4 ad 1, ut 100 ad 25. Et ita ſi 1 cu. æquetur 6 rebus p:6. Rei æſtimatio eſt ℞ cu 4 p:℞ cu. 2, & ſi uelimus dare corpus unum ipſi numero, id eſt ipſi 6 reliquum rebus erit illud ęquale neceſſariò ℞ 864 p:℞ cu. 432. Igitur qualis proportio ℞ cu. 864 p:℞ cu. 432, ad 6 talis partiũ ℞ quadratæ 6 inuicem. Quare ut ℞ cu. 864 p:℞ cu. 432 p:6 ad 6, ita ℞ 6 ad partem radicis minorem per compoſitum proportionem igitur ducto 6 in ℞ 6, & producto quod p:℞ 216, diuiſo per ℞ cub. 864 p:℞ cub. 432 p:6, exibit pars illa. Diuido ergo ℞ 216 per ℞ cub. 864 p:℞ cu. 432 p:6, & aſſumam ſuum reciſum, quod eſt ℞ cub. 432 m:6, & ducam cum priore, & fit 36 diuiſor, ergo diuidendum eſſet ℞ 216, ductum in ℞ cub. 432 m:6, quare diuidam ℞ 216 per 36, exit ℞ $\frac{1}{6}$, id duco per ℞ cu, 432 m:6, & producitur ℞ cu. 6, quad. 864 m:℞ 6 pars minor, quare maior eſt ℞ 24 m:℞ cu. quad. 864. Hæc nolui addere tanquam milia ad inſtitutum, ſed ob operationem.

SCHOLIVM.

Ex hoc habetur quod cum duæ radices cubicæ, fuerint in continua proportione cum numero, radices illæ inuicem ductæ, producunt numerum, ſint a b c in continua proportione, & ſit a numerus, & b c ℞ cub. dico productum b in c eſſe numerum ſubiungatur d in continua proportione, eritq; d ad a, triplicata ei quę eſt b ad a, at b ad a eſt uelut ℞ cu. ad numerum, igitur d ad a eſt ut numeri ad numerum, ſed a eſt numerus, ergo d eſt numerus: igitur productum d in a eſt numerus, ſed id eſt æquale producto ex b in c, quia quantitates ſunt in continua proportione, igitur productum b in c eſt numerus.

a	num.
b	℞ cub.
c	℞ cub.
d	

Hoc dixi, ut oſtenderẽ ℞ cu. 864, ductum in ℞ cu. 432, producere numerum ſcilicet quantum producitur ex 6 in 12 quartam quantitatem, quæ eſt in continua proportione ſcilicet 72, à quo detracto 36 m: relinquebatur 30, ut fuit aſſumptum in ſuppoſito.

Secundum genus ℞ eſt cubicum, de quo toties actum eſt. Sed hic non eſt in propoſito.

Tertium autem genus uocatur corporeæ radicis, & eſt uelut diuidendo 125 cub. 5 in 75 pro 15 rebus, & 50 pro numero, & radix eſt eadem utriq; parti, & etiam toti ſcilicet 3 & 2, & fiunt quatuor corpora utrinque cubus, & productum alterius partis in quadratum propriũ 615, & productum eiuſdem in quadratum alterius ſemel: cum ergo una pars ſupponatur numerus, erit diuiſio illa ad hoc, ut cubus eius ſit cubus partis eius radicis, aliter diuiſio eſſet inutilis: quare pars illa eſt numerus neceſſariò, aut ℞ cu. numeri, cum ergo reliquæ partes ponantur qua-

3/	27	8	/2
	18	12	
2/	18	12	/3
	12	18	
	75	50	

drata eius R cu. ducta in aliam, erũt numerus rerum, & quadratum æqualia numero, igitur erit ſecunda pars, aut numerus, aut reciſum, ergo æſtimatio rei non poteſt eſſe generalis: quia (ut dixi) ęſtimatio eſt capituli, & totius & partis, ergo nihil profecimus. Si uerò prima pars ſit R cub. uelut 1 cu. æqualis eſt 6 rebus p: 6, & ponatur prima pars R cu. 3. Ponemus ſecundam 1 poſ. igitur partes erunt 3, ſcilicet cubus R cu. 3, & reliquum quad. R cu. 3 p: poſ. R cu. 72, nam ducendo 1 poſ. ſecundam partem in quadratum primæ partis, quod eſt R cu. 9, nam prima pars fuit R cub. 3, fiunt res, R cub. 9, & quia aſſumimus duplum illius quadrati, erunt res numero R cub. 72, & hoc eſt ęquale 3, reſiduo 6 detracto cubo primæ partis ſcilicet 3, igitur reducendo ad 1 quadrata, id eſt diuidendo per R cu. 3, fiet igitur 1 quad. p: rebus R cu. 24, æqualia R cu. cuius, ſequere capitulum, & erit rei æſtimatio R R cub. 72 m: R cu. 3. Eſſet igitur una pars, ſcilicet maior R cu. 3, minor R R cu. 72. m: R cu. 3. Et res ipſa R R cu. 72. At conſtat quòd cubus huius non poteſt eſſe æqualis 6, rebus p: 6, ſed neque ulli numero rerum, cum numerus non poſsit æquari ex R cu. quare hæc diuiſio licet ſpecioſa non poteſt generaliter ſatisfacere, ita ſimpliciter ſumpta. Quod autem neceſſe ſit ad hoc genus quantitatis ſimplicis R R cub. deuenire demonſtro. Nam poſita a prima parte, & b ſecunda, aſſumitur numerus rerum in creatio corporis in duplo quadrati a, quod ſit c, & numerus quadratorum eſt a, igitur ut numerus quadratorum deducatur ad unũ oportet diuidere per a, ergo etiam oportet diuidere per a, quia ergo c eſt duplum quadrati a, diuiſum c per a, exibit duplum a, quod ſit d, igitur numerus rerum, quæ cum quadrato æquantur numero cuiuis qui ſit e, erit d duplum a, at in capitulo inueniendæ æſtimationis quadrati, & rerum æqualium numero oportet ducere dimidium numeri rerum in ſe, numerus autem rerum fuit d duplum a, igitur oportebit ducere a dimidium d in ſe, & addere ipſi numero e, & totius excipere R a, qua detrahemus dimidium numeri rerum i. ipſum a R erit æſtimatio ſecundæ partis ſemper R quad. R cub. aggregati ex quadrato a & e diuiſo, per a detracto a, ſed prima pars eſt a, igitur tota æſtimatio eſt R quadrata aggregati duarum R cu. ſcilicet a in ſe ducti, & e diuiſi per a. Ita ergo poſito numero e. 8. ut dixi, & a R cu. 2 ſufficiet, ducere R cu. 2 in ſe, fit R cu. 4, & detrahere 2 cub. R cu. 2, ex 8 relinquitur 6, hoc diuide per R cu. 2, exit R cu. 108, hoc autem eſt commenſum R cu. 4, ideò iunctæ faciunt R cub. 256, igitur ſecunda quantitas b p: R cu. 256 m: R cu. 2, ſed a fuit R cu. 2, igitur tota res eſt R R cu 256. Non eſt igitur idonea hæc diuiſio.

a	c	d
b		

a	c	d
b	e	

Per Cap. 10.

SCHOLIVM II.

Dico igitur quod duę illę ℞ cubicæ, scilicet quadratum a, & residuum e, quòd est numerus (quia e est numerus, & cubus a est numerus) diuisum per a facit commensum. Quia enim diuiso cubo a, qui est numerus,

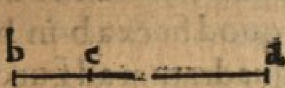
e	
a	c
b	d

exit quadratum a, quod sit b, & diuiso c numero qualicunque per a exit d, sit autem cubus a e, erit e, ad c ut b ad d, quare cum c & e sint numeri ex supposito, erit b commensum d, quod est propositum.

Constat etiam ex hoc quòd diuiso cubo æquali 10 rebus p: 8 in duas partes, ut in ultimo modo & supposita una parte rei 1 pos. erit reliqua pars ℞ $\frac{8}{pos.}$ m: 1 pos. hac igitur ducta ad cubum & in quadratum alterius semel, & quadrati duplo etiam in eandem fiet totum æquale 10 rebus primis, at 10 res primæ sunt decuplum utriusque partis rei 1 ℞ $\frac{800}{pos.}$. Et ideò hoc erit æquale illi parti cubi compositę ex illis quatuor partibus dictis. Et quia proportio rerũ ad numerum est sicut proportio partium rei inuicem, & proportio rerum ad numerũ est manifestè $1\frac{1}{4}$ ipsius rei. Ideò oporteret facere ex 8 duas partes eo modo, ita ut ducta minore in totum cum quarta parte produceret maiorem. dico de radicibus cubicis.

De æstimatione autem binomij primi aut quarti, uel recisorum ratio est, quia tria quadrata numeri & unum radicis necessariò sunt maiora tribus quadratis radicis & uno numeri, quia in his numerus semper est maior radice, ergo cum uolueris æquare radices, ut cadant, numerus in rebus superabit numeeum in cubo, & ita cubus non poterit æquari rebus & numero, sed res potius cubo & numero. Et ita in reciso secundo & quinto, apparet ratio dum deduces, & formabis cubum ex partibus.

De cubi radice posita 3 & ℞ cu. 2, differentia partium est 3 m: ℞ cu. 2, detracta enim b c ex a b, relinquitur a c. Ergo differentia a b, quæ est 3, & a c quæ est 3 m: ℞ cub. 2, cum sit b c, manifestè erit ℞ cu. 2. Tanta uerò est 3 p: ℞ cu. 2 a 3. Ergo nulla ℞ differt à numero in radice.



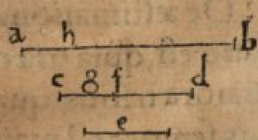
Ex his tandem patet quòd non datur æstimatio generalis pro capitulo cubi æqualis rebus & numero in parte ea quæ nondum est inuenta, sed dantur multæ æstimationes, quæ simul iunctæ satisfaciunt, ut si sciri possit, nondum cognita sit generaliter.

Quod ubi æstimatio satisfacit, quouis modo diuidatur cubus satisfacit: si non, non. CAP. XIX.

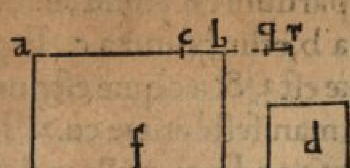
Propono ergo istud, quòd si ℞ cu. nõ satisfacit gratia exempli aut ℞ q̃d q̃d. cum ℞ cuba, quomodo uis diuidatur cubus, nunquã satisfaciet. Item dico, quòd si 1 cub. æqualis sit 6 rebus p:6, & rei æstimatio dando numeros cubis sit ℞ cub. 4 p:℞ cu. 2. Eadem æstimatio satisfaciet diuiso cubo in duas partes, quomodo uis. Non tamen sequitur quòd si hæc quantitas ut pote ℞ cu. 4 p:℞ cub. 2, sic diuisa non satisfaciat cubo diuiso in corpora similia non ob id sit ęstimatio, satisfacit tamen alio modo, ut à latere uides. Ergo si cubus æquatur 9 rebus p:9, cum sit aliqua æstimatio, poterit satisfacere iuxta quamcunq; diuisionem, sed non ut ipsa diuisa est, & iuxta quamcunque diuisionem, sed non ut cubus erit diuisus.

℞ cu 64	℞ cu. 8
℞ cu. 256	℞ cu. 128
℞ cu 16	℞ cu. 32

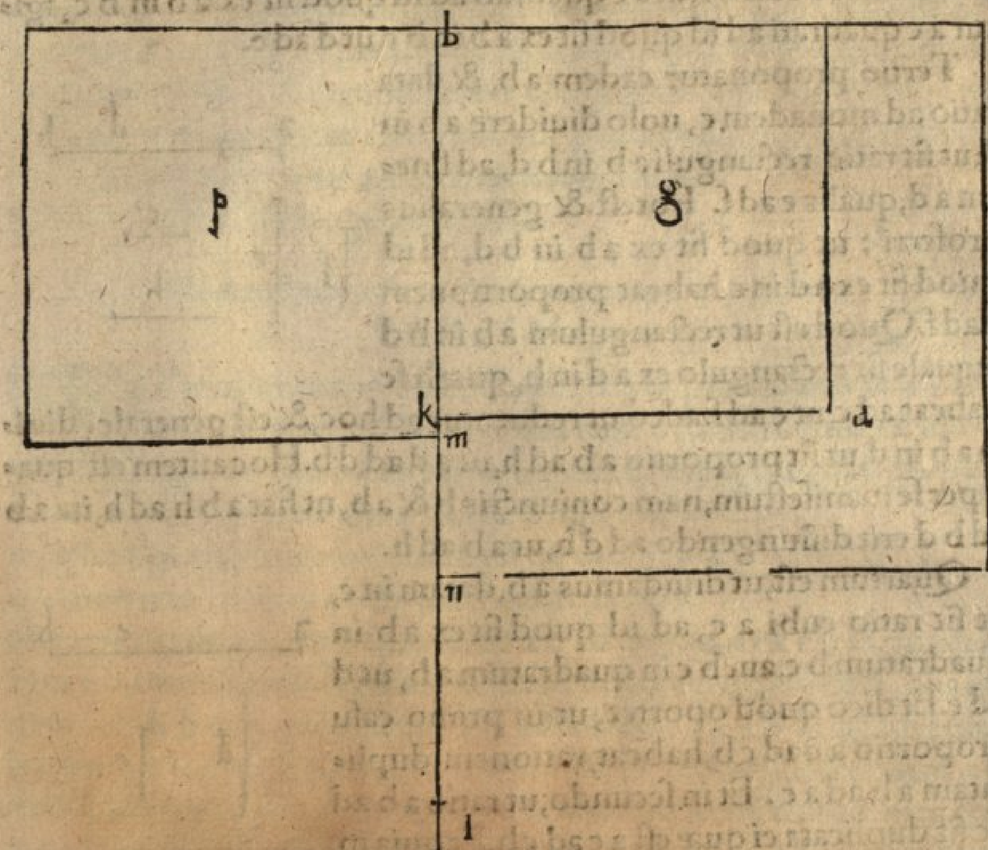
Data linea quomodo quadrifariam diuidatur in duas partes, ut sit proportio unius ad productum totius in alteram data. CAP. XX.



Sit data a b quam uolo diuidere ita in puncto h, ut sit proportio a b & a h ad b h, ut c d ad e, abscindo d f æqualem e, & diuido e f per æqualia in g, & facio ut g d ad d f, ita a b ad b h, cum ergo sit ita, erit g d ad g f, ut a b ad a h, quare coniungendo ab a h ad a h, ut g d g f, quare ut c d ad g f, atrursus a b ad b h, ut g d ad d f. igitur disiungendo a h ad h b, ut g f ad f d, quare per eam quam uocant proportionem æquam c d ad d f, ut ab a h ad h b. Secundo uolo diuidere a b in c, ut sit quadrati a c ratio, ad id quod fit ex a b in b c, ut d ad e, facio g quadratum ad f, ut d ad e. Et rursus facio per eandem h l ad h k, ut h k ad a b, eritq; h l ad a b, ut d ad e, & sit h m dimidium h l, & eius quadratũ p, cui æqualem gnomonem circumpono quadrato g, ita ut totum quadratum quod uocetur o, sit æquale quadratis g & p, facio igitur a c æqualem m n, dico a b rectè esse diuisam in c. Quadratum enim h n, cum sit æquale quadratis h k & h m, & quadratis h m, m n, & duplo h m in m n detracto communi quadrato h m relinquetur quadratum g æquale quadrato m n, & duplo m n in m h, quare quadrato m n, & ei quod fit ex m n in h l, siquidem h m est dimidium h l, cum igitur supposuerimus

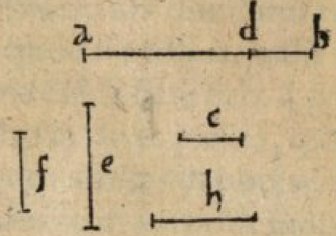


rimus

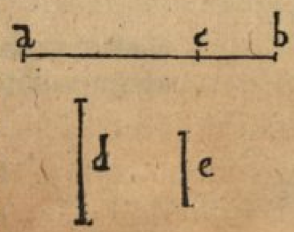


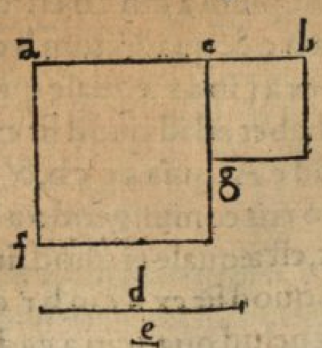
timus a c æqualem m n, erit quadratum a c cum eo quod fit ex a c in h l æquale quadrato g, igitur quadratum a c cum eo quod fit ex a c in h l, habet proportionem ad quadratum f, quam habet d ad e, nam talem habuit quadratum g ad ipsum quadratum f. Addo ad a b, 69 ei æqualem, & 92 ad quam sit proportio, ut a c ad 69. Cum ergo quadratum a b sit æquale quadratis a c, c b & duplo a c in c b, at duplum a c in c b est æquale ei quod fit ex a c in c q, quia c q est dupla b c, & quadratum b c est ęquale ei quod fit ex a c in 92, erit quod fit ex a c in a r æquale quadrato f, igitur quod fit ex a c in se & in h l se habet ad id quod fit ex a c in a r, ut d ad e. Quare h l & a c ad a r, ut d ad e. At quia a c c b, & 92 sunt in continua proportione ex supposito erit coniungendo a b ad 62, ut a c ad c b. Igitur quod fit ex b r in a c, est æquale ei quod fit ex a b in c b. At proportio quadrati a c ad id quod fit ex a c in b r est ueluti a c ad b r, ergo proportio a c ad b r est ueluti quadrati a c ad id quod fit ex a b in b c. At proportio h l & a c ad a r est ueluti a c ad b r, quia h l ad a b fuit, ut d ad e, & h b cum a c ad b r, ut d ad e, igitur h l cum a c ad a r, ut h l ad a b, quare permutando h l cum a c ad h l, ut a r ad ab, igit̃ disiungendo h l ad a c, ut a b ad b r, quare rursus permutando h l ad a b, ut ac ad b r, sed h l ad a b, ut d ut d ad e, & a c ad b r, ut a c quadrati ad id quod fit ex a b in b c, igitur a c quadrati ad id quod fit ex a b in b c, ut d ad e.

Tertiò, proponatur eadem a b, & data ratio ad monadem c, uolo diuidere a b in d, ut ſit ratio rectanguli a b in b d, ad lineam a d, qualis e ad f. Poteſt & generalius proferri: ut quod fit ex a b in b d, ad id quod fit ex a d in c habeat proportionem e ad f. Quod eſt ut rectangulum a b in b d æquale ſit rectangulo ex a d in h, quæ h ſe habeat ad c, ut c ad f: adeò ut reducatur ad hoc, & eſt generale, diuiſa a b in d, ut ſit proportio a b ad h, ut a d ad d b. Hoc autem eſt quaſi per ſe manifeſtum, nam coniunctis h & a b, ut fiat a b h ad h, ita a b ad b d erit diſiungendo ad d b, ut a b ad h.



Quartum eſt, ut diuidamus a b, datam in c, ut ſit ratio cubi a c, ad id quod fit ex a b in quadratum b c, aut b c in quadratum a b, ut d ad e. Et dico quòd oportet, ut in primo caſu proportio a c ad c b, habeat rationem duplicatam a b ad a c. Et in ſecundo, ut ratio a b ad a c ſit duplicata ei quæ eſt a c ad c b. Et quia in prima quæſtione reducitur res ad cubū, cum rebus æqualia numero, & iſtud eſt cognitum, ideò declarabo ſolum ſecundam, ut proponatur quòd cubus a c ſit nona plus producto a b in b c, & deſcribam quadrata a c & b c, & quia ſi eſſent æqualia, *Per 34 undecimi El.* eſſent baſis a f c & b e g in proportione a b ad a c, quare a b ad a e duplicata ei quæ eſt a c ad c b, cum igitur ſit d ad e nonupla, erit a f c ad b c g nonupla eius quæ eſt a b ad a c. Nam ſi 216 eſt nonuplum ad 24, & 24 cōſtat ex 24, & 216 ex 36, & 6 proportio 36 ad 1, eſt nonupla eius, quæ eſt 24 ad 6, ſi ergo poſuerimus a c unū q̄dratū, & b c 4 m: quadrato uno, erit cub. a e cub. q̄d. & b c q̄d. 16 p: 1 quad. quad. m: 8, quad. Si igitur proportio d ad e ſit nonupla, erit 1 cu. quad. æqualis 576 p: 36 quad. quad m: 288 quad. & ſi proportio d ad e ſit ſexdecupla, erit 1 cub. q̄d. æqualis 5024 p: 64 q̄d. quad. m: 52 q̄d. Igitur in primo caſu accipiendo radices quadratas partium habebimus 1 cu. æqualem 24 m: 6 quad. Et in ſecundo 1 cu. æqualem 32 m: 8 quad. & ſi eſſent æquales, eſſet 1 cub. æqualis 4 m: 1 quad. habes igitur æſtimationes, ut uides quatuor æqualis quadruplæ





druplæ nonuplæ sexdecuplæ. Cum ergo prima tria exempla solui possint ex capitulo, ultimum non possit, & demonstratio Geometrica sit uniuersalis, patet eam non esse generalem rationem capituli ad inueniendam æstimationem, sed esse longè meliorem.

1 cu. p: 2 q̃d. æq̃l. 8
1 cu. p: 4 q̃d. æq̃l. 16
1 cu. p: 6 q̃d. æq̃l. 24
1 cu. p: 8 q̃d. æq̃l. 32.

Demonstratio ostendens æquationis necessitatem,

CAP. XXI.

ET proponatur a b diuisa in c, & per præcedentem est una demonstratio proportionis cubi a c, ad solidum ex a b in quadratum b c in parte cognita & incognita, ubi proportio est maior sed parum, aut minor semper nota, at hæc proportio composita est ex duabus quarum una est nota altera data: nota quidem

est ex præcedenti proportio cubi a c ad solidum ex c b in quadratum a b, cum sit cubi & rerum æqualium numero generalis, alia est data solidi b c in quadratum a b ad solidum, ex a b in quadratum b c, semper uelut c b ad b a, fiunt enim illa ex rectangulo eodem a b in b c, alterum iuxta altitudinem a b, alterum iuxta altitudinem b c, cum ergo interposito solido ex b c in quadratum a b, inter cubum a c & solidum a b in quadratum b c, componetur proportio cubi a c ad solidum a b in quadratum b c, quomodolibet constat propositum.

Per conuer. 32 undecimi El.

Per secũdam propositionẽ lib. de Proport.

PARADOXVM.

Ex hoc patet quòd diuisa linea inter puncta data, in proportione data cubi partis unius ad solidum ex tota in alterius quadratum, ut sit proportio horum solidorum (quæuis linea sit aut pars) data & cognita quantitate partium sub uno numero diuisæ lineæ, non erit cognita quantitas earundem partium sub eadem diuisione, sed mutato solum numero seu denominatione assumptę lineæ. Et hoc contingit, quia ultima pars præcedentis propositionis non est perfectè nota: quia quantitates natura similes non possunt esse in proportione lineæ, uelut linea ad lineam superficies ad superficiem, & corpus ad corpus non possunt esse in proportione unius lineæ, sed lineæ ad lineam: ut uisum est in libro de Proportionibus. Dico ergo quòd si data est a b inter duo puncta data, & proportio cubi a c ad solidum a b in quadratum c b secũdum totam lineam a b, uel secundum quamlibet illius partem, ueluti a d ut omnia hæc sint data & immota nihilo minus, si constituamus a b totam sub numero paruo putà quatuor aut sex, perueniemus per ultimam partem præce-

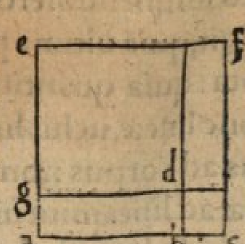
Propos. 34

dentis quãtacunq; supposita a d modò sit pars a b ad cognitionem a c, quia perueniemus ad 1 cu. p: quadratis, nõ pluribus quam quatuor æqualibus numero alicui, qui poterit conuenire æquationi iam cognitæ. Et supposita a b centum exempli gratia, licet sit eadem linea, quæ prius nec maior, & proportione sub eadem a d, poterit esse ut perueniamus ad æquationem eiusdem capituli, & non cognitam. Et hoc est (quia ut dixi) proportio talium solidorum, non potest esse uerè linea a b, neque a d, sed uel ut linea a b uel a d ad aliquam aliam lineam, aut simpliciter denominationis a b uel a d, quæ sumitur in comparatione ad monadem. Vnde si quis inueniat demonstrationem, ut dixi, ueram proportionis cubi a c ad solidum ex a b in quadratum c b, secundum lineam a d, tũc inuenta æstimatione sub a b denominata, ut decem inueniretur sub denominata ut centum. Et ita sub duo bus inueniretur sub decem, & est mirabile pulchrum & arduum.

De contemplatione p: & m: & quod m: in m: facit m: & de causis horum iuxta ueritatem.

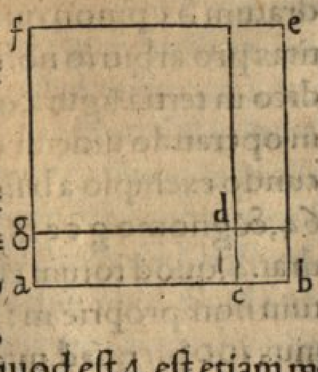
CAP. XXII.

CVm dico 6 p:2 clarum est, quod est 8 secundum rem: sed iuxta nomen est compositum ex 6 & 2, & similiter cum dico 10 m:2, secundum rem est 8, iuxta nomen autem est 10 detracto. Et ideò in operatione quod ad finem attinet 6 p:2 debet producere 64, quia 8 in seductum producit 64, & ita 10 m:2, quia est 8, debet producere idem 64. Sed quod ad modum operandi, quia 8 est diuisum in 6 p:2, seu in 10 m:2, oportet operari per quartam secundi Euclidis. Et in 6 p:2 est manifestum, ut in figura ponatur a b 6 b c 2, fient a d 12 d e 4, d f 12, d e 36. totum igitur 64, et de hoc non est dubium, sed si ponatur a c 10 & b c 2 m: erit quadratum a c nihilominus 64, id est quadratum d e, quia a b uerè est 8. Est ergo ac, si quis diceret habes agrum decem pedum quadratum, cuius duo pedes sunt alterius, & quadratum partis tuæ est, tuum reliquum totum est alterius, igitur tu haberes d e solum, quod est 64, & gnomo illæ g b f esset alterius, & esset 36, ut liquet.

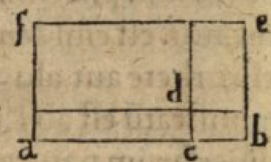


Causa ergo diuisionis in p: uel m: est duplex, nam si essent eiusdem naturæ, ut 6 & 2, uel 10 & 2, uel 6 & $\frac{1}{2}$ aut 10 m: 3 $\frac{1}{2}$, stultum esset & superfluum dicere 6 p:2, aut 6 p: $\frac{1}{2}$ aut 10 m: 2, aut 10 m: 3 $\frac{1}{2}$, sed deberemus dicere 8 m: 6 p:2, aut 10 m: 2 uel 6 $\frac{1}{2}$ in 6 p: $\frac{1}{2}$ uel 10 m: 3 $\frac{1}{2}$, & esset facilius pro multiplicatione & diuisione. Et præcipuè quod in diuisione semper oportet reducere quantitatem significatam per plura nomina, seu p: seu m: ad unam simplicem quantitatem. Sed causa talium nominum p: seu m: est, uel quia quantitas quæ additur uel detrahitur, non est eiusdem naturæ cum prima, ut 6 p: R 2, aliter binomium esset rhete aut alogum, id est numerus aut radix numeri, quod demonstratū est ab Euclide esse non posse. Et ita 6 m: R cu. 3, quia sunt diuersarum naturarum, nec possunt significari uno nomine, necesse fuit iungere illas quantitates per p: uel m: neq; etiam possunt significari uno nomine per uiam R: nam 6 p: R 2, & R v: 38 p: R 288, & licet uideatur, simplex est tamen R unius compositi numeri seu quantitatis, id est 38 & R 288. Secunda causa est cum secunda quantitas, aut tertia adiuncta uel detracta est ignota, uelut si dicamus 6 p: 1 pos. licet enim poneremus quod positio esset 2, & ita totum hoc esset uerè 8, quia tamen nescimus quanta sit positio, ideò cogimur dicere 6 p: 1 pos. 10 m: 1 pos. ex quo constat quòd in primo casu nunquam nisi per fortunam multiplex potest reduci ad unam naturam, neq; enim ut dictum 6 p: R 2 potest effici unus numerus, nec unius naturæ, sed in secundo casu aliquando potest, aliquando non. Vt si dicamus 10 m: 1 pos. & pos. sit 2, tunc æquiualeret 8. At si positio esset R 2, uel R cub. 3 manifestum est quòd nunquam posset reduci ad unam naturam, sed æquiualeret semper binomio, uel reciso, uel aliæ quantitati alogæ, ut 6 m: R 2, 6 m: R cu. 3. Dixi in primo casu quod aliquando tamen quantitas multiplex æquiualet simplici, & hoc maximè accidit in R v: & abstrusis, uelut declaratum est à nobis in Arte magna, quod R v: cu. R 10,8 p: 10 m: R v: cu. R 10,8 m: 10, idem est quod 2. Et hoc etiam accidit in quadratis, ut R v: 6 p: R 9 est 3. Ergo ut dixi ob duas illas causas necesse fuit ponere p: & m. *Cap. 11.*

Hoc uiso cum operatio p: sit clara, & demonstratis ab Euclide in secundo Elementorum reliquum est, ut ostendam illud idem de m: & ponatur ab 10, ut prius & b c 2 m: liquet ergo quod a c uerè est 8, & eius quadratum d f erit 64, sed totus residuus gnomo est, ut dixi perinde, ac si b c esset alterius, ideoq; totus gnomo etiam illius, ut ostendam, & constat quod ille gnomo per eandem propositionem fiet ex a c in c b bis, & sunt rectangula ad d e cum quadrato b c: iste autem gnomo totus est 36, quia a c quadratum est 100, & f d 64, igitur g c e gnomo residuus est 36, & a d & d e sunt m: & sunt 32, & gnomo est 36 m: igitur quadratum b c, quod est 4, est etiam m: *Propos. 4.* *4. secundi Elem.*



nam si esset p:non esset gnomo m:nisi 28, & d f 72, & a c ℞ 72, et non ℞ 64, quod est 8: igitur quadratum b c est m: & fit ex m: in se ducto, igitur m: in se ductum, producit m: & similiter statuatur a b 10, & b c m:2, erit ergo uerè a c 8, et ponatur a f 4, & a g 1 m: gratia exẽpli, erit igit̃ uerè f g 3, quare f d 24, tota autẽ a e superficies est 40, igitur gnomo g c est 16 residuũ, & fit ex a c in c d, ideoꝙ superficies adest 8, & ex b c in g f, superficies d e b, & ex b c in c d, & est 2, quod totum est 16, sed hoc est m: quia est differentia productorum 10 in 4, & 10 m:2 in 4 m:1, igitur tam m: in m: id est b c in c d, quarum utraque est m: producit b d m: quæ est 2 quàm a c p: in c d m: & b c m: in f g p: quæ ex confesso apud illos producunt m. Et ideò patet communis error dicentium, quod m: in m: producit p: neque enim magis m: in m: producit p: quàm p: in p: producat m. Et quia nos ubiꝙ diximus contrarium, ideò docebo causam huius, quare in operatione m: in m: uideatur producere p: & quomodo debeat intelligi. Supponamus ergo in secunda figura quòd a b sit 20, ut prius & b c sit 1 pos. m: manifestum est quod oporteret iuxta hanc operationem ducere a c in se, & b c in se, & a c in b c bis, sed cum a c sit ignota, est 10 m: 1 pos. accipimus a b, quæ est nota: est enim 10, ut operamur cum a b & b c 9, & quia quadratum a b cum quadrato b c est æquale quadrato a c cum duplo a b in b c, ideò detrahimus duplum a b in b c ex quadratis a b & b c, & quoniam duplum a b in b c, superat gnomonem g c e in quadrato b d, ut constat ideò detrahimus, quantum est quadratum b c plusquam oporteret & ponimus m: cum solus gnomo uerè sit m: quia ergo detrahimus quantum est quadratum b c, plusquàm deberemus à quadrato a b, tãquam p: ideò ad restitutionem illius m: quod detrahimus præter rationem oporteret addere, quantum est quadratum b c p: & ideò cum b c sit m: dicemus quod 62 m: quadratum conuersum est in p: ideò quod m: in m: produxit p: Sed non est uerum: sed nos addidimus quantum est quadratum b c p: non quod quadratum b c sit p: sed alia assumpta quantitas pro arbitrio nostro æqualis b c addita est, & facta est p: Idem dico in tertia figura, quia operamur per a b & a f loco a c & f g: ideò in operando uidetur quòd m: in m: producat p: Et sit ergo, ut in secundo exemplo a b sit 10 b c 1 pos. & sic 2 uerè erit a c 8, igitur d f erit 64, & gnomo g c e 16 pos. p: 1 quad. 136, nam 16 pos. sunt 32, & 1 quadrat. 4, quod totum est 36. Et tunc debet dici a b iunctum & separatum non propriè m: si uerò operemur cum tota a b & b c, habebimus 100 p: 1 quad. m: 20 pos. ecce quòd in priore æquatione nõ ha-



bebas

bebas nisi 16 pos.m: hic uerò habes 20, & ideò cum in priore æquatione haberes 1 quad.m: & hic habeas 1 quad p: ideò oportuit addere numero pos. 4. 1. à 16 ad 20, seu quia addidisti illas 4 pos.m: plusquam oporteret, ideò subtraxisti 1 quad m: & etiam locò eius addidisti 1 quad, p: & ideò ad hoc deuenisti, ut diceres m: in m: producere p: quod tamen est falsum, non enim contingit ex operatione multiplicationis, sed ut peruenires ad maiorem noticiam per illam septimam propositionem secundi Euclidis, similiter dico, si multiplicas 3 m: ℞ 2 in 5 m: ℞ 3 uerè oporteret ducere a c in f g, & haberes uerum productum: sed quia nec 3 m: ℞ 2 nota est uerè sub uno nomine, nec 5 m: ℞ 3 est nota sub uno nomine, & omnis multiplicatio & diuisio fit singillatim per simplices quantitates, ideò in recisis necesse est operari per septimam propositionem secundi Euclidis loco quartæ: & ita quia in illa includitur additio illa quadrati m: in multiplicatione unius partis integræ, in partem detractam bis supra gnomonem, ideò oportet addere ad p: quantum est quadratum partis illius quę est m: Ideò ut in binomijs operamur per quartam propositionem, & secũdum substantiam quantitatis compositæ, ita etiam in recisis quo ad substantiam & uerè operamur cum eadem: sed ad nominum cognitionem operamur in uirtute septimæ eiusdem.

5 m: ℞ 3
5 m: ℞ 2

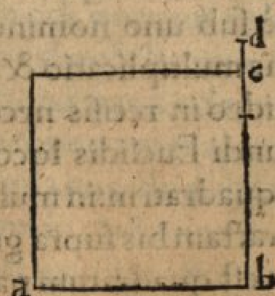
Quartum & ultimum est, quod erat considerandum, cur p: in p: solum faciat p: & m: in m: & in p: faciat m: Et dico quod (ut dixi) m: oportet supponere tanquam non sit de ipso p: est enim alienum, ideò ad cõstruendum oportet assumere plura, ad destruendum sufficit unum. Ad hoc ergo ut p: constituatur, oportet ut p: *in* p: ducatur, nam cum ducitur p: in m: seu in alienum fit m: quia nihil potest ultra uires suas, ergo p: potest quantum est ipsum, *igitur* cum ducitur extra ipsum, producit m: aliter posset plus producere quam potestate esset. Sed cum ducitur in aliud p: non potest etiam nisi quantum potest in partes illius p: Exemplum, *6* ducitur in 10, *igitur in 6* & 4, sed ut in *6* ex demonstratis non potest ultra *36*, ut autem 4 ducitur in *6* non potest, nisi ut in 4 & *2*, & ut in 4, nisi ut in seipsum, igitur non potest nisi usque ad *16*, & ut residuum 2 in 4, nisi ut in *2*, & *2* igitur non potest nisi 4 & 4, sed *36*, *16*, 4 & 4, producunt *60*, *igitur 6* in 10 non potest producere nisi *60*, igitur m: in m: seu alienum in alienum, & m: in p: seu p: in m: seu quod est in alienum, seu alienum in id quod est, producunt m: solum, seu alienum quod erat demonstrandum. Ex quo intelliges ueram rationem ducendi m: & diuidendi per m: & accipiendi ℞ tam quadratam quàm cubam (nam de cuba dubium non est, quod est m:) non antea cognita. *Corm. 1. Supra ca. 6.*

Cor^m. 2. Ex hoc etiam patet, quod diuiso m: per p: exit m: nam ducto m: in p: fit m: ergo diuiso m: per p: exit m: Et diuiso m: per m: exit m: & p: quia ex m: in p: & m: fit m: igitur diuiso eo producto, quod est m: exit alterutrum, scilicet p: uel m: Diuiso autem p: per m: nihil exit, nam seu exiret p: seu m: ex m: in idem p: uel m: produceretur p: quod est contra demonstrata.

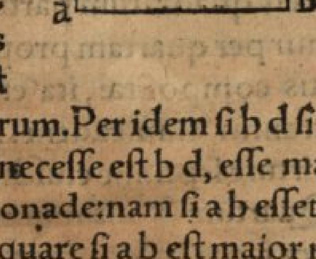
De examine capituli cubi & numeri æqualium rebus. CAP. XXIII.

LEMMA.

Proponatur primo a b res & quadratum eius a c, et sit b d numerus quadratorum æqualium cu. 6, & numero, dico quod b d est maior b a, nam si minor esset cubus a b maior, quadratis, igitur multo maior esset cubus a b cum numero, quadratis ipsis non ergo æqualis. Contraria ratione sequitur, quod si cubus ęquaretur quadratis & numero, necesse est a b, rem esse maiorem numero quadratorum. Per idem si b d sit numerus rerum æqualium cubo & numero, necesse est b d, esse maiorem a b, modo a b sit æqualis, aut maior monade: nam si a b esset maior b d: esset a c maius superficie a b in b d, quare si a b est maior monade, cubus a b erit, multo maior rebus: ergo cubus a b cum numero multo maior rebus secundum numerum b d, non ergo possunt esse æquales, sed ubi a b esset minor monade, posset esse in hoc casu cubus cum numero æquati rebus, ut 1 cu. p: $\frac{7}{64}$ æqualis $\frac{2}{3}$, rei tunc a b est $\frac{3}{4}$, quod est maius $\frac{2}{3}$.



Quod si cubus æquetur rebus & numero, ut sit b d numerus rerum & quadratum eius b d a, ut etiam a b sit numerus idem rerum, & ęqualis b d, tunc si quadratum b d numeri rerum additum numero æquationis sit æquale cubo numeri rerum, tunc æstimatio rei, id est b c erit numerus rerum, uelut b d sit 4 numerus rerum & numerus æquationis 48 ex 48, & 16 quadrato 4, fit 46 cubus eiusdē 4, igitur 4 est æstimatio rei. Sed si quadratum b d cum numero rerum fuerit minus cubo b d, erit b c æstimatio rei b c, minor b a, ut si cubus æquetur 4 rebus p: 47, quia 16, & 47 faciunt 63, minus 64, cubo 4, numeri rerum erit b c, minor b a: & si quadratum esset cum numero æquationis



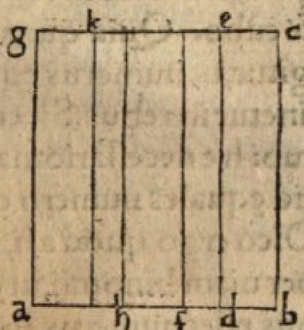
maius

maius cubo esset æstimatio rei maior numero rerum. Velut 1 cub: æquetur 4 rebus p:50, tunc æstimatio rei erit b c, maior b a, qui est 4 numerus rerum.

DEMONSTRATIO.

Quibus stantibus proponatur res, & b c numerus rerum & parallelogrammum a b c quãtitas ipsarum rerum collectarum, & sint res sub numero b c, putà 34, æquales 1 cub. p: 12. Et erit per lemma præcedens b c maior b a, item oportet ex demonstratis in libro de Proportionibus, ut cubus tertiæ partis b c sit æqualis, aut maior numero æquationis. Sic ergo numerus æquationis superficies d b c e; eritq; b d necessariò numerus: superficies ergo a d e, est æqualis cubo a b, & quia cubus a b fit ex demonstratis ex cubis d b & d a, & triplo unius in quadratum alterius, & cubus b d est numerus, quia b d est numerus, ergo diuiso cubo numero, per b c numerum prodibit numerus: sit igitur superficies e f æqualis cubo d b, erit igitur superficies f g, æqualis triplo b d, in quadratum d a & a d in quadratum d b, & cubo a d. Exemplum ergo erit (ut dixi) quod d e sit 12, & b c 34, erit b d $\frac{6}{17}$, a b autem, ut binomium est 3 p: R 7, & cubus b d $\frac{216}{4913}$, tota igitur superficies f c esset 12 $\frac{216}{4913}$. Propterea uides per eandem rationem, quod diuisa f c per b c, exit f d numerus maior b d. Et rursus cubus ille componetur ex cubis b f, f a, & triplo mutuo dicto, & ita semper cubus fiet minor, & numerus æquationis maior: nam diuiso 12 $\frac{216}{4913}$ per 34 exit $\frac{29586}{83521}$, & tanta est b f, cuius cubum oporteret rursus addere ad superficiem b e, & ita iuxta datam proportionem augetur numerus æquationis & cubus minuitur. Oportet igitur in hoc casu ita distinguere dicendo, quòd si per cubum intelligis priorem cubum, scilicet a b ille cum 12 numero, & non cum 12 $\frac{216}{4913}$, æquatur 34 rebus, licet enim contineat alios numeros, non sunt tamen de natura numeri æquationis, sed propria pars. Si uerò dicas quod aliquis cubus p: 12 $\frac{216}{4913}$, qui erit minor cubo a b æquetur 34 rebus? dico quod non, quia ille cubus erit cubus lineæ minoris a b, igitur si 34 a b æquantur cubo minoris lineæ, quàm sit a b, & 12 $\frac{216}{4913}$ oportebit tunc quod res tunc sit minor, quæ est latus cubi, igitur oportebit quod sint plures res quàm 34, quæ sint æquales cubo p: 12 $\frac{216}{4913}$, & ita omnia uariantur uno uariato.

Per 20^am seu 21^am 10 Elem.



Rursus ergo assumatur linea a h, quæ sit pars binomij, & h b numerus, tunc cubus h b poterit solus esse numerus, ut cum a h fuerit quantitas absurda, uelut gratia exempli R v: R 7 p: R 3, uel poterit

esse

esse cum cubo a h, cum a h fuerit ℞ cu. numeri, uel cum triplo h b in quadratum a h, ut in proposito posita a h ℞ 7, nam cubus h b est 27, & triplum h b in quadratum a h est 63, ut totus numerus sit 90, quibus additis 12, fit 102, qui est æqualis 34, numero rerum ducto in 3, qui est numerus æstimationis seu binomij. In omni casu ergo ex his tribus constat quòd numerus totus est superficies h c. Et quia numerus æquationis æquatur illi, dico quod non potest esse maior, nam sic pars æquaretur toti, nec æqualis ex demonstratione habita, nam b h tota esset numerus, ergo cubus eius esset numerus, ergo numerus æquationis h c, cum numero cubi h b esset maior numero, qui continetur in rebus, ergo res non possent esse æquales numero & cubo. Quia quantitas aloga esset æqualis numero, relinquitur igitur, ut numerus æquationis sit necessariò minor, numero qui continetur in rebus. Sit ergo numerus æquationis d c, & erit numerus cubi h e necessariò: nam hi duo numeri pariter accepti sunt necessariò æquales numero contento in rebus, quem supposuimus esse h c. Dico ergo, quòd a h non potest esse ℞ simplex, quia non satisfacit

Cap. 10. per uiam binomij, ut ostensum suprà. Nec potest esse ℞ cu. nam cubus esset numerus, igitur 34 radices gratia exempli essent unum aggregatum radicum cub. quæ æquiualerent uni, & hanc oporteret æquari tripla producti unius in quadratum alterius mutuò: at hoc esse non potest, quoniam illa solida sunt incommensa, quia sunt in proportione a h ad h b, id est ℞ cub. ad numerum, quæ sunt incommensa inter se. Relinquitur ergo ut sic a h una quantitas alterius generis, quæ ducta uicissim cum h b una in quadratum alterius, additoque illius cubo sciat quantum ducta in 30 gratia exempli, qui est numerus rerum.

At quia in illo aggregato est etiam triplum quadrati h b in a h, oportebit ergo ut cubus a h cum triplo quadrati a h in h b sit æquale residuo tripli quadrati h b, & numeri rerum ducto in a h: igitur diuisis omnibus per a h, erit ut quadratum a h, cum rebus triplo numeri h b, sit æquale numero simplici, qui est differentia numeri rerum, & tripli quadrati h b. Exemplum ponatur h b 2, & b c numerus rerum 30, igitur triplum quadrati h b, quod est 12, detractum à 30, relinquitur 18, ergo 18 est æqualis 1 quad. p: triplo h b, id est b rebus: quare res erit ℞ 27 m: 3, id est a h, & tota h b ℞ 27 m: 1, & erit 1 cu. p: 52 æqualis 30 rebus. Quantitas ergo a h oportet, ut sit generalis ad illam, & cum prædictis conditionibus. Quod si a b ponatur res, & h b numerus, ut prius, sed m: operaberis & demonstrabis per ea quæ ostendimus in capite præcedenti: nam cubus uerus erit cubus h a, scilicet residui. Et quia ei additur numerus, & iam superficies

cies h c est m: oportebit, ut h g sit maior cubo a h, quantum est numerus æquationis, quæ sit gratia exempli h k, ideò cubus a b, seu uerius a h, erit a k, reliqua ut prius erunt examinanda.

Demonstratio ostendens quòd caput nullum præter inuenta, generale sciri potest. CAP. XXIIII.

Reliquum est ut ostendamus quod ab initio propositum est, cuius causa hæc scripsimus, scilicet non esse capitulum aliud generale, quod sciri posit, ultra ea quæ tradita sunt, quoniam ultra quatuor diuersa genera nisi posit reduci ad pauciora, uel per diuisionem, uel radicem, aut per mutationem, aut regulam propriã uel deprimendo, aut ob originem, aut per demonstrationem Geometricam, cum in singulis sint magnæ inæqualitates, quę uix possunt intelligi in quatuor quantitatibus, nec in eis potuerit inuenire perfectio quanto minus in illis. De his ergo, si sint quatuor usque ad cubum, iam doctus es reducere ad tres quantitates, & capita trium quantitatum omnia ad cubum æqualem rebus & numero: si igitur ostendero hoc nõ posse esse generale, etiam in parte ignota liquet propositum.

Assumamus igitur primam regulam capitulorum imperfectorum specialium, in qua 1 cu. æqualis est 20 rebus p:32, & est rei æstimatio ℞ 17 p:1 binomium quintum. Et similiter in Arte magna uisum est, quod duæ æstimationes capituli cubi & numeri æqualium rebus conficiunt æstimationem cubi æqualis totidem rebus, & eidem numero. Ex quibus liquet, quod oportet æstimationem generalem posse communicari numero, & quinto binomio, & quia simile quinto binomio est numerus, non quintum binomium oportet, ut sit in creatione eiusmodi. Quintum autem binomium hoc modo transit ad æquationem, ut pote ℞ 3 p:1 sic fiat cubus, erit ℞ 108 p:10, hic igitur æquatur 6 rebus necessariò, quia ℞ 108 continet ℞ 3 sexies, & quia sex res non sunt nisi ℞ 108 p:6, igitur cubus æquatur sex rebus p:4. Ergo cum illud, quod potest esse ex ea natura, uel est ℞ cubica cubi consimilis, uel quadrata quadrati, uel quadrata cubica quadrati cubi, uel differentia duorum, uel aggregatum necessarium est, ut talis ęstimatio simpliciter sit una huiusmodi, si debet esse generalis, ut quandoque posit illi æquari, si occurrat quadratum, igitur ℞ 3 p:1 est, ut uides in margine differentiæ autẽ, & aggregata sunt infinitorum modorum, nam sit a b quæuis quantitas, & c b ipsa æsti-

Cap. 25. Art. mag.

Cap. [illegible] fine [illegible] secunda

Res	℞ 3 p:1
Quad.	℞ 9 p: ℞ 12 p:1
Cub.	℞ 27 p:1 p: ℞ 81 p: ℞ 27
Cub. quad.	208 p: ℞ 43200
Quad. quad.	28 p: ℞ 768.

a c b

GG matio,

matio, si igitur detracta b c ex a b relinquitur a c, igitur detracta a c ex a b, relinquetur b c æstimatio. Et similiter posita a b æstimatione, potes a b illa detrahere a c modo minor sit, ut relinquetur b c, igitur ex a c & b c iunctis fiet æstimatio. Iam ergo habes quod poterit esse radix quadrata trinomij, cuius una pars sit numerus & cubica quadrinomij, cuius una pars sit numerus & ℞ ℞ binomij, aut quadrinomij, cuius una pars sit numerus, & ℞ cu. quadrata multinomij, scilicet tredecim partium aut pauciorum, quæ sint ℞ quadratæ, ita ut in eis una sit numerus.

Pro aggregatis autem ac differentijs tradendis, uolo tibi dare exemplum ex Arte magna, dixi quod ℞ v: $7\frac{3}{8}$ p: ℞ $46\frac{35}{64}$ p: $1\frac{3}{4}$ m: ℞ $2\frac{5}{16}$ est æquale 3. Deducito partes ex partibus, ut uideas si sit uerum, & habebis $2\frac{1}{4}$ p: ℞ $2\frac{53}{16}$ æqualia ℞ v: $7\frac{3}{8}$ p: ℞ $46\frac{53}{46}$. Duc igitur utranque in se, & habebis idem ex utraque parte, id est $7\frac{3}{8}$ p: ℞ $46\frac{53}{64}$, nam $2\frac{1}{4}$ m: se facit $5\frac{1}{16}$, cui addit $2\frac{5}{16}$, fit 7 & $\frac{3}{8}$ & ℞ $5\frac{1}{16}$ in ℞ $2\frac{5}{16}$ fiunt $\frac{2997}{256}$, quæ duplicata faciunt $\frac{2997}{64}$, & sunt $46\frac{53}{64}$, cuius radix addita ad $7\frac{3}{8}$ facit $7\frac{3}{8}$ p: ℞ $46\frac{53}{64}$. Vnde in alijs eodem modo operaberis, dico ergo quod non potest esse ℞ quadrata trinomij habentis duas ℞ quad. & numerum unum, nam ℞ quadrata ℞ 6 p: ℞ 2 p: 1, si posset esse ex genere binomij tertij uel sexti non possit satisfacere, ut demonstrandum est, neque si una pars sit numerus, & alia ℞ nam eius quadratum erit binomium, & non trinomium. Proponamus ergo ℞ ℞ 6 p: 1, & erit eius quadratum 1 p: ℞ 6 ℞ ℞ 96: nam si capiamus ℞ ℞ 4 p: 1 fiet ℞ 4 p: 1 p: ℞ ℞ 64, id est 3 p: ℞ 8, si ergo capiamus

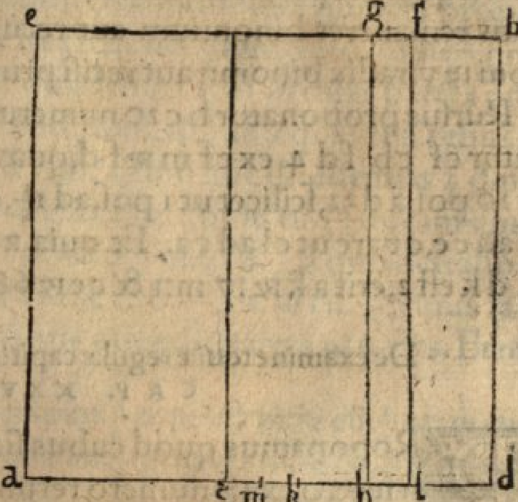
Per quartam secūdi El. Euclid.

℞ ℞ 12 p: ℞ 3 p: 1
4 p: ℞ 48 p: ℞ ℞ 192 p: ℞ ℞ 1728
160 p: ℞ 432 p: ℞ ℞ 248832 p: ℞ ℞ 442368

℞ ℞ 4 p: ℞ 3 p: 1 licet resoluatur in 160 p: ℞ 432 p: ℞ ℞ 442 368 p: ℞ ℞ 248832, hæ tamen non sunt commensæ, sed in proportione ℞ ℞ 256 ad ℞ ℞ 144, id est 4 ad 12, licet sit ualde propinqua, nam ℞ 432 est duodecupla ℞ 3 & ℞ ℞ 248832, est duodecupla ℞ ℞ 12, & est mirum adeò quod si ℞ ℞ 442368 esset numerus, haberemus intentum. Cum ergo hoc trinomium non posset reduci ad pauciora multo minus reliqua, quare ℞ cub. 460 p: ℞ 432 p: ℞ ℞ 442368 p: ℞ ℞ 248832 non potest esse æquatio quæsita, igitur oportet ut sit differentia duarum quantitatum, & fundamentum erit in prima regula dicta in Arte magna superius.

Sit cubus a b æqualis 29 rebus a d, & erit superficies b c 29, & c e 42 numeris, & erit corpus, & iuxta altitudinem a d. Et cum ex 29 possint fieri partes, ut uides à latere ex quibus una ducta in alterius radicem fit numerus, poterit numerus rerum datus cum 28, 50, 60,

52 &



52 & 20 æquari cubo, dico modo quod etiam poterunt fieri aliæ partes non integræ, utpote 18 p:℞ 72, & 11 m:℞ 72, & ex 18 p:℞ 72 in 3 m:℞ 2, radicem 11 m:℞ 72, fit 42 alius numerus. Ex quo liquet quod oportet 11 m:℞ 72, esse binomiū primum aut recisum, ut & etiā. Proponatur ergo e f 18 p:℞ 72, & c g 18, erit ergo h f p:℞ 72, igitur alia pars erit f d denominata per d g, scilicet 11 m: f h ℞ 72, ita ut diuisio uera b c, scilicet 29, fit uere in f, nam c f est 18, id est c g p:℞ 72, id est f h & d f 11, id est d g m:℞ 72, id est f h. Diuisio autem iuxta nomen in g, quoniam c g est 18, & g d 11. Et quia proportio c b corporis ad c e est ueluti c d ad c a, erit c d ad c a, uelut 29 pos. ad 42, igitur uelut 1 pos ad $1\frac{13}{29}$, uel $\frac{29}{42}$ pos. ad 1 numerum. Rursus quia ex regula prima capituli c f in ℞ f d, fit c e corpus, & sit latus d f, d k erit a d ad d k, ueluti c f superficiei ad c e, superficiem quare ueluti c l ad c a. Atque iterum cum l g fiat ex duplo partium d k, proponatur denominata per p: & m: & sit quod est p: d m, & quod est m: k m duplum, igitur m k in m d producit h f. Vt in exemplo, cum ergo c g proponatur numerus 18, & g l ℞ 72, & proportio partium d k ut denominatæ, id est ut d m, quę est numerus m: m k, & eadem proportioni c g ad g l, sequamur ergo primum argumentum rei. Erit a d ℞ v: $20\frac{3}{4}$ p: ℞ $40\frac{1}{2}$ p: $1\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{1}{2}$. Ex regula prima. Hæc igitur est uera æstimatio rei, & eadem est 6, & fit experimentum, quia detracta $1\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{1}{2}$, ex 6 fit $4\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{1}{2}$, & hoc est æquale ℞ v: $20\frac{1}{4}$ p: ℞ $40\frac{1}{2}$ quod patet quia quadrata utriusque sunt $20\frac{1}{4}$ p: ℞ $40\frac{1}{2}$. Igitur hoc genus æstimationis est generale, quia potest æquari numero, & 25 Art. mag.

28.1. 1.28
25.4. 2.50
20.9.3. 60
15.10.4.52
4.25.5.20
18 p:℞ 72.11 m:℞ 72.3 m:℞ 2/42.

e f 18 p:℞ 72
c g 18
h f ℞ 72
f d 11 m: ℞ 72
d g 11
c d ad c a ut 1 pos. $1\frac{13}{29}$
d k ℞ v 11 m: ℞ 72
a d ad d k, ut c l ad c a
m k in m d pd. dim. f h ℞ 18
d m 3
m k ℞ 2
d k 3 m: ℞ 2
c g ad g l, ut d m ad m k.

non æquari, & posset æquari binomio, quia detractis partibus alligatis remaneret binomium aut recisum necessario, & tunc posset poni ℞ v: radix binomij aut recisi primi.

Rursus proponatur b c 20 numerus rerum c e corpus 32, proponatur c f c b f d 4 ex e f in ℞ f d, quæ est 2, fit 32. Sit iterum c d ad c a ut 20 pos. a d 32, scilicet ut 1 pos. ad $1\frac{3}{5}$, & quia est iterum a d ad d k, ut c f ad c e, quare ut c l ad c a. Et quia a d ex regula prima est ℞ 17 p: 1, & d k est 2, erit a k ℞ 17 m: 1 & c e ℞ 68 m: 2.

De examine tertiæ regulæ capituli XXV. Artis magnæ. CAP. XXV.

PRoponamus quod cubus sit æqualis 18, rebus p: 108, tūc si fecero ex 18 numero rerum duas partes, ex quarum ductu unius in ℞ alterius mutuo fiat 54 dimidium 108. Et manifestum est quod res est 6. Et per regulam generalem est ℞ v: cub. 54 p: ℞ 2700 p: ℞ v: cu. 54 m: ℞ 2700, & hæc uere est 3 p: ℞ 3 p: 3 m: ℞ 3, quod est 6 ut prius. Diuisio autem non est secundum eum modum, sed ℞ partium 18 sunt 3 & 3, & partes 9 & 9, & producta mutuo sic erunt 54. Et similiter assumptis 21 rebus, & 90 numero, faciemus iuxta capitulum generale ex 90 duas partes, ex quarum ductu unius in alterum fiat 343, cubus 7, tertiæ partis 21 numeri rerum, & habebimus partes ℞ v: cu. 45 p: ℞ 1682, p: ℞ v: cu. 45 m: ℞ 1682, & est 3 p: ℞ 2 p: 3 m: ℞ 2 6 ut prius, & ita augendo numerum rerum eximus extra capitulum, sed minuendo numerum rerum nimis non licet uti regula ut pote 1 cu. æqualis 15, rebus p: 126, non licet diuidere 15 in duas partes, ex quarum ductu unius in ℞ alterius mutuo, fiat 63 dimidium 126. Quia maximum in quo diuidi posit, est quando diuiditur in partes æquales, ut demonstratum est. Ergo tres sunt partes in hoc capitulo, prima quæ seruit regulæ speciali, non generali, cum numerus rerum est magnus in comparatione numeri æquationis. Secunda quæ seruit regulæ generali non speciali cum numerus æquationis est magnus comparatione numeri rerum. Tertia quæ seruit utrique, ut in exemplo non potest regula generalis attingere ad 1 cub. æqualem 22 rebus p: 84, quia 21 quarta pars 84, non facit quadratum, neque maius neque æquale cubo $7\frac{1}{3}$ tertiæ partis rerum. Similiter regula specialis non attingit ad 1 cub. æqualem 17, rebus p: 114, quoniam $8\frac{1}{2}$ ductum in ℞ $8\frac{1}{2}$, producit ℞ $614\frac{1}{8}$, quæ est minor $28\frac{1}{4}$, quarta parte 114 numeri propositi, ut mutua illa non posint componere 57 dimidium numeri propositi. Traducenda est ergo in toto illo spacio, in quo conueniunt una ad aliam faciendo ex re iam inuenta duas partes, ex quarum ductu

Per 209. lib. de Proport.

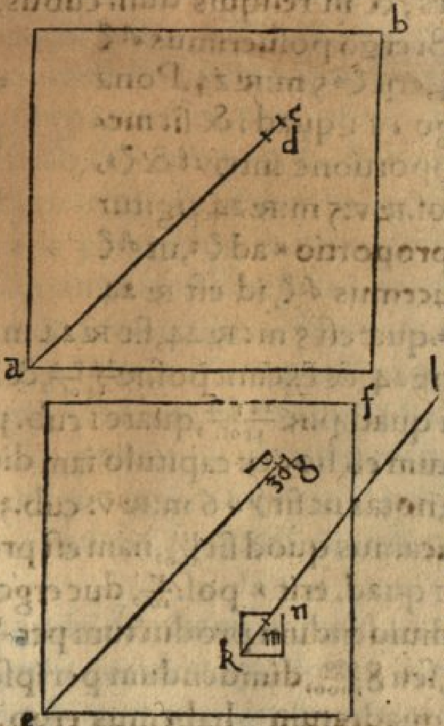
unius

unius in quadratum alterius mutuo, fiat dimidium numeri propositi, & illæ erunt partes. Istud autẽ facile fiet diuidendo numeri propositi, dimidium per rem inde diuidendo rem in duas partes producentes id quod prouenit. Exemplum, cubus æquatur 6 rebus p: 6, rei æstimatio est ℞ cub. 4, p: ℞ cub. 2, cum hoc diuidemus 3 dimidium numeri æquationis, exit ℞ cub. 2 m: 1, p: ℞ cu. $\frac{1}{2}$, ducam dimidium ℞ cu. 4, p: ℞ cu. 2, in se fit 1 p: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ p: ℞ cu. $\frac{1}{11}$, à quo detraho ℞ cu. 2 m: 1 p: ℞ cu. $\frac{1}{2}$, relinquitur 2 m: ℞ cub. $\frac{1}{4}$, m: ℞ cu. $\frac{1}{10}$, cuius ℞ v: addita & detracta à dimidio prioris ostendit partes ut uides. Et modum etiam cum demonstratione superius docui. Quadrata ergo horum iuncta sunt 6, & mutuo producta iuncta sunt 3, quod patet experienti. Et est pulchra operatio.

℞ cu. $\frac{1}{2}$ p ℞ cu. $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: 2 m: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{10}$
℞ cu. $\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: 2 m: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{10}$

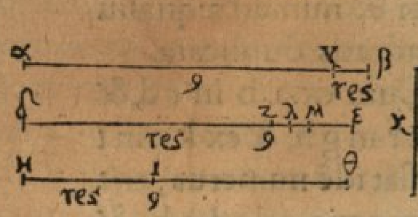
De propositione cubi æqualis quadratis, & numero ad cubum cum numero æqualem quadratis. CAP. XXVI.

SI cubus sit æqualis quadratis & numero, alius uero cubus cum eodẽ numero sit æqualis, aliquot quadratis erit proportio differentiæ numeri quadratorum à sua æstimatione, dum cubus & numerus est æqualis quadratis ad differentiam æstimationis à numero quadratorum, dum cubus est æqualis quadratis, & numero sicut æstimationis cubi æqualis quadratis & numero ad æstimationem cubi & numeri æqualiũ quadratis duplicata.



Cum ex a b in c d, & ex e f in g h, & ex k n in l m, fiat idẽ numerus, erit proportio c d ad g h, & c d ad l m, & g h ad l m, uelut e f ad a b, & k n ad a b, & k n ad e f, quare ut e h ad a c, & k m ad a c, & k m ad g h duplicata. Veluti ponatur e h ℞ 24 p: 4, & k m 1 in 1 cub. p: 8 æquali 9 quad. Cum ergo nota e g g h h e nota fiat sub eisdem terminis k m & m l ex capite cubi & numeri æqualium quadratis, igitur nota a d d c, & paribus aliis erit nota e h & h g. Discrimen solum est, quòd in cubo æquali rebus & numero differētia est lateris, quod superat numerum quadratorum, in sequentibus figuris numerus quadratorum superat æstimationem rei seu latus quad. liquet ergo quod inter e h & k m intercedunt quatuor conditiones: prima quod e h & k m sunt ambæ æstimationes capituli propositi cubi & 8 numeri æqualium 9 quad. Secunda quod e h & k m sunt in proportione, in qua est l m ad h g uicissim, sed hæc est duplicata. Tertia quod k m est composita ex tetragonali g h in e p, posita o h dimidio h g, & ipsa p h dimidio o h. Quarta quam diximus deesse comparando a c & c d ad e h & h g, est quòd e h & k m æstimationes sunt minores e g seu k l nu numero quadratorum. Cum ergo ex tertia conditione, quod fit ex g h in p e sit notum, quia g h & o e notæ sunt, & g o nota, quia dimidium g h erit k m composita ex eis nota. Deducitur ergo primum problema ad hoc, detrahe ex k l quantitatem, quæ se habeat in proportione duplicata ad h g, in qua e h ad k m. Cum e g & k l sint idem seu æquales. At secundum problema est, diuide k l, quę est eadem uel æqualis a d, ita ut proportio m l ad c d sit duplicata ei, quæ est a c ad k m. In utroque autem pariter deducitur res ad cubum & numerum æqualem numero rerum, igitur æstimatio pariter ignota ex nota pendebit.

Sumantur ergo rursus κγ, δε, ηθ, nouem singulæ & æquales, & sit tota res, & in reliquis dum cubus, & 8 æquantur 9 quad. res sit δζ & ηι. Si ergo posuerimus δζ ℞ 24 p:4, erit ζε 5 m: ℞ 24. Ponamus ergo ιθ 1 quad. & sit medio in ꝓportione inter ιθ & ζε, κ erit κ pos. ℞ v: 5 m: ℞ 24, igitur cum sit proportio κ ad ζε, ut δζ ad ηι, ducemus δζ, id est ℞ 24 p:4 in ζε, quæ est 5 m: ℞ 24, fit ℞ 24 m: 4, quam diuido per κ, id est pos. 5 m: ℞ 24, & exeunt pos. ℞ $\frac{24\ p\ 4}{1\ pos.}$, & hæc est ηι. Igitur tota ηθ quæ est 9, est 1 quad. p: ℞ $\frac{24\ p\ 4}{1\ pos.}$, quare 1 cub. p: ℞ 24 p:4, æquatur 9 pos. & quia notum est hoc ex capitulo iam dicto: & assumo eodem modo αγ & γβ, notas ut sit γβ 6 m: ℞ v: cub. 31 p: ℞ 934 p: ℞ v: cub. 31 m: ℞ 934, & dicamus quod sit $\frac{121}{100}$, nam est propè, & ponamus quod 10, ut prius sit 1 quad. erit κ pos. $\frac{11}{10}$, duc ergo $\frac{11}{10}$ βγ in αβ, id est $\frac{121}{100}$ in $\frac{779}{100}$, & quia est diuidendum productum per $\frac{11}{10}$, ideo sufficiet ducere per $\frac{11}{10}$, & fit $\frac{8569}{1000}$, seu $8\frac{569}{1000}$, diuidendum per ipsos, nam κ fuit $\frac{11}{10}$ pos. quia fuit latus $\frac{121}{100}$ quadratum, habemus ergo ut prius $8\frac{569}{1000}$, diuidendum



per

per 1 pos p: quadrata æqualia 9, igitur 1 cub. p: 8 $\frac{569}{1000}$ æqualia 9 pos.

Videtur ergo propior modus demonstrationi, ut supponamus ad rei æstimationem, in qua a b numerus quadratorum, & b d numerus æstimationis, diuisus per quadratum a b. Et rursus a b numerus, id est quadratorum, & e b numerus æstimationis, idem cum priore, & diuisus per quadratum a c uel a e, quia habet duas æstimationes, sed tunc æquatio erit diuersa, quam oportebit inuenire. Dico ergo quod si cubus p: 200, est æqualis 100, erit a e res & a b 100, ponamus ergo ad æstimationem cubi æqualis 100 quad. p: 200, erit ergo a d nota, & a b est 100 numerus quadratorum, igitur b d differentia nota, & quia demonstratum est, quod proportio c b ad b d est duplicata ei quæ est a d ad a e, igitur proportio mediæ inter e b ad b d est ut a d ad a e, sit ergo b d 2, pro exemplo ut intelligas pones e $6\frac{1}{2}$ quad. & si b d esset 3, poneres e $6\frac{1}{3}$ quad. & si b d esset 4, poneres e $6\frac{1}{4}$ quad. ad hoc ut media sit 1 pos. quæ ducta in a e, producit quantum a d in d b, productum autem a d in d b est notum, quia a d & d b notæ sunt, & hoc est æquale mediæ ductæ in a e, quæ est numerus quadratorum communis, detracta e b quæ est pars illa, quæ prouenit diuisa monade per b d, & est nota, & est pars cubi. Sequitur igitur ex constructione, ut reducendo ad 1 cub. ut habeas cubum cum numero æqualem numero rerum. Et ut numerus rerum sit semper productum ex b d in a d: & numerus æquationis compositus ex producto quadrati a b in a d, & cubo ipsius b d, ueluti si ponatur (ut dixi) a b 100, & b d 2, erit 1 cub. p: 408, æqualis 200 rebus, fit autem 200 ex 2, quæ est b d in 100, quæ est a b numerus quadratorũ 408 autem componitur ex 400, producto 4 quadrati 2, & est b d in 100, quæ est a b, & 8 cubo 2 b d. & ita si b d esset 3, esset 1 cub. p: 927, æqualis 300 rebus, & eodem modo si b d esset 9, esset cubus cum 8829 æqualis 900 rebus, numerus enim rerum semper est productus ex æstimationis differentia à numero quadratorum in ipsum numerum quadratorum. Numerus autem æquationis scilicet 8829 est compositus ex 8100 producto quadrati 9, id est 81 in 100 numerum quadratorum, & 729 cubo b d, quæ est 9. Cum igitur hoc capitulum sit speciale, & circumscriptum habebit æstimationem notam, ut reliqua capitula specialia cubi & numeri æqualium rebus, & hæc æquiualebit generali cubi & numeri æqualium quadratis.

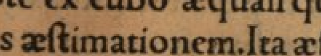
Ergo proposita quæstione cubi & numeri æqualium quadratis erit nota æstimatio cubi æqualis totidem quadratis, & eidem numero, quare a d nota, & quia a b numerus quadratorum est notus,

erit

erit nota b d, ducemusq́ b d in a b & habebimus numerum rerum, ducemus etiam b d ad quadratum inde in a b, & producto addemus cubum d b, & habebimus numerum æquationis cum regula, ergo ſpeciali inueniemus æſtimationem eius, & hæc erit prima æquatio, ſcilicet mediæ quantitatis inter e b & b d. hanc igitur ducemus in ſe, & diuidemus per b d, & exibit quantitas b e ſecunda æquatio, quam detrahemus ex a b numero quadratorum propoſito, & habebimus a e æquationē tertiam quæſitam. Vnde patet quàm difficilis ſit hæc inuentio, & quàm abſurdum genus quātitatis proueniat per decem difficultates. Prima eſt inuentio ad quæ ſolet eſſe trinomium compoſitum cubicum, & ex radicibus uniuerſalibus, quia pendet ex capitulo generali. Secunda eſt reſiduum b d detracta a b. Tertia eſt productum ex a b in b d. Quarta eſt quadratum b d. Quintæ productum, ex eodem quadrato in a b. Sexta cubus b d. Septima eſt æſtimationis inuentio cum operationibus capituli ſpecialis. Octaua eſt deductio inuentæ æſtimationis ad quadratum nona eſt diuiſio producti per quantitatem b d. Decima eſt detractio prouentus à numero quadratorum. Ex his facillimæ ſunt tres, ſcilicet ſecunda, quinta & decima, penè impoſsibiles duę, ſcilicet ſeptima & nona, reliquæ ualde difficiles.

De æſtimatione data, ut inueniatur numerus æquationis. CAP. XXVII.

ET cum in capitulis maioribus 1. cubi tum etiam in alijs ex tribus inueniatur quartum, utpote ex cubo æquali quadratis & numero datis inuenimus æſtimationem. Ita æſtimatione & cubo & quadratis inueniemus numerum, aut ex eadem & cubo & numero inueniemus quadrata, nam de cubo non eſt, ut quæramus ipſum per quadrata & numerum datum cum ſola æſtimatio doceat, cum ergo ſint ſex capitula & duobus modis in ſingulis contingat inueniri, quarum erunt duodecim capitula. Sit
1 ergo primum data a c æſtimatio rei, & numerus quadratorum a b datus, qui cum numero aliquo æquatur cubo a c: igitur



quia a c data eſt, erit cubus a c, datus & quadrata ſub numero a b, data reſiduum ergo ad cubum eſt, quod fit ex b c in quadratum a c, & hoc eſt notum, quia a c & a b notæ & quadratum a c, igitur numerus æquationis. Detrahe igitur numerum quadratorum ex æſtimatione data, & quod relinquitur duc in quadratum æſtimationis, productum eſt numerus æquationis. Exemplum æſtimatio eſt 10, cubi æqualis 6 quadratis & numero cuipiam, detrahe 6 ex 10, relinquitur

quitur 4, duc in 100 quadratum 10, fit 400, igitur cubus æquatur 6 quad. p: 400.

Sit modo numerus ęquationis scilicet productum ex b c in qua= 2
dratum a c, & diuidam illum per quadratum a c, prodibit b c, detra
ho ex a c, relinquitur a b numerus quadratorum.

Sit cubus a b & quadrata b c, data & æstimatio nota, erit ergo 3
cubus notus, & b c ducta in quadratum a b etiam nota, iungendo
utrunque habebis numerum æquationis.

Et sit cubus & a b data sit & numerus æquationis datus, igitur 4
detraham cubum a b datum ex æquationis numero dato, resi=
duum diuidam per quadratum a b datum, quia a b data est, quod
prodit est b c numerus quadratorum.

Et sit a c numerus quadratorum datus, & a b æstimatio rei, & 5
quadrata illa sint æqualia cubo & numero. Quia ergo a b data est,
erit quadratum eius, & cubus eius datus, ideò etiam productum ex
a c in quadratum a b, à quo detracto cubo a b, relinquitur numerus
æquationis. Exemplum a c sit 6 numerus quadratorum, a b autem
4 cubus eius est 64, quadratum 16, igitur sex quadratum sunt 96,
detrahe 64 cubum ęstimationis, relinquitur 32 numerus æquatio=
nis, igitur 1 cu. p: 32, æquatur 6 quad. quando æstimatio rei est 4. Et
in huiusmodi cum æstimatio media æquatur extremis, caue ne ca=
sus sit impossibilis.

Et sit modo numerus æquationis & æstimationis notus, & ue= 6
lim numerum quadratorum æqualium cubo & dicto numero æ=
quationis. Quia ergo a b nota est æstimatio, erit cubus eius notus:
huic addam numerum æquationis iam notum, habebo totum nu=
merum notum quem diuidam per quadratum a b, iam, notum pro=
dibit a c numerus quadratorum.

Sit etiam ęstimatio nota cubi & rerum æqualium numero, liquet 7
quod cubus & res erunt notæ quæ iunctę faciunt numerum ęqua=
tionis notum.

Et rursus si à numero æquationis noto detrahas cubum æstima= 8
tionis notæ residuum erit notum, quod diuisum per æstimationem
ostendit numerum rerum.

Rursus si cubus æquatur rebus & numero, & res sint notæ, & æ= 9
stimatio, ducemus æstimationem in numerum rerum, & detrahe=
mus à cubo rei & residuum erit numerus æquationis.

Et ita si à cubo iam noto æquationis numerus detrahatur resi= 10
duum diuisum per æstimationem ostendit numerum rerum. Caue
tamen ne casum proponas imposssibilem, uelut cubum æqualem
rebus, & 10 numero & æstimatio 2, nam oportet æstimationem sem

per esse maiorem ℞ cu. numeri æquationis, id est 10, & ita in alijs.

11 Sit etiam cubus p:12 æqualis rebus, & sit æstimatio 2, tunc cubus 2 est 8, adde ad 12, fit 20, diuide per 2, prodibit 10 numerus rerum.

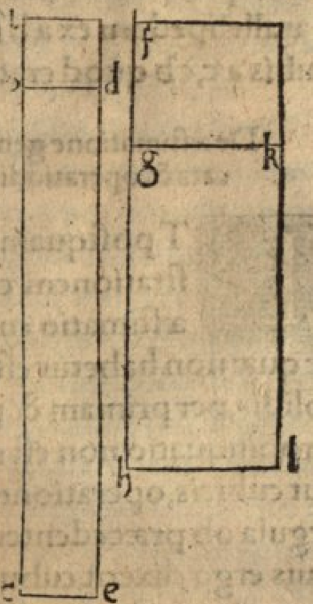
12 Et iterum sit cubus cum numero æqualis 10 rebus & ęstimatio 2, duco 2 in 10, fit 20, detraho 8 cubum, relinquitur 12 numerus æquationis qui cum cubo 2 iunctus æquatur decuplo 2. Et quia in capitulis quadratorum uel rerum æqualium numero & cubo est duplex rei ęstimatio, dico quod proposita quauis earũ, sequitur idem. Veluti cubus p:24 est æqualis quadratis & æstimatio una est 2, alia ℞ 21 p:3, duco 2 ad cubum, fit 8, addo ad 24, fit 32, diuido per 4 quadratum 2, exit 8 numerus quadratorum. Similiter duco ℞ 21 p:3 ad cubum, fit ℞ 48384 p:216, adde 24, fit 240 p:℞ 48384, diuide per 30 p:℞ 758 quadratum ℞ 21 p:3, exit 8.

Quòd in proposito capituli XXVI. peruenitur ad cubum, & res æqualia numero. CAP. XXVIII.

Cum uerò iam conclusum sit, quòd si quis possit inuenire regulam specialem cubi & numeri æqualium rebus, quando numerus rerum fit ex ductu duorum numerorum inuicem, & numerus æquationis ex ductu quadrati unius in aggregatum amborum, quod habebit æstimatio cubi & numeri æqualium quadratis: dico quod hęc specialis regula est difficilis inuentu, quia æquipollet uni generali, quoniam conuenit omnibus casibus, in quibus cubus & numerus æquantur rebus. Exemplum, si dico cubus & 6 æquantur octo rebus, dico quòd hæc erit sub regula illa speciali quia ponam quod una pars sit 1 pos. alia $\frac{8}{1\ pos.}$, duco igitur 1 pos. in se fit 1 quad. duco 1 quad. in aggregatũ 1 pos. p: $\frac{8}{1\ pos.}$, fit cu. p: 8 pos. æqualia 6, at hoc habet capitulum generale, igitur regula illa non est propriè specialis.

De comparatione capitulorum cubi, & rerum æqualium numero, & cubi & numeri æqualium totidem rebus. CAP. XXIX.

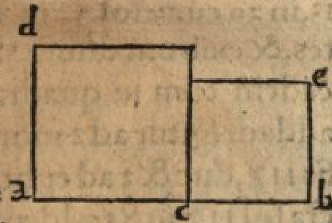
Et proponatur cubus a d cum rebus numero 10, æquales 12, & erit superficies b c 10, corpus autem a e 12. Dico primum quòd si sumatur f k cubus, qui cum 12 numero, & sit g l corpus iuxta altitudinem f g, æqualia 10 rebus, erit ergo superficies f l ex supposito, & habebit duas æstimationes, quod singulæ illarum erũt in mutua proportione hoc modo b c ad f h, ut f g ad a b, & iterum a e ad g h, ut f g ad a b. Quare proportio a c ad g h, duplicata e c, quæ est b e ad f h. liquet etiam quod utraque æstimatio f g est



est maior a b, quia cum æqualiter sumatur est æqualis g l numero, qui est æqualis toti a c, & ultra etiam cubo f k per communem animi sententiam. Ex quo sequitur, quod a c sit maior g h, igitur cum sit duplicata ei quæ est b c ad f h, erit b c maior f h. Et etiam clare per se patet cũ sit mutua, ut f g ad a b. Et quia 10 res f h ęquantur cubo f k & g l numero æquationis, & g l est ęqualis cubo a d & b e rebus, erit f h numerus rerum æqualis cubis f k a d, & rebus b c, detractis igitur rebus b e ex rebus f h, quæ sunt numero æquales, erũt decem differentiæ f g & a b, æquales cubis a b & f g pariter acceptis.

Rursus proponantur duæ quantitates a b & b c, ut tota a c sit 2, gratia exempli, ut sit differentia illarum d b, & decuplum d b sit æquale cubis a b & b c, diuidemus a c 2 in 1 p: 1 pos. & 1 m: 1 pos. & cubi erunt 6 quad. p: 2, & hoc est æquale 20 rebus, id est decuplo d b, quæ est differentia, igitur 1 quad. p: $\frac{1}{3}$ æquatur $3\frac{1}{3}$ rebus & rei æstimatio est $1\frac{2}{3}$ p: R: $2\frac{4}{9}$ uel $1\frac{2}{3}$ m: R: $2\frac{4}{9}$.

Qualis æqualitas cuborum partium lineæ diuisæ.
CAP. XXX.



Sit a b diuisa in c quadrata eius c d, c e, dico quòd cubi a c c b sunt æquales parallelipedo ex a b in aggregatum quadratorum c d c e dempta superficie a c in c b, nam quod fit ex a b in aggregatum quadratorum c d, c e est æquale ei quod fit ex a c in c d, c e & ex b c in c e, c d, quare duobus cubis a c & c b, & eis quæ fiunt mutuo parallelipedis a c in c e, & c b in c d, at a c in c e, quantum ex b c in superficiem a c in c b, & ex c b in c d, quantum ex a d in superficiem a c in c b: quod igitur fit ex a b in c d, & c e est æquale cubis a c c b, & ei quod fit ex a d in superficiem a c in c b, & ex b e in eandem, quòd autem fit ex a d in superficiem a c in c b, cum eo quod fit ex b c, in eandem est æquale ei quod fit ex tota a b in superficiem a c in c b, eo quod a d est æqualis a c & b e, æqualis b c: igitur quod fit ex a b in c d, c e est æquale ei quod fit ex a b in superficiem a c in c b, cum cubis a c & c b, igitur detracto eo quod fit ex a b in superficiem a c in c b, ex eo quod fit ex a b in c d, c e & est idem quod detrahere superficiem a c in c b ex quadratis a c,c b erit parallelipedum ex a b in c d,c e detracta superficie a c in c b æquale cubis a c,c b quod erat demonstrandum.

De æstimatione generali cubi æqualis rebus,& numero solida uocata & operationibus eius. CAP. XXXI.

ET postquam non quærimus in æstimatione nisi demonstrationem operationem & propinquitatem, dico quòd æstimatio cubi æqualis rebus & numero generalis in parte quæ non habetur est nota secundum tres modos propositos in solidis,per primam & tertiam regulam cap.25 Artis magnæ: & appropinquatio non est minor quàm in reliquis radicibus quadratis aut cubicis,operationem autem nunc docebimus. Verùm in tertia regula ob præcedentem uidetur maior æqualitas atque notitia. Si quis ergo dixerit cubus est æqualis 13 rebus p:60,igitur dicemus ex tertia regula,quod res est ℞ solida 13 in 30, qui est dimidium 60, id est,ut ita diuidatur 13, ut ex partibus in radices suas mutuò ductis fiat 30. Dico ergo quod si uolueris hanc ℞ sol. ducere gratia exempli in ℞ duas duces ℞ 2,in se fit 2,duc in 13, fit 26,inde duc ℞ 2 ad cubum,fit ℞ 8,duc ℞ 8 in 30, fit ℞ 7200, igitur ℞ producta erit ℞ sol.26 in ℞ 7200.Et ita si uolueris eandem diuidere per ℞ 2,duc ℞ 2 in se,fit 2, diuide 13 per 2, exit $6\frac{1}{2}$, deinde diuide 30 per ℞ 8 cub.℞ 2, exit ℞ $112\frac{1}{2}$,& erit quod prouenit ℞ sol.$6\frac{1}{2}$ in $112\frac{1}{2}$.Hæc autem facile demonstrari possunt,in additione quoque similium uelut ℞ sol. 13,in 30 cu.℞ sol.52 in 240,diuides singulos per suas correspondentes,& exibunt diuiso 52 per 134,& diuiso 240 per 30,8 & ℞ cu.8, est eadem cum ℞ quadrata 4, quia iam supponuntur similes partes, addam igitur ad 2 monadem,fiet 3,duc ad quadratum fit 9,duc in 13 fit 117,duc & 3 ad cubum fit 27,duc in 30 fit 810, erit ergo ℞ coniuncta sol 117 in 810.Idem dico de subtractione. Diuidendo singulas partes per suas similis eius, quod prouenit capiendo ℞ quad. uel cu.quæ erit una à qua detrahe,& residuum reducito ad quadratum & cubum,& duc in suas partes quæ ei respondent. In dissimilibus autem adijciemus aut detrahemus simpliciter,quòd etiam facimus in ℞ uniuersalibus & anomalis. Possent & aliqua in huiusmodi subtiliora inueniri,sed satis sit si aliquis dicat,habui cubum æqualem 6 rebus p:1,dices igitur æstimatio rei est ℞ sol 6 in $\frac{1}{2}$,id est aggregatum duarum radicum quadratorum partium 6, ex quarum mutua multiplicatione in ipsas partes producatur $\frac{1}{2}$.

Et pro appropinquatione celeri ac breui duces ad integras per numerum partes habentem, ducendo puta per 4, & habebis ℞ sol

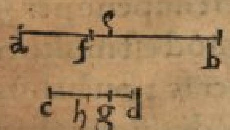
ſol 96 in 32, igitur pars una erit $95\frac{8}{9}$, & alia $\frac{1}{9}$. Et hoc eſt maius, minus autem $95\frac{9}{10}$ & $\frac{1}{10}$, igitur propinqua una erit $95\frac{17}{19}$ alia $\frac{2}{19}$, huius ergo accipiemus quartam partem, & erunt numeri $5\frac{151}{152}$ & $\frac{1}{152}$.

In inęqualibus autem iungendis, detrahendis, multiplicandis ac diuidendis eadem facimus quæ in ℞ diuerſis, neque enim licet eas aliter iungere quam per p: & ſubtrahere quam per m: uelut ℞ cu. 10 cum ℞ quadrata 8. dicemus ℞ 8 p: ℞ cu. 10, uel detrahendo ℞ 8 m: ℞ cu. 10. Et ſi quis dicat quòd poſſumus etiam iungere hoc modo ℞ v: 8 p: ℞ cu. 100 p: ℞ ℞ cu. ℞ 3276800, dico quòd eſt hæc longior & difficilior. De longitudine patet ſenſu: de difficultate in ultima parte cogeris intelligere ℞ quadratam & ℞ cu. ut in alia & pręter id etiam ℞ cub. 100, inde totius aggregati ℞ uniuerſalem, licet forſan quod ad propinquitatem attinet, forſan redderetur aliquanto exactior, quia eſſet una tantum & minoris aggregati, unde notandum, quòd ſi quis uelit ℞ cu. 10 p: ℞ 8. Et ℞ v: ℞ cu. 10 p: ℞ 8, quòd prima ſub eadem additione erit proxima $2\frac{17}{20}$ & $2\frac{3}{20}$, quod totum eſt 5, ut manifeſtum, ſed ℞ v: $2\frac{17}{20}$ & $2\frac{3}{20}$ eſt $2\frac{59}{225}$. Et hoc manifeſtè eſt proximius radici ueræ ℞ cub. 10 p: ℞ 8 quam 5, quia ℞ ℞ 10 eſt proximior ℞ ℞ ℞ 101, quam ℞ 10 ℞ ℞ 101, & multo magis quam 10 ipſum ℞ 101 differt m: penè per $\frac{1}{20}$, & ℞ 10 differt eo modo ſumpta à ℞ ℞ 101 per $\frac{1}{67}$ quod eſt multo minus quam $\frac{1}{20}$ in $\frac{1}{28}$ ferme. Sed tamen hoc contingit per ſe non habita proportionis ratione. Forſan in multiplicatione & diuiſione aliter dicendum eſſet, quoniam partes redduntur pauciores: ſed tamen cum incommenſæ fuerint, remanet numerus aggregati, ut ℞ 6 p: ℞ 5, in ℞ 3 m: ℞ 2, producit ℞ 18 p: ℞ 15 m: ℞ 12 m: ℞ 10, quid ergo refert ſi dicam ℞ 18 p: ℞ 15 m: ℞ 12 m: ℞ 10, & ℞ 6 p: p: ℞ 5 in ℞ 9 m: ℞ 2, cum enim oportebit illas addere, duplicare, diuidere, diuidam unamquamque ſeorſum, & pòſt iungam eodem modo aut detraham. Sint ergo diſsimiles ℞ ſol 13 in 30, & ℞ ſol 5 in 6, ſic multiplicabo ℞ ſol 13 in 30, produc. in ℞ ſol 5 in 6, ſic diuidam ℞ ſol 13 in 30, & ita addam ℞ ſol 13 in 30 p: ℞ ſol 5 in 6, & ita detraham ℞ ſol 13 in 30, ℞ ſol 5 in 6 m: ℞ ſol 5 in 6. Et accipiam ℞ v: hoc modo ℞ v: ℞ ſol 13 in 30, & eſt ℞ 5, & ita accipiam ℞ cu. hoc modo ℞ v: cu. ℞ ſol 13 in 30. Et in ſolidis radici cuicunque debet adijci v: id eſt nota uniuerſalis cum ſit unum totum.

Et nota quod ℞ ſol: dicitur non tota ſed comparatiuè, uelut cum dico ℞ v: ℞ 9 p: ℞ cu. 27 uult dicere, accipi ℞ 9 quæ eſt 3, & ℞ cub. 27 quæ eſt etiam 3, iunge, fiunt 6, igitur ℞ v: 9 p: ℞ cu. 27 eſt ℞ 6. Sed non eſt ſic de ℞ v: ℞ ſol 13 in 30, neque enim cum ℞ 13 quadratorum aggregati ſit 5, & ℞ 30 ut parallelipeda ſit rurſus ℞ v: eſt ℞ 8 aggregati 5 & 5, ſed eſt ℞ ſimpliciter unius partis tantum, id eſt 5. Et ideo nota quod semper sunt æquales, igitur ducendo, diuidendo ℞ solidæ partes sunt æquales.

Et nota quòd licet producti ex aggregato duorum quadratorum in aggregatum duorum quadratorum producant, semper aggregatum ex duobus quadratis, ut 5 in 5, & 5 in 13, & 5 in 8, & 5 in 18, & 13 in 25, & 13 in 8, & 8 in 25, & 8 in 50, & ita de alijs, tamen illę partes non seruant proportionem, uelut 5 in 13, efficit 65, qui componitur ex 64 & 1 quadratis, qui nihil habent cum 15, qui uerè producitur ex 5 ℞ solida 13 in 30 in 3 ℞ sol 5 in 6, nec etiam diuiso 65 in 49 & 16, nam radices sunt 7 & 4, quæ iunctę faciunt 11, qui etiam est diuersus à 15. Ideò aliunde petenda est ratio cur componantur, constat enim esse longè plures qui non componuntur: ut usque ad 20 sunt 2.5.8.10.13.17.18.20. Sunt ergo duodecim qui non componuntur, & octo tantum qui componuntur. Et à 20 ad 40. Sunt 25.26.29. 32.34.37.40. adhuc pauciores à 40 ad 60. sunt 41.45.50.52.53.58. pauciores.

De comparatione duarum quantitatum iuxta proportionem partium. CAP. XXXII.



ET sumantur duę quantitates a b maior, c d minor, dico quod poterunt diuidi ita ut sit proportio unius partis ad aliam maioris inæqualitatis, & residui ad residuum usque in infinitum, nam ablata a e æquali c d erit b e ad residuum infinita, ergo ex regula dialectica semper licebit diuidendo residuū, utpote facta a f æquali c g, diuidendo e f & d g per æqualia erit proportio residui usq; ad b, ad residuum usq; ad g perpetuò maior: & ita usq; in infinitum diuidendo uersus d, & assumendo aliquid maius in a b erit, ut procedatur usque in infinitum in proportione residuorum.

Dico præterea quòd non poterunt ambæ proportiones esse minores proportione totius ad totum: quia si detrahatur minor proportio ut a e ad c g, quam a b ad c d fiat a e ad c h, æqualis a b ad c d, igitur a e ad c g minor quam a e ad c h, igitur c h minor c g: b e ergo ad h d, ut a b ad c d, igitur b e ad g d maior quam a b ad c d.

Per 10 quinti Elem. *Per 19 quinti Elem.*

Manifestum est ergo quod sub minima proportione ambæ partes erunt cum fuerint quantitates diuisæ secundum proportionem totius ad totum: hoc etiam infinitis modis, sed non fit uarietas.

Per 8 quinti eiusdem.

Dico modo quòd non poterūt in proportionem reduplicatam maiorem quam totius ad totum æqualem, nec minorem quam sit proportio media, uoco proportionem reduplicatam cum fuerit

propor-

proportio partium ut reſiduorum duplicata. uelut ſi proportio a b ad c d nonupla dico quòd non poteſt diuidi a b & c d, ut ſit proportio maior, nec æqualis nonuplæ, nec æqualis aut minor tripla. nam ſi ſit a e ad c f nonupla, igitur e b ad f d nonupla, ergo nonupla nonuplæ duplicata erit quod eſſe non poteſt, & ſi maior nonupla ergo ex demonſtratis e b ad f d minor nonupla, ergo non duplicata ad illam.

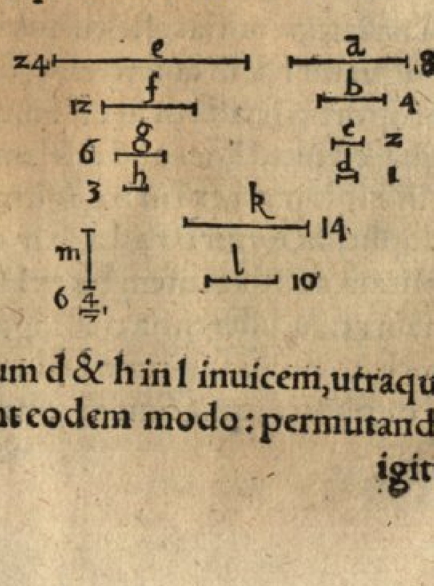
Nec poteſt diuidi a b & c d ita ut ſit minor quam tripla: nam ſi ſit tripla b e ad f d, cum ſit per demonſtrata a e ad c f maior nonupla eo quod e b ad f d eſt minor, quam a b ad c d. igitur a e ad c f maior duplicata e b ad f d, non ergo duplicata. Multo minus ſi ſit proportio e b ad f d minor tripla poterit eſſe reſidui ad reſiduum duplicata.

Cum ergo quis dixerit diuide 18 & 2, ita ut proportio partium ſit reduplicata quadruplæ, tunc cum quadrupla ſit minor nonupla, & maior tripla, duc 4 numerum proportionis in ſe fit 16, duc in 2 minorem qualitatem fit 32, aufer maiorem ſcilicet 18, relinquitur 14, hunc diuide per differentiam proportionis à ſuo quadrato, id eſt 12, qui eſt differentia quadrati 4, & ipſius 4, & exit $1\frac{1}{6}$: aufer ex 2 relinquitur $\frac{5}{6}$, aufer quadruplum $1\frac{1}{6}$, quod eſt $4\frac{2}{3}$ ex 18, relinquitur $13\frac{1}{3}$. quod eſt ſexdecuplum ad $\frac{5}{6}$.

Ex hoc etiam patet, quòd ſeu maior maioris, ut hic ſeu minor habuerit rationem reſidui, id eſt partis quæ habet proportionem duplicatam, ſemper habebit ad minorem portionem minoris lineæ nunquam ad maiorem.

De duplici ordine quatuor quantitatum omologarũm eiuſdem proportionis ad duas alias. CAP. XXXIII.

Sint a b c d & e f g h omologæ, & in eadem proportione, & ſint duæ aliæ k & l eiuſdem generis, & ex differentia a & d in m producatur differentia productorum b in k & d in l, dico quòd differentia productorum f in k & h in l, producetur ex differentia e & h in eandem m. Et eſt generalis in ſimilibus ſemper ſeruando rationem aſſumptorum. Nam quia b ad d ut f ad h erit b ad f ut d ad h permutando, quare productorum ex b & f in k inuicem, ut productorum d & h in l inuicem, utraque enim ut b ad f & d ad h, quæ ſe habent eodem modo: permutando

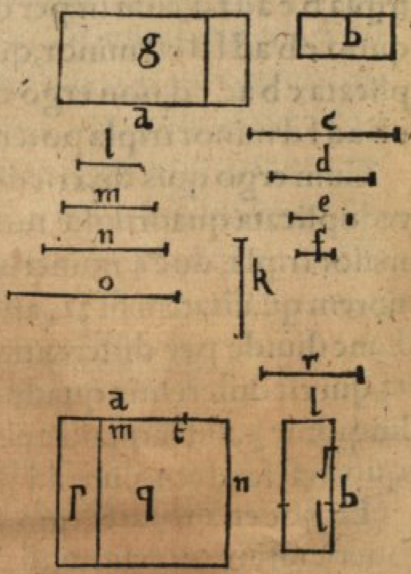


igitur

Per 11 quinti Elem. igitur productorum b in k & d in l, ut f in k & h in l: quare & differentiarum ueluti b ad f: at ut b ad f, ita differentiæ a d, a d differen-
Per 19 quinti Elem. tiam e h. igitur diuisa differentia f in k & h in l per differentiam l h exibit m.

De triplici diuisione duarum quantitatum in mutuam reduplicatam. CAP. XXXIIII.

Cum proposita fuerunt duæ lineæ a & b possumus imaginari, ut diuidamus utramque, ut sit proportio mutua reduplicata: nam de recta superius locuti sumus. Et potest istud fieri per additionem eiusdem quanti-
Cap. 31. tatis ad utranque quantitatem, sed ut fiat media proportio, & potest fieri ut eadem quantitas addatur & detrahatur ab utraque, & residuorum proportio sit duplicata proportioni aggregatorum: & hęc tria hic docebimus demonstrantes primum solum: nam reliquorum sufficiet docere operationem. Quartum autem est de quo posterius agetur quod est difficillimum. Volo ergo diuidere a & b, ut sit proportio secundæ partis, b ad secundam partem, aut
Per 12 sexti Element. primæ partis, a ad primam partem, b duplicata iuxta proportionem datam inter c & d statuo e f in continua proportione cum c d, & duco d in a & f in b, & fiant superficies a & b, & detraho b ex a, & relinquatur g, & detraho f ex e & relinquatur k, & fiat superficies super k æqualis g, cuius latus sit l, & iuxta proportionem f e d c statuo l m n o, & duco l in b, & n in a, & fiant superficies a n, b l. Et rursus detraho b l ex a n, & sit p, cuius residuum sit superficies q, aufero etiam l ex o, & relinquatur r, & super r statuo superficiem æqualem q, cuius secun-
Per 44 primi Element. dum latus constat esse, rursus l per præcedentem: aufero l ex b, & relinquatur f & m aufero ex a, & relinquatur t. dico ergo quòd cum proportio m ad l sit ut c ad d, quòd proportio f ad t est duplicata ei quæ est m ad l, seu c ad d. Nam ex demonstratis p fit ex l in b, & q ex
Per 1 secundi Element. l in r, igitur a n ex l in b r, igitur n ad l, ut b r ad a, sed n ad l, ut m ad l
Per 16 sexti Element. duplicata, igitur b r ad a, ut m ad l duplicata. Et ut c ad d pariter duplicata, constat autem b r ex l, f, r. r autem cum l facit o ex supposito, nam r fuit differentia o & l, igitur b r sunt æquales ex communi ani-
Per 19 quinti Element. mi sententia o f: igitur o f ad a, ut c ad d duplicata. At o ad m ut c ad d duplicata, quia sunt in continua proportione, igitur residui f ad



residuum

residuum t, ut c ad d duplicata, quod propositum erat. Operatio autem breuis est, ponamus ut in exemplo c 24, d 12, e 6, f 3, a si 10, b 8. Duco d in a fit 120, duco f in b fit 24, detrahe 24 ex 120, relinquitur 96, diuide 96 per 21 differentiam c & f, exit $4\frac{4}{7}$ quantitas l, igitur ducendo l per e fit $36\frac{4}{7}$, diuide per f exit $9\frac{1}{7}$, quantitas m quæ est dupla ad l, ut c ad d, detrahe ergo $4\frac{4}{7}$ ex 8, relinquitur $3\frac{3}{7}$, detrahe $9\frac{1}{7}$ ex 10, relinquitur $\frac{6}{7}$, proportio $3\frac{3}{7}$ ad $\frac{7}{6}$ est quadrupla, & duplicata ei quæ est c ad d.

24	
12	10
6	
3	8

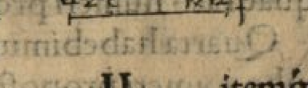
Propositis ergo duabus lineis rursus a & b, quibus uolo addere communem c, & detrahere rursus ut sit proportio residuorum duplicata ei quæ est aggregatorum. Duc differentiam quadratorum in se, & eius cape trigesimam sextam partem, cui adde tertiam partem producti unius in alteram, & à radice totius aggregati, detrahe sextam partem differentiæ dictorum quadratorum; residuum est quæsita tertia quantitas: uelut capio 5 & 4, differentia quadratorum est 9, eius quadratum 81, cuius $\frac{1}{36}$ est $2\frac{1}{4}$, cui adde $\frac{1}{3}$, producti 5 in 4, & est $6\frac{2}{3}$, qui est tertia pars 20, & fit $8\frac{11}{12}$, cuius à radice detrahe $\frac{1}{6}$, differentiæ quadratorum, id est $1\frac{1}{2}$, & relinquitur res quæsita ℞ $8\frac{11}{12}$ m: $1\frac{1}{2}$. Igitur partes erunt $6\frac{1}{2}$ m: ℞ $8\frac{11}{12}$, & $5\frac{1}{2}$ m: ℞ $8\frac{11}{12}$ residua scilicet: aggregata autem $3\frac{1}{2}$ p: ℞ $8\frac{11}{12}$, & ℞ $8\frac{11}{12}$ p: $2\frac{1}{2}$.

Rursus sint propositæ duæ lineæ, & sit una 4, alia 3, uolo addere communem quantitatem utrique quod sit proportio aggregati media seu radix proportionis propositarum quantitatum: & est quasi conuersa præcedentis. duco 4 in 3 fit 12 huius ℞ addo utrique, & habeo intentum, proportio enim ℞ 12 ad 3, est uelut 4 p: ℞ 12 ad ℞ 12 p: 3, nam 3 in 4 p: ℞ 12 producit 12 p: ℞ 108, & ℞ 12 in ℞ 12 p: 3 non minus producit idem 12 p: ℞ 108.

Ex hoc sequitur quod proportio binomij ad aliud binomium alterius speciei potest esse quantitas potentia tantum rhete, uelut si duco ℞ 3 in ℞ 12 p: 2, fit 6 p: ℞ 12, igitur 6 p: ℞ 12, est in proportione ℞ 3 ad ℞ 12 p: 2. Et ita de recisis 6 m: ℞ 12, est in proportione ℞ 3 ad ℞ 12 m: 2, et hoc propter commutationem, quia ℞ est media inter duos numeros, & numerus inter duas ℞.

SCHOLIVM.

Dico modo quod si partes binomiorum non sint commensæ secundum eandem proportionem, quod si binomiorum binomio esset commensum, aut recisum reciso, numerus esset commensus potentia tantum rhete seu longitudine alogæ. Et sint gratia exempli a b tripla d e & b c dupla e f, dico quod si tota a c esset commensa toti d f, essent partes a b, b c inuicem commensæ



itemq; d e & e f. Nam ut demonstrauimus suprà, quia non est eadem omnium proportio, igitur unius par ad partem una maior altera minor, sit ergo minor b c ad e f, quam a c ad d f, & hæc minor quam a b ad d e fiat, ut a c ad d f, ita a g ad d e, commensum est igitur a g d e, & fuit etiam a b commensum d e, igitur a g g b commensæ. Similiter b c commensa fuit e f & g e eidem, quia in proportione a c ad d f, g c igitur commensa b c, quare g b ipsi b c fuerat etiam b a, igitur a b b c commensæ sunt, quare etiam d e & e f. Non est autem necessarium (ut dixi) quod si partes sint commensæ, ut totum sit toti commensum ut dixi: neque etiam si totum toti & pars parti, ut reliqua pars reliquæ parti, uelut 10 & 9 sunt commensa, & ℞ 20 & ℞ 5 commensa, non tamen 10 p: ℞ 20 est commensum 9 p: ℞ 5, aliter sequeretur quod 10 & ℞ 20 essent commensa, quod est absurdum.

Ex hoc sequitur quod binomio non commensa non possunt esse in proportione numeri, possunt tamen esse in proportione unius simplicis quantitatis.

De sex proportionibus mutuis reduplicatis, quæ oriuntur ex additione unius quantitatis ad unam aliam, & duabus inutilibus. CAP. XXXV.

CVm proposita fuerit una quantitas, putà 2, possum addere illi aliam quantitatem, octoq; modi proportionis reduplicatæ consurgent, quorum duo sunt inutiles: modi ergo sunt, ut quãtitas addita ad propositum habeat duplicatam proportionem quam aggregatum ad additam secundus conuersus, ut aggregatum ad a d additam habeat duplicatam ad eam quæ est additæ ad propositum. Et ideò ponam eos ordinatim in tabula.

1 Aggreg. ad add. dup. add ad prop.
2 Add. ad prop. dup. aggreg. ad add.
3 Aggreg. ad add. dup. prop. ad add.
Propos. ad add. dup. aggreg. ad add. inn
4 Aggreg. ad propos. dup. propos. ad add.
5 Propos. ad add. dup. aggreg. ad propos.
6 Aggreg. ad prop. dup. add. ad propos.
Addit ad prop. dup. aggreg. ad prop. inn.

Prima igitur utilium duc 2 numerū propositū ad quadratum fit 4, & ad cubum fit, & habebis 1 cub. æqualem 4 rebus p:8.

Secūda, duc 2 ad cubum, fit 8, accipe ℞ quæ est ℞ 8, & accipe ℞ 2, & ita habebis 1 cu. æqualem quadrat. ℞ 2 & ℞ 8, & quadratum æstimationis est res quæsita.

Tertia habet quadratum p: 2 pos. numero proposito æqualia 4 quadrato numeri propositi.

Quarta habebimus cub. p: quad. 2 numeri propositi æqualia 8 cubo numeri propositi.

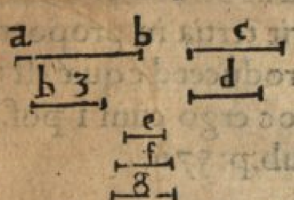
Quinta, duc 2 ad cubum fit 8, & habebis 1 cub. p: rebus numero proposito, scilicet 2 æqualia ℞ 8, & quadratum æstimationis est quantitas quæsita.

Sexta habebimus quadratum æquale rebus numero proposito, id est 2, & numero quadrato numeri propositi, id est 4, ut sit 1 quad. æquale 2 pos. p: 4.

Dico demum quod proportio confusa aggregati primę & quartæ quantitatum omiologarum ad aggregatum secundæ & tertiæ earundem est ueluti quadrati p: 1, detracta proportione ad ipsam proportionem, ut aliâs demonstraui. Ex quo habetur confusa quarumlibet quatuor quantitatum rectè intelligenti.

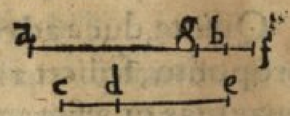
De diuidendis duabus lineis æqualibus secundum proportionem mutuam reduplicatam datam. CAP. XXXVI.

Istud docemus in Arte magna. Sed ibi adnotanda sunt illa uerba ex quibus totum negocium pendet: Rursus quod fit ex a b & a d in a b, & e f est æquale ei quod fit ex e f & e g in aggregatum a b & e f, quia ex supposito e f & e g, æquantur a b & a d, constat ergo a b quantitatem, & e f bis assumi, & cum hoc supponi a b & a d æquales esse e f & e g, ut primum potest supponi pro arbitrio, sed secundum non ita: eo tandem uenitur ut duæ & duæ quantitates sint in eadem proportione cum tertia. Et quod tertia illa scilicet a b & e f componitur ex secundis a b & e f. At duabus quibuslibet constitutis proportionibus, & manentibus duabus quantitatibus, licebit constituere communem illam quantitatem, & reliquas duas inuenire. Exemplum, sint datæ duæ quantitates a 6, b 3, & aliæ duæ c d subiungo e ad a b in continua proportione, & facio f ad e, ut d ad c, & g ad f similiter, eritque g ad a, ut f ad b duplicata. Eo igitur peruenire oportet cum proportione data loco æqualitatis. Constat etiam quòd si proportio a ad c sit duplicata ei quæ est b ad d, quod hæ quatuor qualitates copulabuntur ad unam.



De sex comparationibus quatuor quantitatum reduplicatæ proportionis. CAP. XXXVII.

Et sint quatuor quantitates in reduplicata mutua proportione a b prima, c d secunda, d e tertia, b f quarta, dico quòd duabus ex his notis fiunt, ut liquet sex coniugationes, & duæ harum neque cum aggregatis per se notis notæ sunt, sci-



licet nota prima & quarta, uel secunda & tertia notisque a f & c e: at reliquæ quatuor notam faciunt quantitatem modo aggregatum omnium notum sit. Sit ergo primum a b & c d nota, utpote a b 24, c d 6 aggregatum a f & c e 47, tunc tu scis quod proportio d e ad b f est, ut a b ad c d duplicata, igitur ut 16 ad 1, igitur d e & b f ad b f, ut 17 ad 1, at d e & b f sunt 17, igitur diuiso 17 per 17, habebis b f unum & d e sexdecim, nam d e & b f sunt 30, ut dixi, quia a b & c d sunt 30, & a f & c e 47, igitur residuum quod est d e & b f est 17.

Sit rursus b f 1, d e 16, aggregatum a f & c e, 47, igitur a b & c d sunt 30, & proportio a b ad c d, ut 4 ad 1 & ab c d ad c d, ut 5 ad 1, diuide 30 per 5 exit 6, & tanta erit c d & a b 24.

Proponatur modo a b & d e notæ 40 totum, ut prius 47, & sit primo nota b f, & sit 1, & c d 6, ponam a b 1 pos. erit tertia in proportione $\frac{1}{6}$ quad. duc in b f, fit $\frac{1}{6}$ quad. diuide per c d, exit $\frac{1}{36}$ quad. igitur $\frac{1}{36}$ quad. p: 1 pos. æquantur 40, & 1 quad. p: 36 pos. æquantur 1440, & ita rei æstimatio est 24, cuius quadratum est 567, & eius pars trigesima sexta 16, seu detracto 24 à 40, relinquitur idem 16. Supponatur modo ab nota 24 de 16 totum 47 erit, reliquum aggregatum c d & b f 7, ponatur c d 1 pos. erit tertia in proportione $\frac{1}{24}$ quad. duc $\frac{1}{24}$ quad. in 16, fit $\frac{2}{3}$ quad. diuide per a b, id est 24, exit $\frac{1}{36}$ quad. æquantur igitur $\frac{1}{36}$ quad. p: 1 pos. ad 7. Igitur 1 quad. p: 36 pos. æqualia 252, & res est 6, & est c d residuum est 1 b f. At modo si ponatur c e 22, nota ita ut c d sit b & d e 16 & a f 25. Ponemus ut in tertio casu a b 1 pos. erit tertia in proport. $\frac{1}{6}$ quad. Igitur si $\frac{1}{6}$ quad. producit 6, quid producet d e quæ est 16, duc 6 in 16 fit 96, diuide p $\frac{1}{6}$ quad. exit $\frac{576}{1\ \text{quad.}}$ hoc ergo cum 1 pos. iunctum efficit 25, igitur 25 quad. æqualia 1 cub. p: 576.

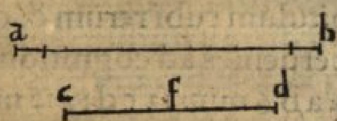
Et hoc non continetur in capitulo. Sed quia in hoc casu supponimus numerum quadratorum esse 22, quia c e & æstimatio est c d 6, cuius cubus 216, qui cum 576 efficit 792, & hoc est æquale 22 quadratis, nam 22 in 36 efficit 792. Et supponimus a g numerum quadratorum, id est 22, & a b rei æstimationem, & quod ex b g in quadratum a b fiat 576, habebimus 1 cub. æqualem 22 quad. p: 576. Et hoc habet capitulum. Sed res non redit ad idem, nam æstimatio rei est minor 24, quia esset 24 cubus, esset æqualis 24 quadratis, igitur 22 quadratis & duplo unius quadrati, at unum quadratum est 576, igitur erit æqualis 22 quadratis, & 1152 non ergo 22 quadratis p: 576 so-

576 solum. Et similiter notis a b & b f, & noto aggregato c e incidimus in eiusdem difficultates.

De confusa quantitatum mutuarum in proportione reduplicata comparatione.

CAP. XXXVIII.

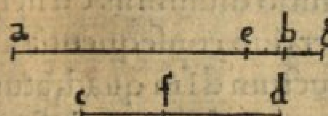
ET ponamus ut sint duæ lineæ a b & c d, diuisę in e & f, & sit proportio f d ad c b, uelut a e ad c f duplicata, & sint e f secunda & c b quarta æquales & notæ, & totum aggregatum erit etiam notum. nam in hoc casu proportio aggregati primæ & quartæ, id est a b ad aggregatum secundæ & tertiæ, id est, c d est ut quadrati proportionis p:1, ad proportionem ipsam itidem p:1, uelut sit a b 15, c d 9, diuido 15 per 9, exit $1\frac{2}{3}$, & hoc est quadratum proportionis p:1 in comparatione ad 1 pos. p:1, quare cum 1 pos. p: 1, hic habeat locum unius, erit ut ponamus 1 p:1 pos. & ducamus p: $1\frac{2}{3}$, fit $1\frac{2}{3}$ pos. p: $1\frac{2}{3}$ æqualia 1 quad p:1, igitur 1 quad. æquatur $1\frac{2}{3}$ pos. p: $\frac{2}{3}$ ergo res est R $\frac{40}{36}$ p: $\frac{5}{6}$, quod est 2, & proportio erit dupla, pone igitur 1 pos, detrahe ex 9, fit 9 m: 1 pos. & ita etiã quia secunda est æqualis quartæ, erit 15 m: 1 pos. erit 15 m: 1 pos. dupla etiam 9 m: 1 pos. & 18 m: 2 pos. æqualia 15 m: 1 pos. & 15 p: 2 pos. æqualia 18 p: 1 pos. igitur res est 3. Ideò in hoc casu tres quantitates necessariò sunt in continua proportione.



De diuidendis duabus lineis notis secundum proportionem mutuam reduplicatam iuxta partes datas.

CAP. XXXIX.

HOc capitulum est pars duorum superiorum: & ex eo habetur capitulum generale cubi & numeri æqualium quadratis: nam propositis, gratia exempli, 1 cu. p: 16 æqualibus 9 quadratis, proponam lineam a e 9, & quæram æstimationem 1 cu. æqualis 9 quad. p: 16 quæ sit a b, igitur nota b e, addam b g æqualem, b e ergo a e, a b, a g, c b, b g, e g, c d æqualis a e omnes notæ. Propositum igitur est diuidere c d in f, ut ut sit f d ad b g duplicata ei, quæ est a b ad e f, qua inuenta cum cubus e f, additis 16 ex supposito sit æqualis corpori ex c d in quadra- *Cap. 26 & 27.*



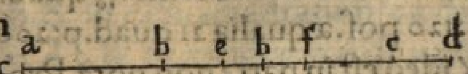
tum c f, quoniam totum est ęquale suis partibus:& d e sit 9,& quod sit ex d f in quadratum c f 16, nam tantum fit ex b g in quadratum a b: igitur 9 quadrata e f æquantur cubo p:19. Vt ergo diuidamus c d iuxta hoc noscere oportet ordinem eorum quę dicta sunt supra, scilicet quod quantitates a b, c f, f d & b collocantur hoc ordine, ut sunt mutuæ reduplicatæ: alio ut sunt in continua proportione cum una & eadem, scilicet a b prima, f d secunda, c f tertia, b g quarta, prima & quarta manent in utroque ordine, sed secunda & tertia mutantur, nam c f est in reduplicata secunda, & f d tertia, in recta f d est secunda, c f tertia.

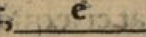
Proponantur rursus notæ h, a b & c d, & sint partes constitutæ e a, e b, f c, f d, quarum una si nota esset palam, est ob continuam proportionem quod essent omnes notæ, sed si solæ h, a b, & c d, palam est quod erunt notæ partes per Artem magnam deueniendo ad capitulum cubi rerum & quadratorum æqualium numero. Ex qua peruenies ad cognitionem partium propositarum: ut si h ponatur 4 a b 6 m:℞ 12 c d ℞ 12 m:1. Et partes se habebunt, ut uides. Est autem proportio 1 ad 4 m:℞ 12 duplicata ei quæ est 2 ad ℞ 12 m:2, & caue ne te confundas. Dico etiã quod si cubus & 24 sint æquales 8 q̃d. & sit c d numerus quadratorum scilicet 8, ut sit a e æqualis c d, sciemus c b & b g, & erunt posita c b 1 quad. & b g, 1 cu. p:8 pos. æqualia ℞ 24 numeri propositi, & tam c b quam b g erunt quadrata æstimationis. Quia ergo notæ c b, b g, & per duo supposita nota: scilicet quantitatem c d seu a e, & numerum æquationis, id est 24. & hic producitur ex supposito ex f d in quadratum f c & f d & f e habent necessitatem saltem alternam, quia dum c d & a c sunt 8, & numerus qui producitur 24, uariatur ut sit 20 aut 22 aut 25, tunc uariatur quantitas rei, & quadratum eius e b, b g, igitur proposita quantitate c d uel a e quantitates e b seu b g habent connexionem cum c f & f d: & quia si non supponeretur numerus 24, haberetur ex partibus c f & f d, ducendo f d in quadratum f c, fiet ut inuenta e b contraria ratione necessaria sit cognitio diuisionis c d in f. Nam cum proposuerimus c f, f d cognitas per duo consequentia ad illa quæ sunt aggregatum earum, & productum d f in quadratum f c, consequimur duas alias a e & c b seu b g, igitur per a e, c b seu b g, & duo consequentia & sunt a b, b g & productum g b in quadratum a b cum uno ex tribus c f, f d, c d, inueniemus reliqua duo. At c d nota est semper ex supposito cum sit æqualis a e igitur c f & f d. Si ergo ponatur productum g b in quadratum a b 20, & c f duo erit f d 5, diuiso 20 per 4 quadratum 2, & si f d ponatur

4
2 ℞ 12 m:2
1 4 m:℞ 12

Cap. 39 regula secũda.

f d ponatur 5 erit c f R 4, id est 2, nam diuiso 20 per 5 exit 4, manifestum est ergo quod c f, f d & c d habent consequentiã ad a b seu a c & e b seu b g. Concludo quod supposita cognitione a b, b g, quæ semper habet necessaria, est connexio cum e f & f d, quia c d est differentia a b, b g quæ non esset, si c d nõ esset illa differentia, sed solum 1 cub. p: 24 æquaretur 8 quadratis, & esset nota a b, & b g, ex quarum ducta b g in quadratum a b, fieret 24, sed c d non esset 8, nec æqualis differentiæ a b & b g. Proponatur ergo linea a d nota, & est rei æstimatio cubi æqualis quadratis numero a c, & numero æstimationis proposito qui fit ex c d in quadratum a d, & nota est ex hoc c d. item nota est quia est differentia a d & a c numeri quadratorum atque notarum, iam uero a d diuisa est bifariam in a c, c d notas, & a b et b d ignotas, quærendum est igitur an ex notis a c, c d (quia habent connexionem) haberi possint a b & b d, & ita erit quæsitum notum. Secundo an data diuisione in b magnitudo c d constituatur, itemque a c. Et differt à præcedente quoniam per a c, c d in præcedente, & positionem quærimus quantitatem b d, & ea habita cognoscimus c d, b c & ita a b & quæsitum. In hoc autem secundo constitutis a b, b d & habetur quantitas a d etiam & est res & eius quadratum etiam notum erit, ex quibus quærimus quantitatem a c id est numeri quadratorum & quod fit ex c d in quadratũ a b & est numerus æstimationis qui cum quadratis numero a c æquatur cubo a d. Tertiò quæritur quam rationem habet incrementum c d in comparatione a d b c quia b c a d c d est duplicata ei quæ est a d ad a b ex supposito. si ergo c d certa & data quantitas, statuatur quo minor erit a b eo maior erit b c residuum, supponitur autẽ minor c d quàm a b, maiorem aũt oportet esse proportionem b c ad c d quam a d ad a b, quia duplicatam, igitur incrementum a b an semper augeat proportionem b c ad c d supra proportionem a d ad a b an minuat: nam de æqualitate certum est quod non: & an uarietur hæc ratio mutata quantitate c d. hoc igitur & quomodo fiat certè est considerandum, & loquamur igitur de secundo, quia est facillimum cum enim data sit a d & a b, data erit tertia linea quæ sit data, igitur proportio partium a d, ad d e diuise a e, et data b d in diuisa, ergo poterit diuidi ut a d ad d e, seu ad e, & diuisio illa cadet in c, cum igitur proportio a d ad e data sit, erit & b c ad c d, data est autem b d data ex supposito. igitur utraque earum b e, c d data quod erat demonstrandum. nam data b c cum sit data a b, erit data a c numerus quadratorum. Cumque sit data a d, erit illius quadratum datum: & quia c d data erit productum c d in quadratum a d datum, is autem est





Per 11 sexti Elem.

Per 10 sexti Elem.

est numerus æstimationis quæsitus. Inueniamus etiam primum ut facilius & proponamus a d 10 d c 1, erit ergo numerus 100, & sit b d 1 pos. & a b 10 m: 1 pos. cuius quadratum est 1 quad. p: 100 m: 20 pos. quod diuisum per a d relinquit $\frac{1}{10}$ quad. p: 10 m: 2 pos. hæc est tertiæ quantitas quæ ducta in b c, producit quãtum a d primã in c d quartam quod productum est 10. Quia ergo b d est 1 pos. & c d 1, erit b c 1 pos. m: 1. igitur productum tertiæ quantitatis est $\frac{1}{10}$ cu. p: 10 pos. m: 2 quad. m: $\frac{1}{10}$ quad. m: 10 p: 2 pos. & hoc totum est æquale 10. Quare reddendo uicissim fient $2\frac{1}{10}$ quad. p: 20 æqualia $\frac{1}{10}$ cu. p: 12 pos. & 1 cu. p: 120 pos. æqualia 21 quad. p: 200. & erit cu. æqualis 27 rebus p: 46. & ideò est in parte non nota. Pro tertio oportet præsupponere primum quod si a d sit diuidenda, sicut proportio ipsius a d a b sit ut

Ex 5 secundi Elem. b c ad b d, erit c a, cum maxima fuerit æqualis radici octupli quadrati a d dempto duplo a d. & tunc si a e est minima, erit c d maxima. Et rursus cum fuerit proportio b c ad c d, ut quadrati ad quadratum a b non poterit esse c d maior in comparatione ad a d, quam ut statuatur tertia pars a c æstimatio cubi p: unius rei æqualis quartæ parti quadrati a d. Et hoc pendet ex demonstratis in libro de Proportionibus.

Propos. 135 Exemplum constituta ad 10, erit tertia pars a c æstimatio cubi & rei æqualis 25, qui est quarta pars 100, quadrati 10, erit ergo tertia pars a c ℞ v: cu. ℞ $256\frac{17}{64}$ p: $12\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. $256\frac{17}{64}$ m: $12\frac{1}{2}$, unde tota a c erit ℞ v: cu. $113917\frac{41}{64}$ p: $337\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. 113917 m: $337\frac{1}{2}$, & c d erit residuum. Considerandum est ergo quod supposita c d minore problema potest componi, quia primum proportio quadrati a d ad quadratum a b, quanto minor est a b, tanto maior est in comparatione ad proportionem b c ad c d, tum quia a d est maior b c, tum quia sumimus proportionem quadratorum in primis, & linearum in secundis. Et ideò cum augetur a b minor fit differentia proportionis quadrati a d ad quadratum a b ad proportionem b c ad c d. Et quia rursus necesse est, ut proportio quadrati a d ad quadratum a b sit maior proportione b c ad c d: quia b c poterit esse minor c d, quia c d data est, quadratum autem a d semper est maius quadrato a b, cum sit totum a d partem comparatum: crescit ergo proportio b c ad c d in comparatione quadrati ad a d quadratum a b, donec fiat ei æqualis, inde fit maior, & rursus ut dixi minor, ergo rursus fiet æqualis, & hæc est causa duarum æstimationum, oportet igitur inuenire maximam proportionem b c ad c d in comparatione quadrati a d ad quadratum a b. Quia ergo maximum parallelipedum a e fit ex b c in quadratum a b, cum a b fuerit dupla b c, igitur tunc maxima erit proportio eius ad parallelipedum c d in quadratum a b, quare cum minima proportio quadrati a d ad quadratum a b in

compa-

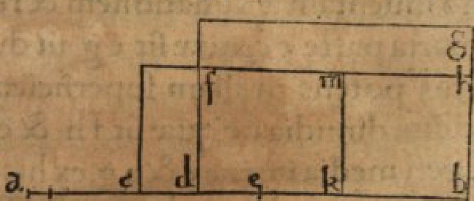
comparatione b c ad c d. Et ita ſi ſumantur duo puncta e & f, ita ut c e in quadratum e a uel c f in quadratum f a efficiant parallelipeda ſingula æqualia parallelipedo c d in quadratum a d, tunc punctum b erit inter e & f, ſed non æqualiter diſtabit. Sed quia hoc eſt generale ſeu a e ſit differentia a d & c d, ſeu quæuis alia quantitas: Ideò oportet hoc inuenire ex proprietate differentiæ coniuncta cum generali ratione dicta: & ratione ſecundæ æſtimationis inuenta per primam ſępius dictã, ſit ergo a d, d e data & pũctum in a c maximæ proportionis b c ad c d in comparatione a d quadrati ad quadratum a b. b. & ſit c e in quadratum e a datum, ut ſit æquale d c in quadratum d a, & ſit æſtimatio data c e in quadratum a e, ut dixi neceſſariò e a, dico quòd data eſt a f ſimiliter, & quod b eſt inter e & f, hoc enim eſt demonſtratum. tertiò dico quod b f eſt minor b e, ita ut ſemper f ſit proximius b quam ipſum e. Cum igitur ex ratione inuentionis ſecundæ æſtimationis per primam ex tota a c numero quadratorum oporteat detrahere a e primo inuentam æſtimationem & reſiduũ ſcilicet e c, ducere in a e cum quarta parte e c, quæ ſit e g, ut ducatur e c in a g, & ſumptum fuerit latus potens in illam ſuperficiem, id eſt media inter e c & a g, & ei addita dimidia c e quæ ſit f h, & conflabitur a f ex ſuppoſito, igitur h a eſt media inter e c & a g, ex his quæ dicta ſunt, dico igitur quod f non poterit eſſe in a b, quia ſi eſſet inter e & b productum eſſet maius producto e c in quadratum a e, & ſi eſſet inter a & e eſſet minus. Similiter ſi ſupponerentur c b & b f æquales, minus eſſet productum c f in quadratum f a quàm c e in quadratum e a, ergo cum, ut demonſtratum, quãto c prior eſt b, tanto productum c e in quadratum e a eſt maius, igitur ſi debet minus quia in æquali diſtantia erat maius, neceſſe eſt ut e b ſit maior b f, quod erat demonſtrandum. Dico modo quòd tota conſideratio eſt in hoc, quia c d quæ aſſumpta eſt, uariatur iuxta productum c f in quadratum f a, gratia exempli, & eſt numerus æſtimationis, ſed non ſumitur à partibus c a, uerùm à tota ſolum, & ideò ſumitur c a pro indiuiſa. Si autem ſumeretur pro diuiſa uelut in e, uel b, uel f, non ſumitur e a, ut differentia c d & d a. Et iuxta hoc ſi dicam propoſita, a b, uolo eam diuidere ſicut cubus a c ſit ęqualis ei quod fit ex a b in quadratum b c: deuenies ad cubum & res æqualia numero. Et eodem modo ſi poſita a b, b c uelis diuidere a c in d, ut cubus a d ſit æqualis ductui ſeu parallelipedo a b, b c, c d peruenies ad 1 cu. & res æquales numero & in ambobus ſupponitur quòd latus cubi ſit

differentia laterum parallelipedi, adeò ut hic haberemus intentum, ſed hic deficit unum, ſcilicet ut ſit parallelipedum & non cubus.

Similiter notum eſt quod cum fuerit propoſita a b, quam uelim diuidere in c, ut mutua parallelipeda ſint decem. gratia exempli, poſſum inuenire parallelipedum ex b c in quadratum c a: quia diuiſis decem per a b exit productum a c in c b notum: quare partes a c, c b. igitur productum c b in quadratum a c notum erit. Et ponatur quod ſit ℞ cub. 10, mutuum & a b ſit 10. gratia exempli, erit productum a c in c b ℞ cu. 100, quare a c 5 p: ℞ v: 25 m: ℞ cu. 100, & c b 5 m: ℞ v: 25 m: ℞ cu. 100. Inde habebis productum ut dixi. Et demonſtratum eſt etiam quod eiuſmodi producta ſunt in proportione partium a e ad c b.

Per 5 ſecundi Elem.

Et rurſus, quia demonſtratum eſt quòd diuiſa quauis linea putà a b quomodolibet in c proportio parallelipedorũ mutuorum eſt ut partium: & differentia illorum eſt parallelipedum a c in c b in differentiam a c & c b, ſit igitur medium a b punctum e, erit ergo ſolidum a c in quadratum c b maius ſolido b c in quadratum a c ſolido dupli c e in ſuperficiem c h. ſit k b æqualis, a c erit ergo ſolidum a c in quadratum c b ęquale ſolidis cubo b k, & a e in quadratum c k, & parallelipedo a e in duplũ c k in k b, quare cum a e ſit æqualis k b, erit ſolidum a c in quadratum c b æquale ſolidis duobus uni quod conſtat ex a k, k c in quadratum k b alteri quod conſtat ex a c in quadratum c k, ſolidum uerò c b in quadratũ a e ſeu k b eſt commune ei quod fit ex b c in quadratum a c, quoniam a c eſt æqualis k b, & a k æqualis b c, igitur ſolidum a c in quadratum c b excedit ſolidum b c in quadratum a c, in eo quod fit ex c k, in quadratum c a & a c in quadratum c k. hoc autem eſt æquale ei quod fit ex duplo c e in ſuperficiem c h. Quod enim fit ex a c in quadratum c k, et c k in quadratum a c, eſt æquale ei quod fit ex a k id quod fit ex a e in k. Dico ergo quod hoc eſt æquale ei quod fit ex duplo c e in c h. Id eſt ut proportio c h ad c m ſit uelut a k ad duplum c e. nam c h ad c m eſt ut c b ad c k: c k autem eſt duplum c e, & a k æqualis c b, quia a c eſt æqualis k b, igitur per demonſtrata ab Euclide proportio c b ad c k, ut a k ad c e, quod fuit propoſitum.



Ex 143 Propoſ. lib. de Proport.
Per 1 ſexti Elem.
Per 7 quinti Elem.

Ex quo patet maximum futurum diſcrimen parallelipedi a c in quadratum c b ad parallelipedũ b c in quadratum c a, quoties proportio c e differentiæ ad d e, differentia fuerit maxima in comparatione tetragoni partium rectanguli d g ad tetragonum rectangulum

lum c h. Quo fit ut tale parallelipedum ſit maximum, cum proportio c k ad a c facit maxima in comparatione quadrati a e ad c h, at proportio quadrati a e ad c h eſt ut quadrati a c ad quadratum a e detracta proportione confuſa quadrati a e ad quadratum c e. hæc autem duplicata ei quæ eſt a e ad c e. Maxima igitur differentia parallelipedorum, quoties proportio differentiæ partium ad dimidium quantitatis fuerit maximè propinqua proportioni quadrati dimidij ad ſeipſum detracta duplicata eiuſdem dimidij ad dimidium illius differentiæ, nunquam autem poteſt eſſe ei æqualis. Et deducta ad numerum ſi a b ponatur 12, erit a e 6, & a c 6 m: 1 poſ. c b 6 p: 1 poſ. & 1 cu. p: 108 æqualis 36 poſ. & hoc eſſe non poteſt, igitur non poteſt ęquari proportio. ut ergo inueniamus maximum quod poteſt produci oportet, ut inueniamus numerum quem producit 24 in ℞ 12 tertiæ partis, & producitur ℞ 6912. Et hic eſt numerus maximus: ideoq; res ℞ 12, ſcilicet tertiæ partis 36: igitur a c eſt 6 m: ℞ 12, & b c 6 p: ℞ 12, & parallelipedum ℞ 27648, & eſt fermè 166, & partes quaſi $9\frac{1}{2}$ & $2\frac{1}{2}$, & ideò in proportione, 24 diuiſi in 19 & 5. Et hoc non eſt mirum, ſed quod mirum eſt, eſt quod cum parallelipedum c k in c h non ſit annexum alteri aliorum, nam poſſum ſcire quoduis illorum ignorato parallelipedo c k in c h, & ſcire c k in c h, incognito utroq; aliorum ſicut etiam de parallelipedo a b in c h, hoc tamen fit notum aliud autem non. Et ideò id accidit, quia a b ſupponitur nota, ſed c h præſupponitur incognita, eſt tamen magnum problema.

Ex 18 diff. lib. de Proport.

Iam uerò habemus ſecundum modum principalem inuentionis capituli cubi & numeri æqualiũ numero rerum. Poſito enim quòd uelim ſcire 1 cub. p: 64 æquandum 36 rebus, ponam a b duplum ℞ 36, & erit 12, & duplicabo 64 fit 128, & quæram diuiſionem a b in c, ut ex a b in c h fiat 128, igitur diuiſo 128 per a b, quæ eſt 12, exibit c h $10\frac{2}{3}$, quare a c erit 6 m: ℞ $25\frac{1}{3}$, & c b 6 p: ℞ $25\frac{1}{3}$. Eſt autem diuiſa b a in c per æqualia & propoſitum eſt diuidere eam rurſus in d per inæqualia, ut ſit proportio a e dimidij a b ad, d e dimidium differentiæ d b & d a, uelut d g ad c h, tunc enim erit parallelipedum ex d e in d g 64, & duplum d e in d g 128, quemadmodum propoſitum eſt. Et ita propoſito quouis numero qui poſſit produci ex 36, diuiſo in duas partes, ita ut ex una in duplum ℞ alterius fiat ille numerus: ſeu ſimpliciter in ℞ alterius producatur dimidium numeri propoſiti. Et ita habebimus capitulum generale. conſtat autem in hoc caſu quod a d erit 4, d b 2, & d g 32, & cum d e ſit 2, erit duplum d e, quod eſt 4, in d g 128 parallelipedum ſenſũ inuentum, ſed hoc oportet inuenire ratione. habemus ergo datam a b diuiſam per æqualia

Per 5 ſecũdi Elem.

in c, & per inæqualia in c cognitas partes; & uolumus diuidere eam in d, ut sit proportio d a ad c a, ad eam quæ est c b ad b d in proportione a e ad e d.

De tribus necessarijs quæ præmittere oportet ad inuentionem. CAP. XL.

SI ergo d e supponitur res, non potest esse numerus, & a d radix, quia esset a b tota ℞, & non numerus propositus, nec radix, quia a d esset recisum b d binomium, & produceretur numerus simplex aut compositus cum radice per m: uel p: igitur ductus in d e ℞ fieret binomium aut recisum aut ℞, igitur numerus æquationis non esset numerus. Pari ratione non potest d e esse binomium aut recisum tertiæ nec sextæ speciei, qua non potest esse ℞ simplex. Rursus proponatur d e binomium, & sit d c numerus, & e f æqualis, e c & e g æqualis, e d, erit ergo f g numerus, & c f ℞, ex a d ergo reciso in d b binomium

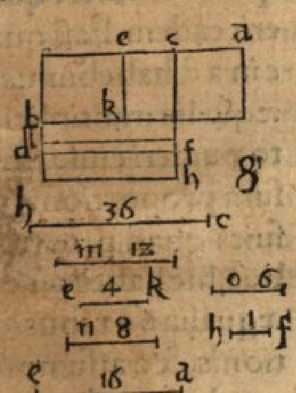
oportet ut fiat recisum simile binomio d g, ut ex eo in productum d g fiat numerus. idem erit si c e ponatur numerus & d c ℞. Interest hoc solum an ℞ sit maior numero an minor. Et in hac constitutione non potest d e esse recisum, quia oporteret assumere quantitatem maiorem d e, & ita essemus extra casum regulę & problematis. Semper ergo d e est binomium. Et ponamus d e 3 p: ℞ 5, & erunt res 32 æquales cubo p: 24: & a e ℞ 32, & similiter si d e sit 3 m: ℞ 5, sed non erit 3 contentum in d e. Idem dico cum 1 cu. p: 12 æquatur 34 rebus, & est æstimatio 3 p: ℞ 7, & 3 m: ℞ 7, nam non potest uerari nisi in binomio: sed est aliud cum 1 cub. p: 8 æquatur 18 pos. nam res est ℞ 6 m: 2, & non potest contingere in binomio: igitur prima duo exempla sunt idonea. Et quia in his addere oportet aliquem numerum qui ductus in ℞ totius producat numerum æquationis, & manifestum est, quod non potest esse ℞ nec binomium nec recisum, non enim conficeret numerum, ideo oportet ut sit numerus, nos autem iam supponimus hic esse quadratum. Proponamus ergo a e 8, & quadratum illius sit 64 numerus rerum: & sit ut addendo 17, fiat alius quadratus, scilicet 81 cuius ℞ quæ est 9, ducta in 17 additum faciat 153, erit igitur 1 cu. p: 153 æqualis 64 rebus, & rei æstimatio $4\frac{1}{4}$ p: ℞ $3\frac{1}{4}$, id est dimidium ℞ totius p: ℞ differentiæ numeri æquationis, & $\frac{3}{4}$ numeri aggregati. Erit ergo posita c e ℞ $3\frac{1}{4}$, & c d $4\frac{1}{2}$ ad $3\frac{1}{2}$ m: ℞ $3\frac{1}{4}$, & d b $12\frac{1}{2}$ p: ℞ $3\frac{1}{4}$, & d g 9 p: ℞ 13. Et productum a d in d b $40\frac{1}{2}$ m: ℞ $263\frac{1}{4}$, hoc ergo ductum in d e scilicet $4\frac{1}{2}$ p: ℞ $3\frac{1}{4}$ fit 153. Possumus ergo diuidere etiam 64 in duas partes, ex quarum una in

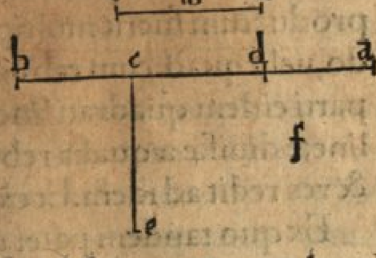
Vide supra cap. 5.

℞ alterius

℞ alterius fiat 153, & quia ℞ illa est res, & est d e, ducemus d e in se, & fit $23\frac{1}{2}$ p: ℞ $263\frac{1}{4}$, igitur reliqua pars est $40\frac{1}{2}$ m: ℞ $263\frac{1}{4}$, ecce quod res redit ad idem. Ex d g igitur in productum a d in d b fit 306, quod diuisum per 16, exit $19\frac{1}{8}$, igitur partes erunt 8 p: ℞ $44\frac{7}{8}$, & 8 m: ℞ $44\frac{7}{8}$. Reducuntur ergo hi duo modi ad unum, uelut si sit numerus rerum propositus a b, & g numerus æquationis, & seu diuiseris a b in quadratum b c, ut latus eius b d in superficiem d a faciat g, seu addideris b c superficiem ad a b, ut tota a f fiet quadrata & latus eius a e in additam b e producat g, fient notæ æstimationes in prima quidem latus b d in secunda dimidium a e addito aut detracto latere differentiæ dodrantis a f, & superficiei a b propositæ. At quoniam a e in c b est æquale g, & b d in d a æquale eidem g, erit a e in c b æquale c d in d a, e a igitur ad c d, ut a d ad c b, at a e maior est c d, ergo a d maior e b, cumque b c & a f quadratæ sint, erit a d æqualis d f, igitur d f maior c b, quod esse non potest: non potest igitur diuisio una esse.

Oportet igitur ut sit superficies a b æqualis numero rerum eiusmodi, ut b e pars quadrata sit, cuius latus e k in k a sit æquale g numero æquationis, & rursus sit c d æqualis a b, cui desit ad complendum quadratum superficies h d, ita ut ex c h rursus in h d fiat idem g, & b erit in utroque casu nota res: scilicet in primo e k, in secundo dimidium c h cum e a quæ potest in superficiem f l posita l c, dodrante l c. Quia ergo h c ad e k est ut a k ad d h, erit h c ad e k duplicata ad proportionem mediæ a e k ad mediam inter h c & h f. Sit igitur m media inter h c & c k, igitur h c ad m, ut mediæ inter a c e k, quæ sit n ad mediam inter h e h f, quæ sit o, igitur h c ad m, ut n ad o. Et erunt tres ordines coniuncti ad duo extrema e k, n, e a, e k, m, h c, & h c, o, h f.





Et rursus cum dixerit quis diuisi a b in c, & fuit c d differentia partium, ex qua in c e mediam inter partes producitur f: dico quod habebo 1 quad. quad. p: quarta parte quadrati f æqualia quadratis numero, quadrati dimidij a b, & ideo f nõ potest excedere quadratum dimidij a b, seu quartam partem quadrati a b, uelut si a b sit 8, e b, f b,b a,b c,b o,1 quad.quad.p:9,æqualia 16 (quadrato 4 dimidij a b) quadratis scilicet: quare res erit ℞ v:8 m:℞ 55 & duplum eius, id est ℞ v:32 m:℞ 880, erit quantitas c d differentiæ partium. Et ideò problema est ut cum sciam quantitatem a b, et modum inueniendi productum ex c d in c e, ut sit æquale f, si inuenero modum ut ex c d in productum b c in a c, quod est quadratum c e, fiat idem f, inuentum erit capitulum. Sed uariantur partes scilicet c d & c e in uno & altero problemate.

Rursus cum ex c d differentia partium in productum a c in a b fit f, & b c sit æqualis a d erit ut ex a c in a d, & pòst producto in c d fiat f. ergo si c d esset media proportione inter a c & a d, esset a c diuisa in d secundum proportionem habentem medium & duo extrema: & si productum sic esset, esset c d ℞ cu. f: & quoniam productum a c in a d, est semper in aliqua proportione cum quadrato c d, uel maioris uel minoris, & ea sumitur in æquali proportione semper a b 1 quad. p: numero rerum lineæ diuisæ æqualibus quadrato eiusdem: aut 1 quad. p: quadrato numeri lineæ diuisæ æqualibus rebus in triplo numeri rerum. ut si linea diuisa sit 10, habebo 1 quad. p: 10 rebus æqualia 100, uel 1 quad. p: 100, æqualia 30 rebus, & æstimatio semper erit eadem. Et si quadratum c d sit duplum aut triplum producto a c in a d habebimus, id est quad. p: multiplic. eiusdem numeri rerum æqualia multiplici quadrati eiusdem numeri, aut 1 quad. p: quadrato numeri eiusdem lineæ diuisæ æqualia rebus ductis per conuersum proportionis p: 2. Exemplum in quadrupla proportione antea fuit 1 quad. p: 10 rebus æqualia 100, uel 1 quad. p: 100 æqualia 30 rebus, hic habebo 1 quad. p: 40 rebus æqualia 400, uel 1 quad. p: 100, æqualia 60 rebus, qui numerus producitur ex 4 numero proportionis, & 2 assumpto ex regula. Et res seu æstimatio est eadem, uel si productum fuerit multiplex quadrato, assumemus contrario modo, uel 1 quad. cum rebus sumptis secundum illam partem æqualia parti eidem quadrati lineæ diuisæ: uel 1 quad. p: quadrato eiusdem lineæ diuisæ æqualia rebus duplo p: portione eadem lineæ diuisæ: & res redit ad idem. Et exemplum est clarum.

Ex quo tandem patet quod assumpta a b, ut in præsenti capitulo, quæ sit 12, & ex c d differentia in productum a c in c b fiat 8, habemus 1 cu. p: 4, æqualia 36 pos. hoc enim demonstratum est: Ergo a c erit diuisa in d, eo modo ut ex a c in a d inde in d c fiat 8, & rei æstimatio erit dimidium c d: ergo c d duplum æstimationis, & residui dimidium a d uel b c, si ergo c d esset ℞ cu. 8, id est 2, erit d a ℞ 5 m: & c a ℞ 5 p: 1, & ideò tota a b ℞ 20. Si quis ergo dicat fac ex ℞ 20 duas partes, ex quarum ductu rectanguli earum in differentiam fiūt 8, habebis

bebis partes b c ℞ 5 m:1 c a ℞ 5 p:1 productum, quarum est 4, quod ductum in c d, quę est differentia, & est 2, producit 8. Et habebimus 1 cu. p:4 æqualia 5 rebus. Et fundamentum a b est potentia tantum rethe. Si ergo 1 cu. p:6 æquatur 7 rebus res potest esse 1 & 2, ut palam est. Ergo si c d ponatur 2 habebimus posita d a 1 pos. 2 quad p:4 pos. productum a c in a d, & in e d æqualia 6, & erit a d 1. Et si ponatur c d 1, habebis 1 quad. p:1 pos. æqualia 6, igitur a d est 2, quando ergo c d est 2, d a est 1, & quando c d est 1, d a est 2. Sed supposita prima ratione quod ex a c, c d, d a in continua proportione fiat 8, & c d sit ℞ cu. 8, scilicet 2, si ergo c d quadratum esset quadruplum rectangulo a c in a d hoc habet rationem, hoc modo quod enim fit ex a c in a d est æquale ei quod fit ex c d, d a in a d assumatur d e dupla d a, & d f quadrupla eidem quadratũ,

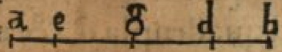
igitur d e est æquale quadruplo quadrati d a, & quadratum c d est æquale quadratis c e, e d & duplo c e in e d, igitur duplum d e in e c, & est d f in c e cum quadrato e c est æquale quadruplo c d in d a, id est ei quod fit ex f d in d c semel, hoc autem est æquale ei quod fit ex f d id c e & e d, detracto igitur communi eo quod fit ex f d in c e relinquetur quadratum c e æquale ei quod fit ex f d in d e, est autem f d quadrupla d a & e dupla eidem d a, igitur c e potest in octuplum d a. Ponatur ergo e a qualiscunque numerus puta 10, cum e a sit triplum d a et c e ℞ octupli quadrati d a erit tota c a 3 p: ℞ 8 in numero rerum, & hoc æquatur 10, igitur res scilicet d a est diuiso 10 per 3 p: ℞ 830, m: ℞ 800, ergo c d residuum erit ℞ 810, m: 20, ex tota igitur a c in d a fit 300, m: ℞ 80000, & hoc est quarta pars quadrati c d, scilicet 1200, m: ℞ 320000 sicut proponebatur.

Rursus dicamus quod quadratum c d ad sexcuplum ei quod ex c a in a d assumam d f sexcuplam, ut in priori quadruplam d a, & similiter d e mediam inter d f & d a, nam & in priori cõstitutione d e fuit media inter f d & d a, & assumam g e æqualem c d, sicut in priore, sed e g fuit ibi ipsa e f, hic autem est minor eo quod proportio est maior quadrupla, & tunc quadratum d e est sexcuplum quadrato d a, quia est ęquales ei quod est ex f d in d a, igitur ex supposito quod fit ex d g in c e cum quadrato c e est sexcuplum c d in d a, seu æquale ei quod fit ex c d in d f, seu quadrato d f cum eo quod fit ex d f in f e diuidamus ergo utranque, & fient partes (ut uides) auferantur utrinque quadrata e f & duplum d e in e f, relinquentur d f in f e, & quadratum e d æqualia quadrato c f, duplo c f in f e, & duplo c f in d e, at d f in f e

in f e eſt æquale ei quod fit ex e f in f e, & d e ſemel eo quod d f eſt æqualis f e & e d, iunctis igitur quadratum e d eſt æquale ei quod fit ex e f in ſe in f e, & e d, & eſt tota e d. Quadratum autem e d eſt æquale ſexcuplo quadrati d a, igitur quod fit ex e f in c d eſt ſexcuplum quadrati d a. Ponatur ergo d a 1 poſ. d fecit 6 poſ. tota f a 7 poſ. ſi igitur ponatur c a 10, ut prius erit e f 10 m: 7 poſ. c d autem 10 m: 1 poſ. duc inuicem

d f in f e	★
Quad. e f	✠
Quad. e d	
Duplum d e in e f	★
Quadratum e f	✠
Quadratum c f	
Duplum c f in f e	★
Duplum d e in e f	✠
Duplum c f in d e	★

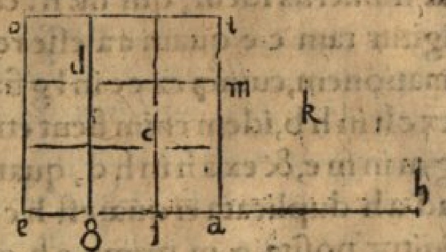
fient 100 m: 80 poſ. p: 7 quad: æqualia 6 quad. & ita uides quod res reducitur in quouis caſu a d 1 quad. cum quadrato numeri propoſiti, & numerus rerum ſemper fit ex numero propoſito, utpote 10 in numerum proportionis p: 2, proportio fuit ſexcupla, & ideo addito 2 fiet 8, & poſitiones 80, ergo reducetur ad regulam de modo ſic. Proponitur linea a c 10, & proportio ſexcupla adde 2, fit 8, duc in 10 fit 80, accipe dimidium & eſt 40, duc in ſe fit 1600, aufer 100 quadratum 10 relinquitur 1500, cuius ℞ detracta à 40, efficit 40 m: ℞ 1500 quantitatem d a. Ergo ut ad rem deueniam ſi quis dicat 1 cu. p: 4 æquatur 12 rebus, capiam a b duplum ℞ 12, & eſt ℞ 48, & f corpus duplum 4, & eſt 8, & diuidam a b per æqualia in ℞ 12, & addam & minuam 1 poſ. & fiat e b ℞ 12 p: 1 poſ. & ℞ a e ℞ 12 m: 1 poſ. & productum erit 12 m: 1 quad. ducamq́ illud in e d differentiā a e & e b, facta d b æquali a e, & fient 24 poſ. p: 2 cub. æqualia 8, igitur 1 cub. p: 4 æqualis 12 poſ. cum ergo dimidium e d ſit rei æſtimatio, & tota a b numerus aut potentia rhete. Erit primum ut a g ſit numerus aut potentia rhete. Inde ut cum ex e b in b d & in d e, fiat ut dixi f ſuppoſita b d numero utpote 1 erunt quadrata, & res æqualia 8, hoc enim eſt ſuppoſitum, & habebimus 1 quad. p: 2 poſ. æqualia 2.



Corᵐ. Conſtat autem quod proportio cubi c b ad parallelipedum c b, b d, d c eſt ſemper ueluti quadrati c b ad rectangulum ex c d in d b, quare c b ad latus parallelipedi eiuſdē ſubtriplicata ei quæ eſt quadrati c b ad rectangulū c d in d b, at c b ad mediam inter c d, d b ſubduplicata ei quæ eſt quadrati c b ad rectangulum c d in d b, lateris igitur ſolidi c b, c d, d b, ad latus rectanguli c d in d b, eſt ut ℞ quad. $4\frac{1}{2}$ ad ℞ cu. $4\frac{1}{2}$.

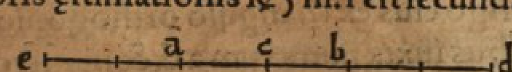
Cum uolueris diuidere b a ut proportio eiuſdem ad rectangulum a d in d b, ſit uiginti quadrupla, gratia exempli, diuide quadratum b a per 24, & quod exit detrahe ex quadrato dimidij b a, & ℞

residui addita & detracta à dimidio ostendit partes, ut si a b sit 10, ducam in se fit 100, diuido per 24, exit $4\frac{1}{6}$, detraho ex 25 quadrato a g relinquitur $20\frac{5}{6}$, cuius ℞ addita 5, dimidio 10, & detracta ostendit partes ut pote a d, d b, & habetur ex *5 secundi Elem.*



Euclide. Iam uerò constituatur a b quadratum 7, & a c 1, & a d 4, erit ergo a e ℞ 7, a f 1, a g 2, & sit c h dupla e a, & erit ℞ 28, & sit numerus k b, sit ergo cubus a c p: 6 æqualis 7 rebus, & item cubus a g p: eodem numero 6, æqualis 7 rebus. Quia ergo a b est 7, erit corpus a b posita a f altitudine & re. 7 res, hoc autem corpus æquale est 1 cu. id est cubo a f cum b, est autem i gnomo l c b f iuxta altitudinem a f, & similiter corpus ex a b in a g est æquale gnomoni l d b g in a g, cum cubo a g, quare gnomo l d b g in a g est 6. Igitur diuisa erit bifariam a b superficies, ut ex latere unius partis in reliquam fiat seu b. Et item diuisa erit bifariam e h in a per æqualia, ut ex a f & a g, ductis in quadratum a e, seu productum a h in a e fiant 7 res: quia a b iam supponitur 7, & a f & a g res. Et rursus diuisa erit c h bifariam in f & in g, ut productum b f in f e sit æquale gnomoni l c b f & in g, ut productū l g in g e, sit æquale gnomoni l d b g. unde unumquodque horum per primam partem huius ductum per differentiam à medietate, id *Per demonstrat. 5 secundi Elem.* est h f in f e per f a, & h g in g e per g a, producit eundem numerum k seu b. Iam uerò sit cubus & 8 æqualis 8 rebus res 2, erit ut ducas 1. dimidium 2 in se fit 1, triplica fit 3, deducito numero rerum, relinquitur cuius ℞ m: 1 dimidio prioris æstimationis ℞ 5 m: 1 est secunda æ- *Per 13 Cap. Art. mag.*

stimatio. Ponam ergo f numerum 8, & a b 2 pri-



f.num. 8

mam æstimationem, & b d ℞ 5 m: 1 secundam æstimationem, & ideo posita, b c erit c d ℞ 20, dupla ipsi c d, & a e ℞ 5 m: 1, æqualis b d, ponam ergo a d ℞ 5 p: 1 pos. a e ℞ 5 m: 1 pos. ductæ inuicem producunt 5 m: 1 quad. duco in a b fiunt 10 pos. m: 2 cu. æqualia 8, igitur 1 cu. p: 4, æqualia 5. & res est eadem 2, & ℞ 5 m: 1, ergo sub eisdem æstimationibus fit transitus, sed non sine cognitione prioris æstimationis per quam deuenio ad scientiam d e, quæ est ℞ 20. Dictum est etiam supra quod si capiam duplum ℞ numeri rerum, & est ℞ 32, & diuidam in ℞ 8 p: 1 pos. & ℞ 8 m: 1 pos. fiet 8 m: 1 quad. & ducto in 2 pos. fient 16 pos. m: 2 cu. æqualia 16, & redibit a d 1 cu. p: 8 æqualia 8 rebus. In hac igitur per non nota inuenitur aliquid nouum in illo per nota inuenitur aliquid, sed est idem, nam c d supponitur in priore ℞ 32, hic ℞ 20.

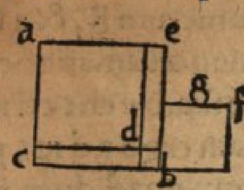
LL Rursus

Rursus proponantur duæ superficies æquales rectangulæ a b c d & c e f g, & sint æquales numero rerum, & sint quadrata in eis c h k d & c e l m, ita ut ex latere illorum in reliquum suæ superficiei fiat numerus idem, qui sit. n. constat igitur tam c e quam c a esse rei æstimationem, cumque ex c e in l g fiat n, & ex c h in h b, idem enim fient etiam ex g m in m e, & ex a h in h d, quare g m ad a h duplicata ei quæ est h c ad c e: igitur posita g m prima, a h quarta, c h secunda, c e tertia, erit ergo quod

fit ex prima & tertia in tertiã, scilicet superficies e g, æqualis ei quod fit ex secunda & quarta in secundam, scilicet superficies a d. Et rursus quod fit ex prima in quadratũ tertiæ æquale ei quod fit ex quarta in quadratum secundæ. Constituetur igitur problema sic: Sunt quatuor quantitates ordinatim a b c d, quarum proportio a ad d est duplicata ei quæ est b ad c: & quod fit ex a c in c est æquale ei quod ex d b in b, & quod fit ex a in quadratum c est æquale ei quod fit ex d b in b. Ex quibus sequitur quartum, quòd proportio eius quod fit ex a in quadratum c, ad id quod fit ex a c in c, est ueluti eius quod fit ex d in quadratum b ad id quod fit ex d b in b. Et permutando etiam, sed illud est perspicuum cum sit proportio æqualis ad æquale.

a
b
c
d

Dico prætereà quòd regula *Artis magnæ* quæ docet assumere radicem aggregati ex numero rerum, & numero æquationis diuiso per illam ℞, sola est generalis illi capitulo, & est demonstrata ibi. Et est origo eius ex triangulo orthogonio, nam si sit cubus b c æqualis rebus iuxta numerum a d, & numero g erit, ergo ex communi animi sententia g ex b c in gnomonem c d e, fiat ergo b f quadratum equale c d e gnomoni, eritque cubus b c, æqualis b c in a d & b f, sed quadratum b c, quod est a b, æquale est a d & b f, igitur latera a d & b f continent rectum contensum b c. Hæc igitur æstimatio satisfacit in omni æquatione seu numerus rerum sit paruus seu magnus.



De difficillimo problemate quod facillimum uidetur. CAP. XLI.

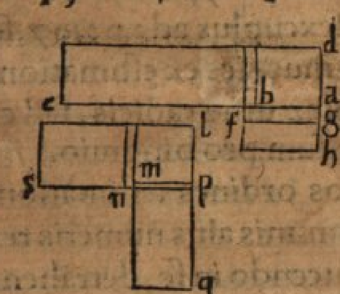
Nihil est admirabilius quam cum sub facili quæstione latet difficillimus scrupulus, huiusmodi est hic: quadratum a b cum latere b c est 10, & quadratum b c cum latere b d est 8,

quæritur

quæritur quantum sit unum horum seu latus seu quadratum? Quia ergo a b c est 10, & a b 1 quad. erit b c 10 m: 1 quad. igitur b c 100 m: 20 quad. p: 1 quad. quad. igitur c b d erit 100 m: 20 quad. p: 1 pos. p: 1 quad. quad. & hoc est æquale 8, quare 1 quad. quad. p: 92, æquatur 20 quad. m: 1 pos. adde 19 quad. utrinque fient 1 quad. quad. p: 19, quadrat. p: 92, æqualia 39. quad. m: 1 pos. detrahe $1\frac{1}{4}$, erunt 1 quad. quad. p: 19 quad. p: $90\frac{1}{4}$ æqualia 39 quad. m: 1 pos. m: $1\frac{1}{4}$, inde adde 2 pos. p: 1 quad. utrinque ut in Arte magna, & uidebis difficillimam quæstionem.

De duplici æquatione comparanda in capitulo cubi & numeri æqualium rebus. CAP. XLII.

ET proponatur cubus & 4 æquales 6 rebus, & rei æstimatio est 2, & altera ℞ 3 m: 1, & rursus ponatur cubus, & 10 æqualia 9 rebus, & æstimatio est idem 2, altera ℞ 6 m: 1, & manifestum quod prior æstimatio, scilicet maior satisfacit diuersis, imo infinitis problematibus. At in reliqua fieri nullo modo potest, ut neque in una cum neutra fuerit numerus uelut pro 1 cu. p: 12 æqualibus 34 rebus 3 p: ℞ 7, neque 3 m: ℞ 7, nam posita re ut pote 3 m: ℞ 7 cubus est semper 90 m: ℞ 8092, ergo ℞ non potest continere ℞ nisi 34 uicibus, igitur cubus ille cum numero non potest æquari alteri numero rerum quam 34.



1 cu. p: 4 æqualis 6 pos. k numer 4

a
b e
c g
d f

1 cu. p: 10 æqualis 9 pos. k num. 10

& hoc est ualde admiratione dignum. Dispositis ergo f d & n l æqualibus, scilicet 4 quadrato 2, & a b ℞ 3 m: 1, & m o ℞ 6 m: 1, ponam a æqualem g d, b æqualem b c, c æqualem g h, d æqualem a b, e æqualem a q, f æqualem m o, g æqualem n f. Ex his sequuntur quinque principalia.

Si quadratum a auferatur ex numero rerum, & cum residuo diuidatur numerus æquationis prodibit ipsum a communis æstimatio, ueluti 1 cu. p: 4 æquatur 6 rebus, & 1 cu. p: 10 æquatur 9 rebus, & communis æstimatio quæ est a est 2, duco o in se fit 4, detraho ex 6 & 9 numeris rerum, relinquuntur 2 & 5, diuido 4 numerum æquationis primæ per 2 & 10 numerum æquationis secundæ per 5, exit 2 in utroque scilicet ipsum a. Cor^m. 1

Cor^m. 2 Ex fine 40 cap.

Sequitur etiam quod cum ex dictis fiant, ex g & c in quadratum a k, & k numeri æquationis, ut sit g ad c, ut q ad ℞: & quia quod fit ex c in quadratum a, est æquale ei quod fit ex b in quadratum d, & ex g in quadratum a æquale ei quod fit ex e in quadratũ f, erit quod fit ex b in quadratum d, ad id quod fit ex e in quadratum f, uelut c ad g. Et est probatum exemplum ex 7 m:℞ 24, quod est quadratum f in $3\frac{4}{5}$ p:℞ $3\frac{21}{25}$ fit 10.

4 p:℞ 12	1		℞ 3 m:1
2 b	c		d
a e		g	f
			℞ 6 m:1

Cor^m. 3 Per eandem.

Rursus quia quod fit ex c & a, in a est æquale ei quod fit ex b d in d, & ex g a in a, ei quod ex e f in f, erit quod fit ex b d in d ad id quod ex e f in f, uelut c ad g, fit enim ex b d in d ℞ 12, & ex e f in f ℞ 75, & est proportio ut 1 ad $2\frac{1}{2}$.

Cor^m. 4

Cumq́ æstimatio (ut dixi) non potuerit esse communis pluribus numeris rerum, & numeris æquationis commutabitur necessariò, si fuerit binomium in suum recisum, & ita habebis & secundam æquationem & numerum communem qui erit idem, uelut 1 cu. p: 12 æqualis 34 rebus: non se offert primò illa pars quæ ducta in ℞ alterius, efficit 12, sed est tamen 18 p:℞ 252, alia est 16 m:℞ 252, cuius ℞ est 3 m:℞, cum ergo habes 3 m:℞, duc in se & fit 16 m:℞ 252, & quia ℞ 7 est sexta pars ℞ 252, ideo oportet assumere numerum sexcuplum ad 3, & est 18 cum ℞ 252 per p: & addere ad 16 m:℞ 252, habes 34 ad unguem. Et uicissim si habueris 3 p: ℞ 7 habebis quadratum 16 p: ℞ 252, & ita reliquus erit sexcuplus ad 3 p: ℞ 7, sed ℞ erit m: ideoq́ 18 m:℞ 252. & ita uicissim inuenies ex estimatione partes, una erit quadratum, alia erit multiplex ut ℞ radicis, sed contrario modo binomium pro reciso, & recisum pro binomio.

Cor^m. 5

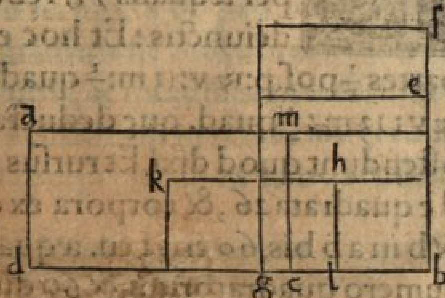
Iam ergo habes duos ordines æstimationum: primus cum eadem æstimatio est communis alijs numeris rerum & æquationum, & inuenire licet illos ducendo in se, detrahendoq́ à quouis numero, & cum residuo diuidere alium numerum, ut prodeat eadem æstimatio: ut in primo corrolario. Secundus, cum æstimatio est binomium uel recisum, & ducitur in se, & detrahitur à numero aliquo, ita ut residuum habeat eandem proportionem ad partem, quæ est numerus, quam ℞ quæ est pars quadrati ad ℞, quæ est pars æstimationis: & illa proportio est duplum numeri æstimationis semper, ideo numerus ille est semper duplum quadrati numeri æstimationis, ut in quarto seu præcedenti corrolario: uelut si numerus æstimationis fuerit 2, erit talis numerus 8, si 3 18, si 4 32, & ita deinceps, reliquus autem numerus erit compositus ex quadratis partium æstimationis, ut si partes sint 3 p:℞ 7: uel m:℞ 7, erit 16, igitur totus numerus erit 34. Ergo tertius modus qui quæritur erit diuersus ab his, & non erit per uiam recisi & binomij, neque ut eadem æstimatio

tio seruiat pluribus, uelut in margine uides, quod singulis sunt duæ æstimationes in 1 cu.p: 20, æquali 15 pos. neutrum contingit non primum, quia 2 est minus, & 3 est maius, nec potest esse pars numeri. Nec secundum, quia oporteret ut addito 1 uel 10 ad 15 ℞ 16 uel 25, diuidendo 20, produceret idem 1 uel 10 & non fit, nã exeunt 4 uel 5.

1 cu.p: 4	2	6 pos. ℞ 3 m: 1
1 cu.p: 6	2	7 pos. 1
1 cu.p: 8	2	8 pos. ℞ 5 m: 1
1 cu.p: 12 3 p: ℞ 7 3 m: ℞ 7		34 pos.
1 cu. p: 20		15 pos.

De comparatione numeri æquationis ad partes numeri rerum. CAP. XLIII.

Sit a b superius 12, & ex b c latere tertiæ partis in c a fit 16, maximum quod esse potest. Sit ergo b f æqualis a b, & quadrata superficies g e, ex cuius latere in residuum e f fiat 8, & hæc diuisio est quam quærimus. Sit ergo b k, cuius tertia pars sit quadratum b h, ex cuius latere in residuum esset, fiat 8, erit ergo b l ℞ cu. 4, b h ℞ cu. 16, l k ℞ cub. 128, qua ducta in b l fit ℞ cu. 512 scilicet 8. Igitur tota b k est cu. 432. Habemus ergo duo nota b c in c a, sed productum non est 8



b l in l k, quorum productum est 8, sed b k non est 12, & b g in e f, & est 8, & b f 12, sed non est nota diuisio facta in e. Proportio ergo a c ad k l, est ut quadrati b c ad quadratum b l, quare ut b c ad b l duplicata: cum uerò proportio solidi b c in c a, sit dupla ad solidum ex b l in l k, erit c a ad l k uelut quadrati proportionis ad ℞ cub. quad. quad. proportionis, & b c ad b l, ut proportionis ad ℞ cu. quad. proportionis. Proportio autem k l ad e f, est ut c b ad b l, quare b e ad b l duplicata ei quæ est k l tetragonici ad e f tetragonicum. Habet ergo diuisio b k per l h proportionem notam in omnibus partibus, ut liquet cum b a diuisa in e: & habet etiam proportionem notam cum b f, diuisa in e, quia ut dixi proportio k l ad e f, ut e b ad b l, est autem e g ad b h duplicata ei quæ est e b ad b l. Si ergo coniungantur hæ proportiones, quoniam extremorum componitur ex intermedijs, & maximè quod differentia e g & a c est æqualis differentiæ quadrati b c & e f, seu gnomo e m g æqualis differentiæ a c & f e. Per 34 undecimi El.

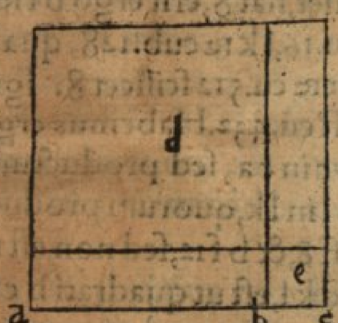
LL 3 Quomodo

Quomodo diuidatur data linea secundum proportionem habentem medium, & duo extrema in corporibus. CAP. XLIIII.

SIt data a b diuisa in c, ut ex a b in quadratum a c fiat cubus b c, igitur b c posita 1 quad. & ponamus a b 4, erit 1 cu. quad. æqualis 64 m:32 q̃d. p:4 quad. quad. igitur ℞ radici 1 cu. p:2 quad. æqualis 8, cuius æstimatione habita quadratum est quantitas b c quæ quærebatur.

Quomodo partes diuisæ lineæ corporibus & quadratis inuicem comparentur. CAP. XLV.

ET sint d e quadrata 26, & d e cubi 126, & compleatur superficies quadrata, & erit cubus p:252, duplo 126, semper æqualis 78 rebus triplo numeri æqualis quadratis deiunctis: Et hoc ex regula posita a c 1 pos. fient enim partes $\frac{1}{2}$ pos. p:℞ v: 13 m: $\frac{1}{4}$ quad. & $\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: 13 m: $\frac{1}{4}$ quad. quę deductæ ad cubos ostendunt quod dixi. Et rursus si ponantur d e quadrata 26, & corpora ex d in b c bis, & b in a b bis, 60 erit 1 cu. æqualis 26 rebus numero quadratorum, & 60 duplo producti mutui, & res est in capitulo. Iam ergo ex hoc supposito sciemus quanta sit a c, quæ est b, & partes & æstimationem cubi p:252, ęqualium 78 rebus, quo proposito accipiemus $\frac{1}{3}$ 78 & $\frac{1}{2}$ de 252, & cõuertet quæsitũ in duo quadrata quæ iuncta faciunt 26, & duo cubi qui sunt 126. Et quia propositum est quod productum unius in alterum mutuo est 30, si hoc sciremus manifestum esset capitulum. Sunt ergo quatuor quantitas a c, & est 6 quantitas d e, & est 26. quãtitas corporum mutuorum, & est 30 quantitas cuborum, & est 126. Illud accedit quod si dicam quadrata sint 25, & cubi non poterunt esse maiores 125 cubo 5 ℞ 25, igitur cum neq; possint esse minores ℞ 7812$\frac{1}{2}$ duplo, scilicet cubi ℞ medietatis 25, quæ est ℞ 12$\frac{1}{2}$, ut sit circumscripta inter 88, qui est ℞ fermè 7812$\frac{1}{2}$ & 125, & præter id cum dico 1 cub. æquatur 6 rebus p:9, manifestum est quod numerus 9 datur cubis non parallelipedis, ut etiam hic, ideo erit nota pars huius capituli cubi & numeri æqualium rebus. Et est ualde dignum consideratione: nam ut statuantur cubi æquales 126, & quadrata 26, ut dictum est, poterimus loco

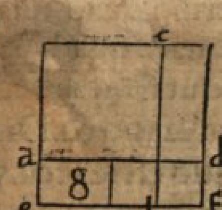


loco 26, assumere quemcunque numerum minorem pro quadratis usque ad 14, ut dicamus, quadrata d e sint 14 uel 15 uel 16, & ita ad 25 usque & cubi sint 126, igitur ex regula præsenti cubus p: 252, æquabitur 42 rebus uel 45 uel 48, & ita usque ad 78, & ita in intermedijs eadem ratione scilicet 43, 44, 46, 47 rebus, & ita de singulis. & uariato numero 252, habebimus alios ergo habita hac regula, habebimus capitulum perfectum. Et tamẽ (ut dixi) in supposito habemus partem regulæ notam.

Et sanè hoc est (ut in exemplo maneamus) iam notum quod si quis dicat cubi a b, b c sunt 126 quadrata 26, quod numerus tribuitur cubis, & si 26 esset numerus rerum, aut numerus mutuorum solidorum, iam omnia essent nota. Et rursus, si dico quod 30 est numerus solidorum & 26 rerum iam habeo 1 cu. æqualem 26 rebus p: 60, & res est nota. Et si dico quadrata sunt 26, & parallelipeda 30, deuenimus ad 1 cub. quad. p: 2628 quad. p: 3120 pos. æqualia 104 quad. quadrat. p: 3600, & hac uia non habemus capitulum. Et mirum est quod cum assumimus 26 pro numero rerum, & 60 pro solidis; aut 30, hic numerus transeat in cubos, quamuis sit mutuorum solidorum: & cum accipitur numerus pro cubis, & quadrata pro alio numero, hec transeant in res, & numerus cuborum in residuum rerum detracto cubo, quasi numerus rerum componatur ex tribus cubis.

Quomodo proposito rectangulo, & cubis laterum eius habeamus totum cubum. CAP. XLVI.

ET proponatur rectangulum a b puta 4, & cubi laterum a c, b d 20 dico cubum notum esse, quia enim cubi a c, b d sunt 20, oportet facere ex 20 duas partes, quarum ℞ cu. ductę inuicem faciant 4, superficiem a b. igitur cubi inuicem ducti facient cubũ 4, qui est 64. partes igitur, id est cubi a c, b d sunt 16 & 4 & ℞ cu. earum sunt latera a b



igitur cubus totus est 20 p: ℞ cu. 27648 p: ℞ cu. 6912. Et si ponantur a c b d nota ut quantitas rerum & corpora a b c d iuxta altitudinem, erunt duo tantum, quia sub numero rerum a c b d ut pote 13 continentur duo mutua & reliqua quatuor sub a b & c d, id est sub 60. igitur a c & b d numerus rerũ si fuerit paruus, erit capitulum per se notum ex regula Artis magnæ: si autem fuerit magnus uelut cu. 24 rebus p: 5, tunc ex præsenti problemate si posit reduci ad hoc, ut separentur mutua, erit propositum necessarium, scilicet ut accepto dimidio 5, & est $2\frac{1}{2}$ inuenias duos numeros qui producant $2\frac{1}{2}$, diuisum per rem, &

eorum

eorum cubi faciant 24 m:$2\frac{1}{2}$, id est $21\frac{1}{2}$, nam ut dixi in 24 continentur cubi ambo a c b d & duo mutua. Istud ergo non est per se notum: inuenias numerum qui diuisus producat 6, tanquam superficiem a b, & ipse sit æqualis cubis a b & c d duobusque mutuis, aut quatuor, nam posito uno 1 pos. altero $\frac{6}{1\ pos.}$ erunt 1 cu p: $\frac{216}{1\ cu.}$ cum 6 pos. p: $\frac{36}{1\ pos.}$ uel cum 12 pos. p: $\frac{32}{1\ pos.}$ æqualia 65. gratia exẽpli, igitur 1 cu. q̃d. p:6 quad.quad. p:36 quad. p:216, uel 1 cu. quad. p: 12 quad. quad. p: 72 quad. p:216 æqualia sunt 65 cu. hoc ergo ualde est obscurum, & oporteret ut haberet ℞ cu. Verum quia ponitur 65 cu. a c & b d, & duo mutua & æquantur duo cubi cum duobus mutuis a c & b d in e f, ut nuper dixi, igitur e f quæ est res in a c, & b d est 65, at e f in a b est 6 res ex supposito, & in c d 6 res, quoniam a b & c d sunt æquales, quia sunt supplemẽta circa diametrum, igitur e f in a b, c d sunt 12 res, & e f in a c, b d 65, & e f in a c, b d, a b, c d complet cubum e f, igitur cubus e f æquatur 12 rebus p: 65 & res est nota, putà 5, ex qua habetur ęstimatio illa, fac de 5 duas partes quæ producant 6, & erunt 3 & 2, erit ergo res $2\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{1}{4}$ uel $2\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{1}{4}$, & hæc erit æstimatio 65 cuborum æqualium 1 cu. quad. p: 6 quad. quad. p : 36 quad. p : 216, nam 65 cu. sunt in una 1755, in alia 520, & tantundem sunt illæ quantitates. proba & inuenies.

Corollarium. Ex hoc habetur quod cum 1 cu. quad. p: quad. quad. p : quad. p: numero in continua proportione fuerint æqualia cubis: tunc habebis 1 cu. æqualem rebus duplo numeri quad. quad. cum numero cuborum: & inuenta æstimatione fac duas partes, quæ producant numerum quad. quad. & partes utriusque erunt æstimationes 1 cu. quad. p: quad. quad. p : quad. p : numero æqualibus numero cuborum. Velut si dicas 1 cu. quad. p:9 quad. quad. p:81 quad. p:729, sunt æqualia 100 cu. Dices ergo 1 cu. æqualis est 18 pos. p : 100, & rei æstimatio est ℞ v: cu. 50 p: ℞ 2284 p: ℞ v: cu. 50 m: ℞ 2284, Ex hac facito duas partes quæ inuicem ductæ producant 9, & quælibet illarum partium est æstimatio quinomij illius propositi. Et proponatur rursus 1 cu. quad. p : 12 quad. quad. p : 72 quad. p:216 æqualia 95 cu. & superficies a b sit b ut prius, & sit 95 æquale duobus cubis, & quatuor mutuis corporibus quæ fiunt ex e f in superficiem a c d b, adeò ut ex e f in eam fiat 95, igitur ad complendum cubum deest quod fit ex e f in a b, & a b est 6, ideò & a b est 6, igitur quod fit ex e f in a b est 6, res igitur 1 cu. æquatur 6 rebus p: 95, & res est 5, ut prius fac de 5 duas partes, ex quarum ductu unius in alteram fiat 6, dimidium 12 numeri quadratorum, & erunt partes 3 & 2, & ita 1 cub. quad. p : 12 quad. quad. p: 72 quad. p:216 æqualia 95 cub. & res est 3 uel 2. experiare & inuenies.

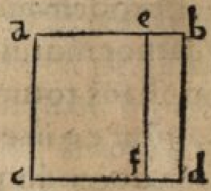
Et

Et eodem modo dicemus si corpus illud sit ex duobus cubis, & quatuor mutuis, & tertia parte duorum mutuorum, & sit gratia exempli 105 totum illud, & quia ex c b in b f fit a b quod est 6 erit e g 4, igitur e g in e f 4 res, ergo 1 cub. æqualis 4 rebus p: 105, & res est 5, quia ducendo per primam uiam peruenimus ad 1 cu. quad. p: 14, quad. quad. p: 84 quad. p: 216 æqualia 105 cu. Ideo faciemus ex 5 re duas partes, ex quarum ductu producatur 6, qui 6 habetur ex 14, diuidendo per $2\frac{1}{3}$ numerum mutuorum corporum duorum, uel ex 216, quia semper erit ℞ cu. eius, uel etiam diuiso numero quadratorum scilicet 84 per numerum quad. quad. qui est 14, & ita si numeri erunt dispositi hoc modo, ut secundus sit talis pars tertij, ut sit ℞ cu. quarti, erit regula generalis, sed ita ut quantitas e g uarietur, ut oporteat problema ita construere: sunt duæ quantitates ex quarum ductu producitur 6, & aggregatum cuborum cum duplo & sexta parte mutuorum est 100, tunc inueniemus superficiem e g 5, & erit cubus æqualis 5 rebus p: 100, & ita habebimus e f, & partes producentes a b, & hic est primus modus & facilis. Sed si proponantur prius 1 cu. quad. p: 13 quad. quad. p: 78 quad. p: 216, ęqualia 100, tunc quia tu nescis 100, quibus partibus æquetur, sed solum habes 6, ℞ cu. 3, seu quod prouenit diuiso 78 per 13, & diuiso 13 per 6, exit $2\frac{1}{6}$ abijce igitur relinquetur $\frac{1}{6}$ sume $\frac{1}{6}$, de 6 relinquetur 5, & habebis 1 cu. æqualem 5 rebus p: 100, ut prius, unde nota erit e f. Et ita si dixeris 1 cu. quad. p: 15 quad. quad. p: 90 quad. p: 216, æquatur 120 cu. accipe ℞ cu. 216 quę est 6, seu diuiso 90 per 15, & diuide 15 per 6, exit $2\frac{1}{2}$, abijce 2 remanet $\frac{1}{2}$, sume dimidium 6 quod est 3, abijce 3 ex 6 relinquitur 3, dicemus ergo quod 1 cu. æquatur 3 pos. p: 120, igitur res erit ℞ cu. 60 p: 3599 p: ℞ cu. 60 m: ℞ 3599, hanc ita diuidemus ut producat 6 numerum primo inuentum. ut infrà demonstrabimus.

Nota quòd in huiusmodi æstimatione non solum necessarium est, ut numerus putà 65 uel 95, uel 100, aut 120, sit magnus comparatione numeri rerum quæ assumuntur, sed oportet ut res inuenta possit in duas partes quæ producant ℞ cub. numeri æquationis quæ fuit in exemplis assumptis 6, aliter quæsitum est falsum & impossibile.

Quòd diuisa superficies seu corpus latera habet maiora latere totius. CAP. XLVII.

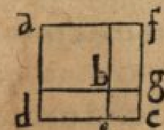
Sit quadratum a b c d seu cubus, & sit diuisum quomodolibet in e f, dico quòd latera c e & e d, seu cubica seu quadrata pariter iuncta sunt maiora a b, nam latus a f est medium inter a c & a e, igitur cum a c sit maior, a e erit latus, a f maius a e, & si-



militer latus d e medium inter b d & d f, igitur cum b d sit maior d f, erit latus d e maius c b, quare latera a f f b iuncta maiora a e, c b simul iunctis, & hoc est quod uoluimus. Similiter in cubo, nam latera sunt media secundo ordine inter a c & c e, & inter b d & d f, ut demonstratum est ab Euclide in undecimo Elementorum, ideò erunt maiora a c & c b. Sed ex hoc sequitur quod in cubo æquali rebus & numero æstimatio rei est semper maior ℞ cu. numeri: & etiam quia talis æstimatio est ℞ cu. cubi qui est maior numero cum sit æqualis rebus ipsis etiam ultra numerum.

De quadratorum quantitate & mutuis corporibus cognitis. CAP. XLVIII.

ANimaduertendum quòd si duo quadrata a b b c sint nota ut pote 13, & mutua quatuor sint 60, & uelim efficere corpora solida ad altitudinem totius, illa erunt 13 res p: 60 æqualia cubo, & tunc 13 continebunt cubos a b b c, & insuper duo mutua: sed quia ex capitulo proprio supponitur quod 13 res contineant tria mutua, & 60 cubos, ideò in æstimatione quærenda fiet res ℞ v: cub. 30 p: ℞ $808\frac{7}{8}$ p: ℞ cub. 30 m: ℞ $808\frac{7}{8}$. Et ideo non erunt 3 & 2, tamen totum erit. cum autem dixero quod ex quadratorum a b b c, lateribus fiant mutua 30, tunc erit c d latus diuisum aliter, scilicet in 2 & 3. Ideo cum dicimus 1 cu. æquatur 13 rebus p: 60, istud seruit eisdem quæsitis, ut 60 comprehendat duos cubos tantum, uel duos cubos cum duobus mutuis, uel duos cubos cum quatuor mutuis, uel cum quatuor mutuis, & dimidio duorum reliquorum, & generaliter cum omni parte: sed ut dixi æquatio tamen capituli qua inuenitur quantitas c d sumitur a c, si numerus ut 60 æqualis sit solis cubis, & hoc seruit capitulo, quomodo proposito rectangulo & cubis laterum.

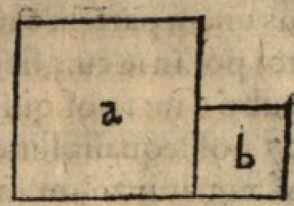


Si quis dicat 1 cu. p: 70 æquatur 39 rebus dices tu, igitur duo cubi sunt 35 dimidium 70, & duo quadrata 13, tertia pars 39, & ita ex hoc peruenies ad 1 cu. p: 70 æqualia 39 rebus per regulã de modo.

Iterum ergo si quis dicat duo cubi sunt 35 productum unius in quadratum alterius mutuo est 30, triplicabis 30 fit 90, adde 35 fit 125, res est 5, ℞ cu. 125.

Cap. 13. Et quoniam rursus ex dictis in Arte magna cum fuerit cubus p: 70 æqualis 39 rebus transmutatur in cubum æqualem totidem rebus & eidem numero, sed æstimatio prima habetur ducto dimidio secundæ æstimationis in se, & triplicato & deducto à numero rerum addita uel detracta à dimidio ſecundæ æſtimationis oſtendit primam.

Adhuc ergo ſit cubus p:70, æqualis 39 rebus, & res eſt 5 uel 2, & ſub eadem æſtimationẽ maiore cubus æqualis eſt 13 rebus, p:60, & per primam conſideratione quadrata a & b ſunt 13, tertia pars 39, & cubi 35, dimidium 70. Per ſecundam autem manentibus quadratis a & b 13, mutua corpora ſunt 30, & æſtimatio eſt eadem. Et eſt 5, & ſi eſſet $4\frac{1}{2}$. gratia exempli & quadrata a b 12. Igitur manente æſtimatione eadem & numero quadratorum partes rei eſſent $2\frac{1}{4}$ p: ℞ $\frac{15}{16}$ & $2\frac{1}{4}$ m: ℞ $\frac{15}{16}$. Et mutua corpora erunt productum $4\frac{1}{2}$, aggregati in $4\frac{1}{8}$, productum laterum a b $18\frac{9}{16}$, igitur 1 cu. æquabitur 12 rebus p: $37\frac{1}{8}$; numerus uerò rerum æqualium cubo & numero eſt 36, triplum 12; & numerus ipſe $70\frac{7}{8}$, & cubi $35\frac{7}{16}$. Oportet ergo uel ex cubo & numero rerum eodem, & æſtimatione eadem ſuppoſito numero æquationis inuenire alterum, ſed nondum cognita æſtimatione, uel ſuppoſito numero æſtimationis, & æquatione una inuenire numerum rerum eundem. Exemplum 1 cub. p: 70, & 1 cu. æqualis 60, & oportet ut eadem quantitas, quæ eſt 13, ſatisfaciat utrique ſcilicet 35, pro dimidio 70 & 30, pro dimidio 60. Hoc autem eſt notum per ſe, quoniam addo ad 60, dimidium ex dictis fit 90, addo ad 90, 35 dimidium 70 fit 125, cuius ℞ cu. eſt 5 æſtimatio utriq; ſatisfaciens, fac ex 5 duas partes, quarum cubi ſint 35, ex dictis in arte erunt partes 3 & 2, quarum quadrata ſunt 13, numerus rerum unus alter 39, triplum 13 pro altero.



De quibuſdam æquationibus & modis extra ordinem. CAP. XLIX.

CVm fuerit cubus æqualis 6 rebus p: quouis numero puta 40, tantum fit diuiſo 40 per 4 rei æſtimationem, exit 10, quantũ ducta æſtimatione in ſe fit 16 detracto numero rerum qui eſt 6, relinquitur 10. Ergo poſito cubo æquali 6 rebus p: 20 æſtimatio quæſita, ſi diuidatur 20 per a erit quod prouenit, & eſt $\frac{20}{a}$ æquali quadrato ipſius a m:6, igitur diuiſo 40 per ſuam æſtimationem id eſt 10 ſe habet ad $\frac{20}{a}$ ſicut ducta æſtimationẽ quæ eſt 4 in ſe, & deducto a ad quadratum a deducto 6. Cum enim cubus fiat ex æſtimatione in ſuum quadratum, igitur deducto quod fit ex diuiſione numeri per rem ex quadrato rei, relinquetur numerus rerum: ergo uiciſſim deducto numero rerum ex quadrato æſtimationis relinquitur quod exit. Si quis dicat diuide 6 in duas partes quæ

ſint in proportione ℞ cub. 3. clarum eſt quod poteſt fieri ex tertio libro, diuidendo per ℞ cub. 3 p:1, & eſt ℞ cu. 9 m: ℞ cu. 3 p:1 & ductum in ſuum binomium producit 4, & in 6 fit ℞ cu. 19 m: ℞ cu. 648 p:6, diuide per 4 exit ℞ cu. $30\frac{3}{8}$ m: ℞ cu. $10\frac{1}{8}$ p: $1\frac{1}{2}$. Aliter ergo ponemus unam partem 6 m: 1 poſ. aliam 1 poſ. proportio ℞ cub. 3, igitur duc 1 poſ. in ℞ cu. 3, fit poſ. ℞ cu. 3. duc ad cu. fit 3 cu. & hoc eſt æquale cubo 6 m: 1 poſ. qui 216 p: 18 quad. m: 108 poſ. m: 1 cu. igitur 1 cu.
Cap. 18 Art. mag. p:27 poſ. æqualia ſunt $4\frac{1}{2}$ quad. p:54. Igitur per regulam 1 cu. p: $20\frac{1}{4}$ poſ. æquatur $20\frac{1}{4}$ numero, igitur cubus tertię partis rerum eſt $307\frac{35}{64}$ adde quadratum dimidij numeri æquationis fit $410\frac{1}{16}$, igitur rei æſtimatio eſt ℞ v: cu. ℞ $410\frac{1}{16}$ p: $10\frac{1}{8}$ m: ℞ v: cu. ℞ $410\frac{1}{16}$ m: $10\frac{1}{8}$ p: $1\frac{1}{2}$, at illę radices æquiualent prædictis, quia ℞ $410\frac{1}{16}$ eſt $20\frac{1}{4}$, igitur addendo & detrahendo $10\frac{1}{8}$, fiunt ℞ cu. $30\frac{3}{8}$ m: ℞ cu. $10\frac{1}{8}$ p: $1\frac{1}{2}$ ut prius.

Ex hoc patet quòd cum habueris 1 cu. p: rebus æqualia quadratis p: numero, tū debes diuidere numerum rerum per numerū quadratorum & numerum qui exit duces ad cubum, & eum diuides per numerum æquationis, & cum eo multiplicabis totum quadrinomium, & quod ſupereſt in numero abijce ab uno, & illud ſerua deinde, diuide ℞ cub. numeri iam inuenti in duas partes quæ ſe habeant in proportione numeri abiecti per primum modum, & habebis æſtimationem quæſitam. Exemplum habes iam propoſitum: ſit 1 cub. p:27 rebus æqualis $4\frac{1}{4}$ quad. p:54, diuide 27 per $4\frac{1}{2}$ exit 6, duc ad cubum fit 216, tum diuide per 54 numerum æquationis exit 4, duc in ſuperiorem habes 4 cu. p: 108 poſ. & 18 quad. p: 216, abijce quicquid eſt ſupra 1 cu. & eſt 3, & relinquentur 216 p: 18 quad. 108 poſ. m: 1 cu. cape igitur ℞ cu. 3, & etiā ℞ cu. 3, & ei adde 1 pro regula fit ℞ cu 3 p: 1, diuide 6 per ℞ cu. 3 p:1 per priorem modum exibit æſtimatio quæſita 1 cu. p: 27 poſ. æqualium $4\frac{1}{2}$ quad. p:54. Sed hæc conuerſio non eſt generalis niſi cum ducto numero qui prodit ex diuiſione cubi in numerum quadratorum, conſurgit numerus triplus ad ℞ cub. numeri, ſeu ad numerum qui prouenit ex prima diuiſione.

1 cu. p:27 æqual.	$4\frac{1}{2}$ quad. p:54
	4
cu. p:108 poſ.	18 quad. p:216
3	216: p:18 quad. m:108 poſ. m:1 cu.
℞ cu. 3	6 diuidendum

De

De solidis radicibus & earum tractatione.
CAP. L.

CVm uoluero diuidere 6 ut fiat ℞ solida 9, duc 6 in se fit 36, diuide 9 per 36 exit $\frac{1}{4}$, & hæc est prima pars, secunda igitur erit $5\frac{3}{4}$, nam ex cubo $\frac{1}{4}$, & duplo quadrati $\frac{1}{4}$ in $5\frac{3}{4}$, & quadrato $5\frac{3}{4}$ in $\frac{1}{4}$ iunctis fit 9. Regula prima.

2 Cum uolueris habere radicem solidam 50 in proportione 3 ad 2. gratia exempli, cape 1 & $1\frac{1}{2}$ in proportione 3 ad 2, ita quod in illis sit unitas, iunge igitur 1 & $1\frac{1}{2}$ fit $2\frac{1}{2}$, duc in se fit $6\frac{1}{4}$, diuide 50 per $6\frac{1}{4}$ exit 8, cuius ℞ cu. quæ est 2, est pars prima ℞ solidæ 50.

3 Cum uolueris habita prima parte ℞ solidæ habere secundam in partibus cognitis primæ & secundæ ut pote 8 & 24, accipe ℞ cu. primæ, quæ est 2, & tum ea ducta in se & fit 4, diuide dimidium 2, & quod exit est quæsitum 53 3.

4 Cum uolueris habita prima & tertia quantitate ueluti 8 & 18 habere ℞ solidam, tu scis quod prima pars est semper ℞ cu. primæ partis 8 quæ est 2, diuide 18 exit 9, cuius ℞ quadrata quæ est 3, est pars secunda.

5 Cum uolueris habita secunda & tertia parte habere ℞ solidam, tũc accipe dimidium secundæ partis ut pote 12, quod est dimidium 24, & ex cap. 28 Artis magnæ habebis eas.

6 Cum uolueris habita prima parte & tertia, & aggregato comparare ℞ inuicem, scias quod ℞ quadratæ partium extremarum, ut pote 8 & 18 sunt partium solidæ 1 2 & 3, quæ sunt ℞ solidæ 8 & 18, item ipsarum partium accipiendo dimidium secundæ, pro secunda, nam proportio 18 ad 12, & 12 ad 8, & 3 ad 2, & ℞ 18 ad ℞ 8, sunt omnes sexquialtera.

8 12 18	50
12	
2 —— 3	
5	
℞ 8 — ℞ 18	
℞ 50	

7 Et sicut ex 3 & 2 partibus solidæ fit ℞ 50, solida ita ex ℞ 8 & ℞ 18 quadratis fit ℞ 50 quadrata.

8 Itaq; cum uolueris habita prima parte, ut pote 8 & residuo aggregati, ut pote 42 habere radicem solidam totam, diuide 50 aggregatum per 8, exit $6\frac{1}{4}$ cuius ℞ quadratum quæ est $2\frac{1}{2}$, accipe & ab ea minue 1 fit $1\frac{1}{2}$, duc in ℞ cu. 8, quæ est 2 fit 3 pars reliqua, & est conuersa secundæ regulæ.

9 Ex his manifestum est, quod ubi cubus æquetur 36 rebus p: 36 dando duo solida cubo, alterum rebus alterum numero proportio unius ad alterum erit 1 pos. quæ est ut 36 pos. ad 36, nam quilibet cubus ex duobus similibus solidis componitur ut 125, componitur ex

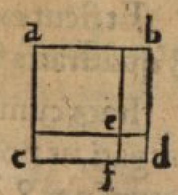
ſolido 2 & 3 quod eſt 50, & 3 & 2 quod eſt 75, & proportio alterius ad alterum eſt ſexquialtera, ut 3 ad 2.

10 Quælibet duo ſolida ſimilia cubum componunt, uelut capio 24 p: 24 p: 6, quod totum eſt 54 ſolidum primum, aliud erit 12 & 12, & 3 quod eſt 27. aggregatum eſt 81 cubus ℞ cu. 24 p: ℞ cu. 3 quod eſt dicere ℞ cu. 81, nam ℞ cu. 24 & ℞ cu. 3 componuntur ℞ cu. 81, & ℞ cu. 24 p: ℞ cub. 3 poſita prima parte ℞ cu. 24, producit ſolidum 24 p: 24 p: 6, & poſita prima parte ℞ cub. 3, producit ſolidum 12 p: 12 p: 6.

Regula quædam ſpecialis, atq; item modus tractationis ſubtilis. CAP. LI.

SI fuerint duo numeri quod fit ex ductu unius in ℞ alterius mutuò, inde aggregato in ſe ducto, eſt æquale ei quod fit ex ductu unius in quadratum alterius addito duplo ℞ quadratæ producti unius in quadratum alterius inuicem. Exemplum, capio 2 & 3, & producta mutua in ℞, ſunt ℞ 18, p: ℞ 12, quorum quadratum eſt 30 p: ℞ 864, dico quod hoc eſt æquale producto unius in quadratum alterius, & eſt 30 cum duplo ℞ 216, qui fit ex 12 in 18, mutuis 3 & 2. Ergo ſint partes 6 p: 1 poſ. & 6 m: 1 poſ. & debeat eſſe quadratum mutui 100, id eſt ut mutuum ℞ ſit 10, Erunt ergo mutua quadratorum 432 m: 12 quad. p: ℞ 186624 p: 432 quad. quad. m: 155552 quad. m: 4 cu. & hoc eſt æquale 100, igitur 332 p: illa ℞ eſt ęqua 12 quad. & 12 quad. m: 332 æqualia ℞ illi 6. igitur quadrata m: 166 ſunt æqualia ℞ 46656 p: 108 quad. quad. m: 3888 quad. m: 1 cu. quad. Igitur partibus in ſe ductis 1 cu. quad. p: 1896 quad. æquantur 19100 p: 72 quad. quad. Sed æquatio non eſt in parte nota, eſt tamen pulchrum.

Proponatur rurſus 6 diuiſum per ℞ cu. 4 p: ℞ cu. 2, & exibit ℞ cu. 16 m: 2 p: ℞ cu. 4, ut notum eſt, & ponamus c e ſuperficiem ℞ cu. 16 m: 2 p: ℞ cu. 4, & ſint cubi a e e d 40, igitur per dicta ſuperius ſi uelim aſſumere cubam trino



Cap. 46. mij, quadratum eſt 12 m: ℞ cu. 432, & cubus ob id ℞ cub. 93312 m: 36, oportet autem ut ex hac quantitate quæ eſt 40, & refert aggregatum cuborum fiant duæ partes quæ inuicem ductæ faciant illum cubum: erunt ergo partes 20 p: ℞ v: 436 m: ℞ cu. 93312, & 20 m: ℞ v: 436 m: ℞ cu. 93312, & ℞ v: cu. harum partium ductæ inuicem producunt ℞ cu. 93312 m: 536, & cubi ſunt 40. Partes igitur ſunt ℞ v^{ma} cu. 20 p: ℞ v: quad. 436 m: ℞ cu. 93312, & ℞ v^{ma} cu. 20 m: ℞ v: quad. 436 m: ℞ 93312, cum ergo producant inuicem ductæ c e, id eſt ℞ cub. 16 m: 2 p: ℞ cu. 4. ubi eſſet ℞ illa binomia

propor

proportionem habens, haberemus quæsitum cum sit ex natura binomij cubici. Hoc uolui scribere ut intelligeres subtilitatem operationis: & quod æstimatio non est in quantitate cognita, nisi ut diuisum, scilicet uelut diuidendo quantitatem aliquam per uirgulam quæ non habet nomen, & ita est & non est: est tamen notior & magis habilis ad omnes operationes quantitate solida: imò est quasi media inter solidam & per se notam, in quo genere sunt omnes ℞ simplices & coniunctæ.

De modo omnium operationum in quantitatibus medio modo notis. CAP. LII.

Debes scire quod omnes operationes multiplicatio, diuisio, additio, detractio & ℞ inuentio in huiusmodi, est uelut in partibus numerorum, uelut uolo multiplicare,

$$\frac{3}{\text{℞}6\ \text{p:℞}5\ \text{p:℞}3\ \text{m:℞}2\ \text{m:}1} \text{ per } \frac{\text{℞ cu.}7\ \text{m:℞ cu.}2}{\text{℞ cu.}5\ \text{m:℞ cu.}3\ \text{p:℞}2}$$ oportet ut ducas denominatores, simul & fiet hoc

$$\frac{\text{℞ cu }189\ \text{m:℞ cu.}54}{\text{℞ }12\ \text{p:℞ }10\ \text{p:℞ }6\ \text{m:}2\ \text{m:℞ }2\ \text{p:℞ cu. quad }5400\ \text{p:℞ cu. quad. }3125\ \text{p:℞ cu.quad.}675\ \text{m:℞ cu.}}$$

$$\frac{\text{℞ cu }189\ \text{m:℞ cu }54}{\text{quad }200\ \text{m:℞ cu.}5\ \text{m:℞ cu.quad.}1944\ \text{m:℞ cu.quad }1125\ \text{m:℞ }243\ \text{p:℞ cu.quad.}72\ \text{p:℞ cu.}3.}$$

Et similiter facies in diuisione additionib. ac detractionib. reducẽdo ad idẽ genus q̃ntitates simplices, et similiter in capiẽdo radicẽ. uelut capio radicẽ $$\frac{25}{14\ \text{p:℞ }120\ \text{p:℞ }2\ \text{m:℞ }48\ \text{m:℞ }24\ \text{m:℞ }10\ \text{m:℞ }5}$$ capio ℞ cu 25, & est 5, & capio radicem infra scripti denominatoris, & est ℞ 6 p:℞ 5 m:℞ 2 m:1, & habeo $$\frac{5}{\text{℞ }6\ \text{p:℞ }5\ \text{m:℞ }2\ \text{m:}1}$$ ductum hoc ad ueram quantitatem per sua contraria fiet diuisor, qui sit b, & qui diuiditur multorum nominum a, & 5 diuisus c,

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{e}{f} \quad \frac{g}{h}$$

& ℞ 6 p:℞ 5 m:℞ 2:m:1 dicatur d, & dicatur 25 numerator primus, & suus denominator septem nominum f. Quia ergo a ad b, ut c ad d & e ad f, ut c ad d, duplicata erit e ad f, ut a ad b duplicata: Igitur si ducantur a & b in se, & producantur g & h, erit h numerus, & g h proportio nota, & est g ad h ut e ad f, igitur g ad f nota. Per 20 sexti Elem.

Et hæc est sexta operatio propria quantitatibus medijs.

De diligenti consideratione quorundam superius dictorum cap. 7. CAP. LIII.

Etiam dicamus quod cubus æqualis sit 12 rebus p: 20, & rei æstimatio est R cub. 16 p: R cu. 4, & hæc potest tribui dando 20 numerum cubis similiter, & potest idem numerus dari ambobus cubis & duobus mutuis, & etiam ambobus cubis & quatuor mutuis parallelipedis, & ita trifariam: consideremus ergo postquam capituli inuentio, ac regula cum demonstratione sumpta fuit, per primum modum. Sumemus ergo cubum dimidij æstimationis, id est R cu. 2 p: R cu. $\frac{1}{2}$, & est $2\frac{1}{2}$ p: R cu. 54 p: R cu. $13\frac{1}{2}$, & duplũ eius q̃d est minimum, quod posit pduci ex diuisione æstimationis est 5 p: R 432 p: R cu. 108, liquet igitur non posse diuidi sic hanc R propter numeri paruitatem, nam cubus totius esset 20 p: R cu. 27648 p: R cu. 6912. Sin autem capiamus 1 cu. æqualem 12 rebus p: 34, erit æstimatio R cu. 32 p: R cu. 2, & duplum cubi dimidij $8\frac{1}{2}$ p: R cu. 1024, p: R cub. 54, & hoc totum est proximum $22\frac{1}{2}$, ideo duo mutua poterunt contineri in $11\frac{1}{4}$, diuides ergo 34 per R cu. 32 p: R cu. 2, exit R cub. 1024 m: R cu. 64, quod est 4 m: R cub. 4, & hoc oportet esse æquale duobus quadratis, fac ergo ex R cu 32 p: R cu. 2 duas partes, quarum quadrata sint æqualia trinomio illi: accipe ergo dimidium trinomij, & est R cu 128 m: 2 p: R cub. $\frac{1}{2}$, à quo aufer quadratum dimidij diuidendi, id est quadratum R cu. 4 p: R cub. $\frac{1}{4}$, & est R cu. 16 p: 2 p: R cu. $\frac{1}{16}$ detrahe, relinquetur R cu. 54 m: 4 p: R cu. $\frac{1}{16}$, huius igitur R v addita & detracta ostendit partes hoc modo.

R cu. 4 p: R cu. $\frac{1}{4}$ p: R v^{m} R cu. 54 p: R cu. $\frac{1}{16}$ m: 4
R cu 4 p: R cu. $\frac{1}{4}$ m: R v^{m} R cu. 54 p: R cu. $\frac{1}{16}$ m: 4

Iam ergo uides quod cubus æquatur 34, ita quod 34 numerus est ęqualis duobus cubis cum duobus mutuis partium, & quia residuum est numerus rerum, & est duplum mutuorum diuiso eo per rem, exibit numerus rerum quem constat esse eundem.

Proponatur ergo a b & c d: 4: & sint res: & sint earum quadrata b g, d k, sit autem a b diuisa in e, ut cubi g h, h b sint quadraginta, & erũt b res p: 40 æqualia toti cubo, & ideo auferatur m h æqualis a h, erunt igitur tres illæ superficies b, & iuxta altitudinem a b, b res, & ex a b in m n, & h b 40: & a c erit R v: cu. 20 p: R 392, & e b R v: cu. 20 m: R 392, & sit e f 3, & f d erit 1, & cubi k l & l d cum duobus mutuis corporibus, & hoc est quantum fit