ) entre as tres equações que acabamos de formar,

$$(b)\ldots\left\{\begin{aligned}&t\left(1+\frac{m(1-e)^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{1+e}}\right)=[l-(\varpi)]\frac{(1-e)^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{1+e}},\\ &t'\left(1+\frac{m(1+e)^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{1-e}}\right)=[l'-(\varpi)-180^\circ]\frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{1-e}}+\frac{1}{2}A,\\ &t'-t=\theta,\end{aligned}\right.$$

virá (*)

$$t=\frac{(1-e)^2}{4e}\left(\theta-\frac{A}{2}\right)+\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{4e}\cdot\frac{(m\theta+l+180^\circ-l')}{n}\ldots(18).$$

(*) Se quizessemos ter (ϖ) com maior approximação, poderiamos, chamando t_1 e t'_1 os primeiros valores achados de t e t', escrever do modo seguinte as equações do n.º 90, ate á 3.ª ordem:

$$nt=u(1-e)+\frac{1}{6}eu^3=u(1-e)+\frac{1}{6}e\left(\frac{nt_1}{1-e}\right)^3,$$

$$l-\varpi=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}u-\frac{1}{6}\frac{e\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{1}{2}}}u^3=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}u-\frac{1}{6}\frac{e\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{nt_1}{1-e}\right)^3.$$

93. Portanto: sendo τ_1, τ_2, τ_3, ... os tempos de i observações proximas do perigeu; τ', τ'', τ''',..... os tempos de i observações proximas do apogeu; t_1, t_2, t_3,..... os valores de t_x calculados para cada um dos primeiros tempos pela formula (18); e $t'=t_1+\theta'$, $t''=t_1+\theta''$,.... os valores de $t^{(x)}$ para cada um dos segundos tempos: teremos os tempos das passagens pelo perigeu, e pelo apogeu,

$$\text{Passagem pelo perigeu} = \frac{\Sigma\tau_x - \Sigma t_x}{i},$$

$$\text{Pass. pelo apog.} = \frac{\Sigma\tau^{(x)} - \Sigma t^{(x)}}{i} + \frac{1}{2}\text{A}.$$

Depois a substituição de t ou t' nas equações (b) dará a longitude do perigeu no instante da passagem do Sol por elle.

Finalmente com os valores da longitude do perigeu assim achados pelo concurso de muitas observações, em epochas muito distantes, poderão determinar-se mais aproximadamente A e m. E por este processo se irão assim aperfeiçoando successivamente os elementos A, m, P, ϖ.

E fazendo

$$nt - \frac{1}{6}e\left(\frac{nt_1}{1-e}\right)^3 = nt_2, \quad l + \frac{1}{6}\frac{e\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{nt_1}{1-e}\right)^3 = l_2,$$

$$nt' + \frac{1}{6}e\left(\frac{n(t'_1 - \frac{1}{2}\text{A})}{1+e}\right)^3 = nt'_2, \quad l' - \frac{1}{6}\frac{e\sqrt{1-e}}{(1+e)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{n(t'_1 - \frac{1}{2}\text{A})}{1+e}\right)^3 = l'_2,$$

$$\theta_2 = t'_2 - t_2 = \theta + \frac{1}{6}\frac{e}{n}\left[\left(\frac{n(t'_1 - \frac{1}{2}\text{A})}{1+e}\right)^3 + \left(\frac{nt_1}{1-e}\right)^3\right].$$

achariamos t_2 pela formula (18), pondo 'nella l_2, l'_2 e θ_2 em logar de l, l' e θ. Depois teriamos

$$t = t_2 + \frac{1}{6}\frac{e}{n}\left(\frac{nt_1}{1-e}\right)^3.$$

II

Influencia da posição do perigeu na grandeza das estações e do anno tropico.

94. A duração das estações varía com a posição do perigeu. Porque, sendo primavera, estio, outomno e inverno os intervallos de tempo comprehendidos entre os instantes nos quaes as longitudes do Sol são respectivamente 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, a estação durará mais ou menos, segundo se approximar menos ou mais do perigeu o intervallo que a comprehende. Actualmente as estações compõem-se do numero seguinte de dias:

Inverno...........	$89^d.\ 1^h,0$
Primavera	92 .20 ,7
Estio	93 .14 ,4
Outomno	89 .17 ,8

95. Conhecida a posição do perigeu para um tempo dado, podemos facilmente saber quando este ponto teve, ou quando hade ter, outra posição, e calcular depois as differenças das estações 'nessa epocha: o que póde ser util nas investigações chronologicas.

Para isso: chamando (ϖ) a longitude do perigeu em uma epocha dada, por exemplo, no principio de 1750; ϖ a sua longitude em outra epocha; t o numero positivo ou negativo de annos posteriores ou anteriores que separam a segunda epocha da primeira; e m o movimento do perigeu em longitude: bastará fazer

$$t = \frac{\varpi - (\varpi)}{m},$$

ou antes $$t = \frac{\varpi - (\varpi)}{m + m't},$$

suppondo $\varpi = (\varpi) + mt + m't^2$. (*)

Assim é que procurando saber quando o perigeu coincidiu, ou coincidirá, com o equinoccio de primavera, com o solsticio de estio, com o equinoccio do outomno, ou com o solticio de inverno, se fará na expressão de t, respectivamente,

$$\varpi = (0^\circ \text{ ou } 360^\circ),\ \varpi = 90^\circ,\ \varpi = 180^\circ,\ \varpi = 270^\circ.$$

96. O movimento do perigeu e a nutação fazem variar o anno tropico verdadeiro, e o tornam differente do anno tropico medio.

Consideremos o Sol verdadeiro no ponto S (Fig. 9), e o medio no ponto s; e seja $nt + \varepsilon - \varpi$ a anomalia media correspondente. A equação do centro será

$$Ss = Q = a \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \varpi) + b \operatorname{sen} 2(nt + \varepsilon - \varpi) + \dots$$

Quando o Sol medio volta á mesma posição tropica, completando-se o anno tropico medio, a variação $\delta\varpi = m$ da longitude do perigeu faz variar Q de

$$\delta Q = -m\,[a \cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \dots];$$

e a longitude elliptica do Sol é

$$\Upsilon S' = \Upsilon S - ma \cos(nt + \varepsilon - \varpi)\dots.$$

(*) Segundo as taboas solares de Leverrier é

$$m = 61'',6995,\ m' = 0'',0001823,$$

contando t desde 1850.

Alem d'isso, durante o anno tropico medio, o equinoccio Υ passa para Υ' em virtude da nutação; e a longitude verdadeira, contada do equinoccio apparente é $\Upsilon' S'$.

Portanto o excesso da longitude verdadeira $\Upsilon' S'$ que o Sol tem no fim do anno tropico medio, sobre a longitude verdadeira ΥS, que tinha no principio do mesmo anno, é

$$\Upsilon\Upsilon' + SS' = \delta\psi + \delta Q;$$

e o anno tropico verdadeiro tem de menos que o medio o tempo necessario para que o movimento tropico do Sol em longitude seja $\delta\psi + \delta Q$.

97. Como as taboas do Sol dão a variação diurna da longitude verdadeira, na epocha de que se tracta, uma simples parte proporcional dará o tempo necessario para que o movimento tropico do Sol seja $\delta\psi + \delta Q$.

Chamando pois: Δl a variação diurna da longitude na epocha de que se tracta; δQ a variação da equação do centro devida ao movimento annuo m do perigeu, $\delta\psi$ a nutação em longitude; T o anno tropico medio; e T' o anno tropico verdadeiro: é

$$T' = T - 24^h . \frac{\delta\psi + \delta Q}{\Delta l}.$$

Por exemplo, no 1.º de janeiro de 1863 ao meio dia medio, segundo as taboas de Hansen, é $nt + \varepsilon = 280^\circ\, 39'\, 41'',4$, e $\varpi = 280^\circ\, 35'\, 5'',8$; o que dá $nt + \varepsilon - \varpi = 4' 35'',6$, e $\delta Q = -2'',1$. E é $\delta\psi = 17'',2$, $\Delta l = 3668'',6$.

Logo $$T' = T - 0^h,0988.$$

CAPITULO IX

Correcção final de todos os elementos da orbita

98. Para achar a longitude da epocha, a posição do perigeu, a excentricidade e o medio movimento, determinámos separadamente com mais perfeição cada um d'estes elementos, aproveitando muitas observações feitas na visinhança das epochas em que menos influem 'nelle os erros dos outros, e ligando-as pela interpolação elliptica.

Mas os elementos assim determinados, por maior que seja a sua exactidão, resentem-se mais ou menos da influencia reciproca d'uns nos outros; e por isso vamos corrigil-os simultaneamente pelo methodo das equações de condição, ou pelo methodo dos menores quadrados.

99. Seja $(a, b, c, \ldots t)$ a funcção dos elementos $a, b, c, \ldots$ e do tempo t. que se sabe calcular, e que sería egual ao resultado L da observação, se esta fosse boa, e se os elementos fossem exactos. Mas supponhamos que os elementos carecem das correcções $\delta a, \delta b, \delta c, \ldots$ que se podem tomar como muito pequenas da primeira ordem; e que a correcção da observação é δL. Então será

$$f(a + \delta a, b + \delta b, c + \delta c, \ldots t) = \mathrm{L} + \delta\mathrm{L},$$

ou $$\frac{df}{da} \cdot \delta a + \frac{df}{db} \delta b + \frac{df}{dc} \delta c + \ldots = \mathrm{L} - f + \delta\mathrm{L},$$

ou $$\mathrm{A}\delta a + \mathrm{B}\delta b + \mathrm{C}\delta c + \ldots = \mathrm{L} - f + \delta\mathrm{L}.$$

Fazendo muitas observações similhantes, applicaremos o methodo das equações de condição, ou o dos menores quadrados, a egual numero de equações da fórma

$$A\delta a + B\delta b + C\delta c + \ldots + f - L = o.$$

(Fr. *Math. Pur.* P. III, n.° 165).

100. Appliquemos o processo ás taboas do Sol.

Chamando L uma longitude do Sol observada, e correcta das perturbações, temos (n.° 20)

$$f = nt + \varepsilon + \Sigma a_i \operatorname{sen} i\,(nt + \varepsilon - \varpi):$$

onde n continúa a representar o movimento medio em longitude, ε a longitude da epocha, e a excentricidade, ϖ a longitude do perigeu, e

$$a_1 \operatorname{sen} 1'' = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \ldots\ldots,\ a_2 \operatorname{sen} 1'' = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \ldots\ldots\ldots$$

E serão:

$$\frac{df}{d\varepsilon} = 1,\ \frac{df}{d(\varepsilon - \varpi)} = \Sigma\, i a_i \operatorname{sen} 1'' \cos i(nt + \varepsilon - \varpi),$$

$$\frac{df}{de} = \Sigma \frac{da_i}{de} \operatorname{sen} i(nt + \varepsilon - \varpi).$$

1.° Se não tivermos taboas do Sol, calcularemos assim com os elementos approximados as quantidades

$$f,\ \frac{df}{d(\varepsilon - \varpi)} = A,\ \frac{df}{de} = B,$$

e formaremos as equações de condição (*)

$$\delta\varepsilon + A\delta(\varepsilon - \varpi) + B\delta e + f - L = o.$$

(*) A correcção $\delta\varepsilon$ envolve as correcções da linha dos equinoccios e do logar inicial do Sol medio, isto é, do logar do Sol correspondente ao tempo o.

Em quanto á correcção da longitude do perigeu: se chamarmos t_1 o tempo da passagem do Sol por este ponto, teremos

$$\delta\varpi = \delta\varepsilon + n\delta t_1,$$

que dá $$\delta(\varepsilon - \varpi) = -n\delta t_1.$$

E a correcção de longitude δl será

$$\delta l = \delta\varepsilon - \Sigma i a_i \cos i(nt + \varepsilon - \varpi) \operatorname{sen} 1''. n\delta t_1 + \Sigma \frac{da_i}{de} \operatorname{sen} i(nt + \varepsilon - \varpi) . \delta e:$$

que, chamando l e l' as longitudes calculada e observada, dá a equação de condição $$l + \delta l - l' = o.$$

Se quizessemos formar as equações de condição immediatamente em relação ás ascensões rectas, teriamos (n.º 108), fazendo $m = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \omega$,

$$\delta AR = \delta l(1 - 2m\cos 2l + 2m^2 \cos 4l \ldots .) - \frac{\operatorname{sen} 2l\, \delta m}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{m \operatorname{sen} 4l\, \delta m}{\operatorname{sen} 1''} \ldots .$$

$$= \delta l(1 - 0{,}0862 \cos 2l + 0{,}0037 \cos 4l . .) - 0{,}2166\delta\omega (\operatorname{sen} 2l - 0{,}043 \operatorname{sen} 4l):$$

e chamando AR e AR$'$ as ascensões rectas calculada e observada, as equações de condição seriam da fórma

$$AR + \delta AR - AR' = o.$$

D'esta sorte determinariamos conjunctamente o erro $\delta\omega$ da obliquidade.

2.° Se tivermos taboas do Sol, poderemos calcular por ellas a variação Δf da longitude correspondente a uma dada variação $\Delta(\varepsilon - \varpi)$; e teremos

$$A = \frac{\Delta f}{\Delta(\varepsilon - \varpi)}.$$

Similhantemente, sendo E a maxima equação do centro, calcularemos

$$B = \frac{\Delta f}{\Delta E} \cdot \frac{\Delta E}{\Delta e}, \quad \text{ou} \quad B\delta e = \frac{\Delta f}{\Delta E}\delta E.$$

E as equações de condição tomarão a fórma

$$\delta\varepsilon + \frac{\Delta f}{\Delta(\varepsilon - \varpi)}\delta(\varepsilon - \varpi) + \frac{\Delta f}{\Delta E}\delta E + f - L = o.$$

No que suppomos $\dfrac{\Delta f}{\Delta(\varepsilon - \varpi)} = \dfrac{\delta f}{\delta(\varepsilon - \varpi)}, \ \dfrac{\Delta f}{\Delta E} = \dfrac{\delta f}{\delta E}.$

101. Supponhamos, por exemplo, que a anomalia media $nt + \varepsilon - \varpi$, correspondente ao tempo da observação, é 198°. Abrindo a taboa IX das taboas do Sol do sr. Monteiro, acha-se, depois de interpolar de $10'$ em $10'$, que as differenças segundas da equação do centro são constantes, e que a $\Delta(\varepsilon - \varpi) = 10'$ de augmento da anomalia media corresponde a diminuição da equação do centro $\Delta f = -0',315$: logo

$$\frac{\Delta f}{\Delta(\varepsilon - \varpi)} = -0',0315.$$

Procurando na mesma taboa o logar onde é maxima a equação do centro, conhece-se que a variação secular de E é 0',286; e procurando a variação secular da equação do centro correspondente á anomalia media 198°, acha-se 0',085: logo

$$\frac{\Delta f}{\Delta \mathrm{E}} = -\frac{0{,}085}{0{,}286} = -0{,}2972.$$

Teremos assim, para o tempo da observação de que se tracta, a equação de condição

$$\delta\varepsilon - 0{,}0315\,\delta(\varepsilon - \varpi) - 0{,}2972\,\delta\mathrm{E} + f - \mathrm{L} = o.$$

E similhantemente formaremos as equações correspondentes aos tempos das outras observações.

As taboas de M. Leverrier dariam

$$\delta\varepsilon - 0{,}0314\,\delta(\varepsilon - \varpi) - 0{,}2945\,\delta\mathrm{E} + f - \mathrm{L} = 0.$$

102. Se o medio movimento n não fosse bem conhecido, como realmente é, seria necessario accrescentar a cada equação de condição o termo $t\delta n$, e usar de $\delta(nt + \varepsilon - \varpi) = t\delta n + \delta(\varepsilon - \varpi)$ em logar de $\delta(\varepsilon - \varpi)$; o que tornaria aquella equação em

$$\delta\varepsilon + t\delta n + \mathrm{A}\,[t\delta n + \delta(\varepsilon - \varpi)] + \mathrm{B}\delta e + f - \mathrm{L} = o.$$

CAPITULO X

Tempo verdadeiro, tempo medio, e equação do tempo

103. Os dias solares verdadeiros differem dos medios por ser desegual o movimento do Sol na sua orbita, e por serem deseguaes as projecções dos arcos eguaes da ecliptica sobre o equador.

Sejam l a longitude do Sol, e a a sua ascensão recta.

Differenciando a expressão $\operatorname{tang} a = \cos\omega \operatorname{tang} l$,

resulta $$\delta a = \frac{\cos\omega}{\cos^2 d}\delta l.$$

Por onde se vê que: a partir dos equinoccios, onde $\cos d = 1$, é $\delta a < \delta l$; juncto dos solsticios, onde $\cos d = \cos\omega$, é $\delta a > \delta l$; e temos o quadro seguinte:

$$\text{A}\quad \cos d \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} \sqrt{\cos\omega} \qquad \text{corresponde}\quad \delta a \left\{\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right\} \delta l.$$

Quando é $\cos d = \sqrt{\cos\omega}$, ou $\delta a = \delta l$, a differença $l - a$ toca o seu maximo; e substituindo em $\operatorname{sen} a = \cot\omega \operatorname{tang} d$, resulta

$$\operatorname{tang} a = \sqrt{\cos\omega} = \cot l,\ \operatorname{tang}(l - a) = \frac{1 - \cos\omega}{2\sqrt{\cos\omega}}.$$

104. Os astronomos, querendo illudir a falta de uniformidade dos dias solares, procedente das duas causas referidas, sem comtudo se afa-

starem muito do uso civil, imaginam um *sol medio*, que, partindo do perigeu ao mesmo tempo que o Sol verdadeiro, e andando uniformemente, coincide com elle no mesmo ponto passada uma revolução solar anomalistica; e imaginam um *sol equatorial*, que, partindo do equinoccio ao mesmo tempo que o medio, se move com uma velocidade egual á d'este Sol, e o encontra no mesmo equinoccio no fim d'uma revolução solar tropica, de sorte que a ascensão recta do primeiro é sempre egual á longitude do segundo.

105. O angulo horario do Sol equatorial, convertido em tempo na razão de 15° por hora, é o *tempo medio;* o angulo horario do Sol verdadeiro, convertido em tempo do mesmo modo, é o *tempo verdadeiro;* e a differença d'estes dois tempos, que serve para converter um no outro, é a *equação do tempo.*

Vê-se pois que a *equação do tempo* é a differença entre as ascensões rectas do Sol equatorial e do Sol verdadeiro, isto é, a differença entre a longitude do Sol medio e a ascensão recta do Sol verdadeiro, convertida em tempo.

106. Para achar o valor da equação do tempo, sejam: M a longitude media do Sol; μ a ascensão recta ΥC do meridiano (Fig. 10), contada, como aquella longitude, do equinoccio medio; a a ascensão recta do Sol verdadeiro, contada do equinoccio apparente; e ψ a nutação em longitude.

Como a nutação desloca egualmente todos os pontos da terra, as intersecções C, C', do meridiano com o equador são o mesmo ponto physico, em qualquer posição d'estes dois circulos; e porque a intersecção I do equador medio com o verdadeiro, considerada como uma charneira em volta da qual girou o primeiro equador para tomar a posição do segundo, tambem é o mesmo ponto physico, temos $IC = IC'$.

Mas, se de Υ abaixarmos sobre o equador verdadeiro o arco perpendicular $\Upsilon\Upsilon_1$, será $I\Upsilon = I\Upsilon_1$, por ser $\Upsilon\Upsilon_1$ muito pequeno; logo $\Upsilon C = \Upsilon_1 C'$. E a ascensão recta do meridiano, referida ao equinoccio apparente, será

$$\Upsilon' C' = \Upsilon'\Upsilon_1 + \Upsilon_1 C' = \psi \cos\omega + \mu.$$

Por tanto é claro que temos:

$$\text{T. med.} = T = \frac{\mu - M}{15}, \quad \text{T. verd.} = T' = \frac{\mu + \psi\cos\omega - a}{15},$$

$$\text{Equação do tempo, } T' - T = E = \frac{\psi \cos \omega + M - a}{15}.$$

107. Chamando Q a equação do centro, e P a somma das perturbações, é

$$l = M + \psi + Q + P,$$

o que substituido na equação do tempo dá

$$E = \frac{l - a + \psi \cos \omega - Q - P - \psi}{15}.$$

108. A reducção $l - a$ é pequena, e póde achar-se em serie convergente, como convém. Para isso temos

$$\frac{\operatorname{tang} l - \operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} l + \operatorname{tang} a} = \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \omega = m;$$

ou $$\operatorname{sen}(l - a) = -m \operatorname{sen}(l - a - 2l),$$

que dá (Franc. Math. Pur. P. IV, pag. 77)

$$l - a = \frac{m \operatorname{sen} 2l}{\operatorname{sen} 1''} - \frac{m^2 \operatorname{sen} 4l}{2 \operatorname{sen} 1''} + \ldots.$$

109. Substituindo a expressão de $l - a$ na de E, resulta emfim

$$E = -\frac{Q + P - \frac{m \operatorname{sen} 2l}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{m^2 \operatorname{sen} 4l}{2 \operatorname{sen} 1''} \ldots + 2\psi \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \omega}{15}.$$

Esta formula, que póde reduzir-se a taboa, como fez Delambre na sua Astronomia, converte o tempo medio em verdadeiro, e inversamente, pelas equações

$$T' = T + E, \quad T = T' - E.$$

110. Como os maximos valores de $l - a$, Q, P, ψ, são respectivamente: $2°28',2$; $1°55',3$; $0',7$; $0',3$: a equação do tempo é $< 17^m.40^s$. E com effeito o seu maximo valor é actualmente $16^m 19^s$.

111. A definição de tempo medio, como se deu no n.° 105, fixa o valor do tempo medio absoluto em qualquer instante dado, por exemplo no instante do equinoccio medio; e dá a quantidade, que se deve accrescentar a esse tempo para ter aquelle que corresponde a outro qualquer instante.

Com effeito, determinado o instante da passagem do Sol pelo perigeu, e a longitude d'este ponto, como se disse nos n.os 93 e 100, essa longitude será a ascensão recta do Sol equatorial no mesmo instante; e tirando-a da ascensão recta do meridiano, a differença, convertida em tempo na razão de 15° por hora, será o tempo medio. Accrescentando pois a este tempo o intervallo de tempo medio que deve decorrer desde o instante da passagem pelo perigeu até que o Sol medio percorra em longitude o complemento para 360° da longitude do perigeu, teremos o tempo medio absoluto correspondente ao instante do equinoccio medio.

Por exemplo, segundo o resultado de Delambre, deduzido de muitas observações do Sol de Maskeline, temos

Passagem pelo perigeu em 30 de dezembro de 1780	0^d,419449	temp. sid. app.
Eq. do ponto eq. medio em ascensão recta	—827	
	0 ,41945727	temp. sid. med.
Longitude do perigeu convertida em tempo	0 ,754373	
29 de dezembro e..................	0 ,66508427	tempo medio
Tempo necessario para percorrer o complemento da longit. do perig. a 360°. .	82 ,01978097	
Equinoccio medio, março de 1781. ...	21^d,68486524	

112. Calculando os valores da equação do tempo, acha-se que ella